PREPUBLICATION

УДК 517.98

ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ [1]

А. Е. Гутман, И. А. Емельяненков

Евгению Израильевичу Гордону
в связи с его 70-летием

Описаны основные свойства отношений архимедовой эквивалентности и мажорируемости в линейно упорядоченном векторном пространстве. Введено и исследовано понятие (пред)лексикографической структуры на векторном пространстве. Лексикографическая структура представляет собой двойственность между векторами и точками, посредством которой абстрактное упорядоченное векторное пространство реализуется в виде изоморфного ему пространства вещественных функций, снабженного лексикографическим порядком. Введены понятия функциональной и базисной лексикографической структуры. Уточнена взаимосвязь между упорядоченным векторным пространством и его функциональным лексикографическим представлением. Приведено новое доказательство теоремы об изоморфном вложении любого линейно упорядоченного векторного пространства в лексикографически упорядоченное пространство вещественных функций с вполне упорядоченными носителями. Получен критерий плотности максимального конуса относительно сильнейшей локально выпуклой топологии. Базисные максимальные конусы описаны в терминах множеств, состоящих из попарно неэквивалентных векторов. Охарактеризован класс векторных пространств, в которых существуют небазисные максимальные конусы.

Ключевые слова: максимальный конус, всюду плотный конус, линейно упорядоченное векторное пространство, архимедова эквивалентность, архимедова мажорируемость, лексикографический порядок, базис Гамеля, локально выпуклое пространство.

1. Введение

Подмножество K векторного пространства над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел называется *конусом*, если $K + K \subset K$, $\alpha K \subset K$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geqslant 0\}$, и $K \cap (-K) = \{0\}$. Иными словами, конус — это непустое множество, замкнутое относительно линейных комбинаций $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ с положительными коэффициентами α_i и содержащее не более одного вектора из каждой пары $x, -x$.

Понятие конуса тесно взаимосвязано с понятием *упорядоченного векторного пространства* — вещественного векторного пространства X, снабженного таким отношением порядка $\leqslant$, что для любых $x, y, z \in X$ и $\alpha \in \mathbb{R}^+$ из $x \leqslant y$ следует $x + z \leqslant y + z$ и $\alpha x \leqslant \alpha y$. А именно, если $(X, \leqslant)$ — упорядоченное векторное пространство, то множество $X^+ := \{x \in X : x \geqslant 0\}$ является конусом; и наоборот: если $K \subset X$ — конус и $x \leqslant_K y \Leftrightarrow y - x \in K$ $(x, y \in X)$, то $(X, \leqslant_K)$ — упорядоченное векторное пространство и $X^+ = K$ (см., например, [1, 3.2]).

© 2019 Гутман А. Е., Емельяненков И. А.

[1] Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2, проект № 0314-2019-0005.

Из классической теоремы Хана — Банаха непосредственно следует, что всякий конус, являющийся надграфиком сублинейного функционала, имеет опорную гиперплоскость. В этой связи было бы естественно ожидать, что любой конус в вещественном векторном пространстве X лежит в некотором полупространстве, т. е. во множестве вида $\{x \in X : f(x) \geqslant 0\}$, где $0 \neq f \in X^{\#}$. (Здесь и ниже $X^{\#}$ — векторное пространство линейных функционалов на X с поточечными линейными операциями.) Тем не менее, это не так. Например, если $K := \{x \in L^0(\mathbb{R}) : x \geqslant 0\}$ — конус положительных элементов пространства $X := L^0(\mathbb{R})$ классов эквивалентности измеримых по Лебегу вещественных функций, то не существует ни одного положительного на K линейного функционала $0 \neq f \in X^{\#}$ (см. [2, § 5]). В частности, K не лежит ни в каком полупространстве и, более того, не отделяется ни от одной точки X, т. е. является всюду плотным в самом сильном смысле — относительно сильнейшей локально выпуклой топологии (в которой все линейные функционалы непрерывны). Описанный конус $K \subset L^0(\mathbb{R})$ — «гигантский», но не максимальный, он может быть увеличен до еще большего конуса $K \subset \overline{K} \subset L^0(\mathbb{R})$.

Конус K в векторном пространстве X называется *максимальным*, если в X не существует другого конуса, содержащего K, т. е. K является максимальным элементом упорядоченного по включению множества всех конусов в X.

Следующие свойства конуса K в векторном пространстве X равносильны:

(a) *K — максимальный конус;*

(b) *$(X, \leqslant_K)$ — линейно упорядоченное векторное пространство, т. е. $(\forall\, x, y \in X)(x \leqslant_K y$ или $y \leqslant_K x)$;*

(c) *$(\forall\, x \in X)(x \in K$ или $-x \in K)$.*

С помощью леммы Цорна легко показать, что любой конус может быть увеличен до максимального. Более того, для любого конуса $K \subset X$ и любого выпуклого множества $C \subset X$, не пересекающегося с K, существует максимальный конус $\overline{K} \subset X$, который содержит K и не пересекается с C.

Примером максимального конуса служит следующее подмножество пространства $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ всех последовательностей $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (здесь $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел) с конечными носителями $[x] := \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$:

$$\big\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}} \backslash \{0\} : x(\max[x]) > 0\big\} \cup \{0\}.$$

Этот максимальный конус, состоящий из тех последовательностей $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$, чей последний ненулевой член $x(\max[x])$ положителен, всюду плотен в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ относительно сильнейшей локально выпуклой топологии (см. [3, гл. II, § 5]). Аналогичный конус

$$\big\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}} \backslash \{0\} : x(\min[x]) > 0\big\} \cup \{0\}$$

тоже максимален, но не является всюду плотным, поскольку содержится в полупространстве $\big\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}} : x(1) \geqslant 0\big\}$.

Приведенные факты мотивируют постановку следующих задач.

(1) Выяснить, в каких случаях для максимального конуса K в векторном пространстве X существует линейно упорядоченный базис Гамеля $(B, \leqslant_B)$, обеспечивающий представление

$$K = \{x \in X \backslash \{0\} : x_B(\min[x_B]) > 0\} \cup \{0\},$$

где $[x_B] := \{b \in B : x_B(b) \neq 0\}$ — носитель семейства $x_B \in \mathbb{R}^B_{\mathrm{fin}}$ коэффициентов разложения $\sum_{b \in B} x_B(b) b$ вектора x по базису B. (Такой конус K будем называть *базисным.*)

(2) Охарактеризовать векторные пространства, в которых все максимальные конусы являются базисными. (Очевидно, к ним относятся любые конечномерные пространства.)

(3) Привести общие примеры и описать структуру любых, в том числе небазисных, максимальных конусов.

(4) Выяснить, при каких условиях максимальный конус не лежит ни в одном полупространстве, т. е. всюду плотен относительно сильнейшей локально выпуклой топологии.

Данная статья посвящена решению перечисленных задач.

В качестве решения задачи (1) предложен критерий базисности конуса в терминах дискретных множеств — совокупностей векторов, среди которых нет архимедово эквивалентных (см. 4.2–4.4).

