КУМУЛЯТИВНАЯ СТРУКТУРА БУЛЕВОЗНАЧНОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Гутман Александр Ефимович*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: `gutman@math.nsc.ru`

Булевозначной алгебраической системой теоретико-множественной сигнатуры $\{=, \in\}$ называется непустой класс X, снабженный булевозначными интерпретациями символов сигнатуры, представляющими собой функции $=_X, \in_X : X^2 \to B$, которые принимают значения в полной булевой алгебре B и удовлетворяют аналогам классических аксиом равенства — таким, как

$$\in_X(x, y) \wedge =_X(y, z) \leqslant \in_X(x, z)$$

(см. [1, 3.1]). С помощью имеющихся в B операций супремума $a \vee b$, инфимума $a \wedge b$ и дополнения $\neg b$, а также супремумов $\sup A$ и инфимумов $\inf A$ подмножеств $A \subset B$ рекурсивным способом определяется значение истинности $[\varphi(\bar{x})]_X \in B$ в системе X на элементах $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n \in X$ для произвольной формулы φ теории предикатов первого порядка сигнатуры $\{=, \in\}$. В случае $[\varphi(\bar{x})]_X = 1_B$ говорят, что утверждение $\varphi(\bar{x})$ *истинно в* X, и пишут $X \vDash \varphi(\bar{x})$.

Простым и естественным примером булевозначной алгебраической системы служит класс $\mathbb{V}^S$ всех функций, определенных на непустом множестве S, снабженный интерпретациями

$$=_{\mathbb{V}^S}(x, y) = \{s \in S : x(s) = y(s)\},$$
$$\in_{\mathbb{V}^S}(x, y) = \{s \in S : x(s) \in y(s)\},$$

которые принимают значения в булевой алгебре $\mathcal{P}(S)$ всех подмножеств S. В этом случае истинность любой формулы вычисляется поточечно:

$$[\varphi(x_1, \ldots, x_n)]_{\mathbb{V}^S} = \big\{s \in S : \varphi\big(x_1(s), \ldots, x_n(s)\big)\big\}.$$

Более общим функциональным примером булевозначной системы служит класс $C(Q, V^Q)$ непрерывных сечений расслоения V^Q моделей теории множеств над экстремально несвязным компактом Q (см. [2; 3, гл. 6]).

*Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2, проект № 0314-2019-0005.

Пусть X — булевозначная алгебраическая система с алгеброй истинности B. *Булевозначным классом* в X называют функцию $\Phi\colon X \to B$, удовлетворяющую соотношению $\Phi(x) \wedge [x = y]_X \leqslant \Phi(y)$ для всех $x, y \in X$ (см. [1, 3.5; 3, 4.6.1]). Такие естественные соглашения, как

$$[x \in \Phi]_X = \Phi(x), \quad [x = \Phi]_X = [(\forall\, y)(y \in x \Leftrightarrow y \in \Phi)]_X,$$

позволяют употреблять булевозначные классы внутри оценок истинности формул — аналогично тому, как символы классов используются в языке теории множеств. Будем говорить, что *элемент* $x \in X$ *реализует булевозначный класс* Φ и писать $x \simeq \Phi$, если $X \vDash (x = \Phi)$.

Пусть B^X — класс всех функций $F\colon \operatorname{dom} F \to B$, определенных на подмножествах $\operatorname{dom} F \subset X$. *Подъемом* функции $F \in B^X$ назовем булевозначный класс $F{\uparrow}\colon X \to B$, определяемый формулой

$$F{\uparrow}(x) = \bigvee_{y \in \operatorname{dom} F} [x = y]_X \wedge F(y).$$

Элемент $x \in X$ называется *перемешиванием* семейства $(x_i)_{i \in I} \subset X$ относительно разбиения единицы $(d_i)_{i \in I} \subset B$, если $[x = x_i]_X \geqslant d_i$ для всех $i \in I$. Символом $\operatorname{mix} Y$ обозначается совокупность всевозможных перемешиваний элементов подмножества $Y \subset X$.

Булевозначную алгебраическую систему X с булевой алгеброй истинности B называют *булевозначным универсумом* (см. [1, 3.4]) или *B-значным универсумом*, если она удовлетворяет следующим пяти условиям:

(1) $(\forall\, x, y \in X)\big(X \vDash (x = y) \Rightarrow x = y\big)$;

(2) $(\forall\, F \in B^X)(\exists\, x \in X)(x \simeq F{\uparrow})$;

(3) $(\forall\, x \in X)(\exists\, F \in B^X)(x \simeq F{\uparrow})$;

(4) $X \vDash (\forall\, x, y)\big((\forall\, z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y\big)$;

(5) $X \vDash (\forall\, x)\big((\exists\, y)(y \in x) \Rightarrow (\exists\, y \in x)(\forall\, z \in x)(z \notin y)\big)$.

Известно (см. [1, 3]), что для любой полной булевой алгебры B существует B-значный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$, который оказывается моделью ZFC: если φ — теорема ZFC, то истинность $\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi$ также является теоремой ZFC.

В анонсируемом исследовании [4] мы показываем, что всякий B-значный универсум X имеет следующую многоуровневую структуру, аналогичную кумулятивной иерархии фон Неймана:

$X_0 = \varnothing$;

$X_{\alpha+1} = \big\{x \in X : x \simeq F{\uparrow},\ F \in B^{X_\alpha}\big\}$ для любого ординала α;

$X_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta$ для предельного ординала α;

$X = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} X_\alpha$, где Ord — класс всех ординалов.

Альтернативную структуру можно получить, ограничившись подъемами постоянных функций и добавив перемешивания на предельных шагах:

$Y_0 = \varnothing$;

$Y_{\alpha+1} = \bigl\{x \in X : x \simeq (D \times \{b\})\!\uparrow,\ D \subset Y_\alpha,\ b \in B\bigr\}$ для любого ординала α;

$Y_\alpha = \operatorname{mix} \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta$ для предельного ординала α;

$X = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} Y_\alpha$.

Подобные кумулятивные иерархии проясняют устройство булевозначных систем и, в частности, позволяют легко установить единственность булевозначного универсума с точностью до изоморфизма.

Кроме того, в [4] приведен общий механизм пополнения булевозначной системы подъемами, который выстраивает иерархию $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Ord}}$ для произвольной системы X_0, удовлетворяющей условию (4), и расширяет X_0 до системы $X = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} X_\alpha$, обладающей свойствами (2)–(4), а также (1) и (5), если соответствующим условиям удовлетворяет система X_0. Такой механизм позволяет строить примеры булевозначных систем с необычными свойствами. С его помощью в [4] показано, что каждое из пяти условий (1)–(5), перечисленных в определении булевозначного универсума, является существенным и не вытекает из остальных.

Список литературы

[1] Solovay R. M., Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // *Annals of Math.* 1971. T. 94, N 2. P. 201–245.

[2] Гутман А. Е., Лосенков Г. А. Функциональное представление булевозначного универсума // *Матем. тр.* 1998. Т. 1, № 1. С. 54–77.

[3] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. *Введение в булевозначный анализ.* М.: Наука, 2005.

[4] Гутман А. Е. Булевозначный универсум как алгебраическая система // *Сиб. матем. журн.* 2019. Т. 60, № 5. (в печати)