УДК 541.124+517.9

Бинарные соответствия в задачах химической кинетики[1]

Гутман А.Е., Кононенко Л.И.
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет
gutman@math.nsc.ru, larak@math.nsc.ru

Аннотация

Показано, как бинарные соответствия могут быть использованы для простой формализации понятия задачи, определения основных компонентов задач, их свойств и конструкций (условие задачи, ее данные и искомые, разрешимость и однозначная разрешимость задачи, обратная задача, композиция и ограничение задач). Рассмотрены топологические задачи и связанные с ними понятия устойчивости и корректности. Особое внимание уделено задачам с параметрами. (Детали см. в [1].)

В качестве иллюстрации рассмотрена система дифференциальных уравнений, описывающая процесс химической кинетики, а также обратная к ней задача.

1 Формализация понятия задачи

Определение 1. *Задача* — это соответствие между элементами двух множеств, т. е. тройка $P = (A, B, C)$, где A и B — множества и $C \subseteq A \times B$. Множества A, B и C обозначаются $\operatorname{Dom} P$, $\operatorname{Im} P$ и $\operatorname{Gr} P$ и называются *областью данных*, *областью искомых* и *условием* задачи P.

Включение $(a, b) \in \operatorname{Gr} P$ записывается в виде $P(a, b)$ и трактуется как условие, выражающее соответствие искомого b данному a. Таким образом, для задачи P подразумевается следующее неформальное прочтение:

Для данных $a \in \operatorname{Dom} P$ найти $b \in \operatorname{Im} P$,
удовлетворяющие условию $P(a, b)$.

Определение 2. *Решением* задачи P для данного $a \in \operatorname{Dom} P$ называется любое искомое $b \in \operatorname{Im} P$, удовлетворяющее условию $P(a, b)$.

Множество всех решений задачи P для данного a обозначается символом $P[a]$. Таким образом,

$$P[a] = \{b \in \operatorname{Im} P : P(a, b)\}, \quad a \in \operatorname{Dom} P.$$

Задача P называется *разрешимой для* данного a, если $P[a] \neq \varnothing$, т. е. для данного a задача P имеет хотя бы одно решение.

Множество

$$\{a \in \operatorname{Dom} P : P[a] \neq \varnothing\}$$

называется *областью разрешимости* задачи P и обозначается символом $\operatorname{dom} P$. В случае $\operatorname{dom} P = \operatorname{Dom} P$ задачу P называют *разрешимой* или, точнее, *всюду разрешимой*.

[1]Работа второго автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 15-01-00745).

Определение 3. Задача P *однозначно разрешима для* $a \in \mathrm{Dom}\, P$, если для данного a задача P имеет единственное решение, т. е. $P[a] = \{b\}$ для некоторого $b \in \mathrm{Im}\, P$. Соответствующее решение b обозначается через $P^{\mathrm{s}}(a)$. Множество

$$\mathrm{dom}\, P^{\mathrm{s}} = \{a \in \mathrm{Dom}\, P : P \text{ однозначно разрешима для } a\}$$

называется *областью однозначной разрешимости* задачи P, а функция

$$P^{\mathrm{s}}\colon \mathrm{dom}\, P^{\mathrm{s}} \to \mathrm{Im}\, P, \quad P^{\mathrm{s}}\colon a \mapsto P^{\mathrm{s}}(a)$$

называется *функцией решения* задачи P.

Говорят, что задача P *однозначно разрешима на множестве* $D \subseteq \mathrm{Dom}\, P$, если $D \subseteq \mathrm{dom}\, P^{\mathrm{s}}$. Задачу P называют *однозначно разрешимой* или, точнее, *всюду однозначно разрешимой*, если она однозначно разрешима на $\mathrm{Dom}\, P$, т. е. $\mathrm{dom}\, P^{\mathrm{s}} = \mathrm{Dom}\, P$.

