УДК 517.98

БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ УНИВЕРСУМ КАК АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА. I. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ

А. Е. Гутман

Аннотация: Исследуются булевозначные алгебраические системы теоретико-множественной сигнатуры. Развит аппарат частичных элементов булевозначной системы. Приведен формальный механизм использования частичных элементов и булевозначных классов в оценках истинности формул. Исследованы предикативные булевозначные классы, допускающие квантификацию. Описаны логические взаимосвязи между основными свойствами булевозначных систем — принципами подъема, перемешивания и максимума.

Ключевые слова: булевозначная алгебраическая система, теория множеств, булевозначный анализ.

Юрию Григорьевичу Решетняку
в связи с его 90-летием

Статья является первой частью работы, которая продолжает, развивает и замещает предпринятое в [1] исследование булевозначных алгебраических систем теоретико-множественной сигнатуры.

В § 1 уточнен формализм, стоящий за гипотезами и заключениями, представляющими собой бесконечные наборы формул. В § 2 приведены основные сведения, связанные с понятием булевозначной алгебраической системы. В § 3 введен и развит аппарат частичных элементов булевозначной системы и соответствующих подъемов, а также приведен формальный механизм использования частичных элементов и булевозначных классов в оценках истинности формул. В § 4 изучены предикативные булевозначные классы, допускающие квантификацию, и элементы, реализующие такие классы. В § 5 предложена интерпретация принципа перемешивания в терминах соединений антицепей частичных элементов. В § 6 установлена взаимосвязь между цикличностью и достижением максимума экстенсиональными булевозначными функциями.

Вторая часть исследования будет опубликована в виде отдельной статьи и посвящена понятию универсума над булевозначной экстенсиональной системой. В ней будут изучены логические свойства транзитивных булевозначных подсистем, описаны кумулятивные иерархии в булевозначном универсуме и приведен общий механизм интенсионального пополнения, позволяющий строить примеры булевозначных систем с необычными свойствами. С помощью этого механизма для произвольной полной булевой алгебры будет показано, что ни одно из условий, перечисленных в определении булевозначного универсума, не вытекает из остальных.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2 (проект № 0314-2016-0005).

§ 1. Формализм бесконечных утверждений

В математических текстах часто используются «объявления гипотез», когда на протяжении фрагмента рассуждений (определений и доказательств) предполагаются выполненными определенные условия или за какими-либо переменными закрепляется роль объектов, удовлетворяющих определенным условиям. Примером объявления гипотезы служит фраза «всюду ниже B — полная булева алгебра», с которой начинается следующий параграф данной статьи. Фактически эта фраза «фиксирует» букву B и добавляет «временную» аксиому $\gamma(B)$, формализующую утверждение «B — полная булева алгебра».

В подавляющем большинстве случаев эффект, производимый объявлением гипотезы, вполне понятен на неформальном уровне, но использование бесконечных наборов формул в качестве гипотез или заключений принуждает к аккуратности.

1.1. Рассматриваемая проблематика характерна наличием «бесконечных утверждений», представляющих собой бесконечные множества формул. Таковыми являются, например, утверждения «система X является моделью теории T» или «система X удовлетворяет принципу максимума».

Логические связки между бесконечными утверждениями обретают смысл благодаря механизму формального вывода. Например, если хотя бы одно из утверждений Γ или Δ бесконечно, то импликация $\Gamma \Rightarrow \Delta$ сама по себе смысла не имеет, но фраза «Γ влечет Δ в теории T» поддается формализации в виде выводимости: $T, \Gamma \vdash \Delta$.

1.2. Пусть T — какая-либо теория (множество предложений) сигнатуры Σ, и пусть Γ и Δ — произвольные множества формул сигнатуры Σ. (Множества Γ и Δ могут быть бесконечными, и содержащиеся в них формулы могут иметь свободные вхождения переменных.) Выводимость заключения Δ из гипотезы Γ в рамках теории T записывается в виде $T, \Gamma \vdash \Delta$ и определяется посредством понятия формального вывода в исчислении предикатов: для любой формулы $\delta \in \Delta$ существует конечная последовательность формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ такая, что $\varphi_n = \delta$ и каждая формула φ_i либо принадлежит $T \cup \Gamma$, либо получается из предшествующих формул $\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}$ с помощью классических правил вывода, за исключением правил с кванторами по свободным переменным, входящим в формулы $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \cap \Gamma$.

1.3. С помощью теоремы о полноте легко доказать равносильность следующих утверждений:

(a) $T, \Gamma \vdash \Delta$;

(b) $T, \Gamma \vdash \delta$ для всех $\delta \in \Delta$;

(c) для любой формулы $\delta \in \Delta$ существует конечный набор $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ такой, что

$$T \vdash (\forall \bar{v})(\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n \Rightarrow \delta),$$

где $\bar{v}$ — перечень свободных переменных, входящих в $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta$;

(d) для любой модели X теории T и любого означивания $\nu \colon V \to X$ свободных переменных V, входящих в $\Gamma \cup \Delta$, из истинности $X \vDash \gamma[\nu]$ для всех $\gamma \in \Gamma$ вытекает истинность $X \vDash \delta[\nu]$ для всех $\delta \in \Delta$.

1.4. Механизм объявления конечной гипотезы $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ поддается более простой формализации. В этом случае с помощью замены свободных переменных формулы $\gamma := \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ на константы можно обойтись формальными выводами, задействующими лишь предложения. Формализм, стоящий за «фиксацией» объектов $v_1, \dots, v_m$, удовлетворяющих условию $\gamma(v_1, \dots, v_m)$, раскрывается следующим фактом, легко проверяемым с помощью теоремы о полноте.

Пусть $\bar v := v_1, \dots, v_m$ — перечень свободных переменных, входящих в формулу $\gamma(\bar v)$. Рассмотрим сигнатуру Σ^*, полученную из Σ добавлением констант $\bar c := c_1, \dots, c_m$, и теорию T^* сигнатуры Σ^*, полученную из T добавлением аксиомы $\gamma(\bar c)$.

(a) *Для любой формулы $\delta(\bar v)$ сигнатуры Σ*

$$T^* \vdash \delta(\bar c) \ \Leftrightarrow\ T, \gamma(\bar v) \vdash \delta(\bar v) \ \Leftrightarrow\ T \vdash (\forall\, \bar v)(\gamma(\bar v) \Rightarrow \delta(\bar v)).$$

(b) *Если $T \vdash (\exists\, \bar v)\, \gamma(\bar v)$, то T^* консервативно расширяет T, т. е. для любого предложения φ сигнатуры Σ*

$$T^* \vdash \varphi \ \Leftrightarrow\ T \vdash \varphi.$$

1.5. Например, в рамках гипотезы «B — полная булева алгебра» выражение

$$\mathrm{ZFC} \vdash (\mathbb{V}^{(B)} \vDash \mathrm{ZFC}),$$

символизирующее доказуемость в ZFC бесконечного утверждения «$\mathbb{V}^{(B)}$ является моделью ZFC», формально эквивалентно выводимости

$$\mathrm{ZFC},\ B \text{ — полная булева алгебра} \ \vdash\ (\mathbb{V}^{(B)} \vDash \mathrm{ZFC}),$$

которая, в свою очередь, означает что для всякого предложения φ, являющегося теоремой ZFC, выполняется любое из следующих трех равносильных условий:

(a) ZFC, B — полная булева алгебра $\vdash$ $(\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi)$;
(b) $\mathrm{ZFC} \vdash (\forall\, B)(B$ — полная булева алгебра $\Rightarrow$ $\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi)$;
(c) $\mathrm{ZFC}^* \vdash (\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi)$,

где ZFC^* — расширение ZFC константой B и аксиомой «B — полная булева алгебра».

1.6. В дальнейшем под ***формулами*** понимаются формулы теоретико-множественной сигнатуры $\{=, \in\}$ (или более богатой сигнатуры, полученной в результате расширения теории формальными определениями).

Все формулы осмысливаются в контексте теории множеств, а не теории классов. В частности, даже если символ X закреплен за классом $\{x : \varphi(x)\}$, запись $(\exists\, Y \subset X)\, \psi(Y)$, являясь сокращением формулы

$$(\exists\, Y)((\forall\, x)(x \in Y \Rightarrow \varphi(x)) \wedge \psi(Y)),$$

интерпретируется как существование *множества* (а не класса) $Y \subset X$, обладающего свойством $\psi(Y)$.

Фраза вида «φ — формула со свободными переменными $\bar x = x_1, \dots, x_n$» означает, что список $\bar x$ содержит все переменные, свободно входящие в φ. Случаи, когда $\bar x$ совпадает с совокупностью свободных переменных формулы φ, будут оговариваривαться явно.

§ 2. Булевозначные алгебраические системы

Всюду ниже B — полная булева алгебра.

2.1. Пусть X, $=_X$, $\in_X$ — определяемые в ZFC термы или классы. Говорят, что $(X, =_X, \in_X)$ является *булевозначной* (точнее, *B-значной*) *алгебраической системой* или, более коротко, *булевозначной системой* или *B-системой*, имея в виду конъюнкцию следующих формул:

$X \neq \varnothing,\ \ =_X : X^2 \to B,\ \ \in_X : X^2 \to B,$
для всех $x, y, z \in X$
$$=_X(x,x) = 1_B,\ \ =_X(x,y) = =_X(y,x),\ \ =_X(x,y) \wedge_B =_X(y,z) \leqslant_B =_X(x,z),$$
$$\in_X(x,y) \wedge_B =_X(y,z) \leqslant_B \in_X(x,z),\ \ \in_X(x,y) \wedge_B =_X(x,z) \leqslant_B \in_X(z,y).$$

Вместо $(X, =_X, \in_X)$ пишут просто X.

2.2. Предположим, что X — B-система. Для каждой формулы $\varphi(\bar{x})$, где $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$ — полный список свободных переменных φ, введем n-местный функциональный символ φ_X, условимся записывать терм $\varphi_X(\bar{x})$ в виде $[\varphi(\bar{x})]_X$ и расширим теорию определениями

$$[x = y]_X := =_X(x,y), \quad [x \in y]_X := \in_X(x,y),$$
$$[\varphi \vee \psi]_X := [\varphi]_X \vee_B [\psi]_X, \quad [\varphi \wedge \psi]_X := [\varphi]_X \wedge_B [\psi]_X,$$
$$[\neg\varphi]_X := \neg_B [\varphi]_X, \quad [\varphi \Rightarrow \psi]_X := \neg_B[\varphi]_X \vee_B [\psi]_X,$$
$$[(\exists\, x)\, \varphi]_X := \vee_B\{[\varphi]_X : x \in X\}, \quad [(\forall\, x)\, \varphi]_X := \wedge_B\{[\varphi]_X : x \in X\},$$

где φ и ψ — произвольные формулы, $\neg_B$ — операция дополнения в булевой алгебре B.

На формальном уровне приведенные выше равенства корректно определяют функциональные символы φ_X в рамках теории, полученной из ZFC добавлением гипотез «B — полная булева алгебра» и «X — B-система». Определения символов φ_X расширяют сигнатуру и аксиоматику, приводя к консервативному расширению ZFC* исходной теории. (Соответствующий формализм более подробно рассмотрен в [2].) При этом для любой формулы $\varphi(\bar{x})$ в ZFC* выводима формула $(\forall\, \bar{x} \in X)\ [\varphi(\bar{x})]_X \in B$. В дальнейшем вместо ZFC* будем писать ZFC, неявно присоединяя к аксиоматике объявляемые гипотезы и определения.