Исчерпывающий ответ на вопрос (2) дает теорема 4.7, согласно которой небазисные максимальные конусы существуют в векторных пространствах несчетной размерности, и только в них.

Задача (3) тесно связана с теоремой Хана о вложении — одним из наиболее глубоких результатов теории упорядоченных групп, утверждающим, что всякая линейно упорядоченная группа изоморфно вкладывается в лексикографическое произведение действительных групп [4, гл. IV, теорема 16]. Известен и менее громоздкий аналог этой теоремы для случая линейно упорядоченных векторных пространств [5, теорема 3.1], который фактически дает ответ на вопрос (3). В данной статье мы, в частности, попытались переосмыслить и существенно упростить имеющиеся подходы, переведя их на язык лексикографических и предлексикографических структур (см. § 3). Доказательство основной леммы 3.9, идейно и технически близкое содержанию статьи [5], на наш взгляд, стало если не элементарным, то по меньшей мере значительно более доступным и коротким.

Описание порядка посредством лексикографической структуры позволяет получить очень простой ответ на вопрос (4): максимальный конус всюду плотен тогда и только тогда, когда среди соответствующих архимедовых классов нет наименьшего (см. 3.12).

2. Архимедова эквивалентность

Всюду в этом параграфе X — линейно упорядоченное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Отношение порядка по умолчанию обозначается символом $\leqslant$. Модуль $|x|$ вектора $x \in X$, как обычно, полагается равным x при $x \geqslant 0$ и $-x$ при $x < 0$. Символ $\operatorname{lin} Y$ обозначает линейную оболочку подмножества $Y \subset X$. Мы также будем использовать упрощенную запись $\operatorname{lin}(x, Y) := \operatorname{lin}(\{x\} \cup Y)$.

2.1. Введем на множестве $X^{++} := X^{+} \backslash \{0\}$ отношение линейного предпорядка

$$x \preccurlyeq y \;\Leftrightarrow\; (\exists\, \alpha > 0)(x \leqslant \alpha y)$$

и соответствующие отношения строгого порядка и эквивалентности

$$\begin{aligned} x \prec y \;&\Leftrightarrow\; y \not\preccurlyeq x, \\ x \sim y \;&\Leftrightarrow\; x \preccurlyeq y \;\&\; y \preccurlyeq x. \end{aligned}$$

Отношения $\preccurlyeq$ и $\sim$ называют *архимедовым мажорированием* и *архимедовой эквивалентностью.*

Подмножество $D \subset X$ назовем *дискретным*, если $D \subset X^{++}$ и элементы D попарно не эквивалентны: $(\forall\, d, e \in D)(d \neq e \;\Rightarrow\; d \nsim e)$. В любом линейно упорядоченном векторном пространстве X существует максимальное дискретное множество. Всякое такое множество является результатом выбора представителей в классах архимедовой эквивалетности, т. е. имеет вид $\{d_c : c \in X^{++}/{\sim}\}$, где $d_c \in c$ для каждого класса c.

2.2. Как легко видеть, для любых $x, y \in X^{++}$

$$x \prec y \;\Leftrightarrow\; (\forall\,\alpha > 0)(x < \alpha y) \;\Leftrightarrow\; (\forall\,\alpha \in \mathbb{R})(\forall\,\beta > 0)(\alpha x < \beta y). \qquad (1)$$

Распространим отношение $\prec$ с $X^{++}\times X^{++}$ на $X \times X^{++}$, принимая (1) в качестве определения выражения $x \prec y$ для произвольных $x \in X$ и $y \in X^{++}$.

Для любого вектора $y \in X^{++}$ множество $\{x \in X : x \prec y\}$ является векторным подпространством X.

$\lhd$ Если $x_1, x_2 \prec y$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, то для всех $\alpha > 0$ мы имеем $\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2 < \frac{\alpha}{2} y$ и, следовательно, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 < \alpha y$. $\rhd$

2.3. *Всякое дискретное множество линейно независимо.*

$\lhd$ Индукцией по $n \in \mathbb{N}$ покажем, что любое подмножество $E \subset D$ мощности $|E| = n$ линейно независимо. Случай $n = 1$ тривиален. Пусть все подмножества D мощности n линейно независимы и пусть $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i e_i = 0$, где $e_i \in D$ попарно различны, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Не нарушая общности, можно считать, что $e_1, \ldots, e_n \prec e_{n+1}$. Тогда с учетом 2.2

$$\alpha_{n+1} e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} (-\alpha_i) e_i \prec e_{n+1}, \quad -\alpha_{n+1} e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \prec e_{n+1}$$

и поэтому $\alpha_{n+1} = 0$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$, а значит, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ по предположению индукции. $\rhd$

2.4. Если $x, y \in X^{++}$ и $x \sim y$, то $A := \{\alpha > 0 : \alpha y < x\}$ и $B := \{\beta > 0 : x < \beta y\}$ — непустые ограниченные множества, причем точные границы $\sup A$ и $\inf B$ совпадают. Обозначим их общее значение символом $\frac{x}{y}$. Таким образом, если $x \sim y$, то $\frac{x}{y}$ — единственное число, удовлетворяющее условию

$$\left(\tfrac{x}{y} - \alpha\right) y < x < \left(\tfrac{x}{y} + \alpha\right) y \quad \text{для всех } \alpha > 0.$$

Лемма. *Пусть $x, y \in X^{++}$, $x \sim y$, $x_0 := \left|x - \frac{x}{y} y\right|$. Тогда $x_0 \prec y$ и $\operatorname{lin}\{x_0, y\} = \operatorname{lin}\{x, y\}$.*

$\lhd$ Для любого числа $\alpha > 0$ из $x < \left(\frac{x}{y} + \alpha\right) y$ следует $x - \frac{x}{y} y < \alpha y$, а из $\left(\frac{x}{y} - \alpha\right) y < x$ следует $\frac{x}{y} y - x < \alpha y$. Таким образом, $\left|x - \frac{x}{y} y\right| < \alpha y$ для всех $\alpha > 0$, т. е. $x_0 \prec y$. Равенство $\operatorname{lin}\{x_0, x\} = \operatorname{lin}\{x, y\}$ очевидно. $\rhd$

2.5. Лемма. *Пусть Y — конечное подмножество X^{++}. Если $x \in X^{++}$ и $x \notin \operatorname{lin} Y$, то существует такой вектор $\tilde{x} \in X^{++}$, что $\operatorname{lin}(\tilde{x}, Y) = \operatorname{lin}(x, Y)$ и $(\forall\, y \in Y)(\tilde{x} \nsim y)$.*

$\lhd$ Для каждого вектора $z \in Z := \{z \in X^{++} : \operatorname{lin}(z, Y) = \operatorname{lin}(x, Y)\}$ положим

$$y(z) := \begin{cases} \min\{y \in Y : z \sim y\}, & \text{если } (\exists\, y \in Y)(z \sim y); \\ 0, & \text{если } (\forall\, y \in Y)(z \nsim y). \end{cases}$$

