Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2020. Том 61, № 3

УДК 517.98

БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ УНИВЕРСУМ КАК АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА. II. ИНТЕНСИОНАЛЬНЫЕ ИЕРАРХИИ

А. Е. Гутман

Аннотация. Для булевозначных алгебраических систем теоретико-множественной сигнатуры исследованы понятия транзитивности, регулярности и σ-регулярности. Введено понятие универсума над произвольной экстенсиональной булевозначной системой и предложено описание структуры универсума посредством различных иерархий. Полученные результаты использованы для доказательства единственности булевозначного универсума с точностью до единственного изоморфизма.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.305

Ключевые слова: булевозначная алгебраическая система, теория множеств, булевозначный анализ, универсум, кумулятивная иерархия.

Юрию Леонидовичу Ершову
в связи с его 80-летием

Статья продолжает [1] и является второй частью работы, посвященной исследованию булевозначных алгебраических систем теоретико-множественной сигнатуры.

В первой части разработан аппарат частичных элементов булевозначной системы, изучены предикативные булевозначные классы, допускающие квантификацию, предложена интерпретация принципа перемешивания в терминах соединений антицепей частичных элементов, а также установлена взаимосвязь между цикличностью и достижением максимума экстенсиональными булевозначными функциями.

Нумерация параграфов второй части начинается с 7, продолжая нумерацию статьи [1]. В § 7 исследуется понятие транзитивной булевозначной подсистемы и доказывается аналог леммы А. Леви об абсолютности ограниченных формул для транзитивных моделей. В § 8 синтаксис оценок истинности расширяется кванторами по предикативным булевозначным классам. В § 9 изучается понятие регулярной булевозначной системы и исследуется вопрос о том, для каких булевых алгебр B совпадают классы регулярных и σ-регулярных B-систем. В § 10 вводится понятие булевозначного универсума над произвольной экстенсиональной булевозначной системой и устанавливается тесная взаимосвязь такого универсума с интенсиональной иерархией — булевозначным аналогом кумулятивной иерархии фон Неймана. В § 11 приводится характеризация классического булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ как алгебраической системы, доказывается единственность такой системы с точностью до единственного изоморфизма

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2 (проект № 0314–2019–0005).

и для любой полной булевой алгебры B устанавливается логическая независимость условий, фигурирующих в определении B-значного универсума. В § 12 предлагается описание структуры булевозначного универсума посредством различных иерархий.

При упоминании любых пунктов параграфов 1–6 неявно подразумевается статья [1]: например, ссылка на п. 2.8 означает ссылку [1, 2.8].

Всюду ниже B — произвольная полная булева алгебра, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел, $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ — наименьший бесконечный ординал. Класс всех ординалов обозначается символом Ord, а класс всех предельных ординалов — символом $\mathrm{Lim\,Ord}$. Кроме того, используются обозначения $\mathrm{Ord}^\bullet := \mathrm{Ord} \cup \{\infty\}$, где $\alpha < \infty$ для всех $\alpha \in \mathrm{Ord}$, и $\mathrm{Lim\,Ord}^\bullet := \mathrm{Lim\,Ord} \cup \{\infty\}$.

§ 7. Транзитивность

Множество или класс Y называют транзитивным, если

$$(\forall\, x, y)(x \in y \in Y \ \Rightarrow\ x \in Y).$$

Транзитивные классы традиционно используются в теории множеств в качестве моделей фрагментов и модификаций самой теории множеств. При работе с такими моделями полезным инструментом служит лемма А. Леви об абсолютности ограниченных формул. В этом параграфе исследуется понятие транзитивной булевозначной подсистемы и доказывается соответствующий аналог леммы А. Леви.

7.1. Если Y — подсистема B-системы X (см. п. 2.8), то запись ${}^{\%}Y$ можно понимать двояко: как совокупность $(Y \times B)/{\sim}$ частичных элементов системы Y (см. п. 3.1) или как подкласс $\{x|_b : x \in Y,\ b \in B\} \subset {}^{\%}X$. Выбор в данном случае непринципиален, поскольку соответствие

$$\sim_Y(y, b) \ \mapsto\ \sim_X(y, b), \quad y \in Y,\ b \in B,$$

обеспечивает естественное вложение ${}^{\%}Y = (Y \times B)/{\sim}$ в ${}^{\%}X = (X \times B)/{\sim}$, и в любом случае можно считать, что ${}^{\%}Y \subset {}^{\%}X$.

Аналогичная двусмысленность возникает при интерпретации символа $P{\uparrow}$ для $P \subset {}^{\%}Y$ (см. п. 3.5). В рамках системы X или Y булевозначный класс $P{\uparrow}$ является соответственно функцией $P{\uparrow}_X : X \to B$ или $P{\uparrow}_Y : Y \to B$. Но и в этом случае выбор интерпретации не имеет принципиального характера, так как функции $P{\uparrow}_X$ и $P{\uparrow}_Y$ совпадают на Y, поэтому истинность включения $[y \in P{\uparrow}]$ для $y \in Y$ не зависит от системы, в которой она вычисляется. Действительно, если $y \in Y$ и $P = \{y_i|_{b_i} : i \in I\}$, где $y_i \in Y$ и $b_i \in B$, то

$$\begin{aligned}[y \in P{\uparrow}_Y]_Y &= P{\uparrow}_Y(y) = \bigvee_{i \in I} [y = y_i|_{b_i}]_Y = \bigvee_{i \in I} [y = y_i]_Y \wedge b_i \\ &= \bigvee_{i \in I} [y = y_i]_X \wedge b_i = \bigvee_{i \in I} [y = y_i|_{b_i}]_X = P{\uparrow}_X(y) = [y \in P{\uparrow}_X]_X.\end{aligned}$$

По этой причине вместо $[y \in P{\uparrow}_Y]_Y$ или $[y \in P{\uparrow}_X]_X$ в дальнейшем будем писать просто $[y \in P{\uparrow}]$ и иногда добавлять индексы X или Y лишь для того, чтобы подчеркнуть, в какой системе производится вычисление.

Чуть большая аккуратность необходима в обращении с формулой $y \simeq P{\uparrow}$ для $y \in Y$ и $P \subset {}^{\%}Y$ (см. п. 3.19). Из соотношения $y \simeq P{\uparrow}_{X}$ в X вытекает аналогичное соотношение $y \simeq P{\uparrow}_{Y}$ в Y, но, как показано в п. 7.3, обратная импликация имеет место для всех $y \in Y$ и $P \subset {}^{\%}Y$ в том и только в том случае, когда подсистема $Y \subset X$ транзитивна.

7.2. Пусть X — произвольная B-система. Подкласс $Y \subset X$ назовем *транзитивным* в X, если подъем $Y{\uparrow}$ транзитивен внутри X, т. е.

$$X \vDash (\forall\, x, y)(x \in y \in Y{\uparrow} \;\Rightarrow\; x \in Y{\uparrow}).$$

Будем говорить, что Y — *транзитивная подсистема* X, и писать $Y \preccurlyeq X$, если Y — непустой транзитивный подкласс X, снабженный индуцированными из X интерпретациями (см. п. 2.8).

Следующие свойства подкласса $Y \subset X$ равносильны:

(a) Y *транзитивен в* X*;*

(b) $(\forall\, y \in Y)\ X \vDash (y \subset Y{\uparrow})$*;*

(c) $(\forall\, x \in X)(\forall\, y \in Y)\ [x \in y] \leqslant [x \in Y{\uparrow}]$*;*

(d) $(\forall\, x \in X)(\forall\, y \in Y)\ [x \in y] = \bigvee\limits_{z \in Y} [x = z] \wedge [z \in y]$.

◁ Импликации (a)⇒(b)⇔(c)⇐(d) очевидны. Импликация (b)⇒(a) вытекает из леммы 3.18(d).

(c)⇒(d). С учетом (c) и 2.4 для любых $x \in X$ и $y \in Y$ имеем

$$\begin{aligned}\bigvee_{z \in Y} [x = z] \wedge [z \in y] &\leqslant [x \in y] \leqslant [x \in Y{\uparrow}] \wedge [x \in y] \\ &= \bigvee_{z \in Y} [x = z] \wedge [x \in y] = \bigvee_{z \in Y} [x = z] \wedge [z \in y]. \ \triangleright\end{aligned}$$

7.3. *Пусть Y — подсистема B-системы X. Следующие утверждения равносильны:*

(a) $X \vDash (y = P{\uparrow}_{X}) \;\Leftrightarrow\; Y \vDash (y = P{\uparrow}_{Y})$ *для любого элемента* $y \in Y$ *и любого класса* $P \subset {}^{\%}Y$*;*

(b) $X \vDash (y = y{\Downarrow}_{Y}{\uparrow}_{X})$ *для всех* $y \in Y$*;*

(c) $Y \preccurlyeq X$.

◁ (a)⇒(b). Согласно лемме 4.3 для всех $y \in Y$ справедливо соотношение $Y \vDash (y = y{\Downarrow}_{Y}{\uparrow}_{Y})$, а значит, $X \vDash (y = y{\Downarrow}_{Y}{\uparrow}_{X})$ благодаря (a).

Импликация (b)⇒(c) вытекает из 7.2(b) и леммы 3.17(b).

(c)⇒(a). Пусть $Y \preccurlyeq X$, $y \in Y$ и $P \subset {}^{\%}Y$. Из 7.2(b) и леммы 3.17(b) следует, что $X \vDash (y \subset Y{\uparrow}_{X},\ P{\uparrow}_{X} \subset Y{\uparrow}_{X})$ и тем самым $X \vDash (y = y \cap Y{\uparrow}_{X},\, P{\uparrow}_{X} = P{\uparrow}_{X} \cap Y{\uparrow}_{X})$. Поэтому с учетом леммы 3.18(d) имеем

$$\begin{gathered} X \vDash (y = P{\uparrow}_{X}) \;\Leftrightarrow\; X \vDash (y \cap Y{\uparrow}_{X} = P{\uparrow}_{X} \cap Y{\uparrow}_{X}) \\ \Leftrightarrow\; X \vDash (\forall\, z \in Y{\uparrow}_{X})(z \in y \Leftrightarrow z \in P{\uparrow}_{X}) \\ \Leftrightarrow\; (\forall\, z \in Y)\ X \vDash (z \in y \Leftrightarrow z \in P{\uparrow}_{X}) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, z \in Y)\ Y \vDash (z \in y \Leftrightarrow z \in P{\uparrow}_{Y}) \\ \Leftrightarrow\; Y \vDash (\forall\, z)(z \in y \Leftrightarrow z \in P{\uparrow}_{Y}) \;\Leftrightarrow\; Y \vDash (y = P{\uparrow}_{Y}). \ \triangleright \end{gathered}$$

7.4. Пусть φ — формула сигнатуры $\{=, \in\}$, и пусть U — переменная, терм или символ класса. *Релятивизацией* φ на U называется формула, полученная из φ в результате замены каждого квантора $(\forall\, x)$ и $(\exists\, x)$, где x — произвольная переменная, соответствующим квантором $(\forall\, x \in U)$ и $(\exists\, x \in U)$ (см. [2, 12.6]).

Релятивизация формулы φ на U обозначается символом $U \vDash \varphi$ или, более подробно, $U \vDash \varphi(\bar{x})$, где $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$ — список, содержащий все свободные переменные формулы φ. Выбор обозначения для релятивизации основан на том факте, что для любых $\bar{x} \in U$ утверждение $U \vDash \varphi(\bar{x})$ равносильно истинности $\varphi(\bar{x})$ в двузначной алгебраической системе $(U, =_U, \in_U)$ со стандартными интерпретациями равенства и принадлежности.

7.5. Формулу сигнатуры $\{=, \in\}$ назовем *синтаксически ограниченной*, если ее можно построить из атомарных формул $x = y$ и $x \in y$ с помощью дизъюнкции, отрицания и добавления кванторов вида $(\exists\, x \in y)$, где x и y — символы переменных. Говорят, что φ — *ограниченная формула*, если существует такая синтаксически ограниченная формула ψ, что $\vdash (\varphi \Leftrightarrow \psi)$, т. е. эквивалентность $\varphi \Leftrightarrow \psi$ доказуема в теории предикатов (является тавтологией). Ограниченные формулы называют также формулами класса Σ_0, Π_0 или Δ_0. Как легко видеть, если в формуле φ каждое вхождение квантора имеет вид $(\exists\, x \in y)$ или $(\forall\, x \in y)$, то φ — ограниченная формула. Примером ограниченной формулы служит релятивизация $U \vDash \varphi$ любой формулы φ на переменную U.

Приведенное ниже утверждение является следствием классической леммы А. Леви об абсолютности ограниченных формул для транзитивных моделей [3, лемма 34; 2, лемма 12.9].

