PREPUBLICATION

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 38–48

УДК **517.98**

О СТРУКТУРЕ БУЛЕВОЗНАЧНОГО УНИВЕРСУМА [1]

А. Е. Гутман

Анатолию Георгиевичу Кусраеву
в связи с его 65-летием

Уточнен логический механизм, стоящий за объявлением гипотез. В том числе, уделено внимание гипотезам и заключениям, представляющим собой бесконечные наборы формул. Приведены формальные определения булевозначной алгебраической системы и модели теории, определение системы термов булевозначной оценки истинности формул, подъема и перемешивания. Описаны логические взаимосвязи между принципами подъема, перемешивания и максимума. Показано, что подъем с произвольными весами может быть преобразован к подъему с постоянным весом. Введено и исследовано понятие сужения элемента булевозначной алгебраической системы. Установлено, что всякая булевозначная модель теории множеств, удовлетворяющая принципу подъема, имеет многоуровневую структуру, аналогичную кумулятивной иерархии фон Неймана.

DOI: 10.23671/VNC.2018.2.14718

Ключевые слова: теория множеств, булевозначная модель, универсум, кумулятивная иерархия.

1. Формализм объявления гипотез

В математических текстах часто используются «объявления гипотез» — когда на протяжении фрагмента рассуждений (определений и доказательств) предполагаются выполненными определенные условия или за какими-либо переменными закрепляется роль объектов, удовлетворяющих определенным условиям. Примером объявления гипотезы служит фраза «всюду ниже B — полная булева алгебра», с которой начинается следующий параграф данной статьи. В определенном смысле эта фраза «фиксирует» букву B и добавляет «временную» аксиому $\gamma(B)$, формализующую утверждение «B — полная булева алгебра».

В подавляющем большинстве случаев эффект, производимый объявлением гипотезы, вполне понятен на неформальном уровне, но использование бесконечных наборов формул в качестве гипотез или заключений принуждает к определенной аккуратности.

1.1. Рассматриваемая нами проблематика характерна наличием «бесконечных утверждений», представляющих собой бесконечные множества формул. Таковыми являются, например, утверждения «система X является моделью теории T» или «система X удовлетворяет принципу максимума».

Логические связки «бесконечных утверждений» обретают смысл благодаря механизму формального вывода. Например, если хотя бы одно из утверждений Γ или Δ бесконечно, то импликация $\Gamma \Rightarrow \Delta$ сама по себе смысла не имеет, но фраза «Γ влечет Δ в теории T» поддается формализации в виде выводимости: $T, \Gamma \vdash \Delta$.

© 2018 Гутман А. Е.

[1] Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2, проект № 0314-2016-0005.

1.2. Пусть T — какая-либо теория (множество предложений) сигнатуры Σ и пусть Γ и Δ — произвольные множества формул сигнатуры Σ. (Множества Γ и Δ могут быть бесконечными и содержащиеся в них формулы могут иметь вхождения свободных переменных.) Выводимость заключения Δ из гипотезы Γ в рамках теории T записывается в виде $T, \Gamma \vdash \Delta$ и определяется посредством понятия формального вывода в исчислении предикатов: для любой формулы $\delta \in \Delta$ существует последовательность формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ такая, что $\varphi_n = \delta$ и каждая формула φ_i либо принадлежит $T \cup \Gamma$, либо получается из предшествующих формул $\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}$ с помощью классических правил вывода, за исключением правил с кванторами по свободным переменным, входящим в Γ.

1.3. Приведенный ниже факт непосредственно вытекает из теоремы о полноте.

Следующие утверждения равносильны:

(1) $T, \Gamma \vdash \Delta$;

(2) $T, \Gamma \vdash \delta$ *для всех* $\delta \in \Delta$;

(3) *для любой формулы* $\delta \in \Delta$ *существует такой конечный набор* $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$, *что* $T \vdash (\forall\, \bar{v})(\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n \ \Rightarrow\ \delta)$, *где* $\bar{v}$ *— перечень свободных переменных, входящих в* $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta$;

(4) *для любой модели* X *теории* T *и любого означивания* $\nu\colon V \to X$ *свободных переменных* V, *входящих в* $\Gamma \cup \Delta$, *из истинности* $X \vDash \gamma[\nu]$ *для всех* $\gamma \in \Gamma$ *вытекает истинность* $X \vDash \delta[\nu]$ *для всех* $\delta \in \Delta$.

1.4. Механизм объявления конечной гипотезы $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ поддается более простой формализации. В этом случае с помощью замены свободных переменных формулы $\gamma := \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n$ на константы можно обойтись формальными выводами, задействующими лишь предложения. Формализм, стоящий за «фиксацией» объектов $v_1, \dots, v_m$, удовлетворяющих условию $\gamma(v_1, \dots, v_m)$, раскрывается следующим фактом, легко проверяемым с помощью теоремы о полноте.

Пусть $\bar{v} := v_1, \dots, v_m$ *— перечень свободных переменных, входящих в формулу* $\gamma(\bar{v})$. *Рассмотрим сигнатуру* Σ^*, *полученную из* Σ *добавлением констант* $\bar{c} := c_1, \dots, c_m$, *и теорию* T^* *сигнатуры* Σ^*, *полученную из* T *добавлением аксиомы* $\gamma(\bar{c})$.