Поскольку множество $\{y(z) : z \in Z\}$ конечно, существует такой вектор $\tilde{x} \in Z$, что

$$y(\tilde{x}) = \min\{y(z) : z \in Z\}.$$

Допустим, $y(\tilde{x}) \neq 0$. Тогда $y(\tilde{x}) \in Y$ и $\tilde{x} \sim y(\tilde{x})$. Согласно лемме 2.4 имеется такой вектор $\tilde{x}_0 \in X^{+}$, что $\tilde{x}_0 \prec y(\tilde{x})$ и $\operatorname{lin}\{\tilde{x}_0, y(\tilde{x})\} = \operatorname{lin}\{\tilde{x}, y(\tilde{x})\}$. Из соотношений $x \notin \operatorname{lin} Y$ и $\operatorname{lin}(\tilde{x}, Y) = \operatorname{lin}(x, Y)$ следует, что $\tilde{x}$ и $y(\tilde{x})$ линейно независимы, и поэтому $\tilde{x}_0 \neq 0$. С другой стороны,

$$\operatorname{lin}(\tilde{x}_0, Y) = \operatorname{lin}(\operatorname{lin}\{\tilde{x}_0, y(\tilde{x})\} \cup Y) = \operatorname{lin}(\operatorname{lin}\{\tilde{x}, y(\tilde{x})\} \cup Y) = \operatorname{lin}(\tilde{x}, Y) = \operatorname{lin}(x, Y),$$

а значит, $\tilde{x}_0 \in Z$ и, следовательно, $y(\tilde{x}) \leqslant y(\tilde{x}_0)$. Таким образом, $\tilde{x}_0 \prec y(\tilde{x}) \leqslant y(\tilde{x}_0) \sim \tilde{x}_0$. Полученное противоречие показывает, что $y(\tilde{x}) = 0$, т. е. $\tilde{x}$ — искомый вектор. $\rhd$

3. Лексикографические структуры

3.1. Пусть S — произвольное множество. Для обозначения характеристической функции подмножества $T \subset S$ будем использовать символ 1_T. Символом $\mathbb{R}^S$ обозначается векторное пространство всех функций $x\colon S \to \mathbb{R}$ с поточечными линейными операциями. Если $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^S$ и $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — формальная запись какого-либо утверждения о числах, то

$$[\varphi(x_1, \ldots, x_n)] := \bigl\{ s \in S : \varphi\bigl(x_1(s), \ldots, x_n(s)\bigr) \bigr\}.$$

В частности, если $x, y \in \mathbb{R}^S$, то $[x \neq y] = \{s \in S : x(s) \neq y(s)\}$. *Носитель* $[x \neq 0]$ функции x условимся обозначать символом $[x]$.

Векторное подпространство $\mathbb{R}^S$, состоящие из функций с конечными носителями, обозначим через $\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}}$. Если $(S, \leqslant)$ — линейно упорядоченное множество, то $\mathbb{R}^S_{\mathrm{wo}}$ — векторное подпространство $\mathbb{R}^S$, состоящее из функций с вполне упорядоченными носителями, а $\mathbb{R}^S_{\min}$ — подмножество $\mathbb{R}^S$, состоящее из нулевой функции и всех функций $x \in \mathbb{R}^S$, носитель $[x]$ которых имеет наименьший элемент $\min[x]$. Очевидно,

$$\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}} \subset \mathbb{R}^S_{\mathrm{wo}} \subset \mathbb{R}^S_{\min} \subset \mathbb{R}^S.$$

Отметим, что подмножество $\mathbb{R}^S_{\min} \subset \mathbb{R}^S$ не всегда является векторным подпространством. Для $x \in \mathbb{R}^S_{\min}$ определим число $x(\min) \in \mathbb{R}$, полагая

$$x(\min) := \begin{cases} x(\min[x]), & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

3.2. Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$, S — произвольное множество. Функцию $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle\colon X \times S \to \mathbb{R}$ назовем *двойственностью*, если для любых $x, y \in X$, $s \in S$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\langle x + y \,|\, s\rangle = \langle x \,|\, s\rangle + \langle y \,|\, s\rangle, \\ &\langle \alpha x \,|\, s\rangle = \alpha\langle x \,|\, s\rangle, \\ &x \neq 0 \;\Rightarrow\; (\exists\, s \in S)\ \langle x \,|\, s\rangle \neq 0. \end{aligned}$$

Для $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle\colon X \times S \to \mathbb{R}$ рассмотрим функции

$$\langle x]\colon S \to \mathbb{R}, \quad [s\rangle\colon X \to \mathbb{R}, \quad \langle x](s) := [s\rangle(x) := \langle x \,|\, s\rangle \quad (x \in X,\ s \in S)$$

и положим

$$\langle X] := \{\langle x] : x \in X\}, \quad [S\rangle := \{[s\rangle : s \in S\}.$$

Как легко видеть, следующие свойства функции $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle\colon X \times S \to \mathbb{R}$ равносильны:

(a) $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ является двойственностью;

(b) $x \mapsto \langle x]$ — изоморфизм X на векторное подпространство $\langle X] \subset \mathbb{R}^S$;

(c) $[S\rangle \subset X^{\#}$ — множество функционалов, разделяющее точки X.

Носитель $\bigl[\langle x]\bigr]$ функции $\langle x]\colon S \to \mathbb{R}$ условимся записывать в виде $[x]$.

3.3. Пусть $(S, \leqslant)$ — линейно упорядоченное множество. Векторное подпространство $X \subset \mathbb{R}^S$ будем называть (*пред*)*лексикографическим*, если

(a) $X \subset \mathbb{R}^S_{\mathrm{wo}}$ (соответственно, $X \subset \mathbb{R}^S_{\min}$);

(b) $(\forall\, s \in S)(\exists\, x \in X \backslash \{0\})(s = \min[x])$.

Примером (пред)лексикографического пространства служит любое подпространство $X \subset \mathbb{R}^S$, удовлетворяющее включениям $\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}} \subset X \subset \mathbb{R}^S_{\mathrm{wo}}$ (соответственно, $\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}} \subset X \subset \mathbb{R}^S_{\min}$).

Пусть X — произвольное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Тройку $(S, \leqslant_S, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ назовем *(пред)лексикографической структурой* на X, если $\leqslant_S$ — линейный порядок на S, $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle\colon X\times S\to\mathbb{R}$ — двойственность и $\langle X]$ — (пред)лексикографическое подпространство $\mathbb{R}^S$. Вместо $(S, \leqslant_S, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ условимся писать $(S, \leqslant_S)$, если из контекста ясно, о какой двойственности $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ идет речь.

3.4. *Если $(S, \leqslant_S, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ — предлексикографическая структура на векторном пространстве X, то $[s\rangle \neq [t\rangle$ при $s\neq t$ и $[S\rangle$ — линейно независимое подмножество $X^\#$.*

$\triangleleft$ Благодаря 3.3 (b) имеется такое семейство элементов $x_s\in X\backslash\{0\}$, что $s=\min[x_s]$ для всех $s\in S$.

Пусть $s,t\in S$, $s<_S t$. Положим $x:=x_t$. Из $s<_S t=\min[x]$ следует $[s\rangle(x)=\langle x\,|\,s\rangle=0$ и $[t\rangle(x)=\langle x\,|\,t\rangle\neq 0$, а значит, $[s\rangle\neq[t\rangle$.