Лемма. *Пусть $\varphi(\bar{y})$ — ограниченная формула со свободными переменными $\bar{y} = y_1, \dots, y_n$. Если X — B-система и $Y \preccurlyeq X$, то*

$$(\forall\, \bar{y} \in Y)\ [\varphi(\bar{y})]_X = [\varphi(\bar{y})]_Y.$$

◁ Поскольку лемма А. Леви доказывается в рамках теории предикатов без специальных аксиом, она является тавтологией. Согласно 3.9 заключение этой леммы для транзитивного внутри X булевозначного класса $Y{\uparrow}_X$ истинно в X:

$$X \vDash (\forall\, \bar{y} \in Y{\uparrow}_X)(\varphi(\bar{y}) \ \Leftrightarrow\ Y{\uparrow}_X \vDash \varphi(\bar{y}))$$

и, в частности,

$$(\forall\, \bar{y} \in Y)\ [\varphi(\bar{y})]_X = [Y{\uparrow}_X \vDash \varphi(\bar{y})]_X,$$

где $Y{\uparrow}_X \vDash \varphi(\bar{y})$ — релятивизация $\varphi(\bar{y})$ на $Y{\uparrow}_X$. Равенство

$$[Y{\uparrow}_X \vDash \varphi(\bar{y})]_X = [\varphi(\bar{y})]_Y$$

легко доказывается индукцией по сложности синтаксически ограниченной формулы φ. ▷

7.6. В дальнейшем пригодится более сильная версия леммы А. Леви, задействующая булевозначные классы.

Теорема. *Пусть φ — ограниченная формула со свободными переменными $y_1, \dots, y_n$, $z_1, \dots, z_m$. Если X — B-система и $Y \preccurlyeq X$, то*

$$\begin{array}{l} [\varphi(y_1, \dots, y_n, \Phi_1, \dots, \Phi_m)]_X = [\varphi(y_1, \dots, y_n, \Phi_1|_Y, \dots, \Phi_m|_Y)]_Y \\ \text{для любых } y_1, \dots, y_n \in Y,\ \Phi_1, \dots, \Phi_m \Subset X,\ \Phi_1, \dots, \Phi_m \leqslant Y{\uparrow}_X. \end{array} \tag{12}$$

◁ Формулу φ назовем *абсолютной*, если она удовлетворяет условию (12) для любого разбиения списка свободных переменных на две группы $y_1, \dots, y_n$ и $z_1, \dots, z_m$. (Отметим, что из-за присутствия произвольных булевозначных классов условие (12), вообще говоря, является бесконечным утверждением, см. § 1.)

Из 3.9 следует, что для доказательства теоремы достаточно установить абсолютность синтаксически ограниченных формул. Воспользуемся индукцией по сложности формулы.

Покажем, что атомарные формулы абсолютны. Пусть $y \in Y$, $\Phi, \Psi \Subset X$ и $\Phi, \Psi \leqslant Y{\uparrow}_X$. Тогда $X \vDash (y \subset Y{\uparrow}_X)$ благодаря транзитивности подсистемы Y и, кроме того, $X \vDash (\Phi, \Psi \subset Y{\uparrow}_X)$ согласно лемме 3.17(a). Следовательно, с учетом леммы 3.18 имеем

$$
\begin{aligned}
[y \in \Phi]_X &= \Phi(y) = \Phi|_Y(y) = [y \in \Phi|_Y]_Y;\\
[y = \Phi]_X &= [(\forall\, z)(z \in y \Leftrightarrow z \in \Phi)]_X = [(\forall\, z \in Y{\uparrow}_X)(z \in y \Leftrightarrow z \in \Phi)]_X\\
&= \bigwedge_{z \in Y} [z \in y]_X \Leftrightarrow_B [z \in \Phi]_X = \bigwedge_{z \in Y} [z \in y]_Y \Leftrightarrow_B [z \in \Phi|_Y]_Y\\
&= [(\forall\, z)(z \in y \Leftrightarrow z \in \Phi|_Y)]_Y = [y = \Phi|_Y]_Y;\\
[\Phi \in y]_X &= [(\exists\, z)(z = \Phi \wedge z \in y)]_X = [(\exists\, z \in Y{\uparrow}_X)(z = \Phi \wedge z \in y)]_X\\
&= \bigvee_{z \in Y} [z = \Phi]_X \wedge [z \in y]_X = \bigvee_{z \in Y} [z = \Phi|_Y]_Y \wedge [z \in y]_Y\\
&= [(\exists\, z)(z = \Phi|_Y \wedge z \in y)]_Y = [\Phi|_Y \in y]_Y;\\
[\Phi = \Psi]_X &= [(\forall\, z)(z \in \Phi \Leftrightarrow z \in \Psi)]_X = [(\forall\, z \in Y{\uparrow}_X)(z \in \Phi \Leftrightarrow z \in \Psi)]_X\\
&= \bigwedge_{z \in Y} [z \in \Phi]_X \Leftrightarrow_B [z \in \Psi]_X = \bigwedge_{z \in Y} [y \in \Phi|_Y]_Y \Leftrightarrow_B [z \in \Psi|_Y]_Y\\
&= [(\forall\, z)(z \in \Phi|_Y \Leftrightarrow z \in \Psi|_Y)]_Y = [\Phi|_Y = \Psi|_Y]_Y;\\
[\Phi \in \Psi]_X &= [(\exists\, z)(z = \Phi \wedge z \in \Psi)]_X = [(\exists\, z \in Y{\uparrow}_X)(z = \Phi \wedge z \in \Psi)]_X\\
&= \bigvee_{z \in Y} [z = \Phi]_X \wedge [z \in \Psi]_X = \bigvee_{z \in Y} [z = \Phi|_Y]_Y \wedge [z \in \Psi|_Y]_Y\\
&= [(\exists\, z)(z = \Phi|_Y \wedge z \in \Psi|_Y)]_Y = [\Phi|_Y \in \Psi|_Y]_Y.
\end{aligned}
$$

Как легко видеть, абсолютность формул сохраняется отрицанием и дизъюнкцией. Остается показать, что из абсолютности формулы $\varphi(x, y, \bar{y}, \bar{z})$ вытекает абсолютность формулы $\psi(y, \bar{y}, \bar{z}) := (\exists\, x \in y)\, \varphi(x, y, \bar{y}, \bar{z})$. Действительно, если $y, \bar{y} = y_1, \dots, y_n \in Y$, $\Phi, \overline{\Phi} = \Phi_1, \dots, \Phi_m \Subset X$, $\Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_m \leqslant Y{\uparrow}_X$, то с учетом соотношений $X \vDash (y \subset Y{\uparrow}_X)$, $X \vDash (\Phi \subset Y{\uparrow}_X)$ и абсолютности φ имеем

$$
\begin{aligned}
[\psi(y, \bar{y}, \overline{\Phi})]_X &= [(\exists\, x)(x \in y \wedge \varphi(x, y, \bar{y}, \overline{\Phi}))]_X = [(\exists\, x \in Y{\uparrow}_X)(x \in y \wedge \varphi(x, y, \bar{y}, \overline{\Phi}))]_X\\
&= \bigvee_{x \in Y} [x \in y]_X \wedge [\varphi(x, y, \bar{y}, \overline{\Phi})]_X = \bigvee_{x \in Y} [x \in y]_Y \wedge [\varphi(x, y, \bar{y}, \overline{\Phi}|_Y)]_Y\\
&= [(\exists\, x)(x \in y \wedge \varphi(x, y, \bar{y}, \overline{\Phi}|_Y))]_Y = [\psi(y, \bar{y}, \overline{\Phi}|_Y)]_Y;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\psi(\Phi, \bar{y}, \overline{\Phi})]_X &= [(\exists\, x)(x \in \Phi \wedge \varphi(x, \Phi, \bar{y}, \overline{\Phi}))]_X = [(\exists\, x \in Y{\uparrow}_X)(x \in \Phi \wedge \varphi(x, \Phi, \bar{y}, \overline{\Phi}))]_X\\
&= \bigvee_{x \in Y} [x \in \Phi]_X \wedge [\varphi(x, \Phi, \bar{y}, \overline{\Phi})]_X = \bigvee_{x \in Y} [x \in \Phi|_Y]_Y \wedge [\varphi(x, \Phi|_Y, \bar{y}, \overline{\Phi}|_Y)]_Y\\
&= [(\exists\, x)(x \in \Phi|_Y \wedge \varphi(x, \Phi|_Y, \bar{y}, \overline{\Phi}|_Y))]_Y = [\psi(\Phi|_Y, \bar{y}, \overline{\Phi}|_Y)]_Y. \ \triangleright
\end{aligned}
$$

7.7. Следствие. *Если B-система X экстенсиональна и $Y \preccurlyeq X$, то Y экстенсиональна.*

$\triangleleft$ Согласно определению 2.7 экстенсиональность B-системы X означает $X \vDash (\forall\, x, y)\, \varphi(x, y)$, где

$$\varphi(x, y) := (\forall\, z \in x)(z \in y) \wedge (\forall\, z \in y)(z \in x) \Rightarrow x = y.$$

Таким образом, если X экстенсиональна, то $X \vDash (\forall\, x, y \in Y{\uparrow}_X)\, \varphi(x, y)$, откуда благодаря теореме 7.6 и ограниченности формулы $(\forall\, x, y \in u)\, \varphi(x, y)$ следует $Y \vDash (\forall\, x, y \in (Y{\uparrow}_X)|_Y)\, \varphi(x, y)$, т. е. $Y \vDash (\forall\, x, y)\, \varphi(x, y)$, что равносильно экстенсиональности Y. $\rhd$

7.8. Следствие. *Пусть $\varphi(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m)$ — произвольная формула. Если X — B-система и $Y \preccurlyeq X$, то*

$$[Y{\uparrow}_X \vDash \varphi(y_1, \ldots, y_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_m)]_X = [\varphi(y_1, \ldots, y_n, \Phi_1|_Y, \ldots, \Phi_m|_Y)]_Y$$

для любых $y_1, \ldots, y_n \in Y$, $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \Subset X$, $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \leqslant Y{\uparrow}_X$, где $Y{\uparrow}_X \vDash \varphi$ — релятивизация φ на $Y{\uparrow}_X$.

$\lhd$ С учетом ограниченности формулы $x \vDash \varphi(\bar{y}, \bar{z})$ из теоремы 7.6 следует

$$[Y{\uparrow}_X \vDash \varphi(\bar{y}, \bar{\Phi})]_X = [(Y{\uparrow}_X)|_Y \vDash \varphi(\bar{y}, \bar{\Phi}|_Y)]_Y = [Y{\uparrow}_Y \vDash \varphi(\bar{y}, \bar{\Phi}|_Y)]_Y = [\varphi(\bar{y}, \bar{\Phi}|_Y)]_Y. \ \rhd$$

7.9. Пусть I — непустое множество или класс. Семейство B-систем $(X_i)_{i \in I}$ назовем *направленным*, если для любых $i, j \in I$ имеется индекс $k \in I$ такой, что X_i и X_j являются подсистемами X_k. Как легко видеть, на объединении $X := \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ такого семейства существует единственная пара функций $=_X, \in_X : X^2 \to B$, которая превращает X в B-систему, содержащую все X_i в качестве подсистем. Имея в виду это обстоятельство, при рассмотрении какого-либо направленного семейства B-систем условимся по умолчанию считать его объединение B-системой.

7.10. Лемма. (a) *Пусть Y и Z — подсистемы B-системы X. Если $Z \preccurlyeq X$ и $Z \subset Y$, то $Z \preccurlyeq Y$.*

(b) *Если X, Y, Z — B-системы и $Z \preccurlyeq Y \preccurlyeq X$, то $Z \preccurlyeq X$.*

(c) *Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — непустое семейство подсистем B-системы X. Если $X_i \preccurlyeq X$ для всех $i \in I$, то $\bigcup\limits_{i \in I} X_i \preccurlyeq X$.*

(d) *Пусть I — непустое направленное упорядоченное множество или класс, $(X_i)_{i \in I}$ — семейство B-систем и $X_i \preccurlyeq X_j$ при $i \leqslant j$. Тогда $X_i \preccurlyeq \bigcup\limits_{j \in I} X_j$ для любых $i \in I$.*

(e) *Пусть $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Ord}}$ — семейство B-систем, $X_\alpha \preccurlyeq X_{\alpha+1}$ для $\alpha \in \mathrm{Ord}$ и $\bigcup\limits_{\beta < \alpha} X_\beta \preccurlyeq X_\alpha$ для $\alpha \in \mathrm{Lim\,Ord}$. Тогда $X_\gamma \preccurlyeq X_\beta \preccurlyeq \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{Ord}} X_\alpha$ для любых $\gamma \leqslant \beta \in \mathrm{Ord}$.*

$\lhd$ (a) Если $Z \subset Y \subset X$, $Z \preccurlyeq X$, $y \in Y$ и $z \in Z$, то $[y \in z] \leqslant [y \in Z{\uparrow}_X]_X = [y \in Z{\uparrow}_Y]_Y$.