2.3. В контексте $\bar{x} \in X$ говорят, что формула $\varphi(\bar{x})$ *истинна в булевозначной системе* X, и пишут $X \vDash \varphi(\bar{x})$, если $[\varphi(\bar{x})]_X = 1_B$.

Систему X называют *булевозначной моделью множества предложений* Φ и пишут $X \vDash \Phi$, если $X \vDash \varphi$ для всех $\varphi \in \Phi$. Под *булевозначной моделью теории* понимается модель множества всех теорем этой теории. Отметим, что в случае бесконечного множества Φ условие $X \vDash \Phi$ является бесконечным утверждением (см. § 1), представляющим собой набор формул $X \vDash \varphi$, $\varphi \in \Phi$.

Как известно, в булевозначной системе истинны все тавтологии (т. е. теоремы теории предикатов), а правила вывода сохраняют истинность. Точнее говоря, в предположении, что X является B-системой, справедливы следующие соотношения:

(a) ZFC $\vdash (X \vDash \Phi)$, *где* Φ — *совокупность всех тавтологий;*

(b) *если множества предложений* Γ *и* Δ *таковы, что* ZFC $\vdash (X \vDash \Gamma)$ *и* $\Gamma \vdash \Delta$, *то* ZFC $\vdash (X \vDash \Delta)$.

Таким образом, в записи $X \vDash$ ZFC под ZFC можно понимать как совокупность специальных аксиом ZFC, так и совокупность всех теорем ZFC.

2.4. Следующее простое соотношение, вытекающее из 2.3 (a), будет часто использоваться без явных ссылок.

Пусть X — B-система, и пусть $\varphi(x,\bar{y})$ — произвольная формула, где $\bar{y} = y_1,\ldots,y_n$. Тогда в ZFC доказуемо, что для любых $x_1,x_2,\bar{y}\in X$ и $b\in B$

$$[\varphi(x_1,\bar{y})]_X \wedge [x_1=x_2]_X \;=\; [\varphi(x_2,\bar{y})]_X \wedge [x_1=x_2]_X;$$
$$[x_1=x_2]_X \geqslant b \;\;\Rightarrow\;\; [\varphi(x_1,\bar{y})]_X \wedge b \;=\; [\varphi(x_2,\bar{y})]_X \wedge b.$$

2.5. В случае $\mathrm{ZFC}\vdash(X\vDash\mathrm{ZFC})$ записи $[\varphi(\bar{x})]_X$ и $X\vDash\varphi(\bar{x})$ обретают смысл не только для формул φ исходной сигнатуры $\{=,\in\}$, но и для формул, содержащих вхождения любых определяемых в ZFC предикатных и функциональных символов. Если φ — одна из таких формул, то под $[\varphi(\bar{x})]_X$ понимается $[\psi(\bar{x})]_X$, где ψ — результат *элиминации* определяемых символов, т. е. такая формула ψ сигнатуры $\{=,\in\}$, что $\mathrm{ZFC}\vdash(\varphi\Leftrightarrow\psi)$. В частности, при рассмотрении булевозначной модели X теории ZFC имеется возможность употреблять такие термы и формулы, как $[x\cap y=\varnothing]_X$ или $X\vDash(f\colon x\to y)$.

Кроме того, в конструкциях вида $[\cdots]_X$ и $X\vDash(\cdots)$ допускается неформальное употребление «внешних» термов, определяемых в ZFC. Например, в контексте $f\colon A\to X$ запись $[f(a_1)=f(a_2)]_X=b$ служит сокращением формулы

$$(\exists\, x_1,x_2)(x_1=f(a_1)\;\wedge\;x_2=f(a_2)\;\wedge\;[x_1=x_2]_X=b).$$

В дальнейшем для произвольной B-системы X будем использовать выражения вида $[x=\varnothing]_X$ и $[x\neq\varnothing]_X$ в качестве сокращений соответствующих термов $[\neg(\exists\, y)(y\in x)]_X$ и $[(\exists\, y)(y\in x)]_X$.

2.6. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности $\sim$ между элементами B-системы X:

$$x\sim y\;\Leftrightarrow\;[x=y]_X=1_B\;\Leftrightarrow\;X\vDash(x=y).$$

Система X называется *отделимой*, если $x\sim y\Leftrightarrow x=y$ для всех $x,y\in X$. В случае 2-системы, где $2:=\{0,1\}$ — простейшая булева алгебра, отделимость означает стандартность интерпретации равенства: $=_X(x,y)=1\Leftrightarrow x=y$.

Фактор-класс $\widetilde{X}:=X/{\sim}$ системы X по отношению $\sim$ (см. [3, 4.5]) является отделимой B-системой, элементарно эквивалентной исходной системе: для любого предложения φ в ZFC доказуемо равенство $[\varphi]_{\widetilde{X}}=[\varphi]_X$. Более того,

$$\mathrm{ZFC}\vdash(\forall\, x_1,\ldots,x_n\in X)\;[\varphi(\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_n)]_{\widetilde{X}}=[\varphi(x_1,\ldots,x_n)]_X$$

для всякой формулы $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, где $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$ — класс эквивалентности, соответствующий элементу $x\in X$.

2.7. Пусть X — B-система. Для произвольного элемента $x\in X$ определим функцию $[\cdot\in x]_X\colon X\to B$, полагая $[\cdot\in x]_X(z)=[z\in x]_X$ для всех $z\in X$. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности $\simeq$ между элементами X:

$$x\simeq y\;\Leftrightarrow\;[\cdot\in x]_X=[\cdot\in y]_X\;\Leftrightarrow\;X\vDash(\forall\, z)(z\in x\Leftrightarrow z\in y).$$

Как легко видеть, $x\sim y\Rightarrow x\simeq y$. Систему X назовем *экстенсиональной*, если $x\sim y\Leftrightarrow x\simeq y$ для всех $x,y\in X$ или, что то же самое, в X истинна аксиома экстенсиональности:

$$X\vDash(\forall\, x,y)((\forall\, z)(z\in x\Leftrightarrow z\in y)\;\Rightarrow\;x=y).$$

Отделимая экстенсиональная система характерна тем, что ее элементы однозначно определяются значениями истинности включений:

$$x=y\;\Leftrightarrow\;(\forall\, z\in X)\;[z\in x]_X=[z\in y]_X.$$

2.8. Говорят, что B-система Y является *подсистемой* B-системы X, если

$$Y \subset X, \quad =_Y \subset =_X, \quad \in_Y \subset \in_X.$$

Определяемый в ZFC терм или класс f называют *изоморфизмом между B-системами* X и Y и пишут $f\colon X \leftrightarrow_B Y$, если f — биекция между X и Y, удовлетворяющая условиям

$$[f(x_1) = f(x_2)]_Y = [x_1 = x_2]_X, \quad [f(x_1) \in f(x_2)]_Y = [x_1 \in x_2]_X$$

для всех $x_1, x_2 \in X$. Говорят, что B-системы X и Y *изоморфны*, и пишут $X \leftrightarrow_B Y$, если существует изоморфизм между X и Y.

§ 3. Интенсиональность

Всюду ниже B — полная булева алгебра, X — произвольная B-система. Чтобы записи были менее громоздкими, будем, как правило, опускать индексы B и X в символах $\wedge_B$, $[\,...\,]_X$ и т. п.

3.1. Введем на классе $X \times B$ отношение эквивалентности $\sim$, полагая

$$(x_1, b_1) \sim (x_2, b_2) \;\Leftrightarrow\; [x_1 = x_2] \geqslant b_1 = b_2.$$

Определим фактор-класс ${}^{\%}\!X := (X \times B)/{\sim}$, используя так называемый трюк Фреге — Рассела — Скотта (см. [3, 1.6.8]):

$$\begin{aligned} &{}^{\%}\!X := \{{\sim}(x,b) : (x,b) \in X \times B\};\\ &{\sim}(x,b) := \{(y,b) : y \in X,\ [x = y] \geqslant b,\\ &\qquad\qquad (\forall\, z \in X)(\,[x = z] \geqslant b \Rightarrow \operatorname{rank}(y) \leqslant \operatorname{rank}(z))\}, \end{aligned}$$

где $\operatorname{rank}(y)$ — ранг множества y в кумулятивной иерархии фон Неймана. Благодаря такому подходу классы эквивалентности ${\sim}(x,b)$, соответствующие парам $(x,b) \in X \times B$, оказываются множествами даже в том случае, когда X представляет собой собственный класс. Класс эквивалентности ${\sim}(x,b)$ условимся обозначать символом $x|_b$ и называть *частичным элементом* X, а точнее, *частью x с областью определения b* или *сужением x на b*. Область определения b частичного элемента $p = x|_b$ обозначим через $\operatorname{dom} p$. Для $p = x|_b$ и $c \in B$ положим $p|_c := x|_{b \wedge c}$. Кроме того, для произвольных $P \subset X \cup {}^{\%}\!X$ и $c \in B$ введем обозначения $P|_c := \{p|_c : p \in P\}$, ${}^{\%}\!P := \{p|_b : p \in P,\ b \in B\} = \bigcup_{b \in B} P|_b$. Для $p \in {}^{\%}\!X$ и $\bar{p} \in X \cup {}^{\%}\!X$ будем писать $p \sqsubset \bar{p}$ и говорить, что p является *частью* или *сужением* $\bar{p}$, а $\bar{p}$ является *продолжением* p, если $(\exists\, b \in B)\ p = \bar{p}|_b$ или, что то же самое, $p = \bar{p}|_{\operatorname{dom} p}$.

3.2. Примем соглашение об употреблении частичных элементов в булевозначных оценках формул. Пусть φ — формула со свободными переменными $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$, $\bar{y} = y_1, \ldots, y_m$. Наряду с термами вида $[\varphi(\bar{x}, \bar{y})]$, имеющими смысл в контексте $\bar{x}, \bar{y} \in X$, в дальнейшем будем также использовать термы $[\varphi(\bar{x}, p_1, \ldots, p_m)]$ для $p_1, \ldots, p_m \in {}^{\%}\!X$, придавая им следующий смысл: если $p_j = y_j|_{b_j}$ $(j = 1, \ldots, m)$, то

$$[\varphi(\bar{x}, p_1, \ldots, p_m)] := [\varphi(\bar{x}, y_1, \ldots, y_m)] \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_m. \tag{1}$$

Соглашение (1) корректно, поскольку правая часть (1) не зависит от выбора представителей (y_j, b_j) классов $y_j|_{b_j}$. Действительно, если $y_j|_{b_j} = y'_j|_{b_j}$, то $[y_j = y'_j] \geqslant b_j$ и тогда

$$[\varphi(\bar{x}, y_1, \ldots, y_m)] \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_m = [\varphi(\bar{x}, y'_1, \ldots, y'_m)] \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_m.$$

С учетом (1) для любых частичных элементов $p_1, p_2 \in {}^{\%}X$ справедлива эквивалентность

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow \operatorname{dom} p_1 = \operatorname{dom} p_2 = [p_1 = p_2].$$

Кроме того, благодаря (1) на частичные элементы распространяется соотношение 2.4: для любых $p_1, p_2, \bar{q} \in {}^{\%}X$ и $b \in B$

$$[p_1 = p_2] \geqslant b \Rightarrow [\varphi(p_1, \bar{q})] \wedge b = [\varphi(p_2, \bar{q})] \wedge b.$$

3.3. Частичный элемент $p \in {}^{\%}X$ будем называть *всюду определенным*, если $\operatorname{dom} p = 1_B$ или, что то же самое, $p = x|_{1_B}$ для некоторого элемента $x \in X$. Как легко видеть, для любых $x, y \in X$

$$x|_{1_B} = y|_{1_B} \Leftrightarrow [x = y] = 1_B \Leftrightarrow x \sim y.$$

В дальнейшем будем обозначать $x|_{1_B}$ символом $\widetilde{x}$ или $x^{\sim}$ и записывать соотношение $\widetilde{x} = p$ в виде $x \sim p$ или $p \sim x$. Кроме того, для $Y \subset X$ введем обозначение $\widetilde{Y} := Y^{\sim} := \{\widetilde{y} : y \in Y\} = Y|_{1_B}$.

