

УДК 517.98

БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ УНИВЕРСУМ КАК АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА.

I. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ

А. Е. Гутман

Аннотация. Исследуются булевозначные алгебраические системы теоретико-множественной сигнатуры. Развита аппарат частичных элементов булевозначной системы. Приведен формальный механизм использования частичных элементов и булевозначных классов в оценках истинности формул. Исследованы предикативные булевозначные классы, допускающие квантификацию. Описаны логические взаимосвязи между основными свойствами булевозначных систем — принципами подъема, перемешивания и максимума.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.505

Ключевые слова: булевозначная алгебраическая система, теория множеств, булевозначный анализ.

*Юрию Григорьевичу Решетняку
в связи с его 90-летием*

Статья является первой частью работы, которая продолжает, развивает и замещает предпринятое в [1] исследование булевозначных алгебраических систем теоретико-множественной сигнатуры.

В § 1 уточнен формализм, стоящий за гипотезами и заключениями, представляющими собой бесконечные наборы формул. В § 2 приведены основные сведения, связанные с понятием булевозначной алгебраической системы. В § 3 введен и развит аппарат частичных элементов булевозначной системы и соответствующих подъемов, а также приведен формальный механизм использования частичных элементов и булевозначных классов в оценках истинности формул. В § 4 изучены предикативные булевозначные классы, допускающие квантификацию, и элементы, реализующие такие классы. В § 5 предложена интерпретация принципа перемешивания в терминах соединений антицепей частичных элементов. В § 6 установлена взаимосвязь между цикличностью и достижением максимума экстенциональными булевозначными функциями.

Вторая часть исследования будет опубликована в виде отдельной статьи и посвящена понятию универсума над булевозначной экстенциональной системой. В ней будут изучены логические свойства транзитивных булевозначных подсистем, описаны кумулятивные иерархии в булевозначном универсуме и приведен общий механизм интенционального пополнения, позволяющий строить примеры булевозначных систем с необычными свойствами. С помощью этого

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2 (проект № 0314–2016–0005).

механизма для произвольной полной булевой алгебры будет показано, что ни одно из условий, перечисленных в определении булевозначного универсума, не вытекает из остальных.

§ 1. Формализм бесконечных утверждений

В математических текстах часто используются «объявления гипотез», когда на протяжении фрагмента рассуждений (определений и доказательств) предполагаются выполненными определенные условия или за какими-либо переменными закрепляется роль объектов, удовлетворяющих определенным условиям. Примером объявления гипотезы служит фраза «всюду ниже B — полная булева алгебра», с которой начинается следующий параграф данной статьи. Фактически эта фраза «фиксирует» букву B и добавляет «временную» аксиому $\gamma(B)$, формализующую утверждение « B — полная булева алгебра».

В подавляющем большинстве случаев эффект, производимый объявлением гипотезы, вполне понятен на неформальном уровне, но использование бесконечных наборов формул в качестве гипотез или заключений принуждает к аккуратности.

1.1. Рассматриваемая проблематика характерна наличием «бесконечных утверждений», представляющих собой бесконечные множества формул. Такими являются, например, утверждения «система X является моделью теории T » или «система X удовлетворяет принципу максимума».

Логические связки между бесконечными утверждениями обретают смысл благодаря механизму формального вывода. Например, если хотя бы одно из утверждений Γ или Δ бесконечно, то импликация $\Gamma \Rightarrow \Delta$ сама по себе смысла не имеет, но фраза « Γ влечет Δ в теории T » поддается формализации в виде выводимости: $T, \Gamma \vdash \Delta$.

1.2. Пусть T — какая-либо теория (множество предложений) сигнатуры Σ , и пусть Γ и Δ — произвольные множества формул сигнатуры Σ . (Множества Γ и Δ могут быть бесконечными, и содержащиеся в них формулы могут иметь свободные вхождения переменных.) Выводимость заключения Δ из гипотезы Γ в рамках теории T записывается в виде $T, \Gamma \vdash \Delta$ и определяется посредством понятия формального вывода в исчислении предикатов: для любой формулы $\delta \in \Delta$ существует конечная последовательность формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ такая, что $\varphi_n = \delta$ и каждая формула φ_i либо принадлежит $T \cup \Gamma$, либо получается из предшествующих формул $\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}$ с помощью классических правил вывода, за исключением правил с кванторами по свободным переменным, входящим в формулы $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \cap \Gamma$.

1.3. С помощью теоремы о полноте легко доказать равносильность следующих утверждений:

(a) $T, \Gamma \vdash \Delta$;

(b) $T, \Gamma \vdash \delta$ для всех $\delta \in \Delta$;

(c) для любой формулы $\delta \in \Delta$ существует конечный набор $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ такой, что

$$T \vdash (\forall \bar{v})(\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n \Rightarrow \delta),$$

где \bar{v} — перечень свободных переменных, входящих в $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta$;

(d) для любой модели X теории T и любого означивания $\nu: V \rightarrow X$ свободных переменных V , входящих в $\Gamma \cup \Delta$, из истинности $X \models \gamma[\nu]$ для всех $\gamma \in \Gamma$ вытекает истинность $X \models \delta[\nu]$ для всех $\delta \in \Delta$.

1.4. Механизм объявления конечной гипотезы $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ поддается более простой формализации. В этом случае с помощью замены свободных переменных формулы $\gamma := \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n$ на константы можно обойтись формальными выводами, задействующими лишь предложения. Формализм, стоящий за «фиксацией» объектов v_1, \dots, v_m , удовлетворяющих условию $\gamma(v_1, \dots, v_m)$, раскрывается следующим фактом, легко проверяемым с помощью теоремы о полноте.

Пусть $\bar{v} := v_1, \dots, v_m$ — перечень свободных переменных, входящих в формулу $\gamma(\bar{v})$. Рассмотрим сигнатуру Σ^* , полученную из Σ добавлением констант $\bar{c} := c_1, \dots, c_m$, и теорию T^* сигнатуры Σ^* , полученную из T добавлением аксиомы $\gamma(\bar{c})$.

(а) Для любой формулы $\delta(\bar{v})$ сигнатуры Σ

$$T^* \vdash \delta(\bar{c}) \Leftrightarrow T, \gamma(\bar{v}) \vdash \delta(\bar{v}) \Leftrightarrow T \vdash (\forall \bar{v})(\gamma(\bar{v}) \Rightarrow \delta(\bar{v})).$$

(б) Если $T \vdash (\exists \bar{v}) \gamma(\bar{v})$, то T^* консервативно расширяет T , т. е. для любого предложения φ сигнатуры Σ

$$T^* \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \varphi.$$

1.5. Например, в рамках гипотезы « B — полная булева алгебра» выражение

$$\text{ZFC} \vdash (\mathbb{V}^{(B)} \models \text{ZFC}),$$

символизирующее доказуемость в ZFC бесконечного утверждения « $\mathbb{V}^{(B)}$ является моделью ZFC», формально эквивалентно выводимости

$$\text{ZFC}, B \text{ — полная булева алгебра} \vdash (\mathbb{V}^{(B)} \models \text{ZFC}),$$

которая, в свою очередь, означает что для всякого предложения φ , являющегося теоремой ZFC, выполняется любое из следующих трех равносильных условий:

- (а) $\text{ZFC}, B \text{ — полная булева алгебра} \vdash (\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi)$;
- (б) $\text{ZFC} \vdash (\forall B)(B \text{ — полная булева алгебра} \Rightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \varphi)$;
- (с) $\text{ZFC}^* \vdash (\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi)$,

где ZFC^* — расширение ZFC константой B и аксиомой « B — полная булева алгебра».

1.6. В дальнейшем под *формулами* понимаются формулы теоретико-множественной сигнатуры $\{=, \in\}$ (или более богатой сигнатуры, полученной в результате расширения теории формальными определениями).

Все формулы осмысливаются в контексте теории множеств, а не теории классов. В частности, даже если символ X закреплен за классом $\{x : \varphi(x)\}$, запись $(\exists Y \subset X) \psi(Y)$, являясь сокращением формулы

$$(\exists Y)((\forall x)(x \in Y \Rightarrow \varphi(x)) \wedge \psi(Y)),$$

интерпретируется как существование *множества* (а не класса) $Y \subset X$, обладающего свойством $\psi(Y)$.

Фраза вида « φ — формула со свободными переменными $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$ » означает, что список \bar{x} содержит все переменные, свободно входящие в φ . Случай, когда \bar{x} совпадает с совокупностью свободных переменных формулы φ , будут оговариваться явно.

§ 2. Булевозначные алгебраические системы

Всюду ниже B — полная булева алгебра.

2.1. Пусть $X, =_X, \in_X$ — определяемые в ZFC термы или классы. Говорят, что $(X, =_X, \in_X)$ является *булевозначной* (точнее, *B-значной*) *алгебраической системой* или, более коротко, *булевозначной системой* или *B-системой*, имея в виду конъюнкцию следующих формул:

$$\begin{aligned} X \neq \emptyset, \quad =_X: X^2 \rightarrow B, \quad \in_X: X^2 \rightarrow B, \\ \text{для всех } x, y, z \in X \\ =_X(x, x) = 1_B, \quad =_X(x, y) = =_X(y, x), \quad =_X(x, y) \wedge_B =_X(y, z) \leq_B =_X(x, z), \\ \in_X(x, y) \wedge_B =_X(y, z) \leq_B \in_X(x, z), \quad \in_X(x, y) \wedge_B =_X(x, z) \leq_B \in_X(z, y). \end{aligned}$$

Вместо $(X, =_X, \in_X)$ пишут просто X .

2.2. Предположим, что X — B -система. Для каждой формулы $\varphi(\bar{x})$, где $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$ — полный список свободных переменных φ , введем n -местный функциональный символ φ_X , условимся записывать терм $\varphi_X(\bar{x})$ в виде $[\varphi(\bar{x})]_X$ и расширим теорию определениями

$$\begin{aligned} [x = y]_X &:= =_X(x, y), \quad [x \in y]_X := \in_X(x, y), \\ [\varphi \vee \psi]_X &:= [\varphi]_X \vee_B [\psi]_X, \quad [\varphi \wedge \psi]_X := [\varphi]_X \wedge_B [\psi]_X, \\ [\neg \varphi]_X &:= \neg_B [\varphi]_X, \quad [\varphi \Rightarrow \psi]_X := \neg_B [\varphi]_X \vee_B [\psi]_X, \\ [(\exists x) \varphi]_X &:= \vee_B \{[\varphi]_X : x \in X\}, \quad [(\forall x) \varphi]_X := \wedge_B \{[\varphi]_X : x \in X\}, \end{aligned}$$

где φ и ψ — произвольные формулы, \neg_B — операция дополнения в булевой алгебре B .