(1) *Для любой формулы* $\delta(\bar{v})$ *сигнатуры* Σ

$$T^* \vdash \delta(\bar{c}) \ \Leftrightarrow\ T, \gamma(\bar{v}) \vdash \delta(\bar{v}) \ \Leftrightarrow\ T \vdash (\forall\, \bar{v})\big(\gamma(\bar{v}) \ \Rightarrow\ \delta(\bar{v})\big).$$

(2) *Если* $T \vdash (\exists\, \bar{v})\, \gamma(\bar{v})$, *то* T^* *консервативно расширяет* T, *т. е. для любого предложения* φ *сигнатуры* Σ

$$T^* \vdash \varphi \ \Leftrightarrow\ T \vdash \varphi.$$

1.5. Например, в рамках гипотезы «B — полная булева алгебра» выражение

$$\mathrm{ZFC} \vdash (\mathbb{V}^{(B)} \vDash \mathrm{ZFC}),$$

символизирующее доказуемость в ZFC бесконечного утверждения «$\mathbb{V}^{(B)}$ является моделью ZFC», формально эквивалентно выводимости

$$\mathrm{ZFC},\ B \text{ — полная булева алгебра} \vdash (\mathbb{V}^{(B)} \vDash \mathrm{ZFC}),$$

которая, в свою очередь, означает что для всякого предложения φ, являющегося теоремой ZFC, выполняется любое из следующих трех равносильных условий:

(1) ZFC, B — полная булева алгебра $\vdash (\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi)$;

(2) $\mathrm{ZFC} \vdash (\forall\, B)(B$ — полная булева алгебра $\Rightarrow \mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi)$;

(3) $\mathrm{ZFC}^* \vdash (\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi)$,

где ZFC^* — расширение ZFC константой B и аксиомой «B — полная булева алгебра».

2. Булевозначные алгебраические системы

Всюду ниже B — полная булева алгебра.

2.1. Пусть X, $[=]_X$, $[\in]_X$ — определяемые в ZFC термы или классы. Говорят, что $(X, [=]_X, [\in]_X)$ является *булевозначной* (точнее, *B-значной*) *алгебраической системой сигнатуры* $\Sigma := \{=, \in\}$ или, более коротко, *B-системой*, имея в виду конъюнкцию следующих формул:

$$\begin{aligned}
&X \neq \varnothing,\ \ [=]_X \colon X^2 \to B,\ \ [\in]_X \colon X^2 \to B,\\
&[=]_X(x,x) = 1_B,\\
&[=]_X(x,y) = [=]_X(y,x),\\
&[=]_X(x,y) \wedge_B [=]_X(y,z) \leqslant_B [=]_X(x,z),\\
&[\in]_X(x,y) \wedge_B [=]_X(y,z) \leqslant_B [\in]_X(x,z),\\
&[\in]_X(x,y) \wedge_B [=]_X(x,z) \leqslant_B [\in]_X(z,y)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{для всех } x,y,z \in X.
\end{aligned}$$

Вместо $(X, [=]_X, [\in]_X)$ пишут просто X.

2.2. Предположим, что X — B-система. Для каждой формулы $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры Σ, где $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$ — полный список свободных переменных φ, введем n-местный функциональный символ $[\varphi(\bar{x})]_X$, условимся записывать терм $[\varphi(\bar{x})]_X(\bar{x})$ в виде $[\varphi]_X$ и расширим теорию определениями

$$\begin{gathered}
[x = y]_X \ = \ [=]_X(x,y), \quad [x \in y]_X \ = \ [\in]_X(x,y),\\
[\varphi \vee \psi]_X \ = \ [\varphi]_X \vee_B [\psi]_X, \quad [\varphi \wedge \psi]_X \ = \ [\varphi]_X \wedge_B [\psi]_X, \quad [\neg\varphi]_X \ = \ \neg_B [\varphi]_X,\\
[(\exists\, x)\, \varphi]_X \ = \ \sup\nolimits_B \bigl\{[\varphi]_X : x \in X\bigr\}, \quad [(\forall\, x)\, \varphi]_X \ = \ \inf\nolimits_B \bigl\{[\varphi]_X : x \in X\bigr\},
\end{gathered}$$

где φ и ψ — формулы сигнатуры Σ, $\neg_B$ — операция дополнения в булевой алгебре B.

Формально говоря, приведенные выше формулы корректно определяют функциональные символы $[\varphi(\bar{x})]_X$ в рамках теории, полученной из ZFC добавлением гипотез «B — полная булева алгебра» и «X — B-система». Определения этих символов, в свою очередь, расширяют сигнатуру и аксиоматику, приводя к консервативному расширению ZFC* исходной теории. (Соответствующий формализм более подробно рассмотрен в [1].) При этом для любой формулы $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры Σ в ZFC* выводима формула $(\forall\, \bar{x} \in X)\ [\varphi(\bar{x})]_X \in B$. В дальнейшем мы будем писать ZFC вместо ZFC*, неявно присоединяя к аксиоматике все сформулированные гипотезы и определения.

2.3. Говорят, что формула $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры Σ *истинна в* X, и пишут $X \vDash \varphi(\bar{x})$, если $[\varphi(\bar{x})]_X = 1_B$. (При этом подразумевается включение $\bar{x} \in X$.)

Систему X называют *булевозначной* (*B-значной*) *моделью множества* Φ предложений сигнатуры Σ, и пишут $X \vDash \Phi$, если $X \vDash \varphi$ для всех $\varphi \in \Phi$. Под *булевозначной* (*B-значной*) *моделью теории* понимается модель множества всех теорем этой теории. Отметим, что в случае бесконечного множества Φ условие $X \vDash \Phi$ является бесконечным утверждением (см. § 1), представляющим собой набор формул $\{X \vDash \varphi : \varphi \in \Phi\}$.