Определение 4. *Обратной задачей* по отношению к задаче

$$P = \big(\mathrm{Dom}\, P,\, \mathrm{Im}\, P,\, \mathrm{Gr}\, P\big)$$

называется обратное соответствие

$$P^{-1} := \big(\mathrm{Im}\, P,\, \mathrm{Dom}\, P,\, (\mathrm{Gr}\, P)^{-1}\big),$$

где

$$(\mathrm{Gr}\, P)^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in \mathrm{Gr}\, P\}.$$

Определение 5. *Композицией задач* P и Q называется их композиция как соответствий, представляющая собой задачу

$$Q \circ P := (\mathrm{Dom}\, P,\, \mathrm{Im}\, Q,\, \mathrm{Gr}\, Q \circ \mathrm{Gr}\, P)$$

с условием

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}\, Q \circ \mathrm{Gr}\, P \ = \ \big\{&(a, c) \in \mathrm{Dom}\, P \times \mathrm{Im}\, Q : \\ &(\exists\, b \in \mathrm{Im}\, P \cap \mathrm{Dom}\, Q)\ P(a, b)\ \&\ Q(b, c)\big\}. \end{aligned}$$

Композиция $Q \circ P$ обычно рассматривается в случае $\mathrm{Im}\, P = \mathrm{Dom}\, Q$.

Определение 6. *Ограничением* (*сужением*) задачи P на $A \subseteq \mathrm{Dom}\, P$ и $B \subseteq \mathrm{Im}\, P$ называется задача $P\big|_A^B := \big(A, B, \mathrm{Gr}\, P \cap (A \times B)\big)$.

Частные случаи ограничений: $P|_A := P\big|_A^{\mathrm{Im}\, P}$, $P|^B := P\big|_{\mathrm{Dom}\, P}^B$.

Ограничение задачи можно определить посредством композиции. Для любых X и Y рассмотрим задачу $\mathrm{Id}_X^Y := (X, Y, I_X^Y)$, где

$$I_X^Y = \{(z, z) : z \in X \cap Y\} = \{(x, y) \in X \times Y : x = y\}.$$

Тогда для любой задачи P и любых $A \subseteq \mathrm{Dom}\, P$ и $B \subseteq \mathrm{Im}\, P$ справедливы равенства

$$P\big|_A = P \circ \mathrm{Id}_A^{\mathrm{Dom}\, P}, \quad P\big|^B = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, P}^B \circ P, \quad P\big|_A^B = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, P}^B \circ P \circ \mathrm{Id}_A^{\mathrm{Dom}\, P}.$$

Определение 7. Под *изоморфизмом* между задачами P и Q понимается такая пара (f, g) биективных отображений $f\colon \mathrm{Dom}\, P \to \mathrm{Dom}\, Q$, $g\colon \mathrm{Im}\, P \to \mathrm{Im}\, Q$, что

$$\mathrm{Gr}\, Q = \big\{\big(f(a), g(b)\big) : (a, b) \in \mathrm{Gr}\, P\big\}.$$

Задачи называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм.

Определение 8. Задачу P условимся называть *топологической*, если ее область данных $\mathrm{Dom}\,P$ и область искомых $\mathrm{Im}\,P$ снабжены какими-либо топологиями, т. е. являются топологическими пространствами.

Изоморфизм (f, g) между топологическими задачами называется *топологическим изоморфизмом*, если каждое из отображений f и g является топологическим изоморфизмом (т. е. гомеоморфизмом).

Определение 9. Топологическая задача P называется *устойчивой в точке* $a \in \mathrm{dom}\,P$, если соответствие P полунепрерывно сверху в этой точке, т. е. для любой окрестности V множества $P[a]$ в $\mathrm{Im}\,P$ прообраз $P^{-1}[V]$ является окрестностью точки a в $\mathrm{dom}\,P$.

Говорят, что задача P *устойчива на множестве* $D \subseteq \mathrm{dom}\,P$, если P устойчива в каждой точке $a \in D$. Задачу P называют *устойчивой* или, точнее, *всюду устойчивой*, если P устойчива на $\mathrm{dom}\,P$.