На формальном уровне приведенные выше равенства корректно определяют функциональные символы φ_X в рамках теории, полученной из ZFC добавлением гипотез « B — полная булева алгебра» и « X — B -система». Определения символов φ_X расширяют сигнатуру и аксиоматику, приводя к консервативному расширению ZFC* исходной теории. (Соответствующий формализм более подробно рассмотрен в [2].) При этом для любой формулы $\varphi(\bar{x})$ в ZFC* выводима формула $(\forall \bar{x} \in X) [\varphi(\bar{x})]_X \in B$. В дальнейшем вместо ZFC* будем писать ZFC, неявно присоединяя к аксиоматике объявляемые гипотезы и определения.

2.3. В контексте $\bar{x} \in X$ говорят, что формула $\varphi(\bar{x})$ *истинна в булевозначной системе* X , и пишут $X \models \varphi(\bar{x})$, если $[\varphi(\bar{x})]_X = 1_B$.

Систему X называют *булевозначной моделью множества предложений* Φ и пишут $X \models \Phi$, если $X \models \varphi$ для всех $\varphi \in \Phi$. Под *булевозначной моделью теории* понимается модель множества всех теорем этой теории. Отметим, что в случае бесконечного множества Φ условие $X \models \Phi$ является бесконечным утверждением (см. § 1), представляющим собой набор формул $X \models \varphi, \varphi \in \Phi$.

Как известно, в булевозначной системе истинны все тавтологии (т. е. теоремы теории предикатов), а правила вывода сохраняют истинность. Точнее говоря, в предположении, что X является B -системой, справедливы следующие соотношения:

- (а) $\text{ZFC} \vdash (X \models \Phi)$, где Φ — совокупность всех тавтологий;
- (б) если множества предложений Γ и Δ таковы, что $\text{ZFC} \vdash (X \models \Gamma)$ и $\Gamma \vdash \Delta$, то $\text{ZFC} \vdash (X \models \Delta)$.

Таким образом, в записи $X \models \text{ZFC}$ под ZFC можно понимать как совокупность специальных аксиом ZFC, так и совокупность всех теорем ZFC.

2.4. Следующее простое соотношение, вытекающее из 2.3(а), будет часто использоваться без явных ссылок.

Пусть X — B -система, и пусть $\varphi(x, \bar{y})$ — произвольная формула, где $\bar{y} = y_1, \dots, y_n$. Тогда в ZFC доказуемо, что для любых $x_1, x_2, \bar{y} \in X$ и $b \in B$

$$\begin{aligned} [\varphi(x_1, \bar{y})]_X \wedge [x_1 = x_2]_X &= [\varphi(x_2, \bar{y})]_X \wedge [x_1 = x_2]_X; \\ [x_1 = x_2]_X \geq b &\Rightarrow [\varphi(x_1, \bar{y})]_X \wedge b = [\varphi(x_2, \bar{y})]_X \wedge b. \end{aligned}$$

2.5. В случае $\text{ZFC} \vdash (X \models \text{ZFC})$ записи $[\varphi(\bar{x})]_X$ и $X \models \varphi(\bar{x})$ обретают смысл не только для формул φ исходной сигнатуры $\{=, \in\}$, но и для формул, содержащих вхождения любых определяемых в ZFC предикатных и функциональных символов. Если φ — одна из таких формул, то под $[\varphi(\bar{x})]_X$ понимается $[\psi(\bar{x})]_X$, где ψ — результат элиминации определяемых символов, т. е. такая формула ψ сигнатуры $\{=, \in\}$, что $\text{ZFC} \vdash (\varphi \Leftrightarrow \psi)$. В частности, при рассмотрении булевозначной модели X теории ZFC имеется возможность употреблять такие термины и формулы, как $[x \cap y = \emptyset]_X$ или $X \models (f: x \rightarrow y)$.

Кроме того, в конструкциях вида $[\dots]_X$ и $X \models (\dots)$ допускается неформальное употребление «внешних» термов, определяемых в ZFC. Например, в контексте $f: A \rightarrow X$ запись $[f(a_1) = f(a_2)]_X = b$ служит сокращением формулы

$$(\exists x_1, x_2)(x_1 = f(a_1) \wedge x_2 = f(a_2) \wedge [x_1 = x_2]_X = b).$$

В дальнейшем для произвольной B -системы X будем использовать выражения вида $[x = \emptyset]_X$ и $[x \neq \emptyset]_X$ в качестве сокращений соответствующих термов $[\neg(\exists y)(y \in x)]_X$ и $[(\exists y)(y \in x)]_X$.

2.6. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности \sim между элементами B -системы X :

$$x \sim y \Leftrightarrow [x = y]_X = 1_B \Leftrightarrow X \models (x = y).$$

Система X называется *отделимой*, если $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ для всех $x, y \in X$. В случае 2-системы, где $2 := \{0, 1\}$ — простейшая булева алгебра, отделимость означает стандартность интерпретации равенства: $=_x(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$.

Фактор-класс $\tilde{X} := X/\sim$ системы X по отношению \sim (см. [3, 4.5]) является отделимой B -системой, элементарно эквивалентной исходной системе: для любого предложения φ в ZFC доказуемо равенство $[\varphi]_{\tilde{X}} = [\varphi]_X$. Более того,

$$\text{ZFC} \vdash (\forall x_1, \dots, x_n \in X) [\varphi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)]_{\tilde{X}} = [\varphi(x_1, \dots, x_n)]_X$$

для всякой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, где $\tilde{x} \in \tilde{X}$ — класс эквивалентности, соответствующий элементу $x \in X$.

2.7. Пусть X — B -система. Для произвольного элемента $x \in X$ определим функцию $[\cdot \in x]_X: X \rightarrow B$, полагая $[\cdot \in x]_X(z) = [z \in x]_X$ для всех $z \in X$. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности \simeq между элементами X :

$$x \simeq y \Leftrightarrow [\cdot \in x]_X = [\cdot \in y]_X \Leftrightarrow X \models (\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y).$$

Как легко видеть, $x \sim y \Rightarrow x \simeq y$. Систему X назовем *экстенциональной*, если $x \sim y \Leftrightarrow x \simeq y$ для всех $x, y \in X$ или, что то же самое, в X истинна аксиома экстенциональности:

$$X \models (\forall x, y)((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y).$$

Отделимая экстенциональная система характерна тем, что ее элементы однозначно определяются значениями истинности включений:

$$x = y \Leftrightarrow (\forall z \in X) [z \in x]_X = [z \in y]_X.$$

2.8. Говорят, что B -система Y является *подсистемой* B -системы X , если

$$Y \subset X, \quad =_Y \subset =_X, \quad \in_Y \subset \in_X.$$

Определяемый в ZFC терм или класс f называют *изоморфизмом между B -системами* X и Y и пишут $f: X \leftrightarrow_B Y$, если f — биекция между X и Y , удовлетворяющая условиям

$$[f(x_1) = f(x_2)]_Y = [x_1 = x_2]_X, \quad [f(x_1) \in f(x_2)]_Y = [x_1 \in x_2]_X$$

для всех $x_1, x_2 \in X$. Говорят, что B -системы X и Y *изоморфны*, и пишут $X \leftrightarrow_B Y$, если существует изоморфизм между X и Y .

§ 3. Интенциональность

Всюду ниже B — полная булева алгебра, X — произвольная B -система. Чтобы записи были менее громоздкими, будем, как правило, опускать индексы B и X в символах $\wedge_B, [\dots]_X$ и т. п.

3.1. Введем на классе $X \times B$ отношение эквивалентности \sim , полагая

$$(x_1, b_1) \sim (x_2, b_2) \Leftrightarrow [x_1 = x_2] \geq b_1 = b_2.$$

Определим фактор-класс $\%X := (X \times B)/\sim$, используя так называемый трюк Фреге — Рассела — Скотта (см. [3, 1.6.8]):

$$\%X := \{\sim(x, b) : (x, b) \in X \times B\};$$

$$\sim(x, b) := \{(y, b) : y \in X, [x = y] \geq b,$$

$$(\forall z \in X)([x = z] \geq b \Rightarrow \text{rank}(y) \leq \text{rank}(z))\},$$

где $\text{rank}(y)$ — ранг множества y в кумулятивной иерархии фон Неймана. Благодаря такому подходу классы эквивалентности $\sim(x, b)$, соответствующие парам $(x, b) \in X \times B$, оказываются множествами даже в том случае, когда X представляет собой собственный класс. Класс эквивалентности $\sim(x, b)$ условимся обозначать символом $x|_b$ и называть *частичным элементом* X , а точнее, *частью x с областью определения b* или *сужением x на b* . Область определения b частичного элемента $p = x|_b$ обозначим через $\text{dom } p$. Для $p = x|_b$ и $c \in B$ положим $p|_c := x|_{b \wedge c}$. Кроме того, для произвольных $P \subset X \cup \%X$ и $c \in B$ введем обозначения $P|_c := \{p|_c : p \in P\}$, $\%P := \{p|_b : p \in P, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} P|_b$. Для

$p \in \%X$ и $\bar{p} \in X \cup \%X$ будем писать $p \sqsubset \bar{p}$ и говорить, что p является *частью* или *сужением* \bar{p} , а \bar{p} является *продолжением* p , если $(\exists b \in B) p = \bar{p}|_b$ или, что то же самое, $p = \bar{p}|_{\text{dom } p}$.

3.2. Примем соглашение об употреблении частичных элементов в булевозначных оценках формул. Пусть φ — формула со свободными переменными $\bar{x} = x_1, \dots, x_n, \bar{y} = y_1, \dots, y_m$. Наряду с термами вида $[\varphi(\bar{x}, \bar{y})]$, имеющими смысл в контексте $\bar{x}, \bar{y} \in X$, в дальнейшем будем также использовать термы $[\varphi(\bar{x}, p_1, \dots, p_m)]$ для $p_1, \dots, p_m \in \%X$, придавая им следующий смысл: если $p_j = y_j|_{b_j}$ ($j = 1, \dots, m$), то

$$[\varphi(\bar{x}, p_1, \dots, p_m)] := [\varphi(\bar{x}, y_1, \dots, y_m)] \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_m. \quad (1)$$

Соглашение (1) корректно, поскольку правая часть (1) не зависит от выбора представителей (y_j, b_j) классов $y_j|_{b_j}$. Действительно, если $y_j|_{b_j} = y'_j|_{b'_j}$, то $[y_j = y'_j] \geq b_j$ и тогда

$$[\varphi(\bar{x}, y_1, \dots, y_m)] \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_m = [\varphi(\bar{x}, y'_1, \dots, y'_m)] \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_m.$$

С учетом (1) для любых частичных элементов $p_1, p_2 \in {}^{\%}X$ справедлива эквивалентность

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow \text{dom } p_1 = \text{dom } p_2 = [p_1 = p_2].$$

Кроме того, благодаря (1) на частичные элементы распространяется соотношение 2.4: для любых $p_1, p_2, \bar{q} \in {}^{\%}X$ и $b \in B$

$$[p_1 = p_2] \geq b \Rightarrow [\varphi(p_1, \bar{q})] \wedge b = [\varphi(p_2, \bar{q})] \wedge b.$$

3.3. Частичный элемент $p \in {}^{\%}X$ будем называть *всюду определенным*, если $\text{dom } p = 1_B$ или, что то же самое, $p = x|_{1_B}$ для некоторого элемента $x \in X$. Как легко видеть, для любых $x, y \in X$

$$x|_{1_B} = y|_{1_B} \Leftrightarrow [x = y] = 1_B \Leftrightarrow x \sim y.$$

В дальнейшем будем обозначать $x|_{1_B}$ символом \tilde{x} или $x \sim$ и записывать соотношение $\tilde{x} = p$ в виде $x \sim p$ или $p \sim x$. Кроме того, для $Y \subset X$ введем обозначение $\tilde{Y} := Y \sim := \{\tilde{y} : y \in Y\} = Y|_{1_B}$.