Как известно, в булевозначной системе истинны все тавтологии, а правила вывода сохраняют истинность. Точнее говоря, в предположении, что X является B-системой, справедливы следующие факты:

(1) $\mathrm{ZFC} \vdash (X \vDash \Phi)$, *где* Φ — *совокупность всех тавтологий сигнатуры* Σ;

(2) *если множества предложений* Γ *и* Δ *сигнатуры* Σ *таковы, что* $\mathrm{ZFC} \vdash (X \vDash \Gamma)$ *и* $\Gamma \vdash \Delta$, *то* $\mathrm{ZFC} \vdash (X \vDash \Delta)$.

Таким образом, в записи $X \vDash \mathrm{ZFC}$ под ZFC можно понимать как совокупность специальных аксиом ZFC, так и совокупность всех теорем ZFC.

2.4. *Пусть* X — B-*система и пусть* $\varphi(x, \bar{y})$ — *произвольная формула сигнатуры* Σ, *где* $\bar{y} = y_1, \dots, y_n$. *Тогда в* ZFC *доказуемо, что для любых* $x_1, x_2, \bar{y} \in X$ *и* $b \in B$

$$[x_1 = x_2]_X \geqslant b \;\Rightarrow\; [\varphi(x_1, \bar{y})]_X \wedge b \,=\, [\varphi(x_2, \bar{y})]_X \wedge b.$$

$\triangleleft$ Согласно 2.3 (1) справедливо соотношение

$$\big[\varphi(x, \bar{y}) \wedge (x = x_i) \;\Leftrightarrow\; \varphi(x_i, \bar{y}) \wedge (x = x_i)\big]_X = 1_B.$$

Следовательно,

$$[\varphi(x_1, \bar{y})]_X \wedge [x_1 = x_2]_X \,=\, [\varphi(x_2, \bar{y})]_X \wedge [x_1 = x_2]_X,$$

а значит, в случае $[x_1 = x_2]_X \geqslant b$ мы имеем

$$\begin{aligned} [\varphi(x_1, \bar{y})]_X \wedge b \,&=\, [\varphi(x_1, \bar{y})]_X \wedge [x_1 = x_2]_X \wedge b \\ &=\, [\varphi(x_2, \bar{y})]_X \wedge [x_1 = x_2]_X \wedge b \,=\, [\varphi(x_2, \bar{y})]_X \wedge b. \; \triangleright \end{aligned}$$

2.5. В случае $\mathrm{ZFC} \vdash (X \vDash \mathrm{ZFC})$ записи $[\varphi(\bar{x})]_X$ и $X \vDash \varphi(\bar{x})$ обретают смысл не только для формул φ сигнатуры Σ, но и для формул, содержащих вхождения любых определяемых в ZFC предикатных и функциональных символов. Если φ — такая формула, то под $[\varphi(\bar{x})]_X$ понимается $[\psi(\bar{x})]_X$, где ψ — результат *элиминации* определяемых символов, т. е. такая формула ψ сигнатуры Σ, что $\mathrm{ZFC} \vdash (\varphi \Leftrightarrow \psi)$. В частности, рассматривая булевозначную модель X теории ZFC, мы имеем возможность употреблять такие термы и формулы, как $[x \cap y = \varnothing]_X$ или $X \vDash (f\colon x \to y)$.

Кроме того, в конструкциях вида $[\cdots]_X$ и $X \vDash (\cdots)$ допускается неформальное употребление «внешних» термов, определяемых в ZFC. Например, в контексте $f\colon A \to X$ запись $[f(a_1) = f(a_2)]_X = b$ служит сокращением формулы

$$(\exists\, x_1, x_2)\big(x_1 = f(a_1) \;\wedge\; x_2 = f(a_2) \;\wedge\; [x_1 = x_2]_X = b\big).$$

2.6. Система X называется *отделимой*, если

$$(\forall\, x, y \in X)\big(\, [=]_X(x, y) = 1_B \;\Rightarrow\; x = y\,\big).$$

В случае 2-системы, где $2 := \{0, 1\}$ — простейшая булева алгебра, отделимость означает стандартность интерпретации равенства: $[=]_X(x, y) = 1 \;\Leftrightarrow\; x = y$.

3. Принципы подъема, перемешивания и максимума

Всюду ниже B — полная булева алгебра, X — отделимая B-значная алгебраическая система сигнатуры $\Sigma := \{=, \in\}$, причем в X истинна аксиома экстенсиональности:

$$X \vDash (\forall\, x, y)\big((\forall\, z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \;\Rightarrow\; x = y\big).$$

Сразу отметим, что элементы x такой системы X однозначно определяются значениями $[z \in x]_X$ $(z \in X)$: если $x, y \in X$ и $[z \in x]_X = [z \in y]_X$ для всех $z \in X$, то $x = y$.

Чтобы записи были менее громоздкими, условимся опускать индексы B и X в символах $\sup_B$, $\wedge_B$, $[\ldots]_X$, asc_X, $\uparrow_X$, mix_X и т. п.

3.1. Пусть C — подмножество $B \times X$. Элемент $x \in X$ называют *подъемом соответствия* C и обозначают символом $\mathrm{asc}\, C$, если

$$[z \in x] = \sup_{(b,y)\in C} \big(b \wedge [z = y]\big) \quad \text{для всех } z \in X.$$

В случае соответствия, заданного парой семейств $(b_i)_{i\in I} \subset B$, $(x_i)_{i\in I} \subset X$, вместо $\mathrm{asc}\{(b_i, x_i) : i \in I\}$ используется более компактная запись $\operatorname*{asc}_{i\in I} b_i x_i$. Таким образом, выражение $x = \operatorname*{asc}_{i\in I} b_i x_i$ означает

$$[z \in x] = \sup_{i\in I} \big(b_i \wedge [z = x_i]\big) \quad \text{для всех } z \in X.$$

Для $b \in B$ и $Y \subset X$ подъем $\mathrm{asc}(\{b\} \times Y)$ называется *подъемом множества* Y *с весом* b и обозначается символом $bY{\uparrow}$. Элемент $x = bY{\uparrow}$ определяется соотношениями

$$[z \in x] = b \wedge \sup_{y\in Y} [z = y] \quad \text{для всех } z \in X.$$

В случае $b = 1_B$ подъем $bY{\uparrow}$ обозначают $Y{\uparrow}$ и называют *подъемом множества* Y.

