АРХИМЕДОВЫ И НАПРАВЛЕННО ЗАМКНУТЫЕ КОНУСЫ

АЛЕКСАНДР ГУТМАН

Всюду ниже X — векторное пространство над $\mathbb{R}$. Непустое выпуклое подмножество $W \subseteq X$ называется *клином*, если $\alpha W \subseteq W$ для всех $\alpha \geqslant 0$. Клин W является *конусом*, если $W \cap (-W) = \{0\}$. Как известно, в любом (пред)упорядоченном векторном пространстве $(X, \leqslant)$ множество $X^+ := \{x \in X : x \geqslant 0\}$ является конусом (клином). Наоборот, если W — конус (клин) в X, то отношение $\leqslant_W$, определенное правилом $x \leqslant_W y \Leftrightarrow y - x \in W$, превращает X в (пред)упорядоченное векторное пространство, для которого $X^+ = W$.

Говорят, что (пред)упорядоченное векторное пространство $(X, \leqslant)$ удовлетворяет *аксиоме Архимеда*, если для любых $x \in X$ и $y \in X^+$ из $(\forall\, n \in \mathbb{N})(x \leqslant \frac{1}{n} y)$ следует $x \leqslant 0$. Конус (клин) W в векторном пространстве X называют *архимедовым*, если соответствующее (пред)упорядоченное векторное пространство $(X, \leqslant_W)$ удовлетворяет аксиоме Архимеда.

Основные сведения об архимедовых конусах можно почерпнуть из [1]. Связь между архимедовыми и замкнутыми конусами исследована в [2].

Множество $C \subseteq X$ назовем *замкнутым в направлении* $y \in X$, если для любого семейства $(\alpha_i)_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}$ и для любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$ из $\inf_{i \in I} \alpha_i = \alpha$ и $(\forall\, i \in I)(x + \alpha_i y \in C)$ следует $x + \alpha y \in C$. Выпуклое множество $C \subseteq X$ замкнуто в направлении $y \in X$ тогда и только тогда, когда для всех $x \in X$ из $\inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : x + \alpha y \in C\} = 0$ следует $x \in C$.

Теорема 1. *Следующие свойства выпуклого подмножества $C \subseteq X$ равносильны:*
(1) *C архимедово;*
(2) *C замкнуто в любом направлении;*
(3) *пересечение C с любой прямой замкнуто;*
(4) *пересечение C с любым конечномерным подпространством X замкнуто;*
(5) *$X \backslash C$ алгебраически открыто* (*т. е. совпадает с алгебраической внутренностью*).

Теорема 2. *Пусть $W \subseteq X$ — клин и пусть f — такой линейный функционал на X, что $f \geqslant 0$ на W и $f(y) > 0$ для некоторого элемента $y \in W$. Клин W архимедов тогда и только тогда, когда он замкнут в направлении y и множество $\{x \in W : f(x) = 1\}$ архимедово.*

Ниже приведены критерии существования f и y, удовлетворяющих условию теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $\overline{W}$ — замыкание клина $W \subseteq X$ в слабой топологии, наведенной пространством $X^{\#}$ всех линейных функционалов на X. Следующие условия равносильны:*
(1) *существуют $f \in X^{\#}$ и $y \in W$ такие, что $f \geqslant 0$ на W и $f(y) > 0$;*
(2) *существует такой вектор $y \in W$, что $-y \notin \overline{W}$;*
(3) *$\operatorname{lin} W \not\subseteq \overline{W}$, где $\operatorname{lin} W$ — линейная оболочка W.*

Любое локально выпуклое пространство несчетной размерности содержит незамкнутый архимедов конус (см. [2]). Остается открытым вопрос о том, в каких локально выпуклых пространствах счетной размерности существуют незамкнутые архимедовы конусы.

Список литературы

[1] C. D. Aliprantis, R. Tourky, *Cones and Duality* // Providence, RI: American Mathematical Society, 2007.

[2] А. Е. Гутман, Э. Ю. Емельянов, А. В. Матюхин, *Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах* // Владикавказский мат. журн., **17**:3 (2015), 36–43.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск;
Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск

E-mail address: gutman@math.nsc.ru

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2., проект № 0314-2016-0005.