(b) Если $Z \preccurlyeq Y \preccurlyeq X$, то с учетом 7.2(d) для всех $x \in X$ и $z \in Z$ имеем

$$[x \in z] = \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge [y \in z] \leqslant \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge [y \in Z{\uparrow}] \leqslant [x \in Z{\uparrow}].$$

(c) Если $x \in X$ и $y \in Y := \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, то $y \in X_i$ для некоторого индекса $i \in I$, откуда в силу соотношения $X_i \preccurlyeq X$ следует, что $[x \in y] \leqslant [x \in X_i{\uparrow}]_X \leqslant [x \in Y{\uparrow}]_X$.

(d) Если $i \in I$, $x \in X := \bigcup\limits_{j \in I} X_j$ и $y \in X_i$, то $x \in X_j$ для некоторого индекса $i \leqslant j \in I$, откуда с учетом $X_i \preccurlyeq X_j$ следует, что $[x \in y] \leqslant [x \in X_i{\uparrow}]_{X_j} = [x \in X_i{\uparrow}]_X$.

(e) Для $0 \neq \alpha \in \mathrm{Ord}$ положим $\mathscr{X}_\alpha := \bigcup\limits_{\beta < \alpha} X_\beta$ и заметим, что $\mathscr{X}_\alpha \preccurlyeq X_\alpha$.

Действительно, при $\alpha \in \operatorname{Lim}\operatorname{Ord}$ это соотношение явно фигурирует в условии, а если $\alpha = \alpha_0 + 1$, то с учетом очевидной монотонности семейства $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Ord}}$ имеем $\mathscr{X}_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} X_\beta = \bigcup\limits_{\beta\leqslant\alpha_0} X_\beta = X_{\alpha_0} \preccurlyeq X_{\alpha_0+1} = X_\alpha$.

Индукцией по α покажем, что $X_\beta \preccurlyeq X_\alpha$ при $\beta < \alpha$. Рассмотрим произвольный ординал α, предположим, что

$$X_\gamma \preccurlyeq X_\beta \ \text{ при } \ \gamma < \beta < \alpha, \tag{13}$$

и установим соотношение $X_\beta \preccurlyeq X_\alpha$ для всех $\beta < \alpha$. Если $\beta < \alpha$, то согласно (13) и (d) имеем $X_\beta \preccurlyeq \mathscr{X}_\alpha$, откуда благодаря $\mathscr{X}_\alpha \preccurlyeq X_\alpha$ и (b) следует $X_\beta \preccurlyeq X_\alpha$.

Осталось заметить, что с учетом (d) из установленного выше вытекает соотношение $X_\beta \preccurlyeq \bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Ord}} X_\alpha$ для всех $\beta \in \mathrm{Ord}$. ▷

§ 8. Квантификация по булевозначным классам

В этом параграфе язык оценок истинности расширяется кванторами по предикативным булевозначным классам, устанавливается аналог леммы А. Леви для формул расширенного языка и доказывается принцип максимума для булевозначных классов.

8.1. Пусть φ — произвольная формула, X — B-система. Условимся записывать в виде $(\forall\,\Phi \Subset X)\,\varphi(\Phi)$ и $(\exists\,\Phi \Subset X)\,\varphi(\Phi)$ утверждения о том, что $\varphi(\Phi)$ выполняется для любого или соответственно некоторого предикативного булевозначного класса $\Phi \Subset X$. Поскольку предикативные классы допускают квантификацию (см. п. 4.6), рассматриваемые утверждения не являются бесконечными и каждое из них может быть записано одной формулой:

$$(\forall\,\Phi \Subset X)\,\varphi(\Phi) \ \Leftrightarrow\ (\forall\,P \subset {}^{\%}\!X)\,\varphi(P{\uparrow}),$$
$$(\exists\,\Phi \Subset X)\,\varphi(\Phi) \ \Leftrightarrow\ (\exists\,P \subset {}^{\%}\!X)\,\varphi(P{\uparrow}).$$

Аналогично определяются выражения $\bigwedge\limits_{\Phi\Subset X} \tau(\Phi)$ и $\bigvee\limits_{\Phi\Subset X} \tau(\Phi)$ для терма $\tau(x)$:

$$\bigwedge_{\Phi\Subset X} \tau(\Phi) = \bigwedge_{P\subset {}^{\%}\!X} \tau(P{\uparrow}), \qquad \bigvee_{\Phi\Subset X} \tau(\Phi) = \bigvee_{P\subset {}^{\%}\!X} \tau(P{\uparrow}).$$

8.2. Пусть φ — формула, X — B-система и $\Phi \Subset X$. В дальнейшем при употреблении выражения $[\varphi(\Phi, ...)]_X$ или $X \vDash \varphi(\Phi, ...)$ подразумевается, что формула φ может содержать несколько свободных переменных, некоторые из которых, возможно, заменены символами булевозначных классов, т. е. запись $\varphi(\Phi, ...)$ служит сокращением для $\varphi(\Phi, y_1, \dots, y_m, \Psi_1, \dots, \Psi_n)$, где $y_i \in X$ и $\Psi_j \Subset X$ — произвольные наперед заданные элементы и булевозначные классы.

Расширим синтаксис булевозначных оценок кванторами по предикативным булевозначным классам, полагая

$$[(\boldsymbol{\forall}\,\Phi)\,\varphi(\Phi, ...)]_X := \bigwedge_{\Phi\Subset X} [\varphi(\Phi, ...)]_X,$$
$$[(\boldsymbol{\exists}\,\Phi)\,\varphi(\Phi, ...)]_X := \bigvee_{\Phi\Subset X} [\varphi(\Phi, ...)]_X.$$

Как легко видеть, если система X экстенсиональна и удовлетворяет принципу подъема, то кванторы по классам в X равноценны обычным кванторам: $[(\boldsymbol{\forall}\,\Phi)\,\varphi(\Phi, ...)]_X = [(\forall\,x)\,\varphi(x, ...)]_X$, $[(\boldsymbol{\exists}\,\Phi)\,\varphi(\Phi, ...)]_X = [(\exists\,x)\,\varphi(x, ...)]_X$.

8.3. Следующее утверждение показывает, что в любой B-системе булевозначные классы удовлетворяют аналогу принципа максимума (см. п. 6.1).

Если φ — формула и X — B-система, то функция $\Phi \Subset X \mapsto [\varphi(\Phi, \dots)] \in B$ достигает максимума, т. е.

$$(\exists\, \Psi \Subset X)\ [\varphi(\Psi, \dots)] = [(\boldsymbol{\exists}\, \Phi)\, \varphi(\Phi, \dots)].$$

В частности,

$$X \vDash (\boldsymbol{\forall}\, \Phi)\, \varphi(\Phi, \dots) \ \Leftrightarrow\ (\forall\, \Phi \Subset X)\ X \vDash \varphi(\Phi, \dots),$$
$$X \vDash (\boldsymbol{\exists}\, \Phi)\, \varphi(\Phi, \dots) \ \Leftrightarrow\ (\exists\, \Phi \Subset X)\ X \vDash \varphi(\Phi, \dots).$$

$\lhd$ Положим $b := [(\boldsymbol{\exists}\, \Phi)\, \varphi(\Phi, \dots)] = \bigvee\limits_{\Phi \Subset X} [\varphi(\Phi, \dots)]$. По принципу исчерпывания [4, 2.1.10(1)] существуют антицепь $(d_i)_{i \in I} \subset B$ и семейство предикативных классов $\Phi_i \Subset X$ $(i \in I)$ такие, что $\bigvee\limits_{i \in I} d_i = b$ и $d_i \leqslant [\varphi(\Phi_i, \dots)]$ для всех $i \in I$. Определим предикативный класс $\Phi\colon X \to B$, полагая $\Phi(x) := \bigvee\limits_{i \in I} \Phi_i(x) \wedge d_i$ для $x \in X$. Тогда для всех $i \in I$ и $x \in X$ справедливо равенство $\Phi_i(x) \wedge d_i = \Phi(x) \wedge d_i$, откуда

$$[\Phi_i = \Phi] = [(\forall\, x)(x \in \Phi_i \Leftrightarrow x \in \Phi)] = \bigwedge_{x \in X} (\Phi_i(x) \Leftrightarrow_B \Phi(x)) \geqslant d_i$$

и, следовательно, с учетом 3.9

$$b = \bigvee_{i \in I} d_i \leqslant \bigvee_{i \in I} [\varphi(\Phi_i, \dots)] \wedge [\Phi_i = \Phi] \leqslant [\varphi(\Phi, \dots)]. \ \rhd$$

8.4. Лемма. *Пусть φ — формула, X — B-система и $\Psi \Subset X$. Тогда*

$$[(\boldsymbol{\forall}\, \Phi \subset \Psi)\, \varphi(\Phi, \dots)] = [(\boldsymbol{\forall}\, \Phi)\, \varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)] = \bigwedge_{\Phi \Subset X\colon \Phi \leqslant \Psi} [\varphi(\Phi, \dots)].$$

В частности, следующие свойства булевозначного класса Ψ равносильны:

(a) $X \vDash (\boldsymbol{\forall}\, \Phi \subset \Psi)\, \varphi(\Phi, \dots)$;

(b) $X \vDash (\boldsymbol{\forall}\, \Phi)\, \varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)$;

(c) $(\forall\, \Phi \Subset X)\ \Phi \leqslant \Psi \Rightarrow X \vDash \varphi(\Phi, \dots)$.

$\lhd$ Для любого предикативного класса $\Phi \Subset X$ определим $\Phi_0 \Subset X$, полагая $\Phi_0(x) := \Phi(x) \wedge \Psi(x)$ для всех $x \in X$. Тогда $\Phi_0 \leqslant \Psi$ и $[\Phi_0 \subset \Psi] = [\Phi_0 = \Phi \cap \Psi] = 1_B$.

Поскольку $[\Phi_0 \subset \Psi \Rightarrow \varphi(\Phi_0, \dots)] = [\varphi(\Phi_0, \dots)] = [\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)]$, имеет место неравенство

$$\bigwedge_{\Phi \Subset X} [\Phi \subset \Psi \Rightarrow \varphi(\Phi, \dots)] \leqslant \bigwedge_{\Phi \Subset X} [\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)].$$

Далее, если $\Phi \leqslant \Psi$, то $[\Phi \cap \Psi = \Phi] = 1_B$ и $[\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)] = [\varphi(\Phi, \dots)]$, а значит,

$$\bigwedge_{\Phi \Subset X} [\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)] \leqslant \bigwedge_{\Phi \Subset X\colon \Phi \leqslant \Psi} [\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)] = \bigwedge_{\Phi \Subset X\colon \Phi \leqslant \Psi} [\varphi(\Phi, \dots)].$$

Наконец, из соотношений

$$[\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots) \Rightarrow (\Phi \subset \Psi \Rightarrow \varphi(\Phi, \dots))] = [(\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots) \wedge \Phi \cap \Psi = \Phi) \Rightarrow \varphi(\Phi, \dots)] = 1_B$$

вытекает неравенство

$$[\varphi(\Phi_0, \dots)] = [\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)] \leqslant [\Phi \subset \Psi \Rightarrow \varphi(\Phi, \dots)]$$

и, следовательно,

$$\bigwedge_{\Phi \Subset X\colon \Phi \leqslant \Psi} [\varphi(\Phi, \dots)] \leqslant \bigwedge_{\Phi \Subset X} [\Phi \subset \Psi \Rightarrow \varphi(\Phi, \dots)]. \ \rhd$$

8.5. Лемма. *Пусть* φ *— ограниченная формула. Если* X *—* B*-система,* $Y \preccurlyeq X$, $\bar{y} = y_1, \dots, y_m \in Y$, $\Psi, \overline{\Psi} = \Psi_1, \dots, \Psi_n \Subset X$ *и* $\Psi, \overline{\Psi} \leqslant Y\!\uparrow_X$, *то*

$$[(\forall\, \Phi \subset \Psi)\, \varphi(\Phi, \bar{y}, \overline{\Psi})]_X = [(\forall\, \Phi \subset \Psi|_Y)\, \varphi(\Phi, \bar{y}, \overline{\Psi}|_Y)]_Y.$$