3.2. Говорят, что X удовлетворяет *принципу подъема*, если

$$(\forall\, C \subset B \times X)(\exists\, x \in X)(x = \mathrm{asc}\, C),$$
$$(\forall\, x \in X)(\exists\, C \subset B \times X)(x = \mathrm{asc}\, C).$$

3.3. Пусть Y — подмножество или подкласс X. Символом $\mathrm{Prt}(B, Y)$ условимся обозначать класс всех функций $P \colon D \to Y$, определенных на разбиениях единицы булевой алгебры B, т. е. на таких подмножествах $D \subset B$, что

$$\sup D = 1_B, \quad (\forall\, d_1, d_2 \in D)(d_1 \neq d_2 \Rightarrow d_1 \wedge d_2 = 0_B).$$

Элемент $x \in X$ называется *перемешиванием* функции $P \in \mathrm{Prt}(B, X)$ и обозначается символом $\mathrm{mix}\, P$, если

$$[x = P(d)] \geqslant d \quad \text{для всех } d \in \mathrm{dom}\, P.$$

Иногда под разбиением единицы удобно понимать семейство $(d_i)_{i\in I} \subset B$ такое, что

$$\sup_{i\in I} d_i = 1_B, \quad (\forall\, i, j \in I)(i \neq j \Rightarrow d_i \wedge d_j = 0_B).$$

Для разбиения единицы $(d_i)_{i\in I} \subset B$ и семейства $(x_i)_{i\in I} \subset X$ символом $\operatorname*{mix}_{i\in I} d_i x_i$ обозначается элемент $x \in X$, удовлетворяющий условию

$$[x = x_i] \geqslant d_i \quad \text{для всех } i \in I.$$

Как легко видеть, $\operatorname*{mix}_{i\in I} d_i x_i = \mathrm{mix}\{(d_i, x_i) : i \in I,\, d_i \neq 0\}$.

Совокупность перемешиваний всевозможных функций $P \in \mathrm{Prt}(B, Y)$ называется *циклической оболочкой* подмножества $Y \subset X$ и обозначается символом $\mathrm{cyc}\, Y$.

3.4. Говорят, что X удовлетворяет *принципу перемешивания*, если

$$\big(\forall\, P \in \mathrm{Prt}(B, X)\big)(\exists\, x \in X)(x = \mathrm{mix}\, P).$$

3.5. Пусть $\varphi(x, \bar{y})$ — формула сигнатуры Σ, все свободные переменные которой содержатся в списке $x, \bar{y}$, где $\bar{y} = y_1, \dots, y_n$. Система X удовлетворяет *принципу максимума для формулы* φ, если

$$(\forall\, \bar{y} \in X)(\exists\, x_0 \in X)\ [(\exists\, x)\varphi(x, \bar{y})] = [\varphi(x_0, \bar{y})].$$

Как легко видеть, если X удовлетворяет принципу максимума для φ, то

$$(\forall\, \bar{y} \in X)\big(X \vDash (\exists\, x)\varphi(x, \bar{y}) \ \Rightarrow\ (\exists\, x \in X)\, X \vDash \varphi(x, \bar{y})\big).$$

Говорят, что X удовлетворяет *принципу максимума*, если X удовлетворяет принципу максимума для любой формулы сигнатуры Σ. (Здесь мы имеем дело с очередным «бесконечным утверждением», см. § 1.)

3.6. Согласно [2, 1.10, 1.11] (см. также [3, 6.1.7, 6.1.8]) в ZFC доказуемы следующие соотношения между сформулированными выше принципами.

Пусть X — произвольная B-система сигнатуры Σ.

(1) *Если система X удовлетворяет принципу подъема и в ней истинна аксиома экстенсиональности, то X удовлетворяет принципу перемешивания.*

(2) *Если X удовлетворяет принципу подъема и принципу максимума для формулы $x \in y$, то X удовлетворяет принципу перемешивания.*

(3) *Пусть X удовлетворяет принципу перемешивания. Тогда X удовлетворяет принципу максимума.*

3.7. Лемма. *Если B-система X удовлетворяет принципу перемешивания, то для любых $(b_i)_{i\in I} \subset B$ и $(x_i)_{i\in I} \subset X$ найдутся $b \in B$ и $(y_i)_{i\in I} \subset \mathrm{cyc}\{x_i : i \in I\}$ такие, что*

$$\sup_{i\in I}\big(b_i \wedge [z = x_i]\big) \ =\ b \wedge \sup_{i\in I}\,[z = y_i] \quad \text{для всех } z \in X.$$

$\lhd$ В случае $I = \varnothing$ утверждение леммы очевидно. Пусть $I \neq \varnothing$.