Если B-система X отделима, то равенства $\widetilde{x} = \widetilde{y}$ и $x = y$ равносильны. В этом случае условимся отождествлять элементы $x \in X$ с соответствующими всюду определенными частичными элементами $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ и тем самым считать, что $X \subset {}^{\%}X$. Такое отождествление согласуется с введенным в 3.2 правилом употребления частичных элементов в оценках формул: если $p_j = \widetilde{y}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, то $[\varphi(\bar{x}, p_1, \ldots, p_m)] = [\varphi(\bar{x}, y_1, \ldots, y_m)]$.

3.4. Всюду определенный частичный элемент $\bar{p} \in X|_{1_B} = \widetilde{X}$ назовем *наименьшим доопределением* частичного элемента $p \in {}^{\%}X$, если $p \sqsubset \bar{p}$ и $[\bar{p} = \varnothing] \geqslant \neg\operatorname{dom} p$ или, что то же самое,

$$[\bar{p} \neq \varnothing] \leqslant [\bar{p} = p] = \operatorname{dom} p. \tag{2}$$

Выбор термина обусловлен тем фактом, что $\bar{p}$ является внутри X наименьшим по включению среди всевозможных доопределений p, т. е. $(\forall q \in \widetilde{X})(p \sqsubset q \Rightarrow X \vDash \bar{p} \subset q)$.

Из соотношения (2) следует, что для всех $z \in X$

$$\begin{aligned}[z \in \bar{p}] &= [(z \in \bar{p}) \wedge (\bar{p} \neq \varnothing)] = [z \in \bar{p}] \wedge [\bar{p} \neq \varnothing] \wedge [\bar{p} = p] \\ &= [z \in p] \wedge [p \neq \varnothing] \wedge \operatorname{dom} p = [z \in p],\end{aligned}$$

а значит, если B-система X экстенсиональна, наименьшее доопределение $\bar{p}$ частичного элемента p оказывается единственным. В этом случае будем обозначать его символом $\operatorname{ext} p$. Если, кроме того, система X отделима, то $\operatorname{ext} p \in X$ в соответствии с соглашением 3.3.

3.5. *Подъемом* множества или класса $P \subset {}^{\%}X$ условимся называть функцию (класс-функцию, если X — собственный класс) $P{\uparrow}\colon X \to B$, определенную формулой

$$P{\uparrow}(x) = \bigvee_{p \in P} [x = p], \quad x \in X.$$

Кроме того, для $Y \subset X$ и $\Psi\colon Y \to B$ положим $Y{\uparrow} := \widetilde{Y}{\uparrow}$ и $\Psi{\uparrow} := \{y|_{\Psi(y)} : y \in Y\}{\uparrow}$, т. е. $Y{\uparrow}, \Psi{\uparrow}\colon X \to B$ и

$$Y{\uparrow}(x) = \bigvee_{y \in Y} [x = y], \quad \Psi{\uparrow}(x) = \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge \Psi(y), \quad x \in X.$$

3.6. Лемма. *Следующие свойства функции* $\Phi\colon X \to B$ *равносильны:*

(a) $\Phi(x) \wedge [x = y] \leqslant \Phi(y)$ *для всех* $x, y \in X$;

(b) $\Phi(x) \wedge [x = y] = \Phi(y) \wedge [x = y]$ *для всех* $x, y \in X$;

(c) $[x = y] \leqslant (\Phi(x) \Leftrightarrow \Phi(y))$ *для всех* $x, y \in X$, *где* $(a \Leftrightarrow b) = (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$;

(d) $\Phi = P{\uparrow}$ *для некоторого множества или класса* $P \subset {}^{\%}X$;

(e) $\Phi = \{x|_{\Phi(x)} : x \in X\}{\uparrow}$;

(f) $\Phi = \Psi{\uparrow}$, *где* $\Psi\colon Y \to B$ *и* $Y \subset X$ *— множество или класс;*

(g) $\Phi = \Phi{\uparrow}$.

Функцию $\Phi\colon X \to B$, удовлетворяющую любому из эквивалентных условий (a)–(g), называют *экстенсиональной* (см. [3, 4.5.6; 4, 3.5]).

3.7. Для функций $\Phi, \Psi\colon Y \to B$, определенных на подклассе $Y \subset X$, будем писать $\Phi \leqslant \Psi$, если $(\forall\, y \in Y)\ \Phi(y) \leqslant \Psi(y)$.

Лемма. *Пусть* $Y \subset X$ *и* $\Psi\colon Y \to B$. *Функция* $\Psi{\uparrow}\colon X \to B$ *является наименьшей экстенсиональной мажорантой функции* Ψ*:*

(a) $\Psi \leqslant (\Psi{\uparrow})|_Y$;

(b) *если функция* $\overline{\Psi}\colon X \to B$ *экстенсиональна и* $\Psi \leqslant \overline{\Psi}|_Y$, *то* $\Psi{\uparrow} \leqslant \overline{\Psi}$.

$\triangleleft$ Если $\overline{\Psi}\colon X \to B$ — экстенсиональная функция и $(\forall\, y \in Y)\ \Psi(y) \leqslant \overline{\Psi}(y)$, то для всех $x \in X$

$$\Psi{\uparrow}(x) = \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge \Psi(y) \leqslant \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge \overline{\Psi}(y) = \overline{\Psi}{\uparrow}(x) = \overline{\Psi}(x). \ \triangleright$$

3.8. Экстенсиональные функции $\Phi\colon X \to B$ называют также *булевозначными классами* или *классами внутри* X (см. [3, 4.6.1; 4, 3.5]) и употребляют в оценках формул аналогично тому, как символы классов используются в языке теории множеств. Точнее говоря, синтаксис булевозначных оценок 2.2 расширяется следующими определениями, задействующими символы булевозначных классов Φ, Ψ:

$$[x \in \Phi]_X := [\Phi(x)]_X := \Phi(x), \quad [x = \Phi]_X := [\Phi = x]_X := [(\forall\, y)(y \in x \Leftrightarrow y \in \Phi)]_X,$$
$$[\Phi \in x]_X := [(\exists\, y)(\Phi = y \wedge y \in x)]_X, \quad [\Phi = \Psi]_X := [(\forall\, y)(y \in \Phi \Leftrightarrow y \in \Psi)]_X,$$
$$[\Phi \in \Psi]_X := [(\exists\, x)(\Phi = x \wedge x \in \Psi)]_X.$$

В результате обретают смысл выражения вида $[\varphi(x_1, \ldots, x_m, \Phi_1, \ldots, \Phi_n)]_X$, где φ — формула, x_i — переменные, Φ_j — символы булевозначных классов. Например, если $\Phi\colon X \to B$ — булевозначный класс, то

$$[\Phi \neq \varnothing] = [(\exists\, x)(x \in \Phi)] = \bigvee_{x \in X} [x \in \Phi] = \bigvee_{x \in X} \Phi(x) = \vee\Phi,$$

а если $Y \subset X$ и $P \subset {}^{\%}Y$, то

$$[P{\uparrow} \neq \varnothing] = \bigvee_{x \in X} P{\uparrow}(x) = \bigvee_{y \in Y} P{\uparrow}(y) = \bigvee_{p \in P} \operatorname{dom} p. \tag{3}$$

В дальнейшем утверждение о том, что функция $\Phi\colon X \to B$ является булевозначным классом (т. е. экстенсиональна), будем записывать в виде $\Phi \Subset X$.

3.9. На логическом уровне расширение языка булевозначных оценок за счет символов классов $\Phi_1, \dots, \Phi_n \Subset X$ означает обогащение сигнатуры унарными предикатными символами $\Phi_1, \dots, \Phi_n$, снабжение алгебраической системы X булевозначными интерпретациями $[\Phi_i(x)]_X := \Phi_i(x)$ и использование «синтаксического сахара» в виде перечисленных в п. 3.8 синонимов и сокращений $(x \in \Phi_i) := \Phi_i(x)$, $(x = \Phi_i) := (\forall\, y)(y \in x \Leftrightarrow y \in \Phi_i)$ и др. Благодаря экстенсиональности функций $\Phi_i \colon X \to B$ в системе X оказываются истинными аксиомы исчисления предикатов обогащенной сигнатуры, и имеет место следующая усиленная версия утверждения 2.3.

Пусть $\Sigma := \{=, \in, \Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ — *обогащение исходной сигнатуры* $\{=, \in\}$ *унарными предикатными символами* $\Phi_1, \dots, \Phi_n$. *Тогда в предположении, что* X *является* B*-системой,* $\Phi_1, \dots, \Phi_n \Subset X$ *и* $[\Phi_i(x)]_X = \Phi_i(x)$ $(i = 1, \dots, n)$*, справедливы следующие соотношения:*

(a) ZFC $\vdash (X \vDash \varphi)$ *для любой тавтологии* φ *теории предикатов сигнатуры* Σ*;*

(b) *если* Γ *и* Δ — *множества предложений сигнатуры* Σ*,* ZFC $\vdash (X \vDash \Gamma)$ *и* $\Gamma \vdash \Delta$*, то* ZFC $\vdash (X \vDash \Delta)$.

3.10. Благодаря 3.9 имеется возможность доказывать истинность в любой B-системе X путем «рассуждений внутри X». А именно, пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi$ — формулы со свободными переменными $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$ и $\overline{\Phi} = \Phi_1, \dots, \Phi_m$. Предположим, что, рассуждая в рамках теории предикатов и обращаясь с $\overline{\Phi}$ как с унарными предикатными символами, удается доказать φ на основе гипотез $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. Тогда можно утверждать, что для произвольных булевозначных классов $\overline{\Phi} = \Phi_1, \dots, \Phi_m \Subset X$ справедливо соотношение

$$X \vDash (\forall\, \bar{x})(\varphi_1(\bar{x}, \overline{\Phi}) \wedge \dots \wedge \varphi_k(\bar{x}, \overline{\Phi}) \ \Rightarrow\ \varphi(\bar{x}, \overline{\Phi}))$$

и, в частности, для любых элементов $\bar{x} \in X$ из $X \vDash \varphi_1(\bar{x}, \overline{\Phi})$, $\dots$, $X \vDash \varphi_k(\bar{x}, \overline{\Phi})$ следует $X \vDash \varphi(\bar{x}, \overline{\Phi})$.