Замечание 1. Если a является внутренней точкой $\mathrm{dom}\,P^{\mathrm{s}}$ относительно множества $\mathrm{dom}\,P$ (т. е. $a \in G \cap \mathrm{dom}\,P \subseteq \mathrm{dom}\,P^{\mathrm{s}}$ для открытого $G \subseteq \mathrm{Dom}\,P$), *устойчивость* P в a равносильна *непрерывности* P^{s} в a.

Если D лежит во внутренности $\mathrm{dom}\,P^{\mathrm{s}}$ относительно $\mathrm{dom}\,P$ (т. е. $D \subseteq G \cap \mathrm{dom}\,P \subseteq \mathrm{dom}\,P^{\mathrm{s}}$ для открытого $G \subseteq \mathrm{Dom}\,P$), то *устойчивость* P на D равносильна *непрерывности* P^{s} на D. В частности, *устойчивость* однозначно разрешимой задачи равносильна ее *непрерывности*.

Определение 10. Топологич. задача P (локально) *корректна в точке* $a \in \mathrm{Dom}\,P$, если a — внутренняя точка $\mathrm{dom}\,P^{\mathrm{s}}$ и P устойчива в точке a. Иными словами, задача корректна в точке a, если при данных, достаточно близких к a, она имеет единственное решение, причем непрерывно зависящее от данных при стремлении к a.

Задача P (условно) *корректна на множестве* $D \subseteq \mathrm{Dom}\,P$, если P корректна в каждой точке $a \in D$. Задача P *корректна*, если P корректна на $\mathrm{Dom}\,P$. Таким образом, корректная задача — это однозначно разрешимая и устойчивая (или, что то же самое, непрерывная) задача.

Определение 11. Под *семейством* $(v_i)_{i\in I}$ традиционно понимается определенная на I функция, а запись v_i символизирует значение этой функции в точке $i \in I$.

Для произвольного семейства $(V_i)_{i\in I}$ символом $\prod_{i\in I} V_i$ обозначается соответствующее *декартово произведение* — совокупность всех таких семейств $(v_i)_{i\in I}$, что $v_i \in V_i$ для каждого индекса $i \in I$.

Для любых $\pi\colon X \to \prod_{i\in I} V_i$, $i \in I$ и $J \subseteq I$ вводятся в рассмотрение функции $\pi_i\colon X \to V_i$ и $\pi_J\colon X \to \prod_{j\in J} V_j$, действующие согласно формулам

$$\pi_i(x) := \pi(x)_i, \quad \pi_J(x) := \pi(x)|_J$$

для всех $x \in X$.

Определение 12. *Параметризацией* множества X называется любое инъективное отображение π, определенное на $\mathrm{Dom}\,\pi := X$ и действующее в декартово произведение $\mathrm{Im}\,\pi := \prod_{i\in I} V_i$ какого-либо семейства.

Множество I называется *множеством параметров* и обозначается $\mathrm{Par}\,\pi$, элементы $i \in \mathrm{Par}\,\pi$ именуются *параметрами*, $\mathrm{Im}\,\pi_i := V_i$ называется *областью значений параметра* i, а $\pi_i(x) \in \mathrm{Im}\,\pi_i$ — *значением параметра* i для объекта $x \in X$.

Множество $\prod_{j\in J} V_j$ называется *областью значений набора* $J \subseteq \mathrm{Par}\,\pi$ и обозначается символом $\mathrm{Im}\,\pi_J$.

Множество, снабженное какой-либо параметризацией, называется *параметризованным множеством*.

Параметризация множества X по умолчанию обозначается символом π или, если необходимо уточнение, символом π^X.

Определение 13. Задача P называется *параметризованной задачей* (или *задачей с параметрами*), если ее область данных $\operatorname{Dom} P$ и область искомых $\operatorname{Im} P$ являются параметризованными множествами.