Рассмотрим попарно различные точки $s_1,\dots,s_n\in S$, ненулевые числа $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ и покажем, что $f:=\sum_{i=1}^n\alpha_i[s_i\rangle\neq 0$. Пусть для определенности $s_1<_S\dots<_S s_n$. Положим $x:=x_{s_n}$. Поскольку $s_1,\dots,s_{n-1}<_S s_n=\min[x]$, мы имеем $\langle x\,|\,s_1\rangle=\dots=\langle x\,|\,s_{n-1}\rangle=0$, $\langle x\,|\,s_n\rangle\neq 0$. Следовательно, $f(x)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\langle x\,|\,s_i\rangle=\alpha_n\langle x\,|\,s_n\rangle\neq 0$, а значит, $f\neq 0$. $\triangleright$

3.5. Если $\leqslant_S$ — линейный порядок на S и X — (пред)лексикографическое подпространство $\mathbb{R}^S$, то (пред)лексикографическая структура $(S,\leqslant_S)$ на X с естественной двойственностью $\langle x\,|\,s\rangle=x(s)$ называется *функциональной*. Как легко видеть, с точностью до изоморфизма всякая (пред)лексикографическая структура является функциональной.

Примерами функциональных лексикографических структур служат

$$(S,\leqslant_{\mathrm{wo}})\text{ на }\mathbb{R}^S,\quad (S,\leqslant_S)\text{ на }\mathbb{R}^S_{\mathrm{wo}},\quad (S,\leqslant_S)\text{ на }\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}},$$

где $\leqslant_{\mathrm{wo}}$ — полное упорядочение S, $\leqslant_S$ — произвольный линейный порядок на S. Если $S=\left\{\pm\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$, $\leqslant_S$ — стандартный числовой порядок на S и $X=\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}}+\mathbb{R}1_S$, то $(S,\leqslant_S)$ — предлексикографическая, но не лексикографическая функциональная структура на X.

3.6. Пусть $(S, \leqslant_S, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ — (пред)лексикографическая структура на векторном пространстве X. Для всякого элемента $x\in X$ положим $\langle x\,|\min\rangle:=\langle x](\min)$, т. е.

$$\langle x\,|\min\rangle=\begin{cases}\langle x\,|\min[x]\rangle, & \text{если } x\neq 0;\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Как легко видеть, множество

$$X(S,\leqslant_S,\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)^+:=\{x\in X:\langle x\,|\min\rangle\geqslant 0\}$$

представляет собой максимальный конус в X. Соответствующее линейно упорядоченное векторное пространство $(X,\leqslant_X)$ с положительным конусом $(X,\leqslant_X)^+=X(S,\leqslant_S,\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)^+$ обозначим символом $X(S,\leqslant_S,\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$, а порядок $\leqslant_X$ назовем *(пред)лексикографическим порядком, наведенным структурой* $(S,\leqslant_S,\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$.

3.7. *Пусть $(S, \leqslant_S, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ — предлексикографическая структура на векторном пространстве X. Снабдим пространство X порядком, наведенным структурой $(S, \leqslant_S, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$.*

(a) *Для любых $x,y\in X$*

$$x<y\ \Leftrightarrow\ \langle x\,|\,t\rangle<\langle y\,|\,t\rangle,\ \text{ где }\ t=\min\bigl[\langle x]\neq\langle y]\bigr]=\min\{s\in S:\langle x\,|\,s\rangle\neq\langle y\,|\,s\rangle\}.$$

(b) *Для любых $x,y\in X^{++}$*

$$x\preccurlyeq y\ \Leftrightarrow\ \min[x]\geqslant_S\min[y],\quad x\prec y\ \Leftrightarrow\ \min[x]>_S\min[y],\quad x\sim y\ \Leftrightarrow\ \min[x]=\min[y].$$

(c) *Для любого максимального дискретного множества $D\subset X$, снабженного порядком $d\leqslant_D e\ \Leftrightarrow\ e\leqslant d$, отображение $d\mapsto\min[d]$ является порядковым изоморфизмом между $(D,\leqslant_D)$ и $(S,\leqslant_S)$.*

3.8. Лемма. *Если $X = (X, \leqslant)$ — линейно упорядоченное векторное пространство и D — произвольное максимальное дискретное подмножество X, снабженное порядком $d \leqslant_D e \Leftrightarrow e \leqslant d$, то $(X, \leqslant) = X(D, \leqslant_D, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ для некоторой предлексикографической структуры $(D, \leqslant_D, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ на X, причем такой, что $\langle d] = 1_{\{d\}}$ для всех $d \in D$.*

$\triangleleft$ Рассмотрим произвольный элемент $d \in D$ и заметим, что $d \notin \operatorname{lin}(X_d \cup D_d)$, где $X_d := \{x \in X : x \prec d\}$, $D_d := \{e \in D : d \prec e\}$. Действительно, из 2.2 следует, что X_d — векторное подпространство X, а значит, в случае $d \in \operatorname{lin}(X_d \cup D_d)$ нашелся бы элемент $x \in X_d^{++}$, удовлетворяющий соотношению $d \in \operatorname{lin}(x, D_d)$, которое невозможно, так как множество $\{d, x\} \cup D_d$ дискретно и поэтому линейно независимо (см. 2.3).

Следовательно, для каждого $d \in D$ можно выбрать такой функционал $f_d \in X^\#$, что $f_d(d) = 1$, $f_d(x) = 0$ при $x \in X$, $x \prec d$ и $f_d(e) = 0$ при $e \in D$, $d \prec e$. Определим функцию $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle\colon X \times D \to \mathbb{R}$, полагая $\langle x\,|\,d\rangle := f_d(x)$. Очевидно, $\langle d] = 1_{\{d\}}$ для всех $d \in D$.

Пусть $x \in X^{++}$. Поскольку дискретное множество D максимально, $x \sim d$ для некоторого элемента $d \in D$. По лемме 2.4 мы имеем $x - \frac{x}{d}d \leqslant \left|x - \frac{x}{d}d\right| \prec d$, откуда $f_d(x - \frac{x}{d}d) = 0$ и поэтому $\langle x\,|\,d\rangle = \frac{x}{d} > 0$. Кроме того, если $e <_D d$, то $x \sim d \prec e$, а значит, $\langle x\,|\,e\rangle = f_e(x) = 0$. Таким образом, $d = \min[x]$ и $\langle x\,|\,\min[x]\rangle > 0$.

Из сказанного выше следует, что функция $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ является двойственностью, а $\langle X]$ — предлексикографическим пространством, так как $\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}} \subset \langle X] \subset \mathbb{R}^S_{\min}$. Кроме того, установленное включение $X^+ \subset X(D, \leqslant_D, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)^+$ влечет равенство $X^+ = X(D, \leqslant_D, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)^+$ ввиду максимальности конуса X^+. $\triangleright$

3.9. Пусть $(S, \leqslant)$ — линейно упорядоченное множество. Для $x \in \mathbb{R}^S$ и $t \in S$ определим функцию $x\rceil_t \in \mathbb{R}^S$, полагая $x\rceil_t(s) := x(s)$ при $s < t$ и $x\rceil_t(s) := 0$ при $s \geqslant t$. Для $x, y \in \mathbb{R}^S$ будем говорить, что *x и y совпадают до t*, и писать $x =_t y$, если $(\forall\, s < t)\ x(s) = y(s)$, т. е. $x\rceil_t = y\rceil_t$.