3.11. Распространим соглашения 3.2 и 3.8 на формулы, содержащие вхождения переменных $\bar{x} = x_1, \dots, x_k$, частичных элементов $p = y|_b$, $p_j = y_j|_{b_j}$ $(j = 1, \dots, m)$ и булевозначных классов $\Phi, \overline{\Phi} = \Phi_1, \dots, \Phi_n$, следующим образом:

$$\begin{aligned} &[\Phi(p)] := \Phi(y) \wedge b, \\ &[\varphi(\bar{x}, p_1, \dots, p_m, \overline{\Phi})] := [\varphi(\bar{x}, y_1, \dots, y_m, \overline{\Phi})] \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_m. \end{aligned} \tag{4}$$

Например, если $q \in {}^{\%}X$ и $P \subset {}^{\%}X$, то

$$[q \in P{\uparrow}] = \bigvee_{p \in P} [q = p].$$

3.12. Лемма. *Пусть* φ — *произвольная формула. Если* $\bar{x} = x_1, \dots, x_k \in X$*,* $\bar{p} = p_1, \dots, p_m \in {}^{\%}X$*,* $\overline{\Phi} = \Phi_1, \dots, \Phi_n \Subset X$ *и* $i \in \{1, \dots, k\}$*, то следующая функция экстенсиональна:*

$$x_i \in X \ \mapsto\ [\varphi(\bar{x}, \bar{p}, \overline{\Phi})] \in B.$$

$\lhd$ Достаточно заметить, что из экстенсиональности $\Phi_\xi \colon X \to B$ $(\xi \in \Xi)$ вытекает экстенсиональность поточечных связок $\bigvee_{\xi \in \Xi} \Phi_\xi$, $\bigwedge_{\xi \in \Xi} \Phi_\xi$, $\neg \Phi_\xi$. $\rhd$

3.13. Утверждение 3.12 обосновывает корректность соглашения (4). Действительно, правая часть (4) не зависит от выбора представителей (y_j, b_j) классов $p_j = y_j|_{b_j}$, поскольку из $y_j|_{b_j} = y'_j|_{b_j}$ следует $[y_j = y'_j] \geqslant b_j$, откуда в силу экстенсиональности функций $y_j \mapsto [\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \overline{\Phi})]$ вытекает равенство

$$[\varphi(\bar{x}, y_1, \ldots, y_m, \overline{\Phi})] \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_m = [\varphi(\bar{x}, y'_1, \ldots, y'_m, \overline{\Phi})] \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_m.$$

3.14. Благодаря 3.12 появляется возможность существенно упрощать формулировки общих утверждений о значениях истинности формул: вместо рассмотрения громоздких выражений $[\varphi(\bar{x}, \bar{p}, \overline{\Phi})]$ или $[(\exists\, x_i)\, \varphi(\bar{x}, \bar{p}, \overline{\Phi})]$ для произвольной формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, элементов $\bar{x} = x_1, \ldots, x_k \in X$, частичных элементов $\bar{p} = p_1, \ldots, p_m \in {}^{\%}\!X$ и булевозначных классов $\overline{\Phi} = \Phi_1, \ldots, \Phi_n \Subset X$ достаточно говорить о значениях $\Phi(x)$ или $[(\exists\, x)\, \Phi(x)]$ для какого-либо класса $\Phi \Subset X$ (см., например, 3.18, 5.11).

3.15. Пусть X и Y — B-системы. Для произвольного соответствия $f \subset X \times Y$ определим $f^{\%} \subset {}^{\%}\!X \times {}^{\%}Y$, полагая

$$f^{\%} := \{(x|_b, y|_b) : (x, y) \in f,\ b \in B\}.$$

Если $f\colon X \to Y$, то $f^{\%}\colon {}^{\%}\!X \to {}^{\%}Y$, причем $\operatorname{dom} p = \operatorname{dom} f^{\%}(p)$ для всех $p \in {}^{\%}\!X$. Следующее утверждение легко доказать индукцией по сложности формулы.

Лемма. *Пусть φ — произвольная формула. Если f — изоморфизм между B-системами X и Y, то $f^{\%}$ — биекция между ${}^{\%}\!X$ и ${}^{\%}Y$, причем для любых $x_1, \ldots, x_k \in X$, $p_1, \ldots, p_m \in {}^{\%}\!X$, $P_1, \ldots, P_n \subset {}^{\%}\!X$*

$$\begin{aligned}&[\varphi(x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_m, P_1{\uparrow}, \ldots, P_n{\uparrow})]_X \\ &\quad = [\varphi(f(x_1), \ldots, f(x_k), f^{\%}(p_1), \ldots, f^{\%}(p_m), f^{\%}(P_1){\uparrow}, \ldots, f^{\%}(P_n){\uparrow})]_Y.\end{aligned}$$

3.16. Лемма. *Если $\Phi \Subset X$ и $P \subset {}^{\%}\!X$, то $[\Phi \in P{\uparrow}] = \bigvee_{p \in P} [\Phi = p]$.*

◁ Пусть $P = \{x_i|_{b_i} : i \in I\}$, где $x_i \in X$, $b_i \in B$. Согласно 3.8 имеем

$$\begin{aligned}[\Phi \in P{\uparrow}] &= [(\exists\, x)(\Phi = x \ \wedge\ x \in P{\uparrow})] = \bigvee_{x \in X} [\Phi = x] \wedge \bigvee_{i \in I} [x = x_i] \wedge b_i \\ &= \bigvee_{i \in I} \bigvee_{x \in X} [\Phi = x] \wedge [x = x_i] \wedge b_i = \bigvee_{i \in I} [\Phi = x_i] \wedge b_i = \bigvee_{p \in P} [\Phi = p]. \ ▷\end{aligned}$$

3.17. Лемма. *Пусть X — произвольная B-система.*

(a) *Если $\Phi, \Psi \Subset X$, то $X \vDash (\Phi \subset \Psi) \Leftrightarrow \Phi \leqslant \Psi$.*

(b) *Если $Y \subset X$ и $P \subset {}^{\%}Y$, то $X \vDash (P{\uparrow} \subset Y{\uparrow})$.*

(c) *Если $Y \subset X$, $\Phi \Subset X$ и $P = \{y|_{\Phi(y)} : y \in Y\}$, то $X \vDash (P{\uparrow} = Y{\uparrow} \cap \Phi)$ и $[\Phi \subset Y{\uparrow}] = [\Phi = P{\uparrow}]$. В частности, если $X \vDash (\Phi \subset Y{\uparrow})$, то $X \vDash (\Phi = P{\uparrow})$ для некоторого подкласса $P \subset {}^{\%}Y$.*

(d) *Если $Z \subset Y \subset X$, то $X \vDash (Y{\uparrow} \setminus Z{\uparrow} \subset (Y \setminus Z){\uparrow})$.*

◁ Утверждение (a) очевидно, (b) вытекает из (a).

(c) Для всех $x \in X$

$$[x \in P{\uparrow}] = \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge \Phi(y) = \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge \Phi(x) = [x \in Y{\uparrow} \cap \Phi],$$

т. е. $X \vDash (P{\uparrow} = Y{\uparrow} \cap \Phi)$ и, следовательно, $[\Phi \subset Y{\uparrow}] = [\Phi = Y{\uparrow} \cap \Phi] = [\Phi = P{\uparrow}]$.

(d) Для всех $x \in X$

$$
\begin{aligned}
[x \in Y\!\uparrow \setminus Z\!\uparrow] &= \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge [x \notin Z\!\uparrow] \\
&= \Big(\bigvee_{y \in Y \setminus Z} [x = y] \wedge [x \notin Z\!\uparrow] \Big) \vee \Big(\bigvee_{y \in Z} [x = y] \wedge [x \notin Z\!\uparrow] \Big) \\
&\leqslant \Big(\bigvee_{y \in Y \setminus Z} [x = y] \Big) \vee ([x \in Z\!\uparrow] \wedge [x \notin Z\!\uparrow]) = [x \in (Y \setminus Z)\!\uparrow]. \ \rhd
\end{aligned}
$$

3.18. Лемма. *Пусть X — B-система, $P \subset {}^{\%}X$ и $\Phi \Subset X$. Тогда*
(a) $[(\exists\, x \in P\!\uparrow)\, \Phi(x)] = \bigvee_{p \in P} [\Phi(p)]$;
(b) $[(\forall\, x \in P\!\uparrow)\, \Phi(x)] = \bigwedge_{p \in P} [\Phi(p)] \vee \neg\, \mathrm{dom}\, p$;
(c) $X \vDash (\forall\, x \in P\!\uparrow)\, \Phi(x) \ \Leftrightarrow\ (\forall\, p \in P)\ [\Phi(p)] = \mathrm{dom}\, p$;
(d) *если $Y \subset X$, то $X \vDash (\forall\, x \in Y\!\uparrow)\, \Phi(x) \ \Leftrightarrow\ (\forall\, x \in Y)\ X \vDash \Phi(x)$.*

$\lhd$ (a) С учетом равенства $[\Phi(x)] \wedge [x = p] = [\Phi(p)] \wedge [x = p]$ имеем

$$
\begin{aligned}
[(\exists\, x \in P\!\uparrow)\, \Phi(x)] &= \bigvee_{x \in X} [\Phi(x)] \wedge [x \in P\!\uparrow] \\
&= \bigvee_{x \in X} \bigvee_{p \in P} [\Phi(x)] \wedge [x = p] = \bigvee_{x \in X} \bigvee_{p \in P} [\Phi(p)] \wedge [x = p] \\
&= \bigvee_{p \in P} [\Phi(p)] \wedge \bigvee_{x \in X} [x = p] = \bigvee_{p \in P} [\Phi(p)] \wedge \mathrm{dom}\, p = \bigvee_{p \in P} [\Phi(p)].
\end{aligned}
$$

Соотношение (b) легко выводится из (a), (c) является частным случаем (b), а (d) — частным случаем (c). $\rhd$

3.19. Будем говорить, что элемент $x \in X$ *реализует булевозначный класс* $\Phi \Subset X$, и писать $x \simeq \Phi$ или $\Phi \simeq x$, если $[\cdot \in x] = \Phi$ (см. 2.7). Таким образом,

$$
x \simeq \Phi \ \Leftrightarrow\ (\forall\, z \in X)\ [z \in x] = \Phi(z) \ \Leftrightarrow\ X \vDash (x = \Phi).
$$

Как легко видеть, для всех $x \in X$ функция $[\cdot \in x] \colon X \to B$ экстенсиональна и тем самым каждый элемент $x \in X$ реализует булевозначный класс $[\cdot \in x]$. Элемент $x \in X$ *реализует подъем* $P\!\uparrow$ множества или класса $P \subset {}^{\%}X$, если $x \simeq P\!\uparrow$, т. е.

$$
(\forall\, z \in X)\ [z \in x] = [z \in P\!\uparrow] = \bigvee_{p \in P} [z = p].
$$

В частности, если $y_i \in X$ и $b_i \in B$ $(i \in I)$, то

$$
x \simeq \{y_i|_{b_i} : i \in I\}\!\uparrow \ \Leftrightarrow\ (\forall\, z \in X)\ [z \in x] = \bigvee_{i \in I} [z = y_i] \wedge b_i.
$$

Для произвольного подкласса $Y \subset X$ обозначим символом $\mathscr{P}_X(Y)$ совокупность всех элементов, реализующих подъемы подмножеств ${}^{\%}Y$:

$$
\mathscr{P}_X(Y) := \{x \in X : (\exists\, P \subset {}^{\%}Y)(x \simeq P\!\uparrow)\}.
$$

Булевозначную систему X назовем *интенсиональной* (или *содержательной*), если в X реализуются подъемы любых множеств частичных элементов: $(\forall\, P \subset {}^{\%}X)(\exists\, x \in X)(x \simeq P\!\uparrow)$.