Если B -система X отделима, то равенства $\tilde{x} = \tilde{y}$ и $x = y$ равносильны. В этом случае условимся отождествлять элементы $x \in X$ с соответствующими всюду определенными частичными элементами $\tilde{x} \in \tilde{X}$ и тем самым считать, что $X \subset {}^{\%}X$. Такое отождествление согласуется с введенным в п. 3.2 правилом употребления частичных элементов в оценках формул: если $p_j = \tilde{y}_j$ ($j = 1, \dots, m$), то $[\varphi(\tilde{x}, p_1, \dots, p_m)] = [\varphi(\tilde{x}, y_1, \dots, y_m)]$.

3.4. Всюду определенный частичный элемент $\bar{p} \in X|_{1_B} = \tilde{X}$ назовем *наименьшим доопределением* частичного элемента $p \in {}^{\%}X$, если $p \sqsubset \bar{p}$ и $[\bar{p} = \emptyset] \geq \neg \text{dom } p$ или, что то же самое,

$$[\bar{p} \neq \emptyset] \leq [\bar{p} = p] = \text{dom } p. \tag{2}$$

Выбор термина обусловлен тем фактом, что \bar{p} является внутри X наименьшим по включению среди всевозможных доопределений p , т. е. $(\forall q \in \tilde{X})(p \sqsubset q \Rightarrow X \vDash \bar{p} \sqsubset q)$.

Из соотношения (2) следует, что для всех $z \in X$

$$\begin{aligned} [z \in \bar{p}] &= [(z \in \bar{p}) \wedge (\bar{p} \neq \emptyset)] = [z \in \bar{p}] \wedge [\bar{p} \neq \emptyset] \wedge [\bar{p} = p] \\ &= [z \in p] \wedge [p \neq \emptyset] \wedge \text{dom } p = [z \in p], \end{aligned}$$

а значит, если B -система X экстенциональна, наименьшее доопределение \bar{p} частичного элемента p оказывается единственным. В этом случае будем обозначать его символом $\text{ext } p$. Если, кроме того, система X отделима, то $\text{ext } p \in X$ в соответствии с соглашением 3.3.

3.5. Подъемом множества или класса $P \subset {}^{\%}X$ условимся называть функцию (класс-функцию, если X — собственный класс) $P \uparrow : X \rightarrow B$, определенную формулой

$$P \uparrow(x) = \bigvee_{p \in P} [x = p], \quad x \in X.$$

Кроме того, для $Y \subset X$ и $\Psi : Y \rightarrow B$ положим $Y \uparrow := \tilde{Y} \uparrow$ и $\Psi \uparrow := \{y|_{\Psi(y)} : y \in Y\} \uparrow$, т. е. $Y \uparrow, \Psi \uparrow : X \rightarrow B$ и

$$Y \uparrow(x) = \bigvee_{y \in Y} [x = y], \quad \Psi \uparrow(x) = \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge \Psi(y), \quad x \in X.$$

3.6. Лемма. Следующие свойства функции $\Phi: X \rightarrow B$ равносильны:

- (a) $\Phi(x) \wedge [x = y] \leq \Phi(y)$ для всех $x, y \in X$;
- (b) $\Phi(x) \wedge [x = y] = \Phi(y) \wedge [x = y]$ для всех $x, y \in X$;
- (c) $[x = y] \leq (\Phi(x) \Leftrightarrow \Phi(y))$ для всех $x, y \in X$, где $(a \Leftrightarrow b) = (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$;
- (d) $\Phi = P\uparrow$ для некоторого множества или класса $P \subset {}^{\%}X$;
- (e) $\Phi = \{x |_{\Phi(x)} : x \in X\}\uparrow$;
- (f) $\Phi = \Psi\uparrow$, где $\Psi: Y \rightarrow B$ и $Y \subset X$ — множество или класс;
- (g) $\Phi = \Phi\uparrow$.

Функцию $\Phi: X \rightarrow B$, удовлетворяющую любому из эквивалентных условий (a)–(g), называют *экстенциональной* (см. [3, 4.5.6; 4, 3.5]).

3.7. Для функций $\Phi, \Psi: Y \rightarrow B$, определенных на подклассе $Y \subset X$, будем писать $\Phi \leq \Psi$, если $(\forall y \in Y) \Phi(y) \leq \Psi(y)$.

Лемма. Пусть $Y \subset X$ и $\Psi: Y \rightarrow B$. Функция $\Psi\uparrow: X \rightarrow B$ является наименьшей экстенциональной мажорантой функции Ψ :

- (a) $\Psi \leq (\Psi\uparrow)|_Y$;
- (b) если функция $\bar{\Psi}: X \rightarrow B$ экстенциональна и $\Psi \leq \bar{\Psi}|_Y$, то $\Psi\uparrow \leq \bar{\Psi}$.

◁ Если $\bar{\Psi}: X \rightarrow B$ — экстенциональная функция и $(\forall y \in Y) \Psi(y) \leq \bar{\Psi}(y)$, то для всех $x \in X$

$$\Psi\uparrow(x) = \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge \Psi(y) \leq \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge \bar{\Psi}(y) = \bar{\Psi}\uparrow(x) = \bar{\Psi}(x). \triangleright$$

3.8. Экстенциональные функции $\Phi: X \rightarrow B$ называют также *булевозначными классами* или *классами внутри X* (см. [3, 4.6.1; 4, 3.5]) и употребляют в оценках формул аналогично тому, как символы классов используются в языке теории множеств. Точнее говоря, синтаксис булевозначных оценок 2.2 расширяется следующими определениями, задействующими символы булевозначных классов Φ, Ψ :

$$\begin{aligned} [x \in \Phi]_X &:= [\Phi(x)]_X := \Phi(x), & [x = \Phi]_X &:= [\Phi = x]_X := [(\forall y)(y \in x \Leftrightarrow y \in \Phi)]_X, \\ [\Phi \in x]_X &:= [(\exists y)(\Phi = y \wedge y \in x)]_X, & [\Phi = \Psi]_X &:= [(\forall y)(y \in \Phi \Leftrightarrow y \in \Psi)]_X, \\ [\Phi \in \Psi]_X &:= [(\exists x)(\Phi = x \wedge x \in \Psi)]_X. \end{aligned}$$

В результате обретают смысл выражения вида $[\varphi(x_1, \dots, x_m, \Phi_1, \dots, \Phi_n)]_X$, где φ — формула, x_i — переменные, Φ_j — символы булевозначных классов. Например, если $\Phi: X \rightarrow B$ — булевозначный класс, то

$$[\Phi \neq \emptyset] = [(\exists x)(x \in \Phi)] = \bigvee_{x \in X} [x \in \Phi] = \bigvee_{x \in X} \Phi(x) = \vee \Phi,$$

а если $Y \subset X$ и $P \subset {}^{\%}Y$, то

$$[P\uparrow \neq \emptyset] = \bigvee_{x \in X} P\uparrow(x) = \bigvee_{y \in Y} P\uparrow(y) = \bigvee_{p \in P} \text{dom } p. \quad (3)$$

В дальнейшем утверждение о том, что функция $\Phi: X \rightarrow B$ является булевозначным классом (т. е. экстенциональна), будем записывать в виде $\Phi \in X$.

3.9. На логическом уровне расширение языка булевозначных оценок за счет символов классов $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in X$ означает обогащение сигнатуры унарными предикатными символами Φ_1, \dots, Φ_n , снабжение алгебраической системы X булевозначными интерпретациями $[\Phi_i(x)]_X := \Phi_i(x)$ и использование «синтаксического сахара» в виде перечисленных в п. 3.8 синонимов и сокращений $(x \in \Phi_i) := \Phi_i(x)$, $(x = \Phi_i) := (\forall y)(y \in x \Leftrightarrow y \in \Phi_i)$ и др. Благодаря экстенциональности функций $\Phi_i: X \rightarrow B$ в системе X оказываются истинными аксиомы исчисления предикатов обогащенной сигнатуры, и имеет место следующая усиленная версия утверждения 2.3.

Пусть $\Sigma := \{=, \in, \Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ — обогащение исходной сигнатуры $\{=, \in\}$ унарными предикатными символами Φ_1, \dots, Φ_n . Тогда в предположении, что X является B -системой, $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in X$ и $[\Phi_i(x)]_X = \Phi_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$), справедливы следующие соотношения:

- (a) $ZFC \vdash (X \vDash \varphi)$ для любой тавтологии φ теории предикатов сигнатуры Σ ;
- (b) если Γ и Δ — множества предложений сигнатуры Σ , $ZFC \vdash (X \vDash \Gamma)$ и $\Gamma \vdash \Delta$, то $ZFC \vdash (X \vDash \Delta)$.

3.10. Благодаря 3.9 имеется возможность доказывать истинность в любой B -системе X путем «рассуждений внутри X ». А именно, пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi$ — формулы со свободными переменными $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$ и $\bar{\Phi} = \Phi_1, \dots, \Phi_m$. Предположим, что, рассуждая в рамках теории предикатов и обращаясь с $\bar{\Phi}$ как с унарными предикатными символами, удастся доказать φ на основе гипотез $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. Тогда можно утверждать, что для произвольных булевозначных классов $\bar{\Phi} = \Phi_1, \dots, \Phi_m \in X$ справедливо соотношение

$$X \vDash (\forall \bar{x})(\varphi_1(\bar{x}, \bar{\Phi}) \wedge \dots \wedge \varphi_k(\bar{x}, \bar{\Phi}) \Rightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{\Phi}))$$

и, в частности, для любых элементов $\bar{x} \in X$ из $X \vDash \varphi_1(\bar{x}, \bar{\Phi}), \dots, X \vDash \varphi_k(\bar{x}, \bar{\Phi})$ следует $X \vDash \varphi(\bar{x}, \bar{\Phi})$.