Положим $b = \sup_{i\in I} b_i$, $I^* = I \cup \{I\}$, $b_I = \neg b$ и рассмотрим произвольный элемент $x_I \in \{x_i : i \in I\}$. Согласно принципу исчерпывания (см. [3, 2.1.10 (1)]) существует такое разбиение единицы $(d_i)_{i\in I^*} \subset B$, что $d_i \leqslant b_i$ для всех $i \in I^*$. Заметим, что $\sup_{i\in I} d_i = b$. Благодаря принципу перемешивания в X имеется элемент $x = \mathrm{mix}_{i\in I^*}\, d_i x_i$, характеризующийся соотношениями

$$[x = x_i] \geqslant d_i \quad \text{для всех } i \in I^*. \tag{1}$$

По той же причине для каждого $i \in I$ в X имеется элемент $y_i = \mathrm{mix}\{(b_i, x_i), (\neg b_i, x)\}$, удовлетворяющий неравенствам

$$[y_i = x_i] \geqslant b_i, \quad [y_i = x] \geqslant \neg b_i. \tag{2}$$

Покажем, что семейство $(y_i)_{i\in I}$ является искомым. Очевидно, $(y_i)_{i\in I} \subset \mathrm{cyc}\{x_i : i \in I\}$. Далее, для всякого элемента $z \in X$ с учетом (2) и 2.4 мы имеем

$$\sup_{i\in I}\big(b_i \wedge [z = x_i]\big) \ =\ \sup_{i\in I}\big(b_i \wedge [z = y_i]\big) \ \leqslant\ b \wedge \sup_{i\in I}\,[z = y_i].$$

С другой стороны, благодаря (1) и 2.4 справедливы соотношения

$$b \wedge [z = x] \ =\ \sup_{i\in I}\big(d_i \wedge [z = x]\big) \ =\ \sup_{i\in I}\big(d_i \wedge [z = x_i]\big) \ \leqslant\ \sup_{i\in I}\big(b_i \wedge [z = x_i]\big),$$

откуда с учетом (2) и 2.4 следует, что для всех $i \in I$

$$\begin{aligned} b \wedge [z = y_i] &= \big(b_i \wedge [z = y_i]\big) \vee \big(b \wedge \neg b_i \wedge [z = y_i]\big) \\ &= \big(b_i \wedge [z = x_i]\big) \vee \big(b \wedge \neg b_i \wedge [z = x]\big) \\ &\leqslant \big(b_i \wedge [z = x_i]\big) \vee \sup_{j \in I} \big(b_j \wedge [z = x_j]\big) = \sup_{j \in I} \big(b_j \wedge [z = x_j]\big), \end{aligned}$$

и поэтому $b \wedge \sup\limits_{i \in I} [z = y_i] = \sup\limits_{i \in I} \big(b \wedge [z = y_i]\big) \leqslant \sup\limits_{i \in I} \big(b_i \wedge [z = x_i]\big)$. $\rhd$

3.8. Следствие. *Пусть X — отделимая B-система, в которой истинна аксиома экстенсиональности.*

(1) *Если X удовлетворяет принципу перемешивания, то для любого соответствия $C \subset B \times X$ найдутся $b \in B$ и $Y \subset \operatorname{cyc} C[B]$ такие, что в X существование $\operatorname{asc} C$ равносильно существованию $bY{\uparrow}$, причем $\operatorname{asc} C = bY{\uparrow}$.*

(2) *Если X удовлетворяет принципу подъема, то для любого $x \in X$ существуют $b \in B$ и $Y \subset X$ такие, что $x = bY{\uparrow}$. При этом $b = [x \neq \varnothing]$ и $[y \in x] = b$ для всех $y \in Y$.*

4. Иерархическая структура булевозначной системы

Всюду ниже B — полная булева алгебра, X — отделимая B-значная алгебраическая система сигнатуры $\Sigma := \{=, \in\}$, причем система X удовлетворяет принципу подъема и в ней истинна аксиома экстенсиональности. Отметим, что в этом случае X удовлетворяет также принципам перемешивания и максимума (см. 3.6).

4.1. Обозначим символом $\varnothing_X$ подъем $\operatorname{asc}_X \varnothing$ пустого соответствия $\varnothing \subset B \times X$. Элемент $\varnothing_X \in X$ играет внутри B-системы X роль пустого множества, т. е. $X \vDash (\varnothing_X = \varnothing)$ или, что то же самое, $X \vDash (\forall\, y)\, \neg (y \in \varnothing_X)$.

В случае, когда $(d_i)_{i \in I}$ — антицепь в B и $(x_i)_{i \in I} \subset X$, символ $\operatorname{mix}_{i \in I} d_i x_i$ обозначает перемешивание $\operatorname{mix}_{i \in I^*} d_i x_i$, где $I^* = I \cup \{I\}$, $d_I = \neg\big(\sup_{i \in I} d_i\big)$, $x_I = \varnothing_X$.

Для $x \in X$ и $b \in B$ перемешивание $\operatorname{mix}\{(b, x), (\neg b, \varnothing_X)\}$ условимся обозначать символом $x|_b$ и называть *сужением x на b*:

$$[x|_b = x] \geqslant b, \quad [x|_b = \varnothing] \geqslant \neg b.$$

4.2. Лемма. *Для любых $a, b, b_i \in B$, $x, x_i, y, y_i \in X$, $Y \subset X$ справедливы соотношения:*

(1) $[\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)] \wedge b = [\varphi(x_1|_b, \ldots, x_n|_b, y_1, \ldots, y_m)] \wedge b$, *где φ — произвольная формула сигнатуры Σ;*

(2) $[y \in x|_b] = [y \in x] \wedge b$;

(3) $\big(x|_a\big)\big|_b = x|_{a \wedge b}$;

(4) $x|_b = y|_b \Leftrightarrow [x = y] \geqslant b$;

(5) $\Big(\operatorname*{asc}\limits_{i \in I} b_i x_i\Big)\Big|_b = \operatorname*{asc}\limits_{i \in I} (b_i \wedge b) x_i = \operatorname*{asc}\limits_{i \in I} (b_i \wedge b) x_i|_b$;

(6) $(aY{\uparrow})|_b = (a \wedge b) Y{\uparrow}$.