3.20. Элемент $x \in X$, реализующий булевозначный класс $\Phi \Subset X$, определяется однозначно с точностью до эквивалентности $\simeq$, а если B-система X экстенсиональна, то — с точностью до эквивалентности $\sim$. В последнем случае условимся отождествлять булевозначный класс Φ с соответствующим классом эквивалентности $\widetilde{x}$. Таким образом, если система X экстенсиональна и $x \simeq \Phi$, то $x \sim \Phi \in \widetilde{X}$. Если система X не только экстенсиональна, но и отделима, то вступает в силу соглашение 3.3, булевозначный класс Φ становится элементом X и соотношение $x \simeq \Phi$ превращается в равенство $x = \Phi$.

§ 4. Предикативность

Пусть B — полная булева алгебра, X — произвольная B-система.

4.1. Определим *насыщенный спуск* $\Phi{\Downarrow}$ *булевозначного класса* $\Phi \Subset X$, полагая

$$\Phi{\Downarrow} := \{p \in {}^{\%}\!X : [p \in \Phi] = \operatorname{dom} p\} = \{x|_b : x \in X,\ b \leqslant \Phi(x)\}.$$

Насыщенный спуск $x{\Downarrow}$ *элемента* $x \in X$ определим как насыщенный спуск $[\cdot \in x]{\Downarrow}$ булевозначного класса $[\cdot \in x]$. Отметим, что $\Phi{\Downarrow}$ и $x{\Downarrow}$ могут оказаться собственными классами.

4.2. Класс $P \subset {}^{\%}\!X$ назовем *насыщенным*, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\begin{aligned} &p \in P \ \Rightarrow\ p|_b \in P, && p \in {}^{\%}\!X,\ b \in B; \\ &(\forall\, a \in A)(x|_a \in P) \ \Rightarrow\ x|_{\vee A} \in P, && x \in X,\ A \subset B. \end{aligned}$$

Лемма. *Следующие свойства класса $P \subset {}^{\%}\!X$ равносильны:*
(a) *P является насыщенным;*
(b) $(\forall\, x \in X)(\exists\, c \in B)(\forall\, b \in B)(x|_b \in P \ \Leftrightarrow\ b \leqslant c)$;
(c) $(\forall\, x \in X)(\forall\, b \in B)(b \leqslant P{\uparrow}(x) \ \Rightarrow\ x|_b \in P)$;
(d) $(\forall\, q \in {}^{\%}\!X)([q \in P{\uparrow}] = \operatorname{dom} q \ \Rightarrow\ q \in P)$;
(e) $(\forall\, Q \subset {}^{\%}\!X)(Q{\uparrow} = P{\uparrow} \ \Rightarrow\ Q \subset P)$;
(f) *$P = \Phi{\Downarrow}$ для некоторого булевозначного класса $\Phi \Subset X$;*
(g) $P = P{\uparrow}{\Downarrow}$.

4.3. Согласно 3.6 функция $\Phi\colon X \to B$ экстенсиональна тогда и только тогда, когда $\Phi = P{\uparrow}$ для некоторого множества или класса $P \subset {}^{\%}\!X$. Из приведенного ниже утверждения следует, что на роль P подходит насыщенный спуск $\Phi{\Downarrow}$.

Лемма. *Если $\Phi \Subset X$, то $\Phi = \Phi{\Downarrow}{\uparrow}$. В частности, $P{\uparrow}{\Downarrow}{\uparrow} = P{\uparrow}$ и $x \simeq x{\Downarrow}{\uparrow}$ для всех $P \subset {}^{\%}\!X$ и $x \in X$.*

◁ Для всякого элемента $x \in X$ с учетом включения $x|_{\Phi(x)} \in \Phi{\Downarrow}$ имеем

$$\Phi(x) = [x = x] \wedge \Phi(x) = [x = x|_{\Phi(x)}] \leqslant \bigvee_{p \in \Phi{\Downarrow}} [x = p].$$

С другой стороны, благодаря экстенсиональности Φ для любых $y \in X$ и $b \leqslant \Phi(y)$ справедливы соотношения

$$[x = y|_b] = [x = y] \wedge b \leqslant [x = y] \wedge \Phi(y) \leqslant \Phi(x). \ ▷$$

4.4. Приведенное ниже утверждение вытекает из 4.2 (e) и 4.3.

Следствие. *Пусть $\Phi \Subset X$ и $P \subset {}^{\%}X$. Следующие утверждения равносильны:*
(a) *класс P насыщен и $P{\uparrow} = \Phi$;*
(b) $P = \max\{Q \subset {}^{\%}X : Q{\uparrow} = \Phi\}$;
(c) $P = \Phi{\Downarrow}$.

Таким образом, если $P \subset {}^{\%}X$, то $P{\uparrow}{\Downarrow}$ — наибольший среди классов $Q \subset {}^{\%}X$, удовлетворяющих равенству $Q{\uparrow} = P{\uparrow}$, и единственный насыщенный среди таких классов Q. В этой связи естественно назвать $P{\uparrow}{\Downarrow}$ *насыщенной оболочкой* или *насыщением* P.

4.5. Теорема. *Следующие свойства булевозначного класса $\Phi \Subset X$ равносильны:*
(a) $\Phi = P{\uparrow}$ *для некоторого множества* $P \subset {}^{\%}X$;
(b) $\Phi = P{\uparrow}$ *для некоторого насыщенного множества* $P \subset {}^{\%}X$;
(c) $\Phi = (\Phi|_Y){\uparrow}$ *для некоторого множества* $Y \subset X$;
(d) $\Phi = \Psi{\uparrow}$ *для некоторой функции* $\Psi\colon Y \to B$, *где* $Y \subset X$ — *множество;*
(e) *класс* $\Phi{\Downarrow}$ *является множеством.*

$\triangleleft$ (a)$\Rightarrow$(c). Если Φ обладает свойством (a), то имеются такие семейства $(y_i)_{i\in I} \subset X$ и $(b_i)_{i\in I} \subset B$, что для всех $x \in X$

$$\Phi(x) = \bigvee_{i\in I} [x = y_i] \wedge b_i.$$

Тогда для всех $i \in I$

$$\Phi(y_i) = \bigvee_{j\in I} [y_i = y_j] \wedge b_j \geqslant [y_i = y_i] \wedge b_i = b_i,$$

откуда для каждого элемента $x \in X$ вытекает соотношение

$$\Phi(x) = \bigvee_{i\in I} [x = y_i] \wedge b_i \leqslant \bigvee_{i\in I} [x = y_i] \wedge \Phi(y_i) \leqslant \Phi(x)$$

и, следовательно, множество $Y := \{y_i : i \in I\}$ удовлетворяет условию (c).

Импликация (c)$\Rightarrow$(d) очевидна.

(d)$\Rightarrow$(a). Если $Y \subset X$ и $\Psi\colon Y \to B$ удовлетворяют (d), то $\Phi = \{y|_{\Psi(y)} : y \in Y\}{\uparrow}$.

(a)$\Rightarrow$(e). Пусть $\Phi = P{\uparrow}$, где $P \subset {}^{\%}X$ — множество. Тогда для всех $q \in \Phi{\Downarrow}$

$$\bigvee_{p\in P} [q = p] = [q \in P{\uparrow}] = [q \in \Phi] = \operatorname{dom} q. \tag{5}$$

Обозначим через F множество всех функций $f\colon P \to B$, для которых существует элемент $q \in \Phi{\Downarrow}$, удовлетворяющий условию

$$(\forall\, p \in P)\ f(p) = [q = p]. \tag{6}$$

Элемент $q \in \Phi{\Downarrow}$ определяется условием (6) однозначно. Действительно, если $q_1, q_2 \in \Phi{\Downarrow}$ и $[q_1 = p] = [q_2 = p]$ для всех $p \in P$, то с учетом (5)

$$\operatorname{dom} q_1 = \bigvee_{p\in P} [q_1 = p] = \bigvee_{p\in P} [q_2 = p] = \operatorname{dom} q_2,$$

$$[q_1 = q_2] \geqslant \bigvee_{p\in P} [q_1 = p] \wedge [q_2 = p] = \bigvee_{p\in P} [q_1 = p] = \operatorname{dom} q_1,$$

а значит, $q_1 = q_2$. Следовательно, имеется отображение $g\colon F \to \Phi\Downarrow$, сопоставляющее каждой функции $f \in F$ единственный элемент $q \in \Phi\Downarrow$, удовлетворяющий (6). Осталось заметить, что отображение g сюръективно, поскольку всякий элемент $q \in \Phi\Downarrow$ удовлетворяет условию (6) для функции $f\colon p \mapsto [q = p]$.

Импликация (e)⇒(b) вытекает из 4.3, а импликация (b)⇒(a) тривиальна. ▷

4.6. Булевозначный класс $\Phi \Subset X$, обладающий любым из эквивалентных свойств 4.5 (a)–(e), будем называть *предикативным*. Выбор этого термина основан на том соображении, что классы, однозначно определяемые множествами, допускают квантификацию в языке предикатов первого порядка: фраза, начинающаяся словами «для любого предикативного булевозначного класса», не является бесконечным утверждением (см. § 1) и может быть записана одной формулой в рамках теории множеств.

Если Φ, Ψ — булевозначные классы и $\Phi \leqslant \Psi$, то $\Phi\Downarrow \subset \Psi\Downarrow$ и, следовательно, предикативность Ψ влечет предикативность Φ.

4.7. Следствие. *Следующие свойства системы X равносильны:*
(a) *система X интенсиональна;*
(b) *в X реализуются подъемы любых насыщенных подмножеств ${}^{\%}X$;*
(c) *в X реализуются все предикативные булевозначные классы.*

4.8. Следствие. *Следующие свойства элемента $x \in X$ равносильны:*
(a) *$x \simeq P\!\uparrow$ для некоторого множества $P \subset {}^{\%}X$;*
(b) *$x \simeq P\!\uparrow$ для некоторого насыщенного множества $P \subset {}^{\%}X$;*
(c) *$(\exists\, Y \subset X)(\forall\, z \in X)\ [z \in x] = \bigvee_{y \in Y} [z = y] \wedge [y \in x]$;*
(d) *$x \simeq \Psi\!\uparrow$ для некоторой функции $\Psi\colon Y \to B$, где $Y \subset X$ — множество;*
(e) *класс $x\Downarrow$ является множеством.*

Элементы $x \in X$, обладающие свойствами (a)–(e), условимся называть *предикативными*. Таким образом, $\mathscr{P}_{\!X}(X)$ — совокупность всех предикативных элементов X (см. 3.19). Систему X назовем *предикативной*, если все элементы X предикативны, т. е. $\mathscr{P}_{\!X}(X) = X$.