$\lhd$ Если $\Phi \Subset Y$ и $\Phi \leqslant \Psi|_Y$, то $\Phi\!\uparrow_X \leqslant \Psi$ в силу леммы 3.7(b) и, кроме того, $(\Phi\!\uparrow_X)|_Y = \Phi$. Следовательно, с учетом теоремы 7.6 и леммы 8.4 имеют место следующие соотношения:

$$[(\forall\, \Phi \subset \Psi)\, \varphi(\Phi, \bar{y}, \overline{\Psi})]_X = \bigwedge_{\Phi \Subset X\colon\, \Phi \leqslant \Psi} [\varphi(\Phi, \bar{y}, \overline{\Psi})]_X$$
$$\leqslant \bigwedge_{\Phi \Subset Y\colon\, \Phi \leqslant \Psi|_Y} [\varphi(\Phi\!\uparrow_X, \bar{y}, \overline{\Psi})]_X = \bigwedge_{\Phi \Subset Y\colon\, \Phi \leqslant \Psi|_Y} [\varphi((\Phi\!\uparrow_X)|_Y, \bar{y}, \overline{\Psi}|_Y)]_Y$$
$$= \bigwedge_{\Phi \Subset Y\colon\, \Phi \leqslant \Psi|_Y} [\varphi(\Phi, \bar{y}, \overline{\Psi}|_Y)]_Y = [(\forall\, \Phi \subset \Psi|_Y)\, \varphi(\Phi, \bar{y}, \overline{\Psi}|_Y)]_Y.$$

Обратное неравенство также обеспечивается теоремой 7.6 и леммой 8.4:

$$[(\forall\, \Phi \subset \Psi|_Y)\, \varphi(\Phi, \bar{y}, \overline{\Psi}|_Y)]_Y = \bigwedge_{\Phi \Subset Y\colon\, \Phi \leqslant \Psi|_Y} [\varphi(\Phi, \bar{y}, \overline{\Psi}|_Y)]_Y$$
$$\leqslant \bigwedge_{\Phi \Subset X\colon\, \Phi|_Y \leqslant \Psi|_Y} [\varphi(\Phi|_Y, \bar{y}, \overline{\Psi}|_Y)]_Y = \bigwedge_{\Phi \Subset X\colon\, \Phi|_Y \leqslant \Psi|_Y} [\varphi(\Phi, \bar{y}, \overline{\Psi})]_X$$
$$\leqslant \bigwedge_{\Phi \Subset X\colon\, \Phi \leqslant \Psi} [\varphi(\Phi, \bar{y}, \overline{\Psi})]_X = [(\forall\, \Phi \subset \Psi)\, \varphi(\Phi, \bar{y}, \overline{\Psi})]_X. \ \rhd$$

§ 9. Регулярность

Аксиома регулярности (фундирования) имеет вид

$$\rho \ := \ (\forall\, x)\, \mu(x),$$

где

$$\mu(x) \ := \ ((\exists\, y)(y \in x) \Rightarrow (\exists\, y \in x)(\forall\, z \in x)(z \notin y)) \tag{14}$$

или, что то же самое,

$$\mu(x) \ := \ (x \neq \varnothing \Rightarrow (\exists\, y \in x)(y \cap x = \varnothing)).$$

Если $\mathbb{V}$ — класс всех множеств и $(\mathbb{V}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Ord}}$ — кумулятивная иерархия фон Неймана, определяемая по рекурсивному правилу

$$\begin{aligned} &\mathbb{V}_0 = \varnothing; \\ &\mathbb{V}_{\alpha+1} = \mathscr{P}(\mathbb{V}_\alpha), \quad \alpha \in \mathrm{Ord}; \\ &\mathbb{V}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbb{V}_\beta, \qquad \alpha \in \mathrm{Lim\,Ord}, \end{aligned} \tag{15}$$

то в рамках теории, полученной из ZFC исключением аксиомы регулярности ρ, равенство $\mathbb{V} = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{Ord}} \mathbb{V}_\alpha$ равносильно ρ (см. [2, § 6]). Кроме того, в этой теории аксиома регулярности равносильна σ-регулярности — отсутствию такой последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, что $x_{n+1} \in x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

В этом параграфе вводятся и изучаются понятия регулярной и σ-регулярной булевозначной системы и исследуется вопрос о том, для каких булевых алгебр B классы регулярных и σ-регулярных B-систем совпадают.

9.1. Пусть X — B-система и $\Psi \Subset X$. Будем говорить, что *булевозначный класс Ψ регулярен в X*, если

$$X \vDash (\forall\, \Phi \subset \Psi)\, \mu(\Phi)$$

(см. (14)), и что *B-система X регулярна вне подкласса* $Y \subset X$, если дополнение $\neg(Y\!\uparrow)$ булевозначного класса $Y\!\uparrow$ регулярно в X, т. е.

$$X \vDash (\forall\, \Phi)(\Phi \cap Y\!\uparrow = \varnothing \;\Rightarrow\; \mu(\Phi)).$$

Систему X назовем *регулярной*, если в X регулярен наибольший булевозначный класс $X\!\uparrow$, т. е.

$$X \vDash (\forall\, \Phi)\, \mu(\Phi).$$

Регулярность системы X очевидным образом связана с истинностью в X аксиомы регулярности ρ:

(a) *если X предикативна, то из регулярности X следует истинность $X \vDash \rho$;*

(b) *если X интенсиональна, то из истинности $X \vDash \rho$ следует регулярность X;*

(c) *если X удовлетворяет принципу подъема, то регулярность X равносильна истинности $X \vDash \rho$.*

9.2. Лемма. *Следующие свойства B-системы X равносильны:*

(a) *система X не является регулярной;*

(b) *существует множество $P \subset {}^{\%}\!X$, удовлетворяющее следующим условиям:*

$$(\exists\, p \in P)\ \ \operatorname{dom} p \neq 0_B,$$
$$(\forall\, p \in P)\ \ \bigvee_{q \in P} [q \in p] \geqslant \operatorname{dom} p;$$

(c) *существует последовательность множеств $P_n \subset {}^{\%}\!X$ $(n \in \mathbb{N})$, удовлетворяющих следующим условиям:*

$$P_n \text{ — антицепь};$$
$$\bigvee_{p \in P_n} \operatorname{dom} p \;=\; \bigvee_{p \in P_1} \operatorname{dom} p \neq 0_B;$$
$$(\forall\, p \in P_n)(\forall\, q \in P_{n+1})(\operatorname{dom} p \wedge \operatorname{dom} q \neq 0_B \;\Rightarrow\; \operatorname{dom} q = [q \in p]);$$
$$(\forall\, p \in P_n)\ \ \bigvee_{q \in P_{n+1}} [q \in p] = \operatorname{dom} p.$$

$\lhd$ (a)$\Rightarrow$(b). Если система X не является регулярной, то согласно 8.3 и теореме 4.5(a) существует множество $P \subset {}^{\%}\!X$, для которого $X \nvDash \mu(P\!\uparrow)$. Последнее означает, что

$$b := [P\!\uparrow \neq \varnothing] \wedge [(\forall\, y \in P\!\uparrow)(\exists\, z \in P\!\uparrow)(z \in y)] \neq 0_B.$$

Покажем, что множество $\{p|_b : p \in P\}$ удовлетворяет условиям (b). Действительно, с учетом (3)

$$\bigvee_{p \in P} \operatorname{dom} p|_b = \bigvee_{p \in P} \operatorname{dom} p \wedge b = [P\!\uparrow \neq \varnothing] \wedge b = b \neq 0_B.$$

Кроме того, согласно лемме 3.18

$$b \leqslant [(\forall\, y \in P\!\uparrow)(\exists\, z \in P\!\uparrow)(z \in y)] \;=\; \bigwedge_{p \in P} \neg \operatorname{dom} p \,\vee \bigvee_{q \in P} [q \in p].$$

Следовательно, для всех $p \in P$

$$b \leqslant \neg \operatorname{dom} p \vee \bigvee_{q \in P} [q \in p]$$

и поэтому

$$\bigvee_{q \in P} [q \in p|_b] = \bigvee_{q \in P} [q \in p] \wedge \operatorname{dom} p \wedge b$$

$$= \Big(\neg \operatorname{dom} p \vee \bigvee_{q \in P} [q \in p]\Big) \wedge \operatorname{dom} p \wedge b \geqslant \operatorname{dom} p \wedge b = \operatorname{dom} p|_b.$$

(b)⇒(c). Пусть $P \subset {}^{\%}X$ удовлетворяет условиям (b). По принципу исчерпывания для каждого $p \in {}^{\%}P$ из равенства $\bigvee\limits_{q \in P} [q \in p] = \operatorname{dom} p$ следует существование такой антицепи $D(p) \subset {}^{\%}P$, что $\operatorname{dom} q = [q \in p]$ для всех $q \in D(p)$ и $\bigvee\limits_{q \in D(p)} [q \in p] = \operatorname{dom} p$. По той же причине существует антицепь $P_1 \subset {}^{\%}P$ такая, что

$$\bigvee_{p \in P_1} \operatorname{dom} p = \bigvee_{p \in P} \operatorname{dom} p \neq 0_B.$$

Определим множества $P_n \subset {}^{\%}P$ $(n \in \mathbb{N})$, полагая

$$P_{n+1} := \bigcup_{p \in P_n} D(p), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Элементарная проверка показывает, что P_n удовлетворяют всем условиям, перечисленным в (c).

(c)⇒(a). Пусть последовательность $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет (c). Положим $P := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} P_n$ и покажем, что $X \nvDash \mu(P{\uparrow})$. Действительно, согласно (3)

$$[P{\uparrow} \neq \varnothing] = \bigvee_{p \in P} \operatorname{dom} p \geqslant \bigvee_{p \in P_1} \operatorname{dom} p \neq 0_B,$$

но с учетом леммы 3.18

$$[(\exists\, y \in P{\uparrow})(\forall\, z \in P{\uparrow})(z \notin y)] = [(\exists\, y \in P{\uparrow})\neg(\exists\, z \in P{\uparrow})(z \in y)]$$

$$= \bigvee_{p \in P} \operatorname{dom} p \wedge \neg\Big(\bigvee_{q \in P} \operatorname{dom} q \wedge [q \in p]\Big)$$

$$= \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{p \in P_n} \operatorname{dom} p \wedge \neg\Big(\bigvee_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{q \in P_m} \operatorname{dom} q \wedge [q \in p]\Big)$$

$$\leqslant \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{p \in P_n} \operatorname{dom} p \wedge \neg\Big(\bigvee_{q \in P_{n+1}} [q \in p]\Big) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{p \in P_n} \operatorname{dom} p \wedge \neg \operatorname{dom} p = 0_B. \ \triangleright$$

9.3. Следующее утверждение вытекает из леммы 8.5 благодаря ограниченности формулы $\mu(x)$.

Следствие. *Пусть X — B-система, $Y \preccurlyeq X$, $\Psi \Subset X$ и $\Psi \leqslant Y{\uparrow}_X$. Класс Ψ регулярен в X тогда и только тогда, когда класс $\Psi|_Y$ регулярен в Y.*

9.4. Лемма. *Пусть X и Y — B-системы, и пусть $Z \subset Y \preccurlyeq X$. Если система Y регулярна вне Z, то в X истинно утверждение о регулярности разности $Y{\uparrow} \setminus Z{\uparrow}$, т. е.*

$$X \vDash (\forall\, \Phi \subset Y{\uparrow} \setminus Z{\uparrow})\, \mu(\Phi).$$

$\triangleleft$ Положим $\Psi := Y{\uparrow}_X \wedge \neg(Z{\uparrow}_X)$. Регулярность Y вне Z означает, что класс $\neg(Z{\uparrow}_Y)$ регулярен в Y, откуда с учетом следствия 9.3 и соотношений $\Psi \leqslant Y{\uparrow}_X$, $\Psi|_Y = \neg(Z{\uparrow}_Y)$ вытекает регулярность класса Ψ в X. Остается заметить, что $X \vDash (\Psi = Y{\uparrow} \setminus Z{\uparrow})$. $\triangleright$

9.5. Лемма. *Пусть X и Y — B-системы, и пусть $Z \subset Y \preccurlyeq X$. Если система Y регулярна вне Z, а X регулярна вне Y, то X регулярна вне Z.*

$\lhd$ Установим истинность $X \vDash (\forall\,\Phi)(\Phi \cap Z\!\uparrow = \varnothing \Rightarrow \mu(\Phi))$ путем «рассуждений внутри X» (см. п. 3.10).