Лемма. *Если $(S, \leqslant)$ — линейно упорядоченное множество, X — векторное подпространство $\mathbb{R}^S$ и $\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}} \subset X \subset \mathbb{R}^S_{\min}$, то существует линейный оператор $(x \mapsto x^*)\colon X \to \mathbb{R}^S$, обладающий следующими свойствами:*

(a) $\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}} \subset X^* \subset \mathbb{R}^S_{\mathrm{wo}}$, *где* $X^* := \{x^* : x \in X\}$;

(b) $x \mapsto x^*$ — *линейный и порядковый изоморфизм* $X(S, \leqslant)$ *на* $X^*(S, \leqslant)$;

(c) $x^* = x$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}}$;

(d) $x^*\rceil_t \in X^*$ *для всех* $x \in X$ *и* $t \in S$.

$\triangleleft$ Пусть $(S, \leqslant)$ — линейно упорядоченное множество и Y — векторное подпространство $\mathbb{R}^S$, удовлетворяющее включениям $\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}} \subset Y \subset \mathbb{R}^S_{\min}$.

Как легко видеть, лемма Цорна применима к множеству пар (X, F), составленных из пространств $\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}} \subset X \subset Y$ и операторов $F\colon x \in X \mapsto x^* \in \mathbb{R}^S$, удовлетворяющих условиям (a)–(d), относительно порядка $(X_1, F_1) \leqslant (X_2, F_2) \Leftrightarrow (X_1 \subset X_2,\ F_1 = F_2|_{X_1})$. Следовательно, задача будет решена, если мы рассмотрим векторное подпространство $X \subset Y$, содержащее $\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}}$, оператор $F\colon x \in X \mapsto x^* \in \mathbb{R}^S$, удовлетворяющий (a)–(d), фиксируем вектор $y \in Y \backslash X$ и продолжим F на подпространство $X + \mathbb{R}y \subset Y$ с сохранением условий (a)–(d).

Снабдим Y, X и X^* порядками, наведенными функциональной структурой $(S, \leqslant)$.

Предварительно покажем, что для любых $x_1, x_2 \in X$ и $s \in S$

$$x_1 =_s x_2 \Leftrightarrow x_1^* =_s x_2^*. \tag{2}$$

Поскольку при $x_1 \neq x_2$ соотношение $x_1 =_s x_2$ равносильно $s \leqslant \min[x_1 \neq x_2]$, причем $[x_1 \neq x_2] = [\,|x_1 - x_2|\,]$, для обоснования (2) достаточно показать, что $\min[x] = \min[x^*]$

для всех $x \in X^{++}$. Действительно, благодаря 3.7 (b) для $x \in X^{++}$ и $s \in S$ мы имеем $\min[x] = s \Leftrightarrow x \sim 1_{\{s\}} \Leftrightarrow x^* \sim 1^*_{\{s\}} = 1_{\{s\}} \Leftrightarrow \min[x^*] = s$.

Рассмотрим следующее подмножество S:

$$T := \{\min[x \neq y] : x \in X\}.$$

Заметим, что T — начальный фрагмент S, т.е. $(\forall s \in S)(\forall t \in T)(s \leqslant t \Rightarrow s \in T)$. Действительно, если $x \in X$ и $s < t = \min[x \neq y]$, то $x' := x + 1_{\{s\}} \in X$ и $s = \min[x' \neq y] \in T$.

Для каждой точки $t \in T$ рассмотрим какой-либо элемент $x \in X$, удовлетворяющий равенству $t = \min[x \neq y]$, и положим $x_t := x - x(t)1_{\{t\}} + y(t)1_{\{t\}}$, $t' := \min[x_t \neq y]$. Тогда для всех $t \in T$ имеют место следующие соотношения:

$$x_t \in X, \quad t' \in T, \quad t < t', \quad x_t =_{t'} y.$$

Определим функцию $y^* \in \mathbb{R}^S$, полагая $y^*(t) := x^*_t(t)$ для $t \in T$ и $y^*(s) := 0$ для $s \in S \backslash T$. Покажем, что для всех $t \in T$

$$x^*_t =_{t'} y^*.$$

Действительно, пусть $s < t'$. Из $x_s =_{s'} y$ и $x_t =_{t'} y$ следует $x_s =_r x_t$, где $r := \min\{s', t'\}$, откуда согласно (2) вытекает совпадение $x^*_s =_r x^*_t$. Следовательно, $y^*(s) = x^*_s(s) = x^*_t(s)$, так как $s < r$.

Продолжим изоморфизм $F \colon X \to X^*$ до линейного оператора $\overline{F} \colon X + \mathbb{R}y \to \mathbb{R}^S$, полагая $\overline{F}(x + \alpha y) := x^* + \alpha y^*$, и покажем, что оператор $\overline{F}$ и его образ $X^* + \mathbb{R}y^*$ удовлетворяют условиям (a)–(d).

(a) Если $t \in [y^*]$, то $t \in T$, $t < t'$, $y^* =_{t'} x^*_t$ и поэтому $\{s \in [y^*] : s \leqslant t\} \subset [x^*_t]$ — вполне упорядоченное множество, так как $x^*_t \in X^* \subset \mathbb{R}^S_{\mathrm{wo}}$. Ввиду произвольности $t \in [y^*]$ отсюда вытекает вполне упорядоченность $[y^*]$. Из включений $y^* \in \mathbb{R}^S_{\mathrm{wo}}$ и $\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}} \subset X^* \subset \mathbb{R}^S_{\mathrm{wo}}$ следует, что $\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}} \subset X^* + \mathbb{R}y^* \subset \mathbb{R}^S_{\mathrm{wo}}$.

(b) Для обоснования инъективности оператора $\overline{F} \colon X + \mathbb{R}y \to X^* + \mathbb{R}y^*$ достаточно показать, что $y^* \notin X^*$. Допустим, $x^* = y^*$ для некоторого вектора $x \in X$. Поскольку $x \neq y$, мы можем рассмотреть точку $t := \min[x \neq y] \in T$. Тогда $t < t'$ и $x^* = y^* =_{t'} x^*_t$, откуда в силу (2) следует, что $x =_{t'} x_t$. С другой стороны, $x_t =_{t'} y$, а значит, $x =_{t'} y$ и поэтому $t' \leqslant \min[x \neq y] = t$ вопреки неравенству $t < t'$.

Докажем, что $\overline{F}$ сохраняет порядок. Элементарные выкладки показывают, что для этого достаточно обосновать импликации $x < y \Rightarrow x^* < y^*$ и $x > y \Rightarrow x^* > y^*$ для любых $x \in X$. Ограничимся доказательством первой импликации, поскольку вторая устанавливается совершенно аналогично.