$\lhd$ Утверждение (1) следует из 2.4 благодаря неравенствам $[x_i = x_i|_b] \geqslant b$.

Равенство (2) вытекает из следующих оценок:

$$\begin{aligned} &[y \in x|_b] \geqslant [y \in x] \wedge [x = x|_b] \geqslant [y \in x] \wedge b; \\ &[y \in x|_b] \leqslant [x|_b \neq \varnothing] = \neg [x|_b = \varnothing] \leqslant \neg\neg b = b; \\ &[y \in x|_b] = [y \in x|_b] \wedge b \leqslant [y \in x|_b] \wedge [x|_b = x] \leqslant [y \in x]. \end{aligned}$$

(3) Из (2) следует, что $\big[y \in \big(x|_a\big)\big|_b\big] = [y \in x|_a] \wedge b = [y \in x] \wedge a \wedge b = [y \in x|_{a \wedge b}]$.

(4) Если $x|_b = y|_b$, то благодаря (1) мы имеем $[x = y] \wedge b = [x|_b = y|_b] \wedge b = b$, откуда $[x = y] \geqslant b$. Наоборот, из $[x = y] \geqslant b$ следует

$$[x|_b = y|_b] \geqslant [x|_b = x] \wedge [x = y] \wedge [y = y|_b] \geqslant b;$$
$$[x|_b = y|_b] \geqslant [x|_b = \varnothing] \wedge [y|_b = \varnothing] \geqslant \neg b,$$

а значит, $[x|_b = y|_b] = 1_B$ и тем самым $x|_b = y|_b$ благодаря отделимости.

(5) С учетом (1) и (2) для всех $y \in X$ мы имеем

$$\Big[y \in \Big(\operatorname*{asc}_{i\in I} b_i x_i\Big)\Big|_b\Big] \;=\; \Big[y \in \operatorname*{asc}_{i\in I} b_i x_i\Big] \wedge b \;=\; \sup_{i\in I}\,[y = x_i] \wedge b_i \wedge b$$
$$= \Big[y \in \operatorname*{asc}_{i\in I}(b_i \wedge b)x_i\Big] \;=\; \sup_{i\in I}\,[y = x_i|_b] \wedge b_i \wedge b \;=\; \Big[y \in \operatorname*{asc}_{i\in I}\,(b_i \wedge b)x_i|_b\Big].$$

Равенство (6) является частным случаем (5). $\vartriangleright$

4.3. С помощью трансфинитной рекурсии (см. [3, 1.5.9, 1.6.1]) определим класс-функцию, сопоставляющую каждому ординалу $\alpha \in \mathrm{On}$ подмножество $X_\alpha \subset X$, полагая

$$X_\alpha = \big\{\operatorname{asc} C \;:\; C \subset B \times \textstyle\bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta\big\}.$$

Как легко видеть, $X_\alpha \subset X_\beta$ при $\alpha \leqslant \beta$, $X_0 = \{\varnothing_X\}$, $X_{\alpha+1} = \{\operatorname{asc} C : C \subset B \times X_\alpha\}$ для всех $\alpha \in \mathrm{On}$.

4.4. Обозначим класс $\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} X_\alpha$ символом X_∞.

Лемма. *Элемент $x \in X$ принадлежит X_∞ тогда и только тогда, когда $x = \operatorname{asc} C$ для некоторого $C \subset B \times X_\infty$.*

$\vartriangleleft$ Необходимость обеспечивается определением класса X_∞. Поясним достаточность. Если $x = \operatorname{asc} C$, где $C \subset B \times X_\infty$, то выбирая для каждого элемента $y \in Y := \operatorname{im} C$ ординал $\alpha(y)$, удовлетворяющий условию $y \in X_{\alpha(y)}$, заключаем, что $Y \subset \bigcup_{y\in Y} X_{\alpha(y)} \subset X_\alpha$, где $\alpha = \sup_{y\in Y} \alpha(y)$, а значит, $C \subset B \times X_\alpha$ и тем самым $x \in X_{\alpha+1} \subset X_\infty$. $\vartriangleright$

4.5. Определим класс-функцию ω из X в B, полагая

$$\omega(x) = \sup\{b \in B : x|_b \in X_\infty\}, \quad x \in X.$$

Лемма. *Для любых $b \in B$, $x \in X$ имеет место эквивалентность*

$$x|_b \in X_\infty \;\Leftrightarrow\; b \leqslant \omega(x).$$

$\vartriangleleft$ Рассмотрим произвольный элемент $x \in X$ и положим $\Omega(x) = \{b \in B : x|_b \in X_\infty\}$.

Покажем, что множество $\Omega(x)$ насыщено вниз: если $a \in \Omega(x)$ и $b \leqslant a$, то $b \in \Omega(x)$. Действительно, пусть $a \in \Omega(x)$, т. е. $x|_a \in X_\infty$. Согласно 4.4 справедливо представление $x|_a = \operatorname{asc} C$ для некоторого $C \subset B \times X_\infty$. Тогда в случае $b \leqslant a$ с учетом 4.2 (3),(5) и 4.4 мы имеем

$$x|_b = x|_{a\wedge b} = \big(x|_a\big)\big|_b = (\operatorname{asc} C)|_b = \operatorname{asc} C_b,$$

где $C_b = \{(c \wedge b, y) : (c, y) \in C\} \subset B \times X_\infty$, а значит, $x|_b \in X_\infty$.