Пусть $\Phi \cap Z\!\uparrow = \varnothing$ и $\Phi \neq \varnothing$. Найдем такой элемент $y \in \Phi$, что $y \cap \Phi = \varnothing$. Если $\Phi \cap Y\!\uparrow = \varnothing$, то искомый y существует в силу регулярности $\neg Y\!\uparrow$. Пусть теперь $\Phi \cap Y\!\uparrow \neq \varnothing$. Поскольку класс $Y\!\uparrow \setminus Z\!\uparrow$ регулярен (см. лемму 9.4) и $\varnothing \neq \Phi \cap Y\!\uparrow \subset Y\!\uparrow \setminus Z\!\uparrow$, имеется такой элемент $y \in \Phi \cap Y\!\uparrow$, что $y \cap \Phi \cap Y\!\uparrow = \varnothing$. Тогда $y \cap \Phi = y \cap \Phi \cap Y\!\uparrow = \varnothing$, так как в силу транзитивности $Y\!\uparrow$ из $y \in Y\!\uparrow$ следует $y \subset Y\!\uparrow$. $\rhd$

9.6. Следствие. *Пусть X и Y — B-системы и $Y \preccurlyeq X$. Если система Y регулярна, а X регулярна вне Y, то X регулярна.*

9.7. Лемма. *Если B-система X регулярна, то любая подсистема $Y \subset X$ регулярна.*

$\lhd$ Рассмотрим произвольные семейства $(y_i)_{i\in I} \subset Y$ и $(b_i)_{i\in I} \subset B$ и покажем, что $Y \vDash \mu(P\!\uparrow_{Y})$, где $P := \{y_i|_{b_i} : i \in I\}$. Действительно, используя регулярность системы X и лемму 3.18, заключаем, что

$$[P\!\uparrow_{Y} \neq \varnothing]_{Y} = \bigvee_{i\in I} b_i = [P\!\uparrow_{X} \neq \varnothing]_{X} \leqslant [(\exists\, y \in P\!\uparrow_{X})(\forall\, z \in P\!\uparrow_{X})(z \notin y)]_{X}$$
$$= \bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in I}([y_j \notin y_i]_{X} \wedge b_i \wedge b_j) \vee \neg b_j = \bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in I}([y_j \notin y_i]_{Y} \wedge b_i \wedge b_j) \vee \neg b_j$$
$$= [(\exists\, y \in P\!\uparrow_{Y})(\forall\, z \in P\!\uparrow_{Y})(z \notin y)]_{Y}. \ \rhd$$

9.8. Пусть X — B-система и $\Psi \Subset X$. Будем говорить, что *булевозначный класс Ψ σ-регулярен в X*, если

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} [x_n \in \Psi] \wedge [x_{n+1} \in x_n] = 0_B$$

для любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Будем говорить, что *$B$-система X σ-регулярна вне подкласса $Y \subset X$*, если дополнение $\neg(Y\!\uparrow)$ булевозначного класса $Y\!\uparrow$ σ-регулярно в X, т. е.

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} [x_n \notin Y\!\uparrow] \wedge [x_{n+1} \in x_n] = 0_B$$

для любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Систему X назовем *σ-регулярной*, если в X σ-регулярен наибольший класс $X\!\uparrow$, т. е.

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} [x_{n+1} \in x_n] = 0_B$$

для любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$.

9.9. Теорема. *Пусть X — B-система.*

(a) *Если класс $\Psi \Subset X$ регулярен в X, то Ψ σ-регулярен в X.*

(b) *Если $Y \subset X$ и разность $X \backslash Y$ предцикличнa, то регулярность и σ-регулярность X вне Y равносильны.*

$\lhd$ (a) Пусть класс Ψ регулярен в X. Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ и покажем, что

$$b := \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} [x_n \in \Psi] \wedge [x_{n+1} \in x_n] = 0_B.$$

Положим $\Phi := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}{\uparrow}$. Тогда $[\![\Phi \neq \varnothing]\!] = 1_B$ и, кроме того, с учетом леммы 3.18

$$[\![\Phi \subset \Psi]\!] = [\![(\forall\, x \in \Phi)(x \in \Psi)]\!] = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} [\![x_n \in \Psi]\!] \geqslant b,$$

откуда благодаря регулярности Ψ в X следует, что $[\![(\exists\, y \in \Phi)(\forall\, z \in \Phi)(z \notin y)]\!] \geqslant b$. С другой стороны, вновь привлекая лемму 3.18, заключаем:

$$[\![(\exists\, y \in \Phi)(\forall\, z \in \Phi)(z \notin y)]\!] = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{m\in\mathbb{N}} [\![x_m \notin x_n]\!]$$
$$= \neg \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{m\in\mathbb{N}} [\![x_m \in x_n]\!] \leqslant \neg \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} [\![x_{n+1} \in x_n]\!] \leqslant \neg b.$$

(b) Пусть разность $Z := X \backslash Y \neq \varnothing$ предциклична, и пусть система X σ-регулярна вне Y. Рассмотрим произвольный класс $\Phi \Subset X$, удовлетворяющий неравенству $\Phi \leqslant \neg(Y{\uparrow})$, и покажем, что $X \vDash \mu(\Phi)$, т. е.

$$b := [\![\Phi \neq \varnothing \wedge (\forall\, y \in \Phi)(y \cap \Phi \neq \varnothing)]\!] = 0_B.$$

Предварительно заметим, что для любого булевозначного класса $\Psi \Subset X$

$$(\exists\, x \in X)\ [\![(\exists\, y \in \Phi)\, \Psi(y)]\!] = [\![x \in \Phi]\!] \wedge [\![\Psi(x)]\!]. \tag{16}$$

Действительно, согласно лемме 3.17(d) справедливо соотношение

$$X \vDash (\Phi \subset X{\uparrow} \setminus Y{\uparrow} \subset Z{\uparrow}),$$

откуда с учетом лемм 3.18 и 5.11 вытекают равенства

$$[\![(\exists\, y \in \Phi)\, \Psi(y)]\!] = [\![(\exists\, y \in Z{\uparrow})(\Phi(y) \wedge \Psi(y))]\!]$$
$$= [\![(\exists\, y \in (\operatorname{mix} Z){\uparrow})(\Phi(y) \wedge \Psi(y))]\!] = \bigvee_{y\in\operatorname{mix} Z} \Phi(y) \wedge \Psi(y),$$

причем по теореме 6.5 функция $\Phi \wedge \Psi$ достигает максимума на циклическом классе $\operatorname{mix} Z$.

Согласно (16) имеется такой элемент $x_1 \in X$, что $[\![x_1 \in \Phi]\!] = [\![\Phi \neq \varnothing]\!] \geqslant b$. Из $[\![(\forall\, y \in \Phi)(y \cap \Phi \neq \varnothing)]\!] \geqslant b$ следует $[\![x_1 \cap \Phi \neq \varnothing]\!] \geqslant b$, т. е. $[\![(\exists\, y \in \Phi)(y \in x_1)]\!] \geqslant b$, а значит, в силу (16) существует элемент $x_2 \in X$ такой, что $[\![x_2 \in \Phi]\!] \wedge [\![x_2 \in x_1]\!] \geqslant b$. «Итерируя» эти рассуждения (а строго говоря, применяя рекурсию и аксиому выбора), получаем последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов X, удовлетворяющую неравенствам $[\![x_n \notin Y{\uparrow}]\!] \wedge [\![x_{n+1} \in x_n]\!] \geqslant [\![x_n \in \Phi]\!] \wedge [\![x_{n+1} \in x_n]\!] \geqslant b$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Благодаря σ-регулярности X вне Y отсюда следует, что $b = 0$. ▷

9.10. Завершим параграф исследованием вопроса о том, для каких полных булевых алгебр B совпадают понятия регулярной и σ-регулярной B-системы.

Говорят, что элемент $c \in B$ *вписан* (*строго вписан*) в множество $D \subset B$, и пишут $c \preccurlyeq D$ ($c \prec D$), если $c \leqslant d$ ($c < d$) для какого-либо элемента $d \in D$. Говорят, что множество $C \subset B$ *вписано* (*строго вписано*) в D, и пишут $C \preccurlyeq D$ ($C \prec D$), если $c \preccurlyeq D$ ($c \prec D$) для всех $c \in C$. Элемент c или множество C называют *вписанным в последовательность* $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ подмножеств B, если $c \preccurlyeq D_n$ ($C \preccurlyeq D_n$) для всех $n \in \mathbb{N}$.

Множество $C \subset B$ называется *покрытием* булевой алгебры B, если $\vee C = 1_B$. *Разбиением* булевой алгебры называют разбиение единицы, т. е. покрытие, являющееся антицепью. Напомним, что согласно принципу исчерпывания в любое покрытие можно вписать разбиение.

Теорема [5, § 19; 6]. *Следующие свойства полной булевой алгебры B равносильны:*

(a) *для любого множества I и любого семейства $\left(b_i^n\right)_{i\in I}^{n\in\mathbb{N}}$ элементов B справедливо соотношение*

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{i\in I} b_i^n = \bigvee_{i\in I^{\mathbb{N}}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} b_{i(n)}^n;$$

(b) *в любую последовательность покрытий B можно вписать покрытие;*

(c) *в любую последовательность разбиений B можно вписать разбиение;*

(d) *для любой последовательности разбиений $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ булевой алгебры B и любого ненулевого элемента $a \in B$ существует последовательность $d_n \in D_n$ $(n \in \mathbb{N})$ такая, что*

$$a \wedge \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} d_n \neq 0_B.$$

Булева алгебра B, удовлетворяющая любому из эквивалентных условий (a)–(d), называется ω*-дистрибутивной* или (ω, ∞)*-дистрибутивной.*

Всякая атомная полная булева алгебра ω-дистрибутивна. Пополнение булевой фактор-алгебры $\mathscr{P}(\mathbb{N})/\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ является безатомной ω-дистрибутивной булевой алгеброй (см. [6, следствие леммы 5; 7, пример 9]). Классическим примером полной булевой алгебры, не являющейся ω-дистрибутивной, служит булева алгебра классов эквивалентности измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}$.

9.11. *Измельчением* в булевой алгебре B условимся называть последовательность $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ подмножеств B, удовлетворяющую следующим условиям:

(a) $\vee C_n = \vee C_1 \neq 0_B$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n = 0_B$ для любой последовательности $c_n \in C_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Измельчение $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ назовем *разбивающим*, если для всех $n \in \mathbb{N}$

(c) $0_B \notin C_n$;

(d) C_n — антицепь;

(e) $C_{n+1} \prec C_n$.

9.12. Проверка следующего утверждения не составляет труда.

Лемма. *Пусть $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — разбивающее измельчение в булевой алгебре B, и пусть $X := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$.*

(a) *Для каждого $x \in X$ существует единственная конечная последовательность элементов $c_1 \in C_1, c_2 \in C_2, \dots, c_n \in C_n$ такая, что $c_1 > c_2 > \dots > c_n = x$.*

(b) *Если $n \neq m$, то $C_n \cap C_m = \varnothing$.*

(c) *Для всякого $x \in X$ обозначим через $h(x)$ то единственное число $n \in \mathbb{N}$, для которого $x \in C_n$. Если $(x_i)_{i\in I} \subset X$ и $\bigvee\limits_{i\in I} h(x_i) = \infty$, то $\bigwedge\limits_{i\in I} x_i = 0_B$.*

9.13. Теорема. *Следующие свойства полной булевой алгебры B равносильны:*

(a) *в B существует разбивающее измельчение;*

(b) *в B существует измельчение;*

(c) *булева алгебра B не является ω-дистрибутивной.*

$\lhd$ Импликация (a)$\Rightarrow$(b) тривиальна. Импликацию (b)$\Rightarrow$(c) легко установить с помощью теоремы 9.10(d). Покажем, что (c)$\Rightarrow$(a).

Если булева алгебра B не является ω-дистрибутивной, то согласно теореме 9.10(d) существуют последовательность разбиений $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и ненулевой элемент $a \in B$ такие, что

$$a \wedge \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} d_n = 0_B \tag{17}$$

для любой последовательности $d_n \in D_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Согласно (17) в последовательность $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не вписывается никакой ненулевой элемент $b \leqslant a$, а значит, для всякого такого b можно ввести в рассмотрение натуральное число

$$m(b) := \min\{n \in \mathbb{N} : b \not\preccurlyeq D_n\}.$$

Поскольку $\vee D_{m(b)} = 1_B$ и $b \not\preccurlyeq D_{m(b)}$, существует такой элемент $d \in D_{m(b)}$, что $0_B < b \wedge d < b$. Таким образом, множество

$$P(b) := \{b \wedge d : d \in D_{m(b)}\} \setminus \{0_B\}$$

обладает следующими свойствами:

$$P(b) \text{ — антицепь}, \quad \vee P(b) = b, \quad 0_B < c < b \text{ для всех } c \in P(b).$$

Рекурсивно определим множества $C_n \subset B$ $(n \in \mathbb{N})$, полагая

$$C_1 := P(a);$$
$$C_{n+1} := \bigcup_{b\in C_n} P(b), \quad n \in \mathbb{N},$$

и установим, что последовательность $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является разбивающим измельчением. Условия 9.11(a),(c)–(e) очевидны. Остается обосновать 9.11(b).