Итак, допустим, что $x \in X$, $x < y$, но $x^* > y^*$ (равенство $x^* = y^*$ уже исключено). Тогда $x^*(t) > y^*(t)$, где $t := \min[x^* \neq y^*]$. Если бы $t > [y^*]$, то с учетом (d) мы бы имели $y^* = y^*\rceil_t = x^*\rceil_t \in X^*$, что невозможно. Следовательно, $(\exists\, s \in S)\ t \leqslant s \in [y^*] \subset T$, а значит, $t \in T$ и мы располагаем вектором $x_t \in X$ и точкой $t' \in T$, для которых $t < t'$, $x_t =_{t'} y$, $x^*_t =_{t'} y^*$. Далее, $x^*_t(t) = y^*(t) < x^*(t)$, причем $x^*_t =_t y^* =_t x^*$, откуда следует, что $x^*_t < x^*$. Тогда $x_t < x$, поскольку F является порядковым изоморфизмом. Из неравенств $x_t < x < y$ последовательно выводим $0 < x - x_t < y - x_t$, $x - x_t \preccurlyeq y - x_t$, $\min[x_t \neq x] \geqslant \min[x_t \neq y] = t'$, $x_t =_{t'} x$, $x^*_t =_{t'} x^*$, $x^*_t(t) = x^*(t)$ и получаем противоречие с неравенством $x^*_t(t) < x^*(t)$.

Условие (c) сохраняется ввиду включения $\mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}} \subset X$.

(d) Если $t \in T$, то $y^*\rceil_t = x^*_t\rceil_t \in X^*$, а если $t \notin T$, то $y^*\rceil_t = y^*$. Следовательно, $(x^* + \alpha y^*)\rceil_t = x^*\rceil_t + \alpha y^*\rceil_t \in X^* + \mathbb{R}y^*$ для любых $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \in S$. ▷

3.10. Замечание. Предложенное нами доказательство леммы 3.9 не является оригинальным и фактически воспроизводит схему доказательства теоремы [5, 3.2]. Значительного упрощения по сравнению с выкладками, приведенными в [5], удается достичь за счет леммы 3.8, благодаря которой абстрактное упорядоченное векторное пространство заменяется его функциональной предлексикографической копией.

3.11. Следующее утверждение, вытекающее из 3.8 и 3.9, представляет собой переформулировку теоремы [5, 3.1], согласно которой во всяком линейно упорядоченном векторном пространстве порядок является лексикографическим.

Теорема. *Пусть $X = (X, \leqslant)$ — линейно упорядоченное векторное пространство. Рассмотрим произвольное максимальное дискретное множество $D \subset X$ и снабдим его порядком $\leqslant_D$, полагая $d \leqslant_D e \Leftrightarrow e \leqslant d$. Тогда $(X, \leqslant) = X(D, \leqslant_D, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ для некоторой лексикографической структуры $(D, \leqslant_D, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ на X, удовлетворяющей следующим дополнительным условиям: $\langle d] = 1_{\{d\}}$ и $\langle x]\rceil_d \in \langle X]$ для всех $x \in X$ и $d \in D$.*

3.12. Пусть X — векторное пространство. Напомним, что сильнейшей локально выпуклой топологией на X является топология Макки τ_X, согласованная с двойственностью $(X, X^{\#})$ (см., например, [6, 8-2-14; 1, 10.4.4]). Относительно этой топологии непрерывны все линейные функционалы. Выпуклое множество $C \subset X$ плотно в X относительно топологии τ_X тогда и только тогда, когда C не лежит ни в каком полупространстве $\{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}$, где $f \in X^{\#} \backslash \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Конус $K \subset X$ плотен в X относительно τ_X тогда и только тогда, когда нулевой функционал является единственным линейным функционалом, положительным на K: если $f \in X^{\#}$ и $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in K$, то $f = 0$.

Теорема. *Пусть $X = X(S, \leqslant_S, \langle\cdot|\cdot\rangle)$, где $(S, \leqslant_S, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ — предлексикографическая структура на X. Конус X^+ плотен в X относительно сильнейшей локально выпуклой топологии тогда и только тогда, когда в $(S, \leqslant_S)$ отсутствует наименьший элемент.*

$\triangleleft$ *Необходимость.* Если в S существует наименьший элемент s, то для всех $x \in X \backslash \{0\}$ из неравенства $s \leqslant_S \min[x]$ следует, что $\langle x\,|\,s\rangle = \langle x\,|\min[x]\rangle$ при $s = \min[x]$ и $\langle x\,|\,s\rangle = 0$ в остальных случаях, а значит, $\langle x\,|\,s\rangle \geqslant 0$ при $x > 0$, т. е. $[s\rangle$ — положительный на X^+ ненулевой линейный функционал (см. 3.4).

Достаточность. Пусть имеется ненулевой функционал $f \in X^{\#}$ такой, что $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in X^+$. Поскольку $f \neq 0$, существует вектор $x \in X^{++}$, для которого $f(x) > 0$. Покажем, что $\min[x] = \min S$.

Допустим вопреки доказываемому, что $s <_S \min[x]$ для некоторой точки $s \in S$. Согласно 3.3 (b) имеется вектор $y \in X^{++}$, для которого $\min[y] = s$. Положим $z := y - \frac{f(y)+1}{f(x)} x$. Поскольку $\min[y] = s <_S \min[x]$, имеют место равенства $\min[z] = s$ и $\langle x\,|\,s\rangle = 0$. Следовательно, $\langle z\,|\min\rangle = \langle z\,|\,s\rangle = \langle y\,|\,s\rangle \geqslant 0$, т. е. $z \in X^+$ и поэтому $f(z) \geqslant 0$. С другой стороны, $f(z) = f(y) - \frac{f(y)+1}{f(x)} f(x) = -1$. $\triangleright$

4. Базисные максимальные конусы

4.1. Если X — произвольное векторное пространство над $\mathbb{R}$ и B — базис Гамеля в X, то значение двойственности $\langle x\,|\,b\rangle$ по умолчанию определяется как коэффициент при $b \in B$ в разложении $\sum_{b\in B} \langle x\,|\,b\rangle b$ вектора $x \in X$ по базису B. В этом случае $(B, \leqslant_B)$ — лексикографическая структура на X для любого линейного порядка $\leqslant_B$ на B. Структуры такого вида будем называть *базисными.*

Максимальный конус в векторном пространстве X назовем *базисным*, если он соответствует базисной лексикографической структуре, т. е. имеет вид $X(B, \leqslant_B)^+$ для некоторого линейно упорядоченного базиса Гамеля $(B, \leqslant_B)$ пространства X.