3.11. Распространим соглашения 3.2 и 3.8 на формулы, содержащие вхождения переменных $\bar{x} = x_1, \dots, x_k$, частичных элементов $p = y|_b$, $p_j = y_j|_{b_j}$ ($j = 1, \dots, m$) и булевозначных классов $\bar{\Phi}, \bar{\Phi} = \Phi_1, \dots, \Phi_n$, следующим образом:

$$\begin{aligned} [\Phi(p)] &:= \Phi(y) \wedge b, \\ [\varphi(\bar{x}, p_1, \dots, p_m, \bar{\Phi})] &:= [\varphi(\bar{x}, y_1, \dots, y_m, \bar{\Phi})] \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_m. \end{aligned} \tag{4}$$

Например, если $q \in {}^{\%}X$ и $P \subset {}^{\%}X$, то

$$[q \in P \uparrow] = \bigvee_{p \in P} [q = p].$$

3.12. Лемма. Пусть φ — произвольная формула. Если $\bar{x} = x_1, \dots, x_k \in X$, $\bar{p} = p_1, \dots, p_m \in {}^{\%}X$, $\bar{\Phi} = \Phi_1, \dots, \Phi_n \in X$ и $i \in \{1, \dots, k\}$, то следующая функция экстенциональна:

$$x_i \in X \mapsto [\varphi(\bar{x}, \bar{p}, \bar{\Phi})] \in B.$$

◁ Достаточно заметить, что из экстенциональности $\Phi_\xi: X \rightarrow B$ ($\xi \in \Xi$) вытекает экстенциональность поточечных связок $\bigvee_{\xi \in \Xi} \Phi_\xi, \bigwedge_{\xi \in \Xi} \Phi_\xi, \neg \Phi_\xi$. ▷

3.13. Утверждение 3.12 обосновывает корректность соглашения (4). Действительно, правая часть (4) не зависит от выбора представителей (y_j, b_j) классов $p_j = y_j|_{b_j}$, поскольку из $y_j|_{b_j} = y'_j|_{b_j}$ следует $[y_j = y'_j] \geq b_j$, откуда в силу экстенциональности функций $y_j \mapsto [\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\Phi})]$ вытекает равенство

$$[\varphi(\bar{x}, y_1, \dots, y_m, \bar{\Phi})] \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_m = [\varphi(\bar{x}, y'_1, \dots, y'_m, \bar{\Phi})] \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_m.$$

3.14. Благодаря 3.12 появляется возможность существенно упростить формулировки общих утверждений о значениях истинности формул: вместо рассмотрения громоздких выражений $[\varphi(\bar{x}, \bar{p}, \bar{\Phi})]$ или $[(\exists x_i) \varphi(\bar{x}, \bar{p}, \bar{\Phi})]$ для произвольной формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, элементов $\bar{x} = x_1, \dots, x_k \in X$, частичных элементов $\bar{p} = p_1, \dots, p_m \in {}^{\%}X$ и булевозначных классов $\bar{\Phi} = \Phi_1, \dots, \Phi_n \in X$ достаточно говорить о значениях $\Phi(x)$ или $[(\exists x) \Phi(x)]$ для какого-либо класса $\Phi \in X$ (см., например, пп. 3.18, 5.11).

3.15. Пусть X и Y — B -системы. Для произвольного соответствия $f \subset X \times Y$ определим $f^{\%} \subset {}^{\%}X \times {}^{\%}Y$, полагая

$$f^{\%} := \{(x|_b, y|_b) : (x, y) \in f, b \in B\}.$$

Если $f: X \rightarrow Y$, то $f^{\%}: {}^{\%}X \rightarrow {}^{\%}Y$, причем $\text{dom } p = \text{dom } f^{\%}(p)$ для всех $p \in {}^{\%}X$. Следующее утверждение легко доказать индукцией по сложности формулы.

Лемма. Пусть φ — произвольная формула. Если f — изоморфизм между B -системами X и Y , то $f^{\%}$ — биекция между ${}^{\%}X$ и ${}^{\%}Y$, причем для любых $x_1, \dots, x_k \in X$, $p_1, \dots, p_m \in {}^{\%}X$, $P_1, \dots, P_n \subset {}^{\%}X$

$$\begin{aligned} & [\varphi(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m, P_1 \uparrow, \dots, P_n \uparrow)]_X \\ &= [\varphi(f(x_1), \dots, f(x_k), f^{\%}(p_1), \dots, f^{\%}(p_m), f^{\%}(P_1) \uparrow, \dots, f^{\%}(P_n) \uparrow)]_{Y^{\%}}. \end{aligned}$$

3.16. Лемма. Если $\Phi \in X$ и $P \subset {}^{\%}X$, то $[\Phi \in P \uparrow] = \bigvee_{p \in P} [\Phi = p]$.

◁ Пусть $P = \{x_i|_{b_i} : i \in I\}$, где $x_i \in X$, $b_i \in B$. Согласно 3.8 имеем

$$\begin{aligned} [\Phi \in P \uparrow] &= [(\exists x)(\Phi = x \wedge x \in P \uparrow)] = \bigvee_{x \in X} [\Phi = x] \wedge \bigvee_{i \in I} [x = x_i] \wedge b_i \\ &= \bigvee_{i \in I} \bigvee_{x \in X} [\Phi = x] \wedge [x = x_i] \wedge b_i = \bigvee_{i \in I} [\Phi = x_i] \wedge b_i = \bigvee_{p \in P} [\Phi = p]. \quad \triangleright \end{aligned}$$

3.17. Лемма. Пусть X — произвольная B -система.

(а) Если $\Phi, \Psi \in X$, то $X \models (\Phi \subset \Psi) \Leftrightarrow \Phi \leq \Psi$.

(б) Если $Y \subset X$ и $P \subset {}^{\%}Y$, то $X \models (P \uparrow \subset Y \uparrow)$.

(с) Если $Y \subset X$, $\Phi \in X$ и $P = \{y|_{\Phi(y)} : y \in Y\}$, то $X \models (P \uparrow = Y \uparrow \cap \Phi)$ и $[\Phi \subset Y \uparrow] = [\Phi = P \uparrow]$. В частности, если $X \models (\Phi \subset Y \uparrow)$, то $X \models (\Phi = P \uparrow)$ для некоторого подкласса $P \subset {}^{\%}Y$.

(д) Если $Z \subset Y \subset X$, то $X \models (Y \uparrow \setminus Z \uparrow \subset (Y \setminus Z) \uparrow)$.

◁ Утверждение (а) очевидно, (б) вытекает из (а).

(с) Для всех $x \in X$

$$[x \in P \uparrow] = \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge \Phi(y) = \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge \Phi(x) = [x \in Y \uparrow \cap \Phi],$$

т. е. $X \models (P \uparrow = Y \uparrow \cap \Phi)$ и, следовательно, $[\Phi \subset Y \uparrow] = [\Phi = Y \uparrow \cap \Phi] = [\Phi = P \uparrow]$.

(d) Для всех $x \in X$

$$\begin{aligned} [x \in Y \uparrow \setminus Z \uparrow] &= \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge [x \notin Z \uparrow] \\ &= \left(\bigvee_{y \in Y \setminus Z} [x = y] \wedge [x \notin Z \uparrow] \right) \vee \left(\bigvee_{y \in Z} [x = y] \wedge [x \notin Z \uparrow] \right) \\ &\leq \left(\bigvee_{y \in Y \setminus Z} [x = y] \right) \vee ([x \in Z \uparrow] \wedge [x \notin Z \uparrow]) = [x \in (Y \setminus Z) \uparrow]. \quad \triangleright \end{aligned}$$

3.18. Лемма. Пусть X — B -система, $P \subset {}^{\%}X$ и $\Phi \in X$. Тогда

(a) $[(\exists x \in P \uparrow) \Phi(x)] = \bigvee_{p \in P} [\Phi(p)];$

(b) $[(\forall x \in P \uparrow) \Phi(x)] = \bigwedge_{p \in P} [\Phi(p)] \vee \neg \text{dom } p;$

(c) $X \models (\forall x \in P \uparrow) \Phi(x) \Leftrightarrow (\forall p \in P) [\Phi(p)] = \text{dom } p;$

(d) если $Y \subset X$, то $X \models (\forall x \in Y \uparrow) \Phi(x) \Leftrightarrow (\forall x \in Y) X \models \Phi(x).$

\triangleleft (a) С учетом равенства $[\Phi(x)] \wedge [x = p] = [\Phi(p)] \wedge [x = p]$ имеем

$$\begin{aligned} [(\exists x \in P \uparrow) \Phi(x)] &= \bigvee_{x \in X} [\Phi(x)] \wedge [x \in P \uparrow] \\ &= \bigvee_{x \in X} \bigvee_{p \in P} [\Phi(x)] \wedge [x = p] = \bigvee_{x \in X} \bigvee_{p \in P} [\Phi(p)] \wedge [x = p] \\ &= \bigvee_{p \in P} [\Phi(p)] \wedge \bigvee_{x \in X} [x = p] = \bigvee_{p \in P} [\Phi(p)] \wedge \text{dom } p = \bigvee_{p \in P} [\Phi(p)]. \end{aligned}$$

Соотношение (b) легко выводится из (a), (c) является частным случаем (b), а (d) — частным случаем (c). \triangleright

3.19. Будем говорить, что элемент $x \in X$ реализует булевозначный класс $\Phi \in X$, и писать $x \simeq \Phi$ или $\Phi \simeq x$, если $[\cdot \in x] = \Phi$ (см. п. 2.7). Таким образом,

$$x \simeq \Phi \Leftrightarrow (\forall z \in X) [z \in x] = \Phi(z) \Leftrightarrow X \models (x = \Phi).$$

Как легко видеть, для всех $x \in X$ функция $[\cdot \in x]: X \rightarrow B$ экстенциональна и тем самым каждый элемент $x \in X$ реализует булевозначный класс $[\cdot \in x]$. Элемент $x \in X$ реализует подъем $P \uparrow$ множества или класса $P \subset {}^{\%}X$, если $x \simeq P \uparrow$, т. е.

$$(\forall z \in X) [z \in x] = [z \in P \uparrow] = \bigvee_{p \in P} [z = p].$$

В частности, если $y_i \in X$ и $b_i \in B$ ($i \in I$), то

$$x \simeq \{y_i|_{b_i} : i \in I\} \uparrow \Leftrightarrow (\forall z \in X) [z \in x] = \bigvee_{i \in I} [z = y_i] \wedge b_i.$$

Для произвольного подкласса $Y \subset X$ обозначим символом $\mathcal{P}_X(Y)$ совокупность всех элементов, реализующих подъемы подмножеств ${}^{\%}Y$:

$$\mathcal{P}_X(Y) := \{x \in X : (\exists P \subset {}^{\%}Y)(x \simeq P \uparrow)\}.$$

Булевозначную систему X назовем интенциональной (или содержательной), если в X реализуются подъемы любых множеств частичных элементов: $(\forall P \subset {}^{\%}X)(\exists x \in X)(x \simeq P \uparrow).$

3.20. Элемент $x \in X$, реализующий булевозначный класс $\Phi \in X$, определяется однозначно с точностью до эквивалентности \simeq , а если B -система X экстенциональна, то — с точностью до эквивалентности \sim . В последнем случае условимся отождествлять булевозначный класс Φ с соответствующим классом эквивалентности \tilde{x} . Таким образом, если система X экстенциональна и $x \simeq \Phi$, то $x \sim \Phi \in \tilde{X}$. Если система X не только экстенциональна, но и отделима, то вступает в силу соглашение 3.3, булевозначный класс Φ становится элементом X и соотношение $x \simeq \Phi$ превращается в равенство $x = \Phi$.