4.9. Если булевозначная система интенсиональна и предикативна, то говорят, что она удовлетворяет *принципу подъема*:

$$(\forall\, P \subset {}^{\%}X)(\exists\, x \in X)(x \simeq P\!\uparrow),$$
$$(\forall\, x \in X)(\exists\, P \subset {}^{\%}X)(x \simeq P\!\uparrow).$$

4.10. Лемма. *Пусть $x \in X$ — предикативный элемент и $Y \subset X$. Тогда $[x \subset Y\!\uparrow] = [x = P\!\uparrow]$ для некоторого подмножества $P \subset {}^{\%}Y$. В частности*

$$X \vDash (x \subset Y\!\uparrow) \ \Leftrightarrow\ (\exists\, P \subset {}^{\%}Y)\ x \simeq P\!\uparrow.$$

◁ Сформулированное утверждение вытекает из 3.17 (c), так как класс $P = \{y|_{[y \in x]} : y \in Y\}$ содержится в $x\Downarrow$ и поэтому является множеством. ▷

§ 5. Цикличность

Пусть B — полная булева алгебра, X — произвольная B-система.

Напомним, что элементы $a, b \in B$ называют *дизъюнктными* и пишут $a \perp b$, если $a \wedge b = 0_B$. Для $A \subset B$ соотношение $(\forall\, a \in A)(a \perp b)$ записывают в виде $A \perp b$. *Антицепь* в булевой алгебре — это множество или семейство попарно дизъюнктных элементов, а *разбиение единицы* — максимальная антицепь (т. е. антицепь, супремум элементов которой равен 1_B).

5.1. В дальнейшем неоднократно пригодятся следующие простые наблюдения (см., например, 5.4 и 5.8).

Лемма. (a) *Если* $(d_i)_{i\in I} \subset B$ — *антицепь,* $(b_i)_{i\in I} \subset B$, $(\forall\, i \in I)(b_i \leqslant d_i)$, $\bigvee_{i\in I} b_i = \bigvee_{i\in I} d_i$, *то* $(\forall\, i \in I)(b_i = d_i)$.

(b) *Если* $A \subset B$, $\bar a \in B$, $A \leqslant \bar a$, *то* $\vee A = \bar a \Leftrightarrow (\forall\, b \in B)(A \perp b \Rightarrow \bar a \perp b)$.

5.2. Определим *спуск* $\Phi{\downarrow}$ *булевозначного класса* $\Phi \Subset X$, полагая

$$\begin{aligned}\Phi{\downarrow} &= \{p \in {}^{\%}X : [p \in \Phi] = \operatorname{dom} p = \vee\Phi\}\\ &= \{p \in \Phi{\Downarrow} : [p \in \Phi] = \vee\Phi\}\\ &= \{x|_{\vee\Phi} : x \in X,\ \Phi(x) = \vee\Phi\},\end{aligned}$$

где $\vee\Phi := \bigvee_{x\in X} \Phi(x) = [\Phi \neq \varnothing]$. *Спуск* $x{\downarrow}$ *элемента* $x \in X$ определим как спуск $[\cdot \in x]{\downarrow}$ булевозначного класса $[\cdot \in x]$ (см. 2.7). Отметим, что спуски $\Phi{\downarrow}$ и $x{\downarrow}$ могут оказаться собственными классами.

Если $X \vDash (\Phi \neq \varnothing)$ и B-система X отделима, то с учетом соглашения 3.3

$$\Phi{\downarrow} = \{x \in X : X \vDash (x \in \Phi)\}.$$

5.3. Подмножество $P \subset {}^{\%}X$ назовем *антицепью*, если его элементы имеют попарно дизъюнктные области определения: $\operatorname{dom} p_1 \perp \operatorname{dom} p_2$ для любых $p_1, p_2 \in P$, $p_1 \neq p_2$. Частичный элемент $q \in {}^{\%}X$ будем называть *соединением* антицепи $P \subset {}^{\%}X$, если

$$(\forall\, p \in P)\ p \sqsubset q \quad \text{и} \quad \operatorname{dom} q = \bigvee_{p\in P} \operatorname{dom} p.$$

Как легко видеть, такой частичный элемент q однозначно определяется антицепью P, что позволяет ввести для соединения P обозначение $\sqcup P$. Соединение $\sqcup\{p_1, p_2\}$ двухэлементной антицепи $\{p_1, p_2\} \subset {}^{\%}X$ условимся записывать в виде $p_1 \sqcup p_2$, а соединение $\sqcup\{p_i : i \in I\}$ антицепи, заданной семейством $(p_i)_{i\in I} \subset {}^{\%}X$, — в виде $\bigsqcup_{i\in I} p_i$.

5.4. Внутри X подъем антицепи $P \subset {}^{\%}X$ содержит не более одного элемента: $X \vDash ((\exists\, x)(x \in P{\uparrow}) \Rightarrow (\exists!\, x)(x \in P{\uparrow}))$.

Лемма. *Пусть* $P \subset {}^{\%}X$ — *антицепь,* $x \in X$, $b := [P{\uparrow} \neq \varnothing]$. *Следующие восемь соотношений равносильны:*

$$x|_b = \sqcup P, \quad [x = \cup(P{\uparrow})] \geqslant b, \quad [x \in P{\uparrow}] = b, \quad [P{\uparrow} = \{x\}] = b,$$
$$x|_b \in P{\uparrow\downarrow}, \quad P{\uparrow\downarrow} = \{x|_b\}, \quad \bigvee_{p\in P} [x = p] = b, \quad (\forall\, p \in P)\ [x = p] = \operatorname{dom} p.$$

5.5. Следствие. *Если* $P \subset {}^{\%}X$ — *антицепь и* $P{\uparrow\downarrow} \neq \varnothing$, *то существует соединение* $\sqcup P$, *причем* $P{\uparrow\downarrow} = \{\sqcup P\}$.

5.6. Лемма. *Если* X — *экстенсиональная* B*-система,* $P \subset {}^{\%}X$ — *антицепь и* $x \in X$, *то следующие утверждения равносильны:*

(a) $x \sim \operatorname{ext} \sqcup P$;

(b) $X \vDash (x = \cup(P{\uparrow}))$;

(c) $[x \neq \varnothing] \leqslant [P{\uparrow} \neq \varnothing] \leqslant [x \in P{\uparrow}]$;

(d) $(\forall\, z \in X)\ [z \in x] = \bigvee_{p\in P} [z \in p]$.

$\lhd$ Эквивалентность (a)–(c) непосредственно вытекает из определений.

(a)$\Rightarrow$(d). Для всех $z \in X$ в силу соотношений $[z \in x] \leqslant [x \neq \varnothing] \leqslant \bigvee_{p\in P} \operatorname{dom} p$ и $x|_{\operatorname{dom} p} = p$ имеем

$$[z \in x] = \bigvee_{p\in P} [z \in x] \wedge \operatorname{dom} p = \bigvee_{p\in P} [z \in p].$$

(d)$\Rightarrow$(c). Если $p \in P$, то $(\forall\, z \in X)\ [z \in x] \wedge \operatorname{dom} p \geqslant [z \in p]$ благодаря (d), откуда с учетом 5.1 (a) вытекает $(\forall\, z \in X)\ [z \in x] \wedge \operatorname{dom} p = [z \in p]$, а значит, $[x = p] \geqslant \operatorname{dom} p$ в силу экстенсиональности X. Следовательно,

$$[x \neq \varnothing] = \bigvee_{z\in X} [z \in x] = \bigvee_{z\in X} \bigvee_{p\in P} [z \in p] \leqslant \bigvee_{p\in P} \operatorname{dom} p \leqslant \bigvee_{p\in P} [x = p] = [x \in P{\uparrow}]. \ \rhd$$

5.7. Антицепь $P \subset {}^{\%}X$ является *максимальной*, если $\bigvee_{p\in P} \operatorname{dom} p = 1_B$, т. е. области определения элементов P образуют разбиение единицы в булевой алгебре B. Соединения максимальных антицепей представляют собой всюду определенные частичные элементы X и в случае, когда система X отделима, отождествляются с соответствующими элементами X (см. 3.3).

Если $x \in X$, $\{y_i|_{d_i} : i \in I\}$ — максимальная антицепь и $x \sim \bigsqcup_{i\in I} y_i|_{d_i}$, то x называется *перемешиванием* семейства $(y_i)_{i\in I} \subset X$ относительно разбиения единицы $(d_i)_{i\in I} \subset B$. Как легко видеть,

$$x \sim \bigsqcup_{i\in I} y_i|_{d_i} \ \Leftrightarrow\ (\forall\, i \in I)\ [x = y_i] \geqslant d_i.$$

В случае отделимой системы перемешивание $(y_i)_{i\in I}$ относительно $(d_i)_{i\in I}$ единственно и обозначается символом $\operatorname*{mix}_{i\in I} d_i y_i$.

5.8. Внутри X подъем максимальной антицепи $P \subset {}^{\%}X$ является синглитоном: $X \vDash (\exists!\, x)(x \in P{\uparrow})$.

Лемма. *Для максимальной антицепи $P \subset {}^{\%}X$ и элемента $x \in X$ следующие восемь соотношений равносильны:*

$$x \sim \sqcup P, \quad X \vDash (x = \cup(P{\uparrow})), \quad X \vDash (x \in P{\uparrow}), \quad X \vDash (P{\uparrow} = \{x\}),$$
$$\widetilde{x} \in P{\uparrow}{\downarrow}, \quad P{\uparrow}{\downarrow} = \{\widetilde{x}\}, \quad \bigvee_{p\in P} [x = p] = 1_B, \quad (\forall\, p \in P)\ [x = p] = \operatorname{dom} p.$$

5.9. Подкласс $Y \subset X$ называют *циклическим* или *цикличным*, если для любого семейства $(y_i)_{i\in I} \subset Y$ и любого разбиения единицы $(d_i)_{i\in I} \subset B$ существует перемешивание $y \sim \bigsqcup_{i\in I} y_i|_{d_i}$, $y \in Y$. В случае, когда циклична вся B-система X, говорят, что X удовлетворяет *принципу перемешивания*.

Лемма. *Следующие свойства непустого класса $Y \subset X$ равносильны:*

(a) *Y является циклическим;*

(b) *любая антицепь $P \subset {}^{\%}Y$ имеет соединение $\sqcup P \in {}^{\%}Y$;*

(c) *любая максимальная антицепь $P \subset {}^{\%}Y$ имеет соединение $\sqcup P \in {}^{\%}Y$.*

5.10. Лемма. *Пусть $Y \subset X$. Следующие свойства элемента $x \in X$ равносильны:*

(a) *существуют семейство $(y_i)_{i\in I} \subset Y$ и разбиение единицы $(d_i)_{i\in I} \subset B$ такие, что $x \sim \bigsqcup_{i\in I} y_i|_{d_i}$;*

(b) *$x \sim \sqcup P$ для некоторой максимальной антицепи $P \subset {}^{\%}Y$;*

(c) *$X \vDash (x \in Y\!\uparrow)$;*

(d) *$\widetilde{x} \in Y\!\uparrow\downarrow$;*

(e) *$\bigvee_{y\in Y} [x = y] = 1_B$.*

$\triangleleft$ Импликации (a)$\Rightarrow$(b) и (c)$\Rightarrow$(d)$\Rightarrow$(e) очевидны, импликация (b)$\Rightarrow$(c) вытекает из 5.8 и 3.17 (b), а импликация (e)$\Rightarrow$(a) обеспечивается принципом исчерпывания [3, 2.1.10 (1)]. $\triangleright$

Совокупность всех элементов $x \in X$, обладающих любым из эквивалентных свойств (a)–(e), обозначается символом $\operatorname{mix} Y$. Отметим, что в отсутствии отделимости $\operatorname{mix} Y$ может оказаться собственным классом даже в том случае, когда Y является множеством.