Остается доказать, что $\omega(x) \in \Omega(x)$, т. е. $x|_{\omega(x)} \in X_\infty$. Для всякого $b \in \Omega(x)$ из включения $x|_b \in X_\infty$ с учетом 4.4 следует, что $x|_b = \operatorname{asc} C_b$ для некоторого $C_b \subset B \times X_\infty$. Положим $C = \bigcup_{b\in\Omega(x)} C_b$. Ясно, что $C \subset B \times X_\infty$, а значит, в силу 4.4 для обоснования включения $x|_{\omega(x)} \in X_\infty$ достаточно показать, что $\operatorname{asc} C = x|_{\omega(x)}$. Действительно, для всех $z \in X$ с учетом 4.2 (2) мы имеем

$$[z \in \operatorname{asc} C] = \sup_{(a,y)\in C} (a \wedge [z = y]) = \sup_{b\in\Omega(x)} \sup_{(a,y)\in C_b} (a \wedge [z = y]) = \sup_{b\in\Omega(x)} [z \in \operatorname{asc} C_b]$$
$$= \sup_{b\in\Omega(x)} [z \in x|_b] = \sup_{b\in\Omega(x)} ([z \in x] \wedge b) = [z \in x] \wedge \sup_{b\in\Omega(x)} b = [z \in x] \wedge \omega(x) = [z \in x|_{\omega(x)}],$$

откуда $\operatorname{asc} C = x|_{\omega(x)}$ благодаря отделимости системы X и истинности в ней аксиомы экстенсиональности. ▷

4.6. Лемма. *Для любого $x \in X$ существует $z \in X$ такой, что*

$$[z \in x] \geqslant \neg\omega(x), \quad \neg\omega(z) \geqslant \neg\omega(x).$$

◁ Рассмотрим произвольный элемент $x \in X$. Согласно 3.8 (2) найдутся $b \in B$ и $Y \subset X$ такие, что $x = bY{\uparrow}$, причем $b = [x \neq \varnothing]$ и $[y \in x] = b$ для всех $y \in Y$.

Положим $c = \inf_{y\in Y} \omega(y)$. В силу 4.5 для всех $y \in Y$ справедливо включение $y|_c \in X_\infty$. Кроме того, из 4.2 (5) следует, что $x|_c = \operatorname{asc}_{y\in Y}(b \wedge c)y|_c$, откуда $x|_c \in X_\infty$ согласно 4.4, а значит, $c \leqslant \omega(x)$. Таким образом, $\sup_{y\in Y} \neg\omega(y) \geqslant \neg\omega(x)$.

По принципу исчерпывания в булевой алгебре B существует антицепь $(d_y)_{y\in Y}$ такая, что $\sup_{y\in Y} d_y \geqslant \neg\omega(x)$ и $d_y \leqslant \neg\omega(y)$ для всех $y \in Y$. Покажем, что $z := \operatorname{mix}_{y\in Y} d_y y$ является искомым элементом X, т. е. $[z \in x] \geqslant \neg\omega(x)$ и $\neg\omega(z) \geqslant \neg\omega(x)$.

Для всех $y \in Y$ мы имеем $[z = y] \geqslant d_y$ и $[y \in x] = [x \neq \varnothing] \geqslant \neg\omega(x)$, откуда с учетом 2.4 следует, что

$$[z \in x] \wedge d_y = [y \in x] \wedge d_y \geqslant \neg\omega(x) \wedge d_y.$$

Взяв супремум по $y \in Y$, получаем $[z \in x] \geqslant \neg\omega(x)$.

Для доказательства неравенства $\neg\omega(z) \geqslant \neg\omega(x)$ положим $a = \omega(z) \wedge \neg\omega(x)$ и допустим вопреки доказываемому, что $a \neq 0_B$. Поскольку $0_B \neq a \leqslant \neg\omega(x) \leqslant \sup_{y\in Y} d_y$, найдется такой элемент $y \in Y$, что $d_y \wedge a \neq 0_B$. Согласно 4.5 неравенство $d_y \wedge a \leqslant \omega(z)$ обеспечивает включение $z|_{d_y\wedge a} \in X_\infty$. С другой стороны, из $0_B \neq d_y \wedge a \leqslant \neg\omega(y)$ следует, что неравенство $d_y \wedge a \leqslant \omega(y)$ не имеет места, а значит, $y|_{d_y\wedge a} \notin X_\infty$. Для получения противоречия остается заметить, что в силу 4.2 (4) из $[z = y] \geqslant d_y$ вытекает равенство $z|_{d_y\wedge a} = y|_{d_y\wedge a}$. ▷

Отделимую B-систему называют *булевозначным* (*B-значным*) *универсумом* (см. [4]), если она удовлетворяет принципу подъема и в ней истинны аксиома экстенсиональности и аксиома регулярности (фундирования):

$$(\forall\, x)\big((\exists\, y)(y \in x) \Rightarrow (\exists\, y \in x)(\forall\, z)\neg(z \in x \wedge z \in y)\big)$$

или, что то же самое, $(\forall\, x)\big(x \neq \varnothing \Rightarrow (\exists\, y \in x)(y \cap x = \varnothing)\big)$.