§ 4. Предикативность

Пусть B — полная булева алгебра, X — произвольная B -система.

4.1. Определим *насыщенный спуск* $\Phi \Downarrow$ булевозначного класса $\Phi \in X$, полагая

$$\Phi \Downarrow := \{p \in {}^{\%}X : [p \in \Phi] = \text{dom } p\} = \{x|_b : x \in X, b \leq \Phi(x)\}.$$

Насыщенный спуск $x \Downarrow$ элемента $x \in X$ определим как насыщенный спуск $[\cdot \in x] \Downarrow$ булевозначного класса $[\cdot \in x]$. Отметим, что $\Phi \Downarrow$ и $x \Downarrow$ могут оказаться собственными классами.

4.2. Класс $P \subset {}^{\%}X$ назовем *насыщенным*, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\begin{aligned} p \in P &\Rightarrow p|_b \in P, & p \in {}^{\%}X, b \in B; \\ (\forall a \in A)(x|_a \in P) &\Rightarrow x|_{\vee A} \in P, & x \in X, A \subset B. \end{aligned}$$

Лемма. Следующие свойства класса $P \subset {}^{\%}X$ равносильны:

- (a) P является насыщенным;
- (b) $(\forall x \in X)(\exists c \in B)(\forall b \in B)(x|_b \in P \Leftrightarrow b \leq c)$;
- (c) $(\forall x \in X)(\forall b \in B)(b \leq P \uparrow(x) \Rightarrow x|_b \in P)$;
- (d) $(\forall q \in {}^{\%}X)([q \in P \uparrow] = \text{dom } q \Rightarrow q \in P)$;
- (e) $(\forall Q \subset {}^{\%}X)(Q \uparrow = P \uparrow \Rightarrow Q \subset P)$;
- (f) $P = \Phi \Downarrow$ для некоторого булевозначного класса $\Phi \in X$;
- (g) $P = P \uparrow \Downarrow$.

4.3. Согласно лемме 3.6 функция $\Phi: X \rightarrow B$ экстенциональна тогда и только тогда, когда $\Phi = P \uparrow$ для некоторого множества или класса $P \subset {}^{\%}X$. Из приведенного ниже утверждения следует, что на роль P подходит насыщенный спуск $\Phi \Downarrow$.

Лемма. Если $\Phi \in X$, то $\Phi = \Phi \Downarrow \uparrow$. В частности, $P \uparrow \Downarrow \uparrow = P \uparrow$ и $x \simeq x \Downarrow \uparrow$ для всех $P \subset {}^{\%}X$ и $x \in X$.

◁ Для всякого элемента $x \in X$ с учетом включения $x|_{\Phi(x)} \in \Phi \Downarrow$ имеем

$$\Phi(x) = [x = x] \wedge \Phi(x) = [x = x|_{\Phi(x)}] \leq \bigvee_{p \in \Phi \Downarrow} [x = p].$$

С другой стороны, благодаря экстенциональности Φ для любых $y \in X$ и $b \leq \Phi(y)$ справедливы соотношения

$$[x = y|_b] = [x = y] \wedge b \leq [x = y] \wedge \Phi(y) \leq \Phi(x). \triangleright$$

4.4. Приведенное ниже утверждение вытекает из лемм 4.2(е) и 4.3.

Следствие. Пусть $\Phi \in X$ и $P \subset {}^{\%}X$. Следующие утверждения равносильны:

- (а) класс P насыщен и $P\uparrow = \Phi$;
- (б) $P = \max\{Q \subset {}^{\%}X : Q\uparrow = \Phi\}$;
- (с) $P = \Phi\downarrow$.

Таким образом, если $P \subset {}^{\%}X$, то $P\uparrow\downarrow$ — наибольший среди классов $Q \subset {}^{\%}X$, удовлетворяющих равенству $Q\uparrow = P\uparrow$, и единственный насыщенный среди таких классов Q . В этой связи естественно назвать $P\uparrow\downarrow$ *насыщенной оболочкой* или *насыщением* P .

4.5. **Теорема.** Следующие свойства булевозначного класса $\Phi \in X$ равносильны:

- (а) $\Phi = P\uparrow$ для некоторого множества $P \subset {}^{\%}X$;
- (б) $\Phi = P\uparrow$ для некоторого насыщенного множества $P \subset {}^{\%}X$;
- (с) $\Phi = (\Phi|_Y)\uparrow$ для некоторого множества $Y \subset X$;
- (д) $\Phi = \Psi\uparrow$ для некоторой функции $\Psi: Y \rightarrow B$, где $Y \subset X$ — множество;
- (е) класс $\Phi\downarrow$ является множеством.

\triangleleft (а) \Rightarrow (с). Если Φ обладает свойством (а), то имеются такие семейства $(y_i)_{i \in I} \subset X$ и $(b_i)_{i \in I} \subset B$, что для всех $x \in X$

$$\Phi(x) = \bigvee_{i \in I} [x = y_i] \wedge b_i.$$

Тогда для всех $i \in I$

$$\Phi(y_i) = \bigvee_{j \in I} [y_i = y_j] \wedge b_j \geq [y_i = y_i] \wedge b_i = b_i,$$

откуда для каждого элемента $x \in X$ вытекает соотношение

$$\Phi(x) = \bigvee_{i \in I} [x = y_i] \wedge b_i \leq \bigvee_{i \in I} [x = y_i] \wedge \Phi(y_i) \leq \Phi(x)$$

и, следовательно, множество $Y := \{y_i : i \in I\}$ удовлетворяет условию (с).

Импликация (с) \Rightarrow (д) очевидна.

(д) \Rightarrow (а). Если $Y \subset X$ и $\Psi: Y \rightarrow B$ удовлетворяют (д), то $\Phi = \{y|_{\Psi(y)} : y \in Y\}\uparrow$.

(а) \Rightarrow (е). Пусть $\Phi = P\uparrow$, где $P \subset {}^{\%}X$ — множество. Тогда для всех $q \in \Phi\downarrow$

$$\bigvee_{p \in P} [q = p] = [q \in P\uparrow] = [q \in \Phi] = \text{dom } q. \quad (5)$$

Обозначим через F множество всех функций $f: P \rightarrow B$, для которых существует элемент $q \in \Phi\downarrow$, удовлетворяющий условию

$$(\forall p \in P) f(p) = [q = p]. \quad (6)$$

Элемент $q \in \Phi\downarrow$ определяется условием (6) однозначно. Действительно, если $q_1, q_2 \in \Phi\downarrow$ и $[q_1 = p] = [q_2 = p]$ для всех $p \in P$, то с учетом (5)

$$\text{dom } q_1 = \bigvee_{p \in P} [q_1 = p] = \bigvee_{p \in P} [q_2 = p] = \text{dom } q_2,$$

$$[q_1 = q_2] \geq \bigvee_{p \in P} [q_1 = p] \wedge [q_2 = p] = \bigvee_{p \in P} [q_1 = p] = \text{dom } q_1,$$

а значит, $q_1 = q_2$. Следовательно, имеется отображение $g: F \rightarrow \Phi\downarrow$, сопоставляющее каждой функции $f \in F$ единственный элемент $q \in \Phi\downarrow$, удовлетворяющий (6). Осталось заметить, что отображение g сюръективно, поскольку всякий элемент $q \in \Phi\downarrow$ удовлетворяет условию (6) для функции $f: p \mapsto [q = p]$.

Импликация (e) \Rightarrow (b) вытекает из леммы 4.3, а импликация (b) \Rightarrow (a) тривиальна. \triangleright

4.6. Булевозначный класс $\Phi \in X$, обладающий любым из эквивалентных свойств 4.5(a)–(e), будем называть *предикативным*. Выбор этого термина основан на том соображении, что классы, однозначно определяемые множествами, допускают квантификацию в языке предикатов первого порядка: фраза, начинающаяся словами «для любого предикативного булевозначного класса», не является бесконечным утверждением (см. § 1) и может быть записана одной формулой в рамках теории множеств.

Если Φ, Ψ — булевозначные классы и $\Phi \leq \Psi$, то $\Phi\downarrow \subset \Psi\downarrow$ и, следовательно, предикативность Ψ влечет предикативность Φ .

4.7. Следствие. Следующие свойства системы X равносильны:

- (a) система X интенциональна;
- (b) в X реализуются подъемы любых насыщенных подмножеств ${}^{\%}X$;
- (c) в X реализуются все предикативные булевозначные классы.

4.8. Следствие. Следующие свойства элемента $x \in X$ равносильны:

- (a) $x \simeq P\uparrow$ для некоторого множества $P \subset {}^{\%}X$;
- (b) $x \simeq P\uparrow$ для некоторого насыщенного множества $P \subset {}^{\%}X$;
- (c) $(\exists Y \subset X)(\forall z \in X) [z \in x] = \bigvee_{y \in Y} [z = y] \wedge [y \in x]$;
- (d) $x \simeq \Psi\uparrow$ для некоторой функции $\Psi: Y \rightarrow B$, где $Y \subset X$ — множество;
- (e) класс $x\downarrow$ является множеством.

Элементы $x \in X$, обладающие свойствами (a)–(e), условимся называть *предикативными*. Таким образом, $\mathcal{R}_X(X)$ — совокупность всех предикативных элементов X (см. п. 3.19). Систему X назовем *предикативной*, если все элементы X предикативны, т. е. $\mathcal{R}_X(X) = X$.