5.11. Лемма. *Если $Y \subset X$, то $Y\!\uparrow = (\operatorname{mix} Y)\!\uparrow$. В частности, для любого булевозначного класса $\Phi \Subset X$*

$$\bigvee_{y\in Y} \Phi(y) = [(\exists\, y \in Y\!\uparrow)\, \Phi(y)] = [(\exists\, x \in (\operatorname{mix} Y)\!\uparrow)\, \Phi(x)] = \bigvee_{x\in \operatorname{mix} Y} \Phi(x).$$

$\triangleleft$ Неравенство $Y\!\uparrow \leqslant (\operatorname{mix} Y)\!\uparrow$ очевидно. Кроме того, для всех $x \in X$ и $z \in \operatorname{mix} Y$

$$[x = z] = [x = z] \wedge \bigvee_{y\in Y} [z = y] = \bigvee_{y\in Y} [x = z] \wedge [z = y] \leqslant \bigvee_{y\in Y} [x = y] = Y\!\uparrow(x),$$

а значит, $(\operatorname{mix} Y)\!\uparrow(x) = \bigvee_{z\in \operatorname{mix} Y} [x = z] \leqslant Y\!\uparrow(x)$. $\triangleright$

5.12. Лемма. *Если $Y \subset X$, то $\operatorname{mix}\operatorname{mix} Y = \operatorname{mix} Y$.*

$\triangleleft$ С учетом 5.11 для всех $x \in X$ имеем

$$x \in \operatorname{mix}\operatorname{mix} Y \;\Leftrightarrow\; X \vDash (x \in (\operatorname{mix} Y)\!\uparrow) \;\Leftrightarrow\; X \vDash (x \in Y\!\uparrow) \;\Leftrightarrow\; x \in \operatorname{mix} Y. \;\triangleright$$

5.13. Следствие. *Следующие свойства подкласса $Y \subset X$ равносильны:*

(a) *для любого семейства $(y_i)_{i\in I} \subset Y$ и разбиения единицы $(d_i)_{i\in I} \subset B$ существует перемешивание $x \sim \bigsqcup_{i\in I} y_i|_{d_i}$, $x \in X$.*

(b) *любая антицепь $P \subset {}^{\%}Y$ имеет соединение $\sqcup P \in {}^{\%}X$;*

(c) *любая максимальная антицепь $P \subset {}^{\%}Y$ имеет соединение $\sqcup P \in {}^{\%}X$;*

(d) *$Y \subset \overline{Y}$ для некоторого циклического класса $\overline{Y} \subset X$;*

(e) *$\operatorname{mix} Y$ — циклический класс.*

Класс Y, удовлетворяющий любому из эквивалентных условий (a)–(e), будем называть *предциклическим* или *предцикличным.*

Цикличность предциклического класса Y равносильна соотношению $\widetilde{Y} = (\operatorname{mix} Y)^{\sim}$, которое в отделимом случае означает равенство $Y = \operatorname{mix} Y$. Если Y — предциклическое подмножество отделимой системы X, то $\operatorname{mix} Y$ является наименьшим по включению циклическим подмножеством X, содержащим Y, и называется *циклической оболочкой* множества Y.

5.14. Лемма. *Если X удовлетворяет принципу перемешивания, то для любых семейств $(x_i)_{i\in I} \subset X$ и $(b_i)_{i\in I} \subset B$ найдутся $Y \subset \operatorname{mix}\{x_i : i \in I\}$ и $b \in B$ такие, что*

$$\{x_i|_{b_i} : i \in I\}\!\uparrow = (Y|_b)\!\uparrow.$$

$\lhd$ В случае $I=\varnothing$ доказываемое утверждение очевидно. Пусть $I\neq\varnothing$.

Положим $b=\bigvee_{i\in I} b_i$, $I^\bullet=I\cup\{I\}$, $b_I=\neg b$ и рассмотрим произвольный элемент $x_I\in\{x_i : i\in I\}$. Согласно принципу исчерпывания существует такое разбиение единицы $(d_i)_{i\in I^\bullet}\subset B$, что $d_i\leqslant b_i$ для всех $i\in I^\bullet$. Заметим, что $\bigvee_{i\in I} d_i=b$. Благодаря цикличности в X имеется элемент $x\sim\bigsqcup_{i\in I^\bullet} x_i|_{d_i}$, характеризующийся соотношениями

$$[x=x_i]\geqslant d_i \quad \text{для всех } i\in I^\bullet. \tag{7}$$

По той же причине для каждого $i\in I$ в X имеется элемент $y_i\sim x_i|_{b_i}\sqcup x|_{\neg b_i}$, удовлетворяющий неравенствам

$$[y_i=x_i]\geqslant b_i, \quad [y_i=x]\geqslant \neg b_i. \tag{8}$$

Положим $Y:=\{y_i : i\in I\}$. Очевидно, $Y\subset \operatorname{mix}\{x_i : i\in I\}$. Покажем, что $\{x_i|_{b_i} : i\in I\}{\uparrow}=(Y|_b){\uparrow}$, т. е.

$$\bigvee_{i\in I}[z=x_i]\wedge b_i = \bigvee_{i\in I}[z=y_i]\wedge b \quad \text{для всех } z\in X.$$

Для любого элемента $z\in X$ с учетом (8) имеем

$$\bigvee_{i\in I}[z=x_i]\wedge b_i = \bigvee_{i\in I}[z=y_i]\wedge b_i \leqslant \bigvee_{i\in I}[z=y_i]\wedge b.$$

С другой стороны, благодаря (7) справедливы соотношения

$$[z=x]\wedge b = \bigvee_{i\in I}[z=x]\wedge d_i = \bigvee_{i\in I}[z=x_i]\wedge d_i \leqslant \bigvee_{i\in I}[z=x_i]\wedge b_i,$$

откуда в силу (8) следует, что для всех $i\in I$

$$\begin{aligned}[z=y_i]\wedge b &= ([z=y_i]\wedge b_i)\vee([z=y_i]\wedge b\wedge\neg b_i)\\ &= ([z=x_i]\wedge b_i)\vee([z=x]\wedge b\wedge\neg b_i)\\ &\leqslant ([z=x_i]\wedge b_i)\vee\bigvee_{j\in I}[z=x_j]\wedge b_j = \bigvee_{j\in I}[z=x_j]\wedge b_j,\end{aligned}$$

и поэтому $\bigvee_{i\in I}[z=y_i]\wedge b\leqslant\bigvee_{i\in I}[z=x_i]\wedge b_i$. $\rhd$

5.15. Следствие. *Пусть B-система X удовлетворяет принципу перемешивания.*

(a) *Для любых $Z\subset X$ и $P\subset {}^{\%}Z$ найдутся $Y\subset\operatorname{mix} Z$ и $b\in B$ такие, что $P{\uparrow}=(Y|_b){\uparrow}$.*

(b) *Для любого предикативного элемента $x\in X$ существуют $Y\subset X$ и $b\in B$ такие, что $x\simeq(Y|_b){\uparrow}$. При этом $b=[x\neq\varnothing]=[y\in x]$ для всех $y\in Y$.*

(c) *Если $(\forall\, Y\subset X)(\forall\, b\in B)(\exists\, x\in X)\ x\simeq(Y|_b){\uparrow}$, то система X интенсиональна.*

§ 6. Принцип максимума

Пусть B — полная булева алгебра, X — произвольная B-система.

6.1. Будем говорить, что булевозначный класс $\Phi \Subset X$ *достигает максимума на* $Y \subset X$, если в множестве $\{\Phi(y) : y \in Y\}$ имеется наибольший элемент или, что то же самое,

$$(\exists\, z \in Y)\ \Phi(z) = [(\exists\, y \in Y\!\uparrow)\, \Phi(y)].$$

Говорят, что Φ *достигает максимума*, если Φ достигает максимума на X, т. е. $\Phi{\downarrow} \neq \varnothing$.

Пусть $\varphi(x, \bar{z})$ — формула, все свободные переменные которой содержатся в списке $x, \bar{z}$, где $\bar{z} = z_1, \dots, z_n$. Система X удовлетворяет *принципу максимума для формулы* $(\exists\, x)\varphi$, если для любых $\bar{z} \in X$ булевозначный класс $x \mapsto [\varphi(x, \bar{z})]$ достигает максимума, т. е.

$$(\forall\, \bar{z} \in X)(\exists\, y \in X)\ [\varphi(y, \bar{z})] = [(\exists\, x)\, \varphi(x, \bar{z})].$$

Говорят, что X удовлетворяет *принципу максимума*, если X удовлетворяет принципу максимума для любой формулы вида $(\exists\, x)\varphi$. (Это очередное бесконечное утверждение, см. § 1.)

6.2. Лемма. *Булевозначный класс* $\Phi \Subset X$ *удовлетворяет соотношению* $\Phi = \Phi{\downarrow}{\uparrow}$ *тогда и только тогда, когда для всех* $x \in X$ *и* $b \in B$

$$(\forall\, p \in \Phi{\downarrow})([x = p] \perp b) \ \Rightarrow\ \Phi(x) \perp b.$$

$\lhd$ Если $x \in X$ и $p \in \Phi{\downarrow}$, то $p = y|_{\Phi(y)}$ для некоторого элемента $y \in X$ и с учетом экстенсиональности Φ

$$[x = p] = [x = y|_{\Phi(y)}] = [x = y] \wedge \Phi(y) = [x = y] \wedge \Phi(x) \leqslant \Phi(x).$$

Поскольку $\Phi{\downarrow}{\uparrow}(x) = \bigvee_{p \in \Phi\downarrow} [x = p]$, остается сослаться на 5.1 (b). $\rhd$

6.3. Лемма. *Пусть* $\Phi \Subset X$. *Для произвольного элемента* $x \in X$ *определим экстенсиональную функцию* $\Phi_x \colon X \to B$, *полагая*

$$\Phi_x(y) = (\neg\Phi(x) \vee [x = y]) \wedge \Phi(y), \quad y \in X.$$

Следующие утверждения равносильны:

(a) $(\forall\, p \in \Phi{\Downarrow})(\exists\, \bar{p} \in \Phi{\downarrow})(p \sqsubset \bar{p})$;

(b) $(\forall\, x \in X)(\exists\, y \in X)(\Phi(x) \leqslant [x = y],\ \Phi(y) = \vee\Phi)$;

(c) $(\forall\, x \in X)(\Phi_x{\downarrow} \neq \varnothing)$.