Любую задачу можно считать параметризованной, если условиться снабжать не параметризованные области X тривиальными параметризациями с единственным параметром: $\pi_1(x) = x$ для всех $x \in X$.

Определение 14. Пусть π — параметризация A, $a \in A$, $J \subseteq \operatorname{Par}\pi$, $J' := \operatorname{Par}\pi \setminus J$. Символом $\operatorname{Res}^a_J(A)$ обозначается задача $(\operatorname{Im}\pi_J, A, R^a_J)$, где

$$R^a_J = \{(v, b) : v \in \operatorname{Im}\pi_J,\ b \in A,\ \pi_J(b) = v,\ \pi_{J'}(b) = \pi_{J'}(a)\},$$

т. е. задача восстановления элемента A по данным значениям параметров J при фиксированных остальных параметрах.

В силу инъективности параметризации π задача $\operatorname{Res}^a_J(A)$ однозначно разрешима на множестве

$$\operatorname{dom}\operatorname{Res}^a_J(A) = \{\pi_{J'}(b) : b \in A,\ \pi_{J'}(b) = \pi_{J'}(a)\},$$

и ее решение для $v \in \operatorname{dom}\operatorname{Res}^a_J(A)$ определяется формулой

$$\operatorname{Res}^a_J(A)^{\mathrm{s}}(v) = \pi^{-1}\bigl(v \otimes \pi_{J'}(a)\bigr), \quad \text{где } (v \otimes w)_i = \begin{cases} v_i, & \text{если } i \in J; \\ w_i, & \text{если } i \notin J. \end{cases}$$

Определение 15. Пусть π — параметризация топологического пространства A, $a \in A$, $J \subseteq \operatorname{Par}\pi$. Говорят, что набор параметров J *локально свободен* в точке a, если область разрешимости $\operatorname{dom}\operatorname{Res}^a_J(A)$ задачи $\operatorname{Res}^a_J(A)$ является окрестностью точки $\pi_J(a)$ в топологическом пространстве $\operatorname{Im}\pi_J$.

Таким образом, для локально свободного набора параметров реализуемы любые достаточно малые изменения значений при фиксированных значениях остальных параметров.

Параметр i *локально свободен* в точке a, если таковым является набор $\{i\}$.

Определение 16. Пусть P — параметризованная топологическая задача, $a \in \operatorname{dom} P$, $\pi := \pi^{\operatorname{dom} P}$, $J \subseteq \operatorname{Par}\pi$, $J' := \operatorname{Par}\pi \setminus J$. Задача P называется *устойчивой в точке a относительно J*, если задача $P \circ \operatorname{Res}^a_J(\operatorname{dom} P)$ устойчива в точке $\pi_J(a)$. В случае $J = \{i\}$ говорят об *устойчивости относительно параметра i*.

Если a является внутренней точкой $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$ относительно $\operatorname{dom} P$, устойчивость однозначно разрешимой задачи P в точке a относительно J равносильна непрерывности в точке a функции

$$v \in \pi_J[\operatorname{dom} R] \ \mapsto\ P^{\mathrm{s}}\bigl(R^{\mathrm{s}}(v)\bigr), \quad \text{где} R := \operatorname{Res}^a_J(\operatorname{Dom} P).$$

Последнее, в свою очередь, означает *непрерывную зависимость* решения $P^{\mathrm{s}}(b)$ от значений $\pi_J(b)$ параметров J при стремлении $\pi_J(b)$ к $\pi_J(a)$ с соблюдением равенства $\pi_{J'}(b) = \pi_{J'}(a)$.

Определение 17. Пусть P — параметризованная топологическая задача, $\varepsilon \in \operatorname{Par}\pi$. О задаче P говорят как о «*задаче с малым параметром ε*», если $\operatorname{Im}\pi_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$, число 0 является предельной точкой $\operatorname{Im}\pi_\varepsilon$, и рассматривается вопрос о каком-либо асимптотическом аспекте задачи P при значениях параметра ε, близких к 0 — например, об устойчивости P относительно ε в точке a, удовлетворяющей условию $\pi_\varepsilon(a) = 0$.