Индукцией по $n \in \mathbb{N}$ покажем, что $m(b) \geqslant n$ для всех $b \in C_n$. База индукции $n = 1$ тривиальна. Предположим, что $m(b) \geqslant n$ при $b \in C_n$, рассмотрим произвольный элемент $c \in C_{n+1}$ и установим неравенство $m(c) \geqslant n+1$. По определению C_{n+1} имеет место представление $c = b \wedge d$ для некоторых $b \in C_n$, $d \in D_{m(b)}$. Поскольку элемент b вписан в $D_1, \dots, D_{m(b)-1}$, в силу неравенства $c \leqslant b$ это же верно для c, а значит, $m(c) \geqslant m(b) \geqslant n$. Кроме того, из $c \not\preccurlyeq D_{m(c)}$ и $c \leqslant d \in D_{m(b)}$ следует, что $m(c) \neq m(b)$, а значит, $m(c) \geqslant n + 1$.

Пусть теперь $c_n \in C_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По доказанному выше $m(c_{n+1}) > n$, откуда $c_{n+1} \preccurlyeq D_n$ и, следовательно, $c_{n+1} \leqslant d_n$ для некоторой последовательности $d_n \in D_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Привлекая (17), заключаем, что

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} c_n = c_1 \wedge \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} c_{n+1} \leqslant a \wedge \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} d_n = 0_B. \ \triangleright$$

9.14. Теорема. *Классы регулярных и σ-регулярных B-систем совпадают тогда и только тогда, когда булева алгебра B является ω-дистрибутивной.*

$\triangleleft$ Необходимость. Если булева алгебра B не является ω-дистрибутивной, то согласно теореме 9.13 в B существует разбивающее измельчение $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Положим $X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Как и в лемме 9.12(c), для всякого $x \in X$ обозначим через $h(x)$ то единственное число $n \in \mathbb{N}$, для которого $x \in C_n$. Превратим X в B-систему, полагая для $x, y \in X$

$$[x = y] := \begin{cases} 1_B, & \text{если } x = y, \\ 0_B & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$[x \in y] := \begin{cases} x, & \text{если } h(x) = h(y) + 1, \\ 0_B & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Установим σ-регулярность системы X, для чего рассмотрим произвольную последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ и покажем, что $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} [x_{n+1} \in x_n] = 0_B$. Это соотношение очевидно, если $[x_{n+1} \in x_n] = 0_B$ для какого-либо $n \in \mathbb{N}$. В противном случае $h(x_{n+1}) = h(x_n) + 1$ и $[x_{n+1} \in x_n] = x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} h(x_{n+1}) = \infty$, откуда с учетом леммы 9.12(c) следует

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} [x_{n+1} \in x_n] = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} x_{n+1} = 0_B.$$

Система X не является регулярной, так как множество

$$P := \{x|_x : x \in X\} \subset {}^{\%}X$$

удовлетворяет условиям (b) леммы 9.2. Действительно, для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in C_n$

$$\bigvee_{y\in X} [y|_y \in x|_x] = x \wedge \bigvee_{y\in X} [y \in x] \wedge y \geqslant x \wedge \bigvee_{y\in C_{n+1}} [y \in x] \wedge y$$
$$= x \wedge \bigvee_{y\in C_{n+1}} y = x \wedge \vee C_{n+1} = x \wedge \vee C_n = x = \operatorname{dom} x|_x.$$

Достаточность. Пусть X — σ-регулярная, но не регулярная B-система. Рассмотрим множества $P_n \subset {}^{\%}X$ $(n \in \mathbb{N})$, удовлетворяющие условиям (c) леммы 9.2, положим

$$C_n := \{\operatorname{dom} p : p \in P_n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

и покажем, что последовательность $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является измельчением в булевой алгебре B (см. теорему 9.13). Действительно, для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\vee C_n = \bigvee_{p\in P_n} \operatorname{dom} p = \bigvee_{p\in P_1} \operatorname{dom} p = \vee C_1 \neq 0_B.$$

Пусть $c_n \in C_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n = 0_B$. Последнее соотношение очевидно, если $(\exists\, n \in \mathbb{N})\ c_n \wedge c_{n+1} = 0_B$. Пусть теперь $c_n \wedge c_{n+1} \neq 0_B$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Согласно (18) для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется элемент $p_n \in P_n$ такой, что $c_n = \operatorname{dom} p_n$. Поскольку $\operatorname{dom} p_n \wedge \operatorname{dom} p_{n+1} = c_n \wedge c_{n+1} \neq 0_B$, из условий 9.2(c) следует, что $c_{n+1} = \operatorname{dom} p_{n+1} = [p_{n+1} \in p_n]$. Таким образом,

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} c_n \leqslant \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} c_{n+1} = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} [p_{n+1} \in p_n] = 0_B$$

благодаря σ-регулярности системы X. $\triangleright$

§ 10. Интенсиональная иерархия

Кумулятивная иерархия фон Неймана $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Ord}}$ над множеством или классом V_0 определяется посредством трансфинитной рекурсии

$$\begin{aligned} &V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathscr{P}(V_\alpha), && \alpha \in \mathrm{Ord}; \\ &V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta, && \alpha \in \mathrm{Lim}\,\mathrm{Ord}. \end{aligned} \tag{19}$$

В этом параграфе определяется интенсиональная иерархия, служащая аналогом иерархии (19) для булевозначных систем, вводится понятие булевозначного универсума над произвольной экстенсиональной булевозначной системой и устанавливается тесная взаимосвязь такого универсума с соответствующей интенсиональной иерархией.

10.1. Начнем с характеризации надстройки, представляющей собой булевозначный аналог дискретного шага $V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathscr{P}(V_\alpha)$ иерархии (19).

Пусть X — произвольная экстенсиональная B-система, и пусть Y — подкласс X. Введем следующие понятия:

$$
\begin{aligned}
&X \textit{ интенсиональна над } Y && \Leftrightarrow\ (\forall\, P \subset {}^{\%}Y)(\exists\, x \in X)(x \simeq P{\uparrow}) \\
& && \Leftrightarrow\ (\forall\, \Phi \Subset X : \Phi \leqslant Y{\uparrow})(\exists\, x \in X)(x \simeq \Phi); \\
&X \textit{ предикативна над } Y && \Leftrightarrow\ (\forall\, x \in X \backslash Y)(\exists\, P \subset {}^{\%}Y)(x \simeq P{\uparrow}) \\
& && \Leftrightarrow\ X = Y \cup \mathscr{P}_X(Y); \\
&X \textit{ отделима над } Y && \Leftrightarrow\ (\forall\, x \in X)(\forall\, z \in X \backslash Y)(x \simeq z \ \Rightarrow\ x = z) \\
& && \Leftrightarrow\ (\forall\, x_1, x_2 \in X)(x_1 \simeq x_2,\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ x_1, x_2 \in Y).
\end{aligned}
$$

Будем говорить, что экстенсиональная B-система X является *надстройкой* над подсистемой Y, если

(a) $Y \preccurlyeq X$;

(b) X интенсиональна над Y;

(c) X предикативна над Y;

(d) X отделима над Y.

Экстенсиональную B-систему X назовем *надстройкой над копией* B-системы Z, если X является надстройкой над какой-либо подсистемой, изоморфной Z.

10.2. Лемма. *Для любой экстенсиональной булевозначной системы Z существует надстройка над копией Z.*

$\lhd$ Рассмотрим произвольную экстенсиональную B-систему Z, ее изоморфную копию $Y := \{\varnothing\} \times Z$ и положим (см. п. 4.2)

$$\mathscr{Y} := \{P \subset {}^{\%}Y : P \text{ насыщено},\ \neg(\exists\, y \in Y)(y \simeq P{\uparrow}_Y)\}.$$

Заметим, что $Y \cap \mathscr{Y} = \varnothing$. Действительно, по определению 3.1 любое подмножество $P \subset {}^{\%}Y$ состоит из пар, в то время как всякий элемент произведения $Y = \{\varnothing\} \times Z$ в подходе Куратовского имеет вид $\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, z\}\}$ и тем самым содержит элемент $\{\varnothing\}$, не являющийся парой.

Положим $X := Y \cup \mathscr{Y}$ и продолжим на X^2 интерпретации $=_Y, \in_Y$, полагая

$$
\begin{aligned}
=_X(y,z) &:= =_Y(y,z), & \in_X(y,z) &:= \in_Y(y,z), \\
=_X(P,Q) &:= [P{\uparrow}_Y = Q{\uparrow}_Y]_Y, & \in_X(P,Q) &:= [P{\uparrow}_Y \in Q{\uparrow}_Y]_Y, \\
=_X(P,y) &:= [P{\uparrow}_Y = y]_Y, & \in_X(P,y) &:= [P{\uparrow}_Y \in y]_Y, \\
=_X(y,P) &:= [y = P{\uparrow}_Y]_Y, & \in_X(y,P) &:= [y \in P{\uparrow}_Y]_Y
\end{aligned}
$$

для всех $y, z \in Y$ и $P, Q \in \mathscr{Y}$.

Тот факт, что $(X, =_X, \in_X)$ является B-системой, устанавливается элементарной проверкой условий, перечисленных в определении 2.1. В большинстве случаев для этой проверки достаточны «синтаксический сахар» 3.8 и истинность в Y пропозициональных аксиом и аксиом равенства (см. п. 3.9). Поясним лишь пять случаев, в трех из которых используется экстенсиональность системы Y, а в двух других — очевидное неравенство $[\varphi(x)]_Y \leqslant [(\exists\, x)\, \varphi(x)]_Y$.

Если $x, y, z \in Y$ и $P, Q \in \mathscr{Y}$, то

$$
\begin{aligned}
&=_X(x,P) \wedge =_X(P,z) = [x = P{\uparrow_Y} \wedge P{\uparrow_Y} = z]_Y \\
&\qquad = [(\forall\, y)(y \in x \Leftrightarrow y \in P{\uparrow_Y}) \wedge (\forall\, y)(y \in P{\uparrow_Y} \Leftrightarrow y \in z)]_Y \\
&\qquad \leqslant [(\forall\, y)(y \in x \Leftrightarrow y \in z)]_Y \leqslant [x = z]_Y = =_X(x,z);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\in_X(P,y) \wedge =_X(P,z) = [P{\uparrow_Y} \in y \wedge P{\uparrow_Y} = z]_Y \\
&\qquad = [(\exists\, x)(P{\uparrow_Y} = x \wedge x \in y) \wedge P{\uparrow_Y} = z]_Y \\
&\qquad = [(\exists\, x)((\forall\, u)(u \in P{\uparrow_Y} \Leftrightarrow u \in x) \wedge x \in y) \wedge (\forall\, u)(u \in P{\uparrow_Y} \Leftrightarrow u \in z)]_Y \\
&\qquad \leqslant [(\exists\, x)((\forall\, u)(u \in z \Leftrightarrow u \in x) \wedge x \in y)]_Y \\
&\qquad \leqslant [(\exists\, x)(z = x \wedge x \in y)]_Y \leqslant [z \in y]_Y = \in_X(z,y);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\in_X(P,Q) \wedge =_X(P,z) = [P{\uparrow_Y} \in Q{\uparrow_Y} \wedge P{\uparrow_Y} = z]_Y \\
&\qquad = [(\exists\, x)(P{\uparrow_Y} = x \wedge x \in Q{\uparrow_Y}) \wedge P{\uparrow_Y} = z]_Y \\
&\qquad = [(\exists\, x)((\forall\, y)(y \in P{\uparrow_Y} \Leftrightarrow y \in x) \wedge x \in Q{\uparrow_Y}) \wedge (\forall\, y)(y \in P{\uparrow_Y} \Leftrightarrow y \in z)]_Y \\
&\qquad \leqslant [(\exists\, x)((\forall\, y)(y \in z \Leftrightarrow y \in x) \wedge x \in Q{\uparrow_Y})]_Y \\
&\qquad \leqslant [(\exists\, x)(z = x \wedge x \in Q{\uparrow_Y})]_Y \leqslant [z \in Q{\uparrow_Y}]_Y = \in_X(z,Q);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\in_X(x,y) \wedge =_X(x,P) = [x \in y \wedge x = P{\uparrow_Y}]_Y \\
&\qquad \leqslant [(\exists\, x)(P{\uparrow_Y} = x \wedge x \in y)]_Y = [P{\uparrow_Y} \in y]_Y = \in_X(P,y);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\in_X(x,P) \wedge =_X(x,Q) = [x \in P{\uparrow_Y} \wedge x = Q{\uparrow_Y}]_Y \\
&\qquad \leqslant [(\exists\, x)(Q{\uparrow_Y} = x \wedge x \in P{\uparrow_Y})]_Y = [Q{\uparrow_Y} \in P{\uparrow_Y}]_Y = \in_X(Q,P).
\end{aligned}
$$