4.9. Если булевозначная система интенциональна и предикативна, то говорят, что она удовлетворяет *принципу подъема*:

$$\begin{aligned} (\forall P \subset {}^{\%}X)(\exists x \in X)(x \simeq P\uparrow), \\ (\forall x \in X)(\exists P \subset {}^{\%}X)(x \simeq P\uparrow). \end{aligned}$$

4.10. Лемма. Пусть $x \in X$ — предикативный элемент и $Y \subset X$. Тогда $[x \subset Y\uparrow] = [x = P\uparrow]$ для некоторого подмножества $P \subset {}^{\%}Y$. В частности

$$X \models (x \subset Y\uparrow) \Leftrightarrow (\exists P \subset {}^{\%}Y) x \simeq P\uparrow.$$

\triangleleft Сформулированное утверждение вытекает из леммы 3.17(c), так как класс $P = \{y_{[y \in x]} : y \in Y\}$ содержится в $x\downarrow$ и поэтому является множеством. \triangleright

§ 5. Цикличность

Пусть B — полная булева алгебра, X — произвольная B -система.

Напомним, что элементы $a, b \in B$ называют *дизъюнктными* и пишут $a \perp b$, если $a \wedge b = 0_B$. Для $A \subset B$ соотношение $(\forall a \in A)(a \perp b)$ записывают в виде

$A \perp b$. Антицепь в булевой алгебре — это множество или семейство попарно дизъюнктивных элементов, а разбиение единицы — максимальная антицепь (т.е. антицепь, супремум элементов которой равен 1_B).

5.1. В дальнейшем неоднократно пригодятся следующие простые наблюдения (см., например, леммы 5.4 и 5.8).

Лемма. (а) Если $(d_i)_{i \in I} \subset B$ — антицепь, $(b_i)_{i \in I} \subset B$, $(\forall i \in I)(b_i \leq d_i)$, $\bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} d_i$, то $(\forall i \in I)(b_i = d_i)$.

(б) Если $A \subset B$, $\bar{a} \in B$, $A \leq \bar{a}$, то $\forall A = \bar{a} \Leftrightarrow (\forall b \in B)(A \perp b \Rightarrow \bar{a} \perp b)$.

5.2. Определим спуск $\Phi \downarrow$ булевозначного класса $\Phi \in X$, полагая

$$\begin{aligned}\Phi \downarrow &= \{p \in {}^{\%}X : [p \in \Phi] = \text{dom } p = \vee \Phi\} \\ &= \{p \in \Phi \downarrow : [p \in \Phi] = \vee \Phi\} \\ &= \{x|_{\vee \Phi} : x \in X, \Phi(x) = \vee \Phi\},\end{aligned}$$

где $\vee \Phi := \bigvee_{x \in X} \Phi(x) = [\Phi \neq \emptyset]$. Спуск $x \downarrow$ элемента $x \in X$ определим как спуск $[\cdot \in x] \downarrow$ булевозначного класса $[\cdot \in x]$ (см. п. 2.7). Отметим, что спуски $\Phi \downarrow$ и $x \downarrow$ могут оказаться собственными классами.

Если $X \models (\Phi \neq \emptyset)$ и B -система X отделима, то с учетом соглашения 3.3

$$\Phi \downarrow = \{x \in X : X \models (x \in \Phi)\}.$$

5.3. Подмножество $P \subset {}^{\%}X$ назовем антицепью, если его элементы имеют попарно дизъюнктивные области определения: $\text{dom } p_1 \perp \text{dom } p_2$ для любых $p_1, p_2 \in P$, $p_1 \neq p_2$. Частичный элемент $q \in {}^{\%}X$ будем называть соединением антицепи $P \subset {}^{\%}X$, если

$$(\forall p \in P) p \sqsubset q \quad \text{и} \quad \text{dom } q = \bigvee_{p \in P} \text{dom } p.$$

Как легко видеть, такой частичный элемент q однозначно определяется антицепью P , что позволяет ввести для соединения P обозначение $\sqcup P$. Соединение $\sqcup\{p_1, p_2\}$ двухэлементной антицепи $\{p_1, p_2\} \subset {}^{\%}X$ условимся записывать в виде $p_1 \sqcup p_2$, а соединение $\sqcup\{p_i : i \in I\}$ антицепи, заданной семейством $(p_i)_{i \in I} \subset {}^{\%}X$, — в виде $\bigsqcup_{i \in I} p_i$.

5.4. Внутри X подъем антицепи $P \subset {}^{\%}X$ содержит не более одного элемента: $X \models ((\exists x)(x \in P \uparrow) \Rightarrow (\exists! x)(x \in P \uparrow))$.

Лемма. Пусть $P \subset {}^{\%}X$ — антицепь, $x \in X$, $b := [P \uparrow \neq \emptyset]$. Следующие восемь соотношений равносильны:

$$\begin{aligned}x|_b &= \sqcup P, \quad [x = \cup(P \uparrow)] \geq b, \quad [x \in P \uparrow] = b, \quad [P \uparrow = \{x\}] = b, \\ x|_b \in P \uparrow \downarrow, \quad P \uparrow \downarrow &= \{x|_b\}, \quad \bigvee_{p \in P} [x = p] = b, \quad (\forall p \in P) [x = p] = \text{dom } p.\end{aligned}$$

5.5. Следствие. Если $P \subset {}^{\%}X$ — антицепь и $P \uparrow \downarrow \neq \emptyset$, то существует соединение $\sqcup P$, причем $P \uparrow \downarrow = \{\sqcup P\}$.

5.6. Лемма. Если X — экстенциональная B -система, $P \subset {}^{\%}X$ — антицепь и $x \in X$, то следующие утверждения равносильны:

- (a) $x \sim \text{ext } \sqcup P$;
- (b) $X \vDash (x = \cup(P\uparrow))$;
- (c) $[x \neq \emptyset] \leq [P\uparrow \neq \emptyset] \leq [x \in P\uparrow]$;
- (d) $(\forall z \in X) [z \in x] = \bigvee_{p \in P} [z \in p]$.

◁ Эквивалентность (a)–(c) непосредственно вытекает из определений.

(a) \Rightarrow (d). Для всех $z \in X$ в силу соотношений $[z \in x] \leq [x \neq \emptyset] \leq \bigvee_{p \in P} \text{dom } p$

и $x|_{\text{dom } p} = p$ имеем

$$[z \in x] = \bigvee_{p \in P} [z \in x] \wedge \text{dom } p = \bigvee_{p \in P} [z \in p].$$

(d) \Rightarrow (c). Если $p \in P$, то $(\forall z \in X) [z \in x] \wedge \text{dom } p \geq [z \in p]$ благодаря (d), откуда с учетом 5.1(a) вытекает $(\forall z \in X) [z \in x] \wedge \text{dom } p = [z \in p]$, а значит, $[x = p] \geq \text{dom } p$ в силу экстенциональности X . Следовательно,

$$[x \neq \emptyset] = \bigvee_{z \in X} [z \in x] = \bigvee_{z \in X} \bigvee_{p \in P} [z \in p] \leq \bigvee_{p \in P} \text{dom } p \leq \bigvee_{p \in P} [x = p] = [x \in P\uparrow]. \triangleright$$

5.7. Антицепь $P \subset {}^{\%}X$ является максимальной, если $\bigvee_{p \in P} \text{dom } p = 1_B$, т. е. области определения элементов P образуют разбиение единицы в булевой алгебре B .

Соединения максимальных антицепей представляют собой всюду определенные частичные элементы X и в случае, когда система X отделима, отождествляются с соответствующими элементами X (см. 3.3).

Если $x \in X$, $\{y_i|_{d_i} : i \in I\}$ — максимальная антицепь и $x \sim \bigsqcup_{i \in I} y_i|_{d_i}$, то x называется *перемешиванием* семейства $(y_i)_{i \in I} \subset X$ относительно разбиения единицы $(d_i)_{i \in I} \subset B$. Как легко видеть,

$$x \sim \bigsqcup_{i \in I} y_i|_{d_i} \Leftrightarrow (\forall i \in I) [x = y_i] \geq d_i.$$

В случае отделимой системы перемешивание $(y_i)_{i \in I}$ относительно $(d_i)_{i \in I}$ единственно и обозначается символом $\text{mix}_{i \in I} d_i y_i$.

5.8. Внутри X подъем максимальной антицепи $P \subset {}^{\%}X$ является синглитоном: $X \vDash (\exists! x)(x \in P\uparrow)$.

Лемма. Для максимальной антицепи $P \subset {}^{\%}X$ и элемента $x \in X$ следующие восемь соотношений равносильны:

$$\begin{aligned} x \sim \sqcup P, \quad X \vDash (x = \cup(P\uparrow)), \quad X \vDash (x \in P\uparrow), \quad X \vDash (P\uparrow = \{x\}), \\ \tilde{x} \in P\uparrow\downarrow, \quad P\uparrow\downarrow = \{\tilde{x}\}, \quad \bigvee_{p \in P} [x = p] = 1_B, \quad (\forall p \in P) [x = p] = \text{dom } p. \end{aligned}$$

5.9. Подкласс $Y \subset X$ называют *циклическим* или *циклическим*, если для любого семейства $(y_i)_{i \in I} \subset Y$ и любого разбиения единицы $(d_i)_{i \in I} \subset B$ существует перемешивание $y \sim \bigsqcup_{i \in I} y_i|_{d_i}$, $y \in Y$. В случае, когда циклическа вся B -система X , говорят, что X удовлетворяет *принципу перемешивания*.

Лемма. Следующие свойства непустого класса $Y \subset X$ равносильны:

- (a) Y является циклическим;
- (b) любая антицепь $P \subset {}^{\%}Y$ имеет соединение $\sqcup P \in {}^{\%}Y$;
- (c) любая максимальная антицепь $P \subset {}^{\%}Y$ имеет соединение $\sqcup P \in {}^{\%}Y$.

5.10. Лемма. Пусть $Y \subset X$. Следующие свойства элемента $x \in X$ равносильны:

- (a) существуют семейство $(y_i)_{i \in I} \subset Y$ и разбиение единицы $(d_i)_{i \in I} \subset B$ такие, что $x \sim \bigsqcup_{i \in I} y_i | d_i$;
- (b) $x \sim \sqcup P$ для некоторой максимальной антицепи $P \subset {}^{\%}Y$;
- (c) $X \models (x \in Y \uparrow)$;
- (d) $\tilde{x} \in Y \uparrow \downarrow$;
- (e) $\bigvee_{y \in Y} [x = y] = 1_B$.