Если Φ *обладает любым из эквивалентных свойств* (a)–(c), *то*

$$\Phi = \Phi{\downarrow}{\uparrow}. \tag{9}$$

$\lhd$ Предварительно покажем, что $\vee\Phi_x = \vee\Phi$. Действительно, неравенство $\vee\Phi_x \leqslant \vee\Phi$ очевидно, а с другой стороны, для всех $y \in X$

$$\vee\Phi_x \geqslant \Phi_x(x) \vee \Phi_x(y) = \Phi(x) \vee ((\neg\Phi(x) \vee [x = y]) \wedge \Phi(y)) = \Phi(x) \vee \Phi(y) \geqslant \Phi(y).$$

(a)$\Leftrightarrow$(b). Достаточно заметить, что

$$x|_b \in \Phi{\Downarrow} \Leftrightarrow b \leqslant \Phi(x), \quad y|_{\vee\Phi} \in \Phi{\downarrow} \Leftrightarrow \Phi(y) = \vee\Phi,$$
$$x|_{\Phi(x)} \sqsubset y|_{\vee\Phi} \Leftrightarrow \Phi(x) \leqslant [x = y].$$

(b)⇒(c). Если $\Phi(x) \leqslant [x = y]$ и $\Phi(y) = \vee\Phi$, то

$$\Phi_x(y) = (\neg\Phi(x) \vee [x = y]) \wedge \Phi(y) \geqslant (\neg\Phi(x) \vee \Phi(x)) \wedge \Phi(y) = \Phi(y) = \vee\Phi = \vee\Phi_x$$

и, следовательно, Φ_x достигает максимума в точке y.

(c)⇒(b). Пусть $x \in X$, и пусть $y \in X$ — точка максимума функции Φ_x, т. е.

$$(\neg\Phi(x) \vee [x = y]) \wedge \Phi(y) = \vee\Phi_x = \vee\Phi. \tag{10}$$

Поскольку $\Phi(y) \leqslant \vee\Phi$, из (10) вытекает равенство $\Phi(y) = \vee\Phi$. Следовательно, $(\neg\Phi(x) \vee [x = y]) \wedge \vee\Phi = \vee\Phi$, откуда $\neg\Phi(x) \vee [x = y] \geqslant \vee\Phi \geqslant \Phi(x)$ и поэтому $\Phi(x) \leqslant [x = y]$.

Предположим, что Φ обладает свойством (b), и установим равенство $\Phi = \Phi{\downarrow}{\uparrow}$. Согласно 6.2 для этого достаточно рассмотреть $x \in X$ и $b \in B$, удовлетворяющие условию

$$(\forall\, y \in Y)(\Phi(y) = \vee\Phi \;\Rightarrow\; [x = y] \wedge \vee\Phi \perp b), \tag{11}$$

и показать, что $\Phi(x) \perp b$. Благодаря (b) имеется такой элемент $y \in X$, что $\Phi(x) \leqslant [x = y]$ и $\Phi(y) = \vee\Phi$. Тогда с учетом (11) имеем

$$\Phi(x) = \Phi(x) \wedge \vee\Phi \leqslant [x = y] \wedge \vee\Phi \perp b. \;\triangleright$$

Отметим, что условия (a)–(c) не равносильны равенству $\Phi = \Phi{\downarrow}{\uparrow}$. Например, если $B = \mathscr{P}(\{0,1,2\})$, $X = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\}$, $[x = y] = \{i \in \{0,1,2\} : x(i) = y(i)\}$, $[x \in y] = \{i \in \{0,1,2\} : x(i) \in y(i)\}$ (где $0 \in \{0\} = 1$), $\Phi(1,0,0) = \Phi(0,1,0) = \{0,1,2\}$, $\Phi(1,1,1) = \{0,1\}$, то $\Phi = \Phi{\downarrow}{\uparrow}$, но для $x = (1,1,1)$ нет элемента $y \in X$, удовлетворяющего условиям $\Phi(x) \leqslant [x = y]$ и $\Phi(y) = \vee\Phi$.

6.4. Следствие. *Если B-система X удовлетворяет принципу максимума для формулы $(\exists\, y)(y \in x \wedge (z \in x \Rightarrow z = y))$, то*

(a) *$x \simeq x{\downarrow}{\uparrow}$ для всех $x \in X$;*

(b) *элемент $x \in X$ предикативен тогда и только тогда, когда класс $x{\downarrow}$ является множеством* (см. 4.8).

6.5. Теорема. *Следующие свойства непустого подкласса $Y \subset X$ равносильны:*

(a) *Y является циклическим;*

(b) *любой булевозначный класс $\Phi \Subset X$ достигает максимума на Y;*

(c) *любой предикативный булевозначный класс $\Phi \Subset X$ достигает максимума на Y.*

$\triangleleft$ (a)⇒(b). Положим $b := \bigvee_{y \in Y} \Phi(y)$. По принципу исчерпывания имеются антицепь $(d_i)_{i \in I} \subset B$ и семейство $(y_i)_{i \in I} \subset Y$ такие, что $\bigvee_{i \in I} d_i = b$ и $d_i \leqslant \Phi(y_i)$ для всех $i \in I$. Благодаря цикличности Y существует элемент $z \in Y$, удовлетворяющий соотношению $z|_b = \bigsqcup_{i \in I} y_i|_{d_i}$. Покажем, что $\Phi(z) = b$. Действительно, $\Phi(z) = \bigvee_{y \in Y} [z = y] \wedge \Phi(z) \leqslant \bigvee_{y \in Y} \Phi(y) = b$. С другой стороны, для всех $i \in I$ с учетом неравенств $[z = y_i] \geqslant d_i$, $\Phi(y_i) \geqslant d_i$ имеем $\Phi(z) \geqslant \Phi(y_i) \wedge [z = y_i] \geqslant d_i$, а значит, $\Phi(z) \geqslant \bigvee_{i \in I} d_i = b$.

Импликация (b)⇒(c) тривиальна.

(c)⇒(a). Пусть $P \subset {}^{\%}Y$ — максимальная антицепь. Благодаря (c) существует такой элемент $z \in Y$, что $P{\uparrow}(z) = \bigvee_{y \in Y} P{\uparrow}(y)$. Согласно (3) имеет место равенство $\bigvee_{y \in Y} P{\uparrow}(y) = 1_B$. Следовательно, $[z \in P{\uparrow}] = 1_B$, откуда с учетом 5.8 следует, что $z \sim \sqcup P$. $\triangleright$

6.6. Теорема. *Следующие свойства B-системы X равносильны:*
(a) *X удовлетворяет принципу перемешивания;*
(b) *любой булевозначный класс $\Phi \Subset X$ достигает максимума;*
(c) *любой предикативный булевозначный класс $\Phi \Subset X$ достигает максимума;*
(d) *$\Phi = \Phi{\downarrow}{\uparrow}$ для любого булевозначного класса $\Phi \Subset X$;*
(e) *$\Phi = \Phi{\downarrow}{\uparrow}$ для любого предикативного булевозначного класса $\Phi \Subset X$;*
(f) *$P{\uparrow}{\downarrow} \neq \varnothing$ для любого класса $P \subset {}^{\%}X$;*
(g) *$P{\uparrow}{\downarrow} \neq \varnothing$ для любого множества $P \subset {}^{\%}X$;*
(h) *$P{\uparrow}{\downarrow} \neq \varnothing$ для любой максимальной антицепи $P \subset {}^{\%}X$.*

$\lhd$ Равносильность (a)–(c) установлена в 6.5. Импликации (d)$\Rightarrow$(f) и (e)$\Rightarrow$(g) достаточно очевидны: если $P{\uparrow}{\downarrow} = \varnothing$, то $P{\uparrow} = P{\uparrow}{\downarrow}{\uparrow} = \varnothing{\uparrow}$ и тогда $P{\uparrow}{\downarrow} = \varnothing{\uparrow}{\downarrow} = \{x|_{0_B}\} \neq \varnothing$. Импликация (b)$\Rightarrow$(d) вытекает из 6.3 (c)$\Rightarrow$(9), импликация (h)$\Rightarrow$(a) следует из 5.5, а импликации (d)$\Rightarrow$(e), (f)$\Rightarrow$(g)$\Rightarrow$(h) тривиальны. $\rhd$

6.7. Лемма. *Если $Y \subset X$ — непустой предциклический класс, то*

$$(\forall\, x \in X)(\exists\, y \in \operatorname{mix} Y)\ [x = y] = [x \in Y{\uparrow}].$$

$\lhd$ Согласно 6.5 булевозначный класс $y \mapsto [x = y]$ достигает максимума на $\operatorname{mix} Y$, причем $(\operatorname{mix} Y){\uparrow} = Y{\uparrow}$ (см. 5.11). $\rhd$

6.8. Лемма. *Пусть X — экстенсиональная B-система, $(d_i)_{i\in I} \subset B$ — антицепь, $(P_i)_{i\in I}$ — семейство подмножеств ${}^{\%}X$, $(x_i)_{i\in I} \subset X$. Если $(\forall\, i \in I)\ x_i \simeq P_i{\uparrow}$ и $x \simeq (\bigcup_{i\in I} P_i|_{d_i}){\uparrow}$, то $x \sim \operatorname{ext} \bigsqcup_{i\in I} x_i|_{d_i}$.*

$\lhd$ Сформулированное соотношение вытекает из 5.6, так как для всех $z \in X$

$$[z \in x] = \Big[z \in \Big(\bigcup_{i\in I} P_i|_{d_i}\Big){\uparrow}\Big] = \bigvee_{i\in I} \bigvee_{p\in P_i} [z = p|_{d_i}] = \bigvee_{i\in I} \bigvee_{p\in P_i} [z = p] \wedge d_i$$

$$= \bigvee_{i\in I} [z \in P_i{\uparrow}] \wedge d_i = \bigvee_{i\in I} [z \in x_i] \wedge d_i = \bigvee_{i\in I} [z \in x_i|_{d_i}]. \ \rhd$$

6.9. Следствие. *Пусть X — экстенсиональная B-система. Если $Y \subset X$ и $(\forall\, P \subset {}^{\%}Y)(\exists\, x \in X)(x \simeq P{\uparrow})$, то $\mathscr{P}_X(Y)$ — циклический класс. В частности, если система X экстенсиональна и интенсиональна, то класс $\mathscr{P}_X(X)$ всех предикативных элементов X является циклическим.*

6.10. Следствие. (a) *Если система X удовлетворяет принципу перемешивания, то X удовлетворяет принципу максимума* [5, 1.10; 3, 6.1.7].

(b) *Если система X интенсиональна и удовлетворяет принципу максимума для формулы $(\exists\, x)(x \in y)$, то X удовлетворяет принципу перемешивания* [5, 1.12; 3, 6.1.9].

(c) *Если система X экстенсиональна и удовлетворяет принципу подъема, то X удовлетворяет принципам перемешивания и максимума* [5, 1.11; 3, 6.1.8].

$\lhd$ Утверждение (a) является следствием 3.12 и 6.6, (b) вытекает из 5.5, (c) — из 6.9 и (a). $\rhd$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман А. Е.* О структуре булевозначного универсума // Владикавк. мат. журн. 2018. Т. 20, № 2. С. 38–48.
2. *Гутман А. Е.* Пример использования Δ_1-термов в булевозначном анализе // Владикавк. мат. журн. 2012. Т. 14, № 1. С. 47–63.
3. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
4. *Solovay R. M., Tennenbaum S.* Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math. 1971. V. 94, N 2. P. 201–245.
5. *Гутман А. Е., Лосенков Г. А.* Функциональное представление булевозначного универсума // Мат. тр. 1998. Т. 1, № 1. С. 54–77.

Гутман Александр Ефимович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

gutman@math.nsc.ru