Покажем, что система X экстенсиональна. Действительно, если $u, v \in X$ и $[\cdot \in u]_X = [\cdot \in v]_X$, то в каждом из трех случаев

$$u, v \in Y; \quad u \in Y,\ v \in \mathscr{Y}; \quad u, v \in \mathscr{Y}$$

имеем

$$
\begin{aligned}
[u = v]_X &= \left\{
\begin{array}{ll}
[u = v]_Y & = \bigwedge\limits_{z \in Y} [z \in u]_Y \Leftrightarrow_B [z \in v]_Y \\
[u = v{\uparrow_Y}]_Y & = \bigwedge\limits_{z \in Y} [z \in u]_Y \Leftrightarrow_B [z \in v{\uparrow_Y}]_Y \\
[u{\uparrow_Y} = v{\uparrow_Y}]_Y & = \bigwedge\limits_{z \in Y} [z \in u{\uparrow_Y}]_Y \Leftrightarrow_B [z \in v{\uparrow_Y}]_Y
\end{array}
\right\} \\
&= \bigwedge_{z \in Y} [z \in u]_X \Leftrightarrow_B [z \in v]_X = 1_B.
\end{aligned}
$$

10.1(a). Установим транзитивность подсистемы $Y \subset X$, проверив условие 7.2(c). Пусть $u \in X$ и $v \in Y$. Если $u \in Y$, то $[u \in v]_X \leqslant 1_B = [u \in Y{\uparrow_X}]_X$, а если $u \in \mathscr{Y}$, то

$$
\begin{aligned}
[u \in v]_X = [u{\uparrow_Y} \in v]_Y = [(\exists\, y)(u{\uparrow_Y} = y \wedge y \in v)]_Y \\
\leqslant [(\exists\, y)(u{\uparrow_Y} = y)]_Y = \bigvee_{y \in Y} [u{\uparrow_Y} = y]_Y = \bigvee_{y \in Y} [u = y]_X = [u \in Y{\uparrow_X}]_X.
\end{aligned}
$$

В дальнейшем пригодится следующее соотношение в X:

$$P \simeq P{\uparrow}_X \quad \text{для всех } P \in \mathscr{Y}. \tag{20}$$

Пусть $P = \{y_i|_{b_i} : i \in I\} \in \mathscr{Y}$. Покажем, что $[x \in P]_X = [x \in P{\uparrow}_X]_X$ для всех $x \in X$. Действительно, если $y \in Y$, то $[y \in P]_X = [y \in P{\uparrow}_Y]_Y = [y \in P{\uparrow}_X]_X$ (см. пп. 7.1, 7.6), а если $Q \in \mathscr{Y}$, то с учетом леммы 3.16

$$[Q \in P]_X = [Q{\uparrow}_Y \in P{\uparrow}_Y]_Y = \bigvee_{p \in P} [Q{\uparrow}_Y = p]_Y$$

$$= \bigvee_{i \in I} [Q{\uparrow}_Y = y_i]_Y \wedge b_i = \bigvee_{i \in I} [Q = y_i]_X \wedge b_i = [Q \in P{\uparrow}_X]_X.$$

10.1(b). Рассмотрим подмножество $P \subset {}^{\%}Y$ и покажем, что $x \simeq P{\uparrow}_X$ для некоторого элемента $x \in X$.

Пусть $\overline{P} := P{\uparrow}_Y{\Downarrow}_Y \subset {}^{\%}Y$ — насыщенная оболочка P в системе Y (см. п. 4.4). Поскольку $P \subset \overline{P} \subset P{\uparrow}_X{\Downarrow}_X$, имеем $P{\uparrow}_X \leqslant \overline{P}{\uparrow}_X \leqslant P{\uparrow}_X{\Downarrow}_X{\uparrow}_X$ и, следовательно, $P{\uparrow}_X = \overline{P}{\uparrow}_X$ в силу равенства $P{\uparrow}_X{\Downarrow}_X{\uparrow}_X = P{\uparrow}_X$ (см. лемму 4.3). Если $y \simeq \overline{P}{\uparrow}_Y$ в Y для некоторого элемента $y \in Y$, то $y \simeq \overline{P}{\uparrow}_X$ в X согласно 7.3, а значит, $x := y \simeq \overline{P}{\uparrow}_X = P{\uparrow}_X$. Если же $\neg(\exists\, y \in Y)(y \simeq \overline{P}{\uparrow}_Y)$, то $\overline{P} \in \mathscr{Y}$ и в этом случае $x := \overline{P} \simeq \overline{P}{\uparrow}_X = P{\uparrow}_X$ благодаря (20).

Утверждение 10.1(c) является прямым следствием (20).

10.1(d). Пусть $y \in Y$ и $P \in \mathscr{Y}$. По определению $\mathscr{Y}$ имеем $y \not\simeq P{\uparrow}_Y$ в Y, откуда согласно 7.3 следует, что $y \not\simeq P{\uparrow}_X$ в X, а значит, $y \not\simeq P$ в силу (20).

Пусть теперь $P, Q \in \mathscr{Y}$ и $P \simeq Q$. Из (20) вытекает равенство $P{\uparrow}_X = Q{\uparrow}_X$. Тогда $P{\uparrow}_Y = (P{\uparrow}_X)|_Y = (Q{\uparrow}_X)|_Y = P{\uparrow}_Y$, а поскольку P и Q — насыщенные подмножества ${}^{\%}Y$, согласно лемме 4.2 имеем $P = P{\uparrow}_Y{\Downarrow}_Y = Q{\uparrow}_Y{\Downarrow}_Y = Q$. ▷

10.3. Лемма. (a) *Если B-система X является надстройкой над подсистемой $Y \subset X$, $f\colon X \leftrightarrow_B X$ и $f|_Y = \mathrm{id}_Y$, то $f = \mathrm{id}_X$.*

(b) *Если B-системы X и X' являются надстройками над подсистемами $Y \subset X$ и $Y' \subset X'$, то любой изоморфизм $f\colon Y \leftrightarrow_B Y'$ продолжается до единственного изоморфизма $\bar{f}\colon X \leftrightarrow_B X'$. В частности, надстройка над копией булевозначной системы единственна с точностью до изоморфизма.*

◁ (a) Предварительно заметим, что из экстенсиональности системы X и условия 10.1(c) вытекает следующее соотношение:

$$(\forall\, x_1, x_2 \in X \backslash Y) \;\; [x_1 = x_2]_X = \bigwedge_{y \in Y} [y \in x_1 \Leftrightarrow y \in x_2]_X. \tag{21}$$

Действительно, для любого элемента $x \in X \backslash Y$ имеется подмножество $P \subset {}^{\%}Y$ такое, что $X \vDash (x = P{\uparrow}_X)$, откуда с учетом истинности $X \vDash (P{\uparrow}_X \subset Y{\uparrow}_X)$ (см. лемму 3.17(b)) вытекает $X \vDash (x \subset Y{\uparrow}_X)$. Следовательно,

$$X \vDash (x_1 = x_2 \Leftrightarrow (\forall\, y \in Y{\uparrow}_X)(y \in x_1 \Leftrightarrow y \in x_2))$$

для всех $x_1, x_2 \in X \backslash Y$. Остается сослаться на лемму 3.18.

Пусть X, Y и f удовлетворяют условиям, перечисленным в (a). Рассмотрим произвольный элемент $x \in X \backslash Y$ и покажем, что $f(x) = x$. Учитывая (21) и равенства $f(y) = y$ для $y \in Y$, заключаем:

$$[f(x) = x]_X = \bigwedge_{y \in Y} [y \in f(x) \Leftrightarrow y \in x]_X$$

$$= \bigwedge_{y \in Y} [f(y) \in f(x)]_X \Leftrightarrow_B [y \in x]_X = \bigwedge_{y \in Y} [y \in x]_X \Leftrightarrow_B [y \in x]_X = 1_B.$$

Таким образом, $f(x) \simeq x$, откуда в силу 10.1(d) вытекает равенство $f(x) = x$, поскольку $x \notin Y$.

(b) Единственность продолжения $\bar{f}$ следует из (a). Покажем существование. Рассмотрим произвольные экстенсиональные B-системы X и X', являющиеся надстройками над подсистемами $Y \subset X$ и $Y' \subset X'$, и изоморфизм $f\colon Y \leftrightarrow_B Y'$. Согласно 10.1(c) существует семейство подмножеств $P_x \subset {}^{\%}Y$ таких, что $x \simeq P_x{\upharpoonleft}_X$ для всех $x \in X \backslash Y$. Для $x \in X \backslash Y$ положим $P'_x := f^{\%}(P_x) \subset {}^{\%}Y'$ (см. п. 3.15). В силу 10.1(b) имеется функция $g\colon X \backslash Y \to X'$, удовлетворяющая соотношению $g(x) \simeq P'_x{\upharpoonleft}_{X'}$ для всех $x \in X \backslash Y$. Определим $\bar{f}\colon X \to X'$, полагая

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in Y, \\ g(x), & \text{если } x \in X \backslash Y, \end{cases}$$

и покажем, что $\bar{f}\colon X \leftrightarrow_B X'$. Ради удобства введем обозначение $x' := \bar{f}(x) \in X'$ для $x \in X$. Таким образом, $f\colon y \mapsto y'$ — изоморфизм Y на Y', и для всех $x \in X \backslash Y$

$$\begin{aligned} &P_x \subset {}^{\%}Y, \quad P'_x = f^{\%}(P_x) \subset {}^{\%}Y', \\ &x \simeq P_x{\upharpoonleft}_X, \quad x' \simeq P'_x{\upharpoonleft}_{X'}. \end{aligned}$$

Покажем, что функция $\bar{f}$ сохраняет истинность атомарных формул. Пусть $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ — любая из (ограниченных) формул $x_1 = x_2$, $x_1 \in x_2$, $x_1 = y_1$, $x_1 \in y_1$, $y_1 \in x_1$, $y_1 = y_2$, $y_1 \in y_2$. Тогда согласно лемме 3.15 и теореме 7.6 для всех $x_1, x_2 \in X \backslash Y$ и $y_1, y_2 \in Y$ имеем

$$\begin{aligned} &[\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)]_X = [\varphi(P_{x_1}{\upharpoonleft}_X, P_{x_2}{\upharpoonleft}_X, y_1, y_2)]_X \\ &= [\varphi(P_{x_1}{\upharpoonleft}_Y, P_{x_2}{\upharpoonleft}_Y, y_1, y_2)]_Y = [\varphi(P'_{x_1}{\upharpoonleft}_{Y'}, P'_{x_2}{\upharpoonleft}_{Y'}, y'_1, y'_2)]_{Y'} \\ &= [\varphi(P'_{x_1}{\upharpoonleft}_{X'}, P'_{x_2}{\upharpoonleft}_{X'}, y'_1, y'_2)]_{X'} = [\varphi(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2)]_{X'}. \end{aligned} \tag{22}$$

Покажем, что функция $\bar{f}\colon X \to X'$ инъективна. Инъективность $\bar{f}$ на Y обеспечивается инъективностью изоморфизма $f\colon Y \to Y'$. Если же хотя бы один из элементов $x_1, x_2 \in X$ не принадлежит Y, то с учетом равенства $[x_1 = x_2]_X = [x'_1 = x'_2]_{X'}$ (см. (22)) из $x'_1 = x'_2$ следует $x_1 \simeq x_2$ и тогда $x_1 = x_2$ согласно 10.1(d).