Как известно (см. [3, 4]), для любой полной булевой алгебры B существует B-значный универсум. Точнее, имеются такие определяемые с параметром B классы $\mathbb{V}^{(B)}$, $[\![=]\!]$ и $[\![\in]\!]$, что

$$\mathrm{ZFC} \vdash (\forall\, B)\big(B \text{ — полная булева алгебра} \Rightarrow (\mathbb{V}^{(B)}, [\![=]\!], [\![\in]\!]) \text{ — } B\text{-значный универсум}\big).$$

Более того, классический B-значный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ оказывается моделью ZFC:

$$\mathrm{ZFC},\ B \text{ — полная булева алгебра} \vdash (\mathbb{V}^{(B)} \vDash \mathrm{ZFC}).$$

4.7. Теорема. *Если X — булевозначный универсум, то $X = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} X_\alpha$.*

$\triangleleft$ Рассмотрим B-значный универсум X и предположим вопреки доказываемому, что существует элемент $y_1 \in X$, не принадлежащий X_∞. Положим $b = \neg\omega(y_1)$. Из 4.5 следует, что $b \neq 0_B$. Согласно 4.6 имеется элемент $y_2 \in X$, удовлетворяющий неравенствам $[y_2 \in y_1] \geqslant b$ и $\neg\omega(y_2) \geqslant b$. «Итерируя» эти рассуждения (а строго говоря, применяя рекурсию и аксиому выбора), получаем последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов X такую, что $[y_{n+1} \in y_n] \geqslant b$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим подъем $x := \{y_n : n \in \mathbb{N}\}\!\uparrow$. Благодаря истинности в X аксиомы регулярности из $[x \neq \varnothing] = 1_B$ следует $[(\exists\, y \in x)(y \cap x = \varnothing)] = 1_B$, а значит, по принципу максимума существует элемент $y \in X$, удовлетворяющий равенствам $[y \in x] = [y \cap x = \varnothing] = 1_B$.

Поскольку $\sup_{n\in\mathbb{N}}[y = y_n] = [y \in x] = 1_B$, согласно принципу исчерпывания в булевой алгебре B найдется разбиение единицы $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такое, что $d_n \leqslant [y = y_n]$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. $y = \mathrm{mix}_{n\in\mathbb{N}}\, d_n y_n$. Положим $z = \mathrm{mix}_{n\in\mathbb{N}}\, d_n y_{n+1}$. Тогда с учетом 2.4 мы имеем

$$
\begin{aligned}
[z \in y] &= \sup_{n\in\mathbb{N}} d_n \wedge [z \in y] = \sup_{n\in\mathbb{N}} d_n \wedge [y_{n+1} \in y_n] \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} d_n \wedge b = b;\\
[z \in x] &= \sup_{n\in\mathbb{N}} d_n \wedge [z \in x] = \sup_{n\in\mathbb{N}} d_n \wedge [y_{n+1} \in x] = \sup_{n\in\mathbb{N}} d_n = 1_B \geqslant b,
\end{aligned}
$$

откуда $[y \cap x \neq \varnothing] \geqslant [z \in y \cap x] \geqslant b > 0_B$, что противоречит равенству $[y \cap x = \varnothing] = 1_B$. $\triangleright$

Литература

1. *Гутман А. Е.* Пример использования Δ_1-термов в булевозначном анализе // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, вып. 1.—С. 47–63. DOI: 10.23671/VNC.2012.14.10953.
2. *Гутман А. Е., Лосенков Г. А.* Функциональное представление булевозначного универсума // Мат. тр.—1998.—Т. 1, № 1.—С. 54–77.
3. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.
4. *Solovay R. M., Tennenbaum S.* Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Annals of Math.—1971.—Vol. 94, N 2.—P. 201–245. DOI: 10.2307/1970860.

Статья поступила 6 марта 2018 г.

Гутман Александр Ефимович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
заведующий лабораторией функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4;

Новосибирский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1

E-mail: `gutman@math.nsc.ru`

ON THE STRUCTURE OF THE BOOLEAN-VALUED UNIVERSE

Gutman A. E.

The logical machinery is clarified which justifies declaration of hypotheses. In particular, attention is paid to hypotheses and conclusions constituted by infinitely many formulas. Formal definitions are presented for Boolean-valued algebraic system and model of a theory, for the system of terms of Boolean-valued truth value of formulas, for ascent and mixing. Logical interrelations are described between the ascent, mixing, and maximum principles. It is shown that every ascent with arbitrary weights can be transformed into an ascent with constant weight. The notion of restriction of an element of a Boolean-valued algebraic system is introduced and studied. It is proven that every Boolean-valued model of Set theory which meets the ascent principle has multilevel structure analogous to von Neumann's cumulative hierarchy.

Keywords: Set theory, Boolean-valued model, universe, cumulative hierarchy.

References

1. *Gutman A. E.* An example of using Δ_1 terms in Boolean-valued analysis, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [*Vladikavkaz Math. J.*], 2012, vol. 14, no. 1, pp. 47–63. (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2012.14.10953.
2. *Gutman A. E., Losenkov G.A.* Function representation of the Boolean-valued universe, *Siberian Adv. Math.*, 1998, vol. 8, no. 1, pp. 99–120.
3. *Kusraev A. G., Kutateladze S.S. Vvedenie v bulevoznachnyj analiz* [*Introduction to Boolean Valued Analysis*], Moscow, Nauka, 2005, 529 p.
4. *Solovay R. M., Tennenbaum S.* Iterated Cohen extensions and Souslin's problem, *Annals of Math.*, 1971, vol. 94, no. 2, pp. 201–245. DOI: 10.2307/1970860.

Received March 6, 2018

Gutman Elexander Efimovich

Sobolev Institute of Mathematics,
Head of the Laboratory of Functional Analysis
4 Academician Koptyug av., Novosibirsk, 630090, Russia;

Novosibirsk State University,
Professor of the Department of Mathematical Analysis
1 Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia

E-mail: gutman@math.nsc.ru

ORCID: 0000-0003-2030-7459