◁ Импликации (a) \Rightarrow (b) и (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) очевидны, импликация (b) \Rightarrow (c) вытекает из 5.8 и 3.17(b), а импликация (e) \Rightarrow (a) обеспечивается принципом исчерпывания [3, 2.1.10(1)]. ▷

Совокупность всех элементов $x \in X$, обладающих любым из эквивалентных свойств (a)–(e), обозначается символом $\text{mix } Y$. Отметим, что в отсутствии отделимости $\text{mix } Y$ может оказаться собственным классом даже в том случае, когда Y является множеством.

5.11. Лемма. Если $Y \subset X$, то $Y \uparrow = (\text{mix } Y) \uparrow$. В частности, для любого булевозначного класса $\Phi \in X$

$$\bigvee_{y \in Y} \Phi(y) = [(\exists y \in Y \uparrow) \Phi(y)] = [(\exists x \in (\text{mix } Y) \uparrow) \Phi(x)] = \bigvee_{x \in \text{mix } Y} \Phi(x).$$

◁ Неравенство $Y \uparrow \leq (\text{mix } Y) \uparrow$ очевидно. Кроме того, для всех $x \in X$ и $z \in \text{mix } Y$

$$[x = z] = [x = z] \wedge \bigvee_{y \in Y} [z = y] = \bigvee_{y \in Y} [x = z] \wedge [z = y] \leq \bigvee_{y \in Y} [x = y] = Y \uparrow(x),$$

а значит, $(\text{mix } Y) \uparrow(x) = \bigvee_{z \in \text{mix } Y} [x = z] \leq Y \uparrow(x)$. ▷

5.12. Лемма. Если $Y \subset X$, то $\text{mix } \text{mix } Y = \text{mix } Y$.

◁ С учетом леммы 5.11 для всех $x \in X$ имеем

$$x \in \text{mix } \text{mix } Y \Leftrightarrow X \models (x \in (\text{mix } Y) \uparrow) \Leftrightarrow X \models (x \in Y \uparrow) \Leftrightarrow x \in \text{mix } Y. \quad \triangleright$$

5.13. Следствие. Следующие свойства подкласса $Y \subset X$ равносильны:

- (a) для любого семейства $(y_i)_{i \in I} \subset Y$ и разбиения единицы $(d_i)_{i \in I} \subset B$ существует перемешивание $x \sim \bigsqcup_{i \in I} y_i | d_i$, $x \in X$.
- (b) любая антицепь $P \subset {}^{\%}Y$ имеет соединение $\sqcup P \in {}^{\%}X$;
- (c) любая максимальная антицепь $P \subset {}^{\%}Y$ имеет соединение $\sqcup P \in {}^{\%}X$;
- (d) $Y \subset \bar{Y}$ для некоторого циклического класса $\bar{Y} \subset X$;
- (e) $\text{mix } Y$ — циклический класс.

Класс Y , удовлетворяющий любому из эквивалентных условий (a)–(e), будем называть *предциклическим* или *предциклическим*.

Цикличность предциклического класса Y равносильна соотношению $\tilde{Y} = (\text{mix } Y)^\sim$, которое в отделимом случае означает равенство $Y = \text{mix } Y$. Если Y — предциклическое подмножество отделимой системы X , то $\text{mix } Y$ является наименьшим по включению циклическим подмножеством X , содержащим Y , и называется *циклической оболочкой* множества Y .

5.14. Лемма. *Если X удовлетворяет принципу перемешивания, то для любых семейств $(x_i)_{i \in I} \subset X$ и $(b_i)_{i \in I} \subset B$ найдутся $Y \subset \text{mix}\{x_i : i \in I\}$ и $b \in B$ такие, что*

$$\{x_i|b_i : i \in I\}^\uparrow = (Y|b)^\uparrow.$$

◁ В случае $I = \emptyset$ доказываемое утверждение очевидно. Пусть $I \neq \emptyset$.

Положим $b = \bigvee_{i \in I} b_i$, $I^\bullet = I \cup \{I\}$, $b_I = \neg b$ и рассмотрим произвольный элемент $x_I \in \{x_i : i \in I\}$. Согласно принципу исчерпывания существует такое разбиение единицы $(d_i)_{i \in I^\bullet} \subset B$, что $d_i \leq b_i$ для всех $i \in I^\bullet$. Заметим, что $\bigvee_{i \in I} d_i = b$. Благодаря цикличности в X имеется элемент $x \sim \bigsqcup_{i \in I^\bullet} x_i|d_i$, характеризующийся соотношениями

$$[x = x_i] \geq d_i \quad \text{для всех } i \in I^\bullet. \quad (7)$$

По той же причине для каждого $i \in I$ в X имеется элемент $y_i \sim x_i|b_i \sqcup x|_{\neg b_i}$, удовлетворяющий неравенствам

$$[y_i = x_i] \geq b_i, \quad [y_i = x] \geq \neg b_i. \quad (8)$$

Положим $Y := \{y_i : i \in I\}$. Очевидно, $Y \subset \text{mix}\{x_i : i \in I\}$. Покажем, что $\{x_i|b_i : i \in I\}^\uparrow = (Y|b)^\uparrow$, т. е.

$$\bigvee_{i \in I} [z = x_i] \wedge b_i = \bigvee_{i \in I} [z = y_i] \wedge b \quad \text{для всех } z \in X.$$

Для любого элемента $z \in X$ с учетом (8) имеем

$$\bigvee_{i \in I} [z = x_i] \wedge b_i = \bigvee_{i \in I} [z = y_i] \wedge b_i \leq \bigvee_{i \in I} [z = y_i] \wedge b.$$

С другой стороны, благодаря (7) справедливы соотношения

$$[z = x] \wedge b = \bigvee_{i \in I} [z = x] \wedge d_i = \bigvee_{i \in I} [z = x_i] \wedge d_i \leq \bigvee_{i \in I} [z = x_i] \wedge b_i,$$

откуда в силу (8) следует, что для всех $i \in I$

$$\begin{aligned} [z = y_i] \wedge b &= ([z = y_i] \wedge b_i) \vee ([z = y_i] \wedge b \wedge \neg b_i) \\ &= ([z = x_i] \wedge b_i) \vee ([z = x] \wedge b \wedge \neg b_i) \\ &\leq ([z = x_i] \wedge b_i) \vee \bigvee_{j \in I} [z = x_j] \wedge b_j = \bigvee_{j \in I} [z = x_j] \wedge b_j, \end{aligned}$$

поэтому $\bigvee_{i \in I} [z = y_i] \wedge b \leq \bigvee_{i \in I} [z = x_i] \wedge b_i$. ▷

5.15. Следствие. *Пусть B -система X удовлетворяет принципу перемешивания.*

(а) *Для любых $Z \subset X$ и $P \subset \%Z$ найдутся $Y \subset \text{mix } Z$ и $b \in B$ такие, что $P^\uparrow = (Y|b)^\uparrow$.*

(б) *Для любого предикативного элемента $x \in X$ существуют $Y \subset X$ и $b \in B$ такие, что $x \simeq (Y|b)^\uparrow$. При этом $b = [x \neq \emptyset] = [y \in x]$ для всех $y \in Y$.*

(с) *Если $(\forall Y \subset X)(\forall b \in B)(\exists x \in X) x \simeq (Y|b)^\uparrow$, то система X интенсивна.*

§ 6. Принцип максимума

Пусть B — полная булева алгебра, X — произвольная B -система.

6.1. Будем говорить, что булевозначный класс $\Phi \in X$ *достигает максимума на* $Y \subset X$, если в множестве $\{\Phi(y) : y \in Y\}$ имеется наибольший элемент или, что то же самое,

$$(\exists z \in Y) \Phi(z) = [(\exists y \in Y \uparrow) \Phi(y)].$$

Говорят, что Φ *достигает максимума*, если Φ достигает максимума на X , т. е. $\Phi \downarrow \neq \emptyset$.

Пусть $\varphi(x, \bar{z})$ — формула, все свободные переменные которой содержатся в списке x, \bar{z} , где $\bar{z} = z_1, \dots, z_n$. Система X удовлетворяет *принципу максимума для формулы* $(\exists x)\varphi$, если для любых $\bar{z} \in X$ булевозначный класс $x \mapsto [\varphi(x, \bar{z})]$ достигает максимума, т. е.

$$(\forall \bar{z} \in X)(\exists y \in X) [\varphi(y, \bar{z})] = [(\exists x) \varphi(x, \bar{z})].$$

Говорят, что X удовлетворяет *принципу максимума*, если X удовлетворяет принципу максимума для любой формулы вида $(\exists x)\varphi$. (Это очередное бесконечное утверждение, см. § 1.)

6.2. Лемма. Булевозначный класс $\Phi \in X$ удовлетворяет соотношению $\Phi = \Phi \downarrow \uparrow$ тогда и только тогда, когда для всех $x \in X$ и $b \in B$

$$(\forall p \in \Phi \downarrow)([x = p] \perp b) \Rightarrow \Phi(x) \perp b.$$

◁ Если $x \in X$ и $p \in \Phi \downarrow$, то $p = y|_{\Phi(y)}$ для некоторого элемента $y \in X$ и с учетом экстенциональности Φ

$$[x = p] = [x = y|_{\Phi(y)}] = [x = y] \wedge \Phi(y) = [x = y] \wedge \Phi(x) \leq \Phi(x).$$

Поскольку $\Phi \downarrow \uparrow(x) = \bigvee_{p \in \Phi \downarrow} [x = p]$, остается сослаться на лемму 5.1(b). ▷

6.3. Лемма. Пусть $\Phi \in X$. Для произвольного элемента $x \in X$ определим экстенциональную функцию $\Phi_x : X \rightarrow B$, полагая

$$\Phi_x(y) = (\neg \Phi(x) \vee [x = y]) \wedge \Phi(y), \quad y \in X.$$

Следующие утверждения равносильны:

- (a) $(\forall p \in \Phi \downarrow)(\exists \bar{p} \in \Phi \downarrow)(p \sqsubset \bar{p})$;
- (b) $(\forall x \in X)(\exists y \in X)(\Phi(x) \leq [x = y], \Phi(y) = \vee \Phi)$;
- (c) $(\forall x \in X)(\Phi_x \downarrow \neq \emptyset)$.