4.2. Лемма. *Пусть B — базис Гамеля в линейно упорядоченном векторном пространстве X и пусть $\leqslant_B$ — линейный порядок на B. Следующие утверждения равносильны:*
(a) $X = X(B, \leqslant_B)$;
(b) *множество B дискретно и $b \leqslant_B c \Leftrightarrow b \geqslant c$ для всех $b, c \in B$.*

$\triangleleft$ (a)$\Rightarrow$(b). Пусть $X = X(B, \leqslant_B)$. Тогда для любых $b, c \in B$

$$\begin{aligned} b \leqslant_B c \;\Leftrightarrow\; \min\nolimits_B\{b, c\} = b \;\Leftrightarrow\; \langle b - c \,|\, \min\rangle \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\; b - c \in X(B, \leqslant_B)^+ = X^+ \;\Leftrightarrow\; b \geqslant c. \end{aligned}$$

Если $b \in B$, то $\langle b \,|\, \min\rangle = \langle b \,|\, b\rangle = 1 \geqslant 0$ и, следовательно, $b \in X(B, \leqslant_B)^+ = X^+$. Рассмотрим произвольные $b, c \in B$, $b \neq c$. Предположим для определенности, что $b \leqslant_B c$. Если $b \sim c$ вопреки доказываемому, то имеется число $\alpha > 0$, для которого $b < \alpha c$. Тогда $\alpha c - b \in X^+ = X(B, \leqslant_B)^+$ и поэтому $\langle \alpha c - b \,|\, \min\rangle \geqslant 0$. С другой стороны,

$$\langle \alpha c - b \,|\, \min\rangle = \langle \alpha c - b \,|\, \min\nolimits_B\{b, c\}\rangle = \langle \alpha c - b \,|\, b\rangle = -1.$$

(b)$\Rightarrow$(a). Чтобы установить включение $X^+ \subset X(B, \leqslant_B)^+$, рассмотрим произвольный элемент $x \in X^{++}$, положим $b := \min[x]$, $\alpha := \langle x \,|\, b\rangle$ и покажем, что $\alpha \geqslant 0$. Если множество $C := [x] \backslash \{b\}$ пусто, то $x = \alpha b$ и тогда $\alpha \geqslant 0$. Пусть теперь $C \neq \varnothing$. Предположим вопреки доказываемому, что $\alpha < 0$. Для каждого элемента $c \in C$ мы имеем $b <_B c$, откуда с учетом (b) вытекает $c \prec b$, т. е. $c < \beta b$ для всех $\beta > 0$. Тогда

$$x - \alpha b = \sum_{c \in C} \langle x \,|\, c\rangle c \leqslant \sum_{c \in C} \big|\langle x \,|\, c\rangle\big| c < \sum_{c \in C} \big|\langle x \,|\, c\rangle\big| \frac{-\alpha}{\big|\langle x \,|\, c\rangle\big|\, |C|} b = -\alpha b,$$

где $|C|$ — число элементов множества C. Следовательно, $x < 0$, что противоречит условию $x \in X^+$. Таким образом, $X^+ \subset X(B, \leqslant_B)^+$, а значит, $X^+ = X(B, \leqslant_B)^+$ в силу максимальности конуса X^+. $\triangleright$

4.3. Следствие. *Максимальный конус K в векторном пространстве X является базисным тогда и только тогда, когда в $(X, \leqslant_K)$ существует дискретный базис Гамеля.*

4.4. Замечание. Максимальное дискретное (и поэтому линейно независимое) подмножество линейно упорядоченного векторного пространства X не обязано быть базисом Гамеля, даже если в X существует дискретный базис Гамеля. Примером служит максимальное дискретное множество $\big\{1_{\{n\}} : n \in \mathbb{N}\big\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}} + \mathbb{R}1_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ с порядком, наведенным функциональной лексикографической структурой $(\mathbb{N}, \leqslant_{\mathbb{N}})$, где $\leqslant_{\mathbb{N}}$ — стандартный порядок на $\mathbb{N}$. Дискретным базисом Гамеля в данном случае является, например, множество $\{1_{[n,\infty)} : n \in \mathbb{N}\}$.

4.5. *Если $(S, \leqslant_S)$ — предлексикографическая структура мощности $|S|$ на векторном пространстве X и $|S| < \dim X$, то в $X(S, \leqslant_S)$ не существует дискретного базиса Гамеля.*

$\triangleleft$ Никакое дискретное множество $D \subset X(S, \leqslant_S)$ не может быть базисом Гамеля в X, так как согласно 3.7 (b) отображение $d \in D \mapsto \min[d] \in S$ инъективно и, следовательно, $|D| \leqslant |S| < \dim X$. $\triangleright$

В частности, для любого бесконечного вполне упорядоченного множества $(S, \leqslant_S)$ пространство $\mathbb{R}^S(S, \leqslant_S)$ не имеет дискретного базиса Гамеля и поэтому $\mathbb{R}^S(S, \leqslant_S)^+$ служит примером максимального конуса в $\mathbb{R}^S$, не являющегося базисным (см. 4.3).

4.6. Замечание. Поскольку для всякой предлексикографической структуры $(S, \leqslant_S)$ на X имеет место неравенство $\dim X \leqslant \dim \mathbb{R}^S$ (см. 3.2 (b)), из 4.5 следует, что небазисный максимальный конус существует в любом пространстве, размерность λ которого удовлетворяет условию $\kappa < \lambda \leqslant 2^\kappa$ для какого-либо кардинала κ. Этим свойством обладают кардиналы λ, не являющиеся строго предельными. Напомним, что кардинал λ называется *строго предельным*, если для любого кардинала κ из $\kappa < \lambda$ следует $2^\kappa < \lambda$ (см. [7, § 5]). Наименьшим строго предельным кардиналом является $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$. Если κ_1 — произвольный кардинал и $\kappa_{n+1} = 2^{\kappa_n}$ $(n \in \mathbb{N})$, то $\sup\{\kappa_n : n \in \mathbb{N}\}$ — строго предельный кардинал, откуда следует, что строго предельные кардиналы образуют собственный класс.

Таким образом, согласно 4.5 небазисный максимальный конус существует в любом пространстве, размерность которого бесконечна и не является строго предельным кардиналом. Тем не менее это наблюдение не имеет особой ценности, поскольку, как показывает приведенная ниже теорема, небазисный максимальный конус существует в любом пространстве несчетной размерности.

4.7. Теорема. *В векторном пространстве X все максимальные конусы являются базисными тогда и только тогда, когда X имеет конечную или счетную размерность.*

$\triangleleft$ *Необходимость.* Пусть размерность $\dim X$ векторного пространства X бесконечна и не счетна. Покажем, что в X имеется максимальный конус, не являющийся базисным.

Если $|\mathbb{N}| < \dim X \leqslant |\mathbb{R}|$, то нужный нам факт содержится в 4.6. Пусть $\dim X > |\mathbb{R}|$. Рассмотрим вполне упорядоченное множество $(S, \leqslant_S)$ и два его подмножества $M, N \subset S$ такие, что

$$\begin{aligned}
&S = M \cup N,\\
&M <_S N \ (\text{т. е. } m <_S n \text{ для всех } m \in M \text{ и } n \in N),\\
&|M| = \dim X,\\
&N \text{ порядково изоморфно } \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

(В качестве S можно взять ординал $\dim X + \omega$ и положить $M := \dim X$, $N := S \backslash M$.) Определим векторные подпространства $Y, Z \subset \mathbb{R}^S$, полагая

$$Y := \{y \in \mathbb{R}^S : [y] \subset N\}, \quad Z := \{z \in \mathbb{R}^S_{\mathrm{fin}} : [z] \subset M\}.$$

Поскольку

$$\dim Y = \dim \mathbb{R}^N = \dim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = |\mathbb{R}|, \quad \dim Z = \dim \mathbb{R}^M_{\mathrm{fin}} = |M| = \dim X > |\mathbb{R}|,$$

размерность суммы $Y + Z \subset \mathbb{R}^S$ совпадает с размерностью X, а значит, можно считать, что $X = Y + Z$. Снабдим X порядком, наведенным функциональной лексикографической структурой $(S, \leqslant_S)$, и покажем, что максимальный конус X^+ не является базисным.