2 Пример из химической кинетики

Пример 1. В качестве иллюстрации рассмотрим сингулярно возмущенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующую процессы химической кинетики и горения.

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $X := \mathbb{R}^m$, Y — область в $\mathbb{R}^n$, $T := \mathbb{R}$, $E := \{\varepsilon \in \mathbb{R} : 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$, $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $F := C(X \times Y \times T \times E, \mathbb{R}^m)$, $G := C(X \times Y \times T \times E, \mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим задачу P с областью данных $\operatorname{Dom} P = F \times G \times E$, областью искомых $\operatorname{Im} P = C^1(T, X) \times C^1(T, Y)$ и условием

$$P\big((f, g, \varepsilon), (x, y)\big) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big), \\ \varepsilon\, \dot{y}(t) = g\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big) \end{cases} \text{для всех } t \in T,$$

где $f \in F$, $g \in G$, $\varepsilon \in E$, $x \in C^1(T, X)$, $y \in C^1(T, Y)$.

Задача P исследуется *методом интегральных многообразий* [2, 3, 4], который служит удобным аппаратом изучения многомерных сингуляно возмущенных систем дифференциальных уравнений, позволяющим понижать размерность систем.

Задача P имеет естественную параметризацию, где ε играет роль «*малого параметра*», что приводит к разделению системы на «медленную» и «быструю» подсистемы:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big) \;\text{ и }\; \varepsilon\, \dot{y}(t) = g\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big).$$

Решение задачи P сводится к решению *вырожденной системы*, которая получается из исходной, если параметр ε формально положить равным нулю. Это следует из работ А. Н. Тихонова (см., например, [5]), в которых установлены факты о предельном переходе к решению вырожденной задачи при стремлении малого параметра к нулю.

Пример 2. Задача, обратная к P, состоит в нахождении неизвестных правых частей системы дифференциальных уравнений по некоторым данным о решении прямой задачи P. Тесная связь с вырожденной системой позволяет рассматривать случай $\varepsilon = 0$. Кроме того, предположим, что «медленная поверхность», определяемая уравнением

$$g\big(x, y, t, 0\big) = 0,$$

состоит из одного листа (относительно зависимости y от x), а правые части являются многочленами (что естественно для задач химической кинетики).

Итак, рассмотрим частный случай задачи P, в котором $m = n = 1$, $E = \{0\}$, функции $f \in F$ являются многочленами первой степени, а $g \in G$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции, и поэтому уравнение

$$g\big(x(t), y(t), t, 0\big) = 0$$

можно заменить уравнением вида

$$y(t) = h\big(x(t), t\big).$$

В результате возникнет следующая задача Q.

Пусть $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Рассмотрим задачу Q с областью данных $\operatorname{Dom} Q = \mathbb{R}^3$, областью искомых $\operatorname{Im} Q = C^1(\mathbb{R})^2$ и условием

$$Q\big(f, (x, y)\big) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dot{x}(t) = f_1 + f_2 x(t) + f_3 y(t), \\ y(t) = h\big(x(t), t\big) \end{cases} \text{для всех } t \in \mathbb{R},$$

где $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$, $x, y \in C^1(\mathbb{R})$.

Пример 3. *Обратная* к Q задача Q^{-1}, формально соответствующая определению и имеющая пары функций $(x, y) \in C^1(\mathbb{R})^2$ в качестве данных, очень проста и не практична. В роли данных более адекватны конечные наборы значений функций или их производных, а не всюду определенные функции.