Если Φ обладает любым из эквивалентных свойств (a)–(c), то

$$\Phi = \Phi \downarrow \uparrow. \quad (9)$$

◁ Предварительно покажем, что $\vee \Phi_x = \vee \Phi$. Действительно, неравенство $\vee \Phi_x \leq \vee \Phi$ очевидно, а с другой стороны, для всех $y \in X$

$$\vee \Phi_x \geq \Phi_x(x) \vee \Phi_x(y) = \Phi(x) \vee ((\neg \Phi(x) \vee [x = y]) \wedge \Phi(y)) = \Phi(x) \vee \Phi(y) \geq \Phi(y).$$

(a) \Leftrightarrow (b). Достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} x|_b \in \Phi \downarrow &\Leftrightarrow b \leq \Phi(x), \quad y|_{\vee \Phi} \in \Phi \downarrow \Leftrightarrow \Phi(y) = \vee \Phi, \\ x|_{\Phi(x)} \sqsubset y|_{\vee \Phi} &\Leftrightarrow \Phi(x) \leq [x = y]. \end{aligned}$$

(b) \Rightarrow (c). Если $\Phi(x) \leq [x = y]$ и $\Phi(y) = \vee\Phi$, то

$$\Phi_x(y) = (\neg\Phi(x) \vee [x = y]) \wedge \Phi(y) \geq (\neg\Phi(x) \vee \Phi(x)) \wedge \Phi(y) = \Phi(y) = \vee\Phi = \vee\Phi_x$$

и, следовательно, Φ_x достигает максимума в точке y .

(c) \Rightarrow (b). Пусть $x \in X$, и пусть $y \in X$ — точка максимума функции Φ_x , т. е.

$$(\neg\Phi(x) \vee [x = y]) \wedge \Phi(y) = \vee\Phi_x = \vee\Phi. \quad (10)$$

Поскольку $\Phi(y) \leq \vee\Phi$, из (10) вытекает равенство $\Phi(y) = \vee\Phi$. Следовательно, $(\neg\Phi(x) \vee [x = y]) \wedge \vee\Phi = \vee\Phi$, откуда $\neg\Phi(x) \vee [x = y] \geq \vee\Phi \geq \Phi(x)$ и поэтому $\Phi(x) \leq [x = y]$.

Предположим, что Φ обладает свойством (b), и установим равенство $\Phi = \Phi\downarrow\uparrow$. Согласно лемме 6.2 для этого достаточно рассмотреть $x \in X$ и $b \in B$, удовлетворяющие условию

$$(\forall y \in Y)(\Phi(y) = \vee\Phi \Rightarrow [x = y] \wedge \vee\Phi \perp b), \quad (11)$$

и показать, что $\Phi(x) \perp b$. Благодаря (b) имеется такой элемент $y \in X$, что $\Phi(x) \leq [x = y]$ и $\Phi(y) = \vee\Phi$. Тогда с учетом (11) имеем

$$\Phi(x) = \Phi(x) \wedge \vee\Phi \leq [x = y] \wedge \vee\Phi \perp b. \triangleright$$

Отметим, что условия (a)–(c) не равносильны равенству $\Phi = \Phi\downarrow\uparrow$. Например, если $B = \mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$, $X = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, $[x = y] = \{i \in \{0, 1, 2\} : x(i) = y(i)\}$, $[x \in y] = \{i \in \{0, 1, 2\} : x(i) \in y(i)\}$ (где $0 \in \{0\} = 1$), $\Phi(1, 0, 0) = \Phi(0, 1, 0) = \{0, 1, 2\}$, $\Phi(1, 1, 1) = \{0, 1\}$, то $\Phi = \Phi\downarrow\uparrow$, но для $x = (1, 1, 1)$ нет элемента $y \in X$, удовлетворяющего условиям $\Phi(x) \leq [x = y]$ и $\Phi(y) = \vee\Phi$.

6.4. Следствие. Если B -система X удовлетворяет принципу максимума для формулы $(\exists y)(y \in x \wedge (z \in x \Rightarrow z = y))$, то

(a) $x \simeq x\downarrow\uparrow$ для всех $x \in X$;

(b) элемент $x \in X$ предикативен тогда и только тогда, когда класс $x\downarrow$ является множеством (см. следствие 4.8).

6.5. Теорема. Следующие свойства непустого подкласса $Y \subset X$ равносильны:

(a) Y является циклическим;

(b) любой булевозначный класс $\Phi \in X$ достигает максимума на Y ;

(c) любой предикативный булевозначный класс $\Phi \in X$ достигает максимума на Y .

\triangleleft (a) \Rightarrow (b). Положим $b := \bigvee_{y \in Y} \Phi(y)$. По принципу исчерпывания имеются

антицепь $(d_i)_{i \in I} \subset B$ и семейство $(y_i)_{i \in I} \subset Y$ такие, что $\bigvee_{i \in I} d_i = b$ и $d_i \leq \Phi(y_i)$

для всех $i \in I$. Благодаря цикличности Y существует элемент $z \in Y$, удовлетворяющий соотношению $z \upharpoonright_b = \bigsqcup_{i \in I} y_i \upharpoonright_{d_i}$. Покажем, что $\Phi(z) = b$. Действительно,

$\Phi(z) = \bigvee_{y \in Y} [z = y] \wedge \Phi(z) \leq \bigvee_{y \in Y} \Phi(y) = b$. С другой стороны, для всех $i \in I$ с

учетом неравенств $[z = y_i] \geq d_i$, $\Phi(y_i) \geq d_i$ имеем $\Phi(z) \geq \Phi(y_i) \wedge [z = y_i] \geq d_i$, а значит, $\Phi(z) \geq \bigvee_{i \in I} d_i = b$.

Импликация (b) \Rightarrow (c) тривиальна.

(c) \Rightarrow (a). Пусть $P \subset {}^*Y$ — максимальная антицепь. Благодаря (c) существует такой элемент $z \in Y$, что $P\uparrow(z) = \bigvee_{y \in Y} P\uparrow(y)$. Согласно (3) имеет место

равенство $\bigvee_{y \in Y} P\uparrow(y) = 1_B$. Следовательно, $[z \in P\uparrow] = 1_B$, откуда с учетом 5.8

следует, что $z \sim \bigsqcup P$. \triangleright

6.6. Теорема. Следующие свойства B -системы X равносильны:

- (a) X удовлетворяет принципу перемешивания;
- (b) любой булевозначный класс $\Phi \in X$ достигает максимума;
- (c) любой предикативный булевозначный класс $\Phi \in X$ достигает максимума;
- (d) $\Phi = \Phi \downarrow \uparrow$ для любого булевозначного класса $\Phi \in X$;
- (e) $\Phi = \Phi \downarrow \uparrow$ для любого предикативного булевозначного класса $\Phi \in X$;
- (f) $P \uparrow \downarrow \neq \emptyset$ для любого класса $P \subset {}^{\%}X$;
- (g) $P \uparrow \downarrow \neq \emptyset$ для любого множества $P \subset {}^{\%}X$;
- (h) $P \uparrow \downarrow \neq \emptyset$ для любой максимальной антицепи $P \subset {}^{\%}X$.

◁ Равносильность (a)–(c) установлена в теореме 6.5. Импликации (d) \Rightarrow (f) и (e) \Rightarrow (g) достаточно очевидны: если $P \uparrow \downarrow = \emptyset$, то $P \uparrow = P \uparrow \downarrow \uparrow = \emptyset \uparrow$ и тогда $P \uparrow \downarrow = \emptyset \uparrow \downarrow = \{x|_{0_B}\} \neq \emptyset$. Импликация (b) \Rightarrow (d) следует из 6.3(c) \Rightarrow (9), импликация (h) \Rightarrow (a) вытекает из следствия 5.5, а импликации (d) \Rightarrow (e), (f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (h) тривиальны. ▷

6.7. Лемма. Если $Y \subset X$ — непустой предциклический класс, то

$$(\forall x \in X)(\exists y \in \text{mix } Y) [x = y] = [x \in Y \uparrow].$$

◁ Согласно теореме 6.5 булевозначный класс $y \mapsto [x = y]$ достигает максимума на $\text{mix } Y$, причем $(\text{mix } Y) \uparrow = Y \uparrow$ (см. лемму 5.11). ▷

6.8. Лемма. Пусть X — экстенциональная B -система, $(d_i)_{i \in I} \subset B$ — антицепь, $(P_i)_{i \in I}$ — семейство подмножеств ${}^{\%}X$, $(x_i)_{i \in I} \subset X$. Если $(\forall i \in I) x_i \simeq P_i \uparrow$ и $x \simeq (\bigcup_{i \in I} P_i |_{d_i}) \uparrow$, то $x \sim \text{ext } \bigsqcup_{i \in I} x_i$.

◁ Сформулированное соотношение вытекает из 5.6, так как для всех $z \in X$

$$\begin{aligned} [z \in x] &= \left[z \in \left(\bigcup_{i \in I} P_i |_{d_i} \right) \uparrow \right] = \bigvee_{i \in I} \bigvee_{p \in P_i} [z = p |_{d_i}] = \bigvee_{i \in I} \bigvee_{p \in P_i} [z = p] \wedge d_i \\ &= \bigvee_{i \in I} [z \in P_i \uparrow] \wedge d_i = \bigvee_{i \in I} [z \in x_i] \wedge d_i = \bigvee_{i \in I} [z \in x_i |_{d_i}]. \quad \triangleright \end{aligned}$$

6.9. Следствие. Пусть X — экстенциональная B -система. Если $Y \subset X$ и $(\forall P \subset {}^{\%}Y)(\exists x \in X)(x \simeq P \uparrow)$, то $\mathcal{P}_X(Y)$ — циклический класс. В частности, если система X экстенциональна и интенциональна, то класс $\mathcal{P}_X(X)$ всех предикативных элементов X является циклическим.

6.10. Следствие. (a) Если система X удовлетворяет принципу перемешивания, то X удовлетворяет принципу максимума [5, 1.10; 3, 6.1.7].

(b) Если система X интенциональна и удовлетворяет принципу максимума для формулы $(\exists x)(x \in y)$, то X удовлетворяет принципу перемешивания [5, 1.12; 3, 6.1.9].

(c) Если система X экстенциональна и удовлетворяет принципу подъема, то X удовлетворяет принципам перемешивания и максимума [5, 1.11; 3, 6.1.8].

◁ Утверждение (a) является следствием леммы 3.12 и теоремы 6.6, (b) вытекает из следствия 5.5, (c) — из следствия 6.9 и (a). ▷

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутман А. Е. О структуре булевозначного универсума // Владикавк. мат. журн. 2018. Т. 20, № 2. С. 38–48.
2. Гутман А. Е. Пример использования Δ_1 -термов в булевозначном анализе // Владикавк. мат. журн. 2012. Т. 14, № 1. С. 47–63.

3. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
4. Solovay R. M., Tennbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math. 1971. V. 94, N 2. P. 201–245.
5. Гутман А. Е., Лосенков Г. А. Функциональное представление булевозначного универсума // Мат. тр. 1998. Т. 1, № 1. С. 54–77.

Поступила в редакцию 20 июля 2019 г.

После доработки 20 июля 2019 г.

Принята к публикации 24 июля 2019 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`gutman@math.nsc.ru`