Пусть вопреки доказываемому в X существует дискретный базис гамеля B (см. 4.3). Покажем, что $\mathrm{lin}(B \cap Y) = Y$, для чего возьмем произвольный элемент $y \in Y \backslash \{0\}$ и установим включение $y \in \mathrm{lin}(B \cap Y)$. Рассмотрим разложение $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$, где $b_1, \dots, b_n \in B$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Учитывая дискретность множества B, можно считать, что $b_1 \prec \dots \prec b_n$, т. е. $\min[b_1] >_S \dots >_S \min[b_n]$ (см. 3.7 (b)). Тогда $\min[y] = \min[b_n]$ и поэтому $\min[b_n] \in N$, так как $[y] \subset N$ в силу включения $y \in Y$. Поскольку N — финальный фрагмент S, мы имеем $\min[b_1], \dots, \min[b_n] \in N$ и $[b_1], \dots, [b_n] \subset N$, т. е. $b_1, \dots, b_n \in Y$. Следовательно, $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \in \mathrm{lin}(B \cap Y)$. Таким образом, $\mathrm{lin}(B \cap Y) = Y$, а значит, $B \cap Y$ — дискретный базис Гамеля в Y, что противоречит 4.5, так как пространство Y изоморфно $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}(\mathbb{N}, \leqslant_{\mathbb{N}})$.

Достаточность установлена, например, в [4, гл. IV, теорема 19]. Мы приведем здесь элементарное доказательство, не задействующее специфические конструкции и факты из теории групп.

Пусть X — векторное пространство размерности $|N|$, где $N = \{1, \ldots, m\}$ или $N = \mathbb{N}$, и пусть K — максимальный конус в X. Снабдим X линейным векторным порядком $\leqslant_K$ и рассмотрим произвольный базис Гамеля $(x_n)_{n\in N} \subset X^+$. Построим последовательность $(y_n)_{n\in N} \subset X^{++}$, удовлетворяющую условию

$$(\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\})(i \neq j \ \Rightarrow\ y_i \nsim y_j), \quad \operatorname{lin}\{y_1, \ldots, y_n\} = \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$$

для всех $n \in N$, с помощью следующей рекурсивной процедуры: положим $y_1 := x_1$ и выберем в качестве y_{n+1} произвольный вектор $\tilde{x}$, существование которого утверждается в лемме 2.5 для $Y := \{y_1, \ldots, y_n\}$ и $x := x_{n+1}$. Как легко видеть, $\{y_n : n \in N\}$ — дискретный базис Гамеля в пространстве $(X, \leqslant_K)$, а значит, K — базисный конус согласно 4.3. ▷

Литература

1. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2006.
2. *Фельдман М. М.* О сублинейных операторах, определенных на конусе // Сиб. матем. журн.—1975.—Т. 16, № 6.—С. 1308–1321.
3. *Вулих Б. З.* Введение в теорию конусов в нормированных пространствах.—Калинин: Изд-во КГУ, 1977.
4. *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы.—М.: Мир, 1965.
5. *Hausner M., Wendel J. G.* Ordered vector spaces // Proc. Amer. Math. Soc.—1952.—Vol. 3.—P. 977–982. DOI: 10.1090/S0002-9939-1952-0052045-1.
6. *Wilansky A.* Modern Methods in Topological Vector Spaces.—New York: McGraw-Hill, 1978.
7. *Jech T.* Set Theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded.—Berlin, etc.: Springer, 2003.

Статья поступила 10 июля 2019 г.

Гутман Александр Ефимович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
заведующий лабораторией функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4;

Новосибирский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1

E-mail: gutman@math.nsc.ru

Емельяненков Иван Александрович

Новосибирский государственный университет,
студент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1

E-mail: EmelIvanAl@yandex.ru

LEXICOGRAPHIC STRUCTURES ON VECTOR SPACES

Gutman A. E., Emelyanenkov I. A.

Basic properties are described of the Archimedean equivalence and dominance in a totally ordered vector space. The notion of (pre)lexicographic structure on a vector space is introduced and studied. A lexicographic structure is a duality between vectors and points which makes it possible to represent an abstract ordered vector space as an isomorphic space of real-valued functions endowed with a lexicographic order. The notions of function and basic lexicographic structures are introduced. Interrelations are clarified between an ordered vector space and its function lexicographic representation. A new proof is presented for the theorem on isomorphic embedding of a totally ordered vector space into a lexicographically ordered space of real-valued functions with well-ordered supports. A criterion is obtained for denseness of a maximal cone with respect to the strongest locally convex topology. Basic maximal cones are described in terms of sets constituted by pairwise nonequivalent vectors. The class is characterized of vector spaces in which there exist nonbasic maximal cones.

Keywords: maximal cone, dense cone, totally ordered vector space, Archimedean equivalence, Archimedean dominance, lexicographic order, Hamel basis, locally convex space.

References

1. *Kutateladze S. S. Fundamentals of Functional Analysis*, Dordrecht etc., Kluwer Academic Publishers, 1996, 284 p.
2. *Fel'dman M. M.* Sublinear operators defined on a cone, *Siberian Math. J.*, 1975, vol. 16, no. 6, pp. 1005–1015.
3. *Vulikh B. Z. Vvedenie v teoriyu konusov v normirovannykh prostranstvakh* [*Introduction to the theory of cones in normed spaces*], Kalinin, KGU, 1977, 84 p.
4. *Fuchs L. Partially Ordered Algebraic Systems*, Oxford, etc., Pergamon Press, 1963, 229 p.
5. *Hausner M., Wendel J. G.* Ordered vector spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1952, vol. 3, pp. 977–982. DOI: 10.1090/S0002-9939-1952-0052045-1.
6. *Wilansky A. Modern Methods in Topological Vector Spaces*, New York, McGraw-Hill, 1978, 298 p.
7. *Jech T. Set Theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Berlin, etc., Springer, 2003, 771 p.

Received July 10, 2019

Gutman Alexander Efimovich

Sobolev Institute of Mathematics,
Head of the Laboratory of Functional Analysis
4 Academician Koptyug av., Novosibirsk, 630090, Russia;

Novosibirsk State University,
Professor of the Department of Mathematical Analysis
1 Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia

E-mail: `gutman@math.nsc.ru`

ORCID: 0000-0003-2030-7459

Emelyanenkov Ivan Alexandrovich

Novosibirsk State University,
Student of the Department of Mathematical Analysis
1 Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia

E-mail: `EmelIvanAl@yandex.ru`