Соответствующая корректировка обратной задачи реализуется посредством *композиции* задачи Q^{-1} и вспомогательной задачи R с областью данных $\operatorname{Dom} R = (\mathbb{R}^3)^3$, областью искомых $\operatorname{Im} R = C^1(\mathbb{R})^2$ и условием

$$R\big((t, \alpha, \beta), (x, y)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(t_1) = \alpha_1, & x(t_2) = \alpha_2, \quad x(t_3) = \alpha_3, \\ \dot{x}(t_1) = \beta_1, & \dot{x}(t_2) = \beta_2, \quad \dot{x}(t_3) = \beta_3, \end{cases}$$

где $t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$, $x, y \in C^1(\mathbb{R})$.

Пример 4. По сравнению с формальной обратной задачей Q^{-1} композиция $Q^{-1} \circ R$ более практична и представляет собой следующую задачу:

По данным $t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ найти коэффициенты $f \in \mathbb{R}^3$, для которых существуют функции $x, y \in C^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условию

$$\begin{cases} x(t_1) = \alpha_1, \ x(t_2) = \alpha_2, \ x(t_3) = \alpha_3, \\ \dot{x}(t_1) = \beta_1, \ \dot{x}(t_2) = \beta_2, \ \dot{x}(t_3) = \beta_3, \\ \dot{x}(t) = f_1 + f_2 x(t) + f_3 y(t), \\ y(t) = h\big(x(t), t\big) \end{cases} \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}.$$

Следующий результат получен в [6].

Теорема 1. *Если $t, \alpha \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяют условию*

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & h(\alpha_1, t_1) \\ 1 & \alpha_2 & h(\alpha_2, t_2) \\ 1 & \alpha_3 & h(\alpha_3, t_3) \end{vmatrix} \neq 0$$

то при любых $\beta \in \mathbb{R}^3$ задача $Q^{-1} \circ R$ однозначно разрешима для данных (t, α, β) и ее решение $(f_1, f_2, f_3) = (Q^{-1} \circ R)^{\mathrm{s}}(t, \alpha, \beta)$ вычисляется по классическим формулам Крамера

$$f_i = \Delta_i / \Delta,$$

где Δ_i — определитель матрицы, полученной из приведенной выше матрицы заменой i-го столбца столбцом $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Следующий критерий позволяет выяснить, в каких случаях существует набор чисел t_i, удовлетворяющий условию теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — вещественные функции, определенные на каком-либо множестве T.*

Семейство функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \colon T \to \mathbb{R}$ линейно независимо тогда и только тогда, когда существуют $t_1, \ldots, t_n \in T$ такие, что

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_1(t_2) & \ldots & \varphi_1(t_n) \\ \varphi_2(t_1) & \varphi_2(t_2) & \ldots & \varphi_2(t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n(t_1) & \varphi_n(t_2) & \ldots & \varphi_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Из теорем 1 и 2 непосредственно вытекает следующее условие однозначной разрешимости «обратной задачи» $Q^{-1} \circ R$.

Теорема 3. *В рамках задачи Q рассмотрим функции $x, y, e \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $y(t) = h\big(x(t), t\big)$ и $e(t) = 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$.*

Если функции x, y, e линейно независимы, то существуют такие числа t_1, t_2, t_3, что при любых $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ «обратная задача» $Q^{-1} \circ R$ однозначно разрешима для данных t_1, t_2, t_3, $x(t_1), x(t_2), x(t_3)$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Библиографический список

1. Gutman A. E., Kononenko L. I. Formalization of inverse problems and applications to systems of equations with parameters // Geometric analysis and control theory: abstracts. — Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2016. — P. 40–42.

2. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1963.

3. Васильева А. В., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. — М.: Изд-во МГУ, 1978.

4. Гольдштейн В. М., Соболев В. А. Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. — Новосибирск: Изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1988.

5. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сборник. — 1948. — Т. 22 (64), №2. — С. 193–204.

6. Кононенко Л. И. Задача идентификации для сингулярных систем с малым параметром в химической кинетике // Сиб. электрон. матем. изв. — 2016. — Т. 13. — С. 175–180.