Наконец, установим сюръективность функции $\bar{f}\colon X \to X'$. Рассмотрим произвольный элемент $z \in X'$ и покажем, что $z = x'$ для некоторого $x \in X$. Если $z \in Y'$, то нужный элемент $x \in X$ существует благодаря сюръективности изоморфизма $f\colon Y \to Y'$. Пусть $z \in X' \backslash Y'$. Согласно 10.1(c) имеется подмножество $P' \subset {}^{\%}Y'$, для которого $z \simeq P'{\upharpoonleft}_{X'}$. Положим $P := (f^{\%})^{-1}(P') \subset Y$. В силу 10.1(b) существует элемент $x \in X$, удовлетворяющий соотношению $x \simeq P{\upharpoonleft}_X$. Если $x \in Y$, то с учетом 7.3 и леммы 3.15 имеют место импликации

$$x \simeq P{\upharpoonleft}_X \Rightarrow x \simeq P{\upharpoonleft}_Y \Rightarrow x' \simeq P'{\upharpoonleft}_{Y'} \Rightarrow x' \simeq P'{\upharpoonleft}_{X'} \Rightarrow x' \simeq z,$$

приводящие к противоречию с условием 10.1(d). Следовательно, $x \notin Y$ и тогда благодаря 7.3 и лемме 3.15

$$\begin{aligned} x \simeq P{\upharpoonleft}_X \ &\Rightarrow\ P_x{\upharpoonleft}_X = P{\upharpoonleft}_X \ \Rightarrow\ P_x{\upharpoonleft}_Y = P{\upharpoonleft}_Y \\ &\Rightarrow\ P'_x{\upharpoonleft}_{Y'} = P'{\upharpoonleft}_{Y'} \ \Rightarrow\ P'_x{\upharpoonleft}_{X'} = P'{\upharpoonleft}_{X'} \ \Rightarrow\ x' \simeq z, \end{aligned}$$

откуда согласно 10.1(d) вытекает равенство $x' = z$. ▷

10.4. Семейство экстенсиональных B-систем $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Ord}^\bullet}$ назовем *интенсиональной иерархией* или, точнее, *B-значной интенсиональной иерархией над* X_0, если

$$X_{\alpha+1} \text{ — надстройка над } X_\alpha, \quad \alpha \in \mathrm{Ord};$$
$$X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta, \quad \alpha \in \mathrm{Lim}\,\mathrm{Ord}^\bullet.$$

При этом $X_\beta \preccurlyeq X_\alpha$ для любых $\beta \leqslant \alpha \in \mathrm{Ord}^\bullet$ (см. лемму 7.10(e)).

10.5. Лемма. *Для любой экстенсиональной B-системы Y существует интенсиональная иерархия $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Ord}^\bullet}$ такая, что $X_0 \leftrightarrow_B Y$.*

$\lhd$ Требуемую иерархию несложно построить на основе лемм 7.10 и 10.2 с помощью конструкции индуктивного предела (см., например, [8, III.1.11]). Действительно, определим семейство B-систем Y_α ($\alpha \in \mathrm{Ord}^\bullet$) и изоморфных вложений $f^\alpha_\beta\colon Y_\beta \to Y_\alpha$ ($\beta \leqslant \alpha \in \mathrm{Ord}^\bullet$), удовлетворяющих соотношениям $f^\alpha_\alpha = \mathrm{id}_{Y_\alpha}$ и $f^\alpha_\gamma = f^\alpha_\beta \circ f^\beta_\gamma$ ($\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha \in \mathrm{Ord}^\bullet$), посредством следующей рекурсивной процедуры:

$Y_0 := Y$, $f^0_0 := \mathrm{id}_{Y_0}$;
для $\alpha \in \mathrm{Ord}$
  $Y_{\alpha+1}$ — надстройка над копией B-системы Y_α (см. пп. 10.1, 10.2),
  $f^{\alpha+1}_\alpha$ — соответствующий изоморфизм Y_α на подсистему $Y_{\alpha+1}$,
  $f^{\alpha+1}_{\alpha+1} := \mathrm{id}_{Y_{\alpha+1}}$, $f^{\alpha+1}_\beta := f^{\alpha+1}_\alpha \circ f^\alpha_\beta$ для $\beta < \alpha+1$;
для $\alpha \in \mathrm{Lim}\,\mathrm{Ord}^\bullet$
  $Y_\alpha := \big(\bigcup_{\beta<\alpha} \{\beta\}\times Y_\beta\big)/\!\sim$,
  где для $\beta,\gamma < \alpha$, $\mu := \max\{\beta,\gamma\}$, $x \in Y_\beta$, $y \in Y_\gamma$
    $(\beta,x) \sim (\gamma,y) \ \Leftrightarrow\ f^\mu_\beta(x) = f^\mu_\gamma(y)$,
    $=_{Y_\alpha}(\sim(\beta,x),\sim(\gamma,y)) \ :=\ =_{Y_\mu}\big(f^\mu_\beta(x), f^\mu_\gamma(y)\big)$,
    $\in_{Y_\alpha}(\sim(\beta,x),\sim(\gamma,y)) \ :=\ \in_{Y_\mu}\big(f^\mu_\beta(x), f^\mu_\gamma(y)\big)$,
  $f^\alpha_\alpha := \mathrm{id}_{Y_\alpha}$, $f^\alpha_\beta(x) := \sim(\beta,x)$ для $\beta<\alpha$, $x\in Y_\beta$.

Из 7.3, 7.10 и 10.1 следует, что семейство B-систем $X_\alpha := f^\infty_\alpha(Y_\alpha)$ ($\alpha \in \mathrm{Ord}^\bullet$) является искомой интенсиональной иерархией. $\rhd$

10.6. Лемма. *Пусть $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Ord}^\bullet}$ и $(Y_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Ord}^\bullet}$ — B-значные интенсиональные иерархии.*

(a) *Если $f\colon X_\infty \leftrightarrow_B Y_\infty$ и $f|_{X_0}\colon X_0 \leftrightarrow_B Y_0$, то $f|_{X_\alpha}\colon X_\alpha \leftrightarrow_B Y_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathrm{Ord}^\bullet$.*

(b) *Если $f,g\colon X_\infty \leftrightarrow_B Y_\infty$ и $f|_{X_0} = g|_{X_0}$, то $f|_{X_\alpha} = g|_{X_\alpha}$ для всех $\alpha\in\mathrm{Ord}^\bullet$.*

(c) *Любой изоморфизм $f_0\colon X_0 \leftrightarrow_B Y_0$ продолжается до единственного изоморфизма $f\colon X_\infty \leftrightarrow_B Y_\infty$.*

$\lhd$ (a), (b) При использовании индукции по $\alpha \in \mathrm{Ord}^\bullet$ базовый и предельный шаги тривиальны, а шаг $\alpha \mapsto \alpha+1$ легко обосновать для утверждения (a) с помощью леммы 3.15 и 10.1(b),(c), а для утверждения (b) — с помощью (a) и леммы 10.3(a).

(c) Трансфинитной рекурсией на основе леммы 10.3(b) легко построить такое семейство изоморфизмов $f_\alpha\colon X_\alpha \leftrightarrow_B Y_\alpha$ ($\alpha\in\mathrm{Ord}^\bullet$), что $f_\alpha \subset f_\beta$ при $\alpha \leqslant \beta$. Тогда $f := f_\infty$ — искомый изоморфизм. Единственность продолжения вытекает из (b). $\rhd$

10.7. Будем говорить, что B-система X является *булевозначным* (B*-значным*) *универсумом над* X_0, если выполняются следующие условия:

(a) $X_0 \preccurlyeq X$;

(b) X экстенсиональна;

(c) X интенсиональна;

(d) элементы $X \backslash X_0$ предикативны;

(e) X отделима над X_0;

(f) X регулярна вне X_0.

Согласно следствию 6.9 из условий (b) и (c) вытекает цикличность класса $\mathscr{P}_X(X)$ всех предикативных элементов X, откуда с учетом (d) следует, что разность $X \backslash X_0$ является предцикличной, а значит, по теореме 9.9(b) условие (f) равносильно σ-регулярности X вне X_0.

Как легко видеть, булевозначный универсум X над X_0 является булевозначным универсумом над любой подсистемой Y, удовлетворяющей соотношениям $X_0 \subset Y \preccurlyeq X$.

10.8. Теорема. (a) *Если* $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Ord}^\bullet}$ *— интенсиональная иерархия, то* X_∞ *— булевозначный универсум над* X_0.

(b) *Если* X *— булевозначный универсум над* X_0*, то существует единственная интенсиональная иерархия* $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Ord}^\bullet}$ *такая, что* $X = X_\infty$. *При этом*

$$X_{\alpha+1} = X_\alpha \cup \mathscr{P}_X(X_\alpha), \quad \alpha \in \mathrm{Ord};$$
$$X_\alpha = \bigcup_{\alpha<\beta} X_\beta, \qquad \alpha \in \mathrm{Lim}\,\mathrm{Ord}^\bullet. \tag{23}$$

$\lhd$ (a) Проверим условия 10.7(a)–(f) для $X = X_\infty$.

10.7(a). В силу леммы 7.10(e) система X_0, как и каждая из систем X_α, является транзитивной подсистемой X_∞. Отметим, что по этой причине выполнение соотношения $x \simeq P{\uparrow}$ в любой из систем X_α равносильно его выполнению в X_∞ (см. п. 7.3).

Условие 10.7(b) входит в определение интенсиональной иерархии.

10.7(c). Пусть P — подмножество ${}^{\%}X_\infty = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Ord}} {}^{\%}X_\alpha$. Выбирая для каждого элемента $p \in P$ ординал $\alpha(p)$, удовлетворяющий условию $p \in {}^{\%}X_{\alpha(p)}$, заключаем, что $P \subset {}^{\%}X_\alpha$, где $\alpha := \vee\{\alpha(p) : p \in P\}$, а значит, $P{\uparrow} \simeq x$ для некоторого $x \in X_{\alpha+1}$ согласно 10.1(b).

10.7(d). Если $x \in X_\infty \backslash X_0$, то $x \in X_{\alpha+1}$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{Ord}$ и поэтому $(\exists\, P \subset {}^{\%}X_\alpha)(x \simeq P{\uparrow})$ согласно 10.1(c).

10.7(e). Пусть $x, y \in X_\infty$, $x \simeq y$ и $x \neq y$. Положим $\alpha := \min\{\beta \in \mathrm{Ord} : x, y \in X_\beta\}$ и покажем, что $\alpha = 0$. Действительно, ординал α не может быть предельным, поскольку в этом случае $X_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} X_\beta$ и тогда имеется ординал $\beta < \alpha$, для которого $x, y \in X_\beta$. Если же $\alpha = \beta + 1$, то $x, y \in X_\beta$ в силу 10.1(d).

10.7(f). Докажем, что все системы X_α (включая X_∞) регулярны вне X_0, применив индукцию по $\alpha \in \mathrm{Ord}^\bullet$.

Случай $\alpha = 0$ тривиален: система X_0, очевидно, регулярна вне X_0.

Пусть система X_α регулярна вне X_0. Согласно лемме 9.5 для доказательства регулярности $X_{\alpha+1}$ вне X_0 достаточно показать регулярность $X_{\alpha+1}$ вне X_α. Из 10.1(c) с учетом леммы 3.17(b) следует, что

$$X_{\alpha+1} \vDash (\forall\, y)(y \in X_\alpha{\uparrow} \;\vee\; y \subset X_\alpha{\uparrow}). \tag{24}$$

Рассмотрим произвольный булевозначный класс $\Phi \Subset X_{\alpha+1}$ и установим истинность

$$X_{\alpha+1} \vDash (\Phi \cap X_\alpha{\uparrow} = \varnothing \ \wedge\ \Phi \neq \varnothing \ \Rightarrow\ (\exists\, y \in \Phi)(y \cap \Phi = \varnothing))$$

путем «рассуждений внутри $X_{\alpha+1}$» (см. п. 3.10). Пусть $\Phi \cap X_\alpha{\uparrow} = \varnothing$ и $\Phi \neq \varnothing$. Возьмем любой элемент $y \in \Phi$ и покажем, что $y \cap \Phi = \varnothing$. Действительно, из $\Phi \cap X_\alpha{\uparrow} = \varnothing$ следует $y \notin X_\alpha{\uparrow}$, а значит, $y \subset X_\alpha{\uparrow}$ согласно (24) и поэтому $y \cap \Phi \subset X_\alpha{\uparrow} \cap \Phi = \varnothing$.

Пусть теперь $\alpha \in \operatorname{Lim}\operatorname{Ord}^\bullet$, и пусть системы X_β регулярны вне X_0 для всех $\beta < \alpha$. Согласно лемме 8.4 для доказательства регулярности X_α вне X_0 достаточно рассмотреть булевозначный класс $\Phi \Subset X_\alpha$, удовлетворяющий неравенству $\Phi \leqslant \neg(X_0{\uparrow}_{X_\alpha})$, и показать $X_\alpha \vDash \mu(\Phi)$ или, что равносильно,

$$(\forall\, x \in X_\alpha)\ X_\alpha \vDash (x \in \Phi \Rightarrow (\exists\, y \in \Phi)(y \cap \Phi = \varnothing)).$$

Если $x \in X_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} X_\beta$, то $x \in X_\beta$ для некоторого ординала $\beta < \alpha$. Установим истинность

$$X_\alpha \vDash (x \in \Phi \Rightarrow (\exists\, y \in \Phi)(y \cap \Phi = \varnothing))$$

путем «рассуждений внутри X_α». Опираясь на соотношения $\Phi \cap X_0{\uparrow} = \varnothing$, $x \in X_\beta{\uparrow}$ и $x \in \Phi$, покажем, что $(\exists\, y \in \Phi)(y \cap \Phi = \varnothing)$. Поскольку класс $X_\beta{\uparrow} \setminus X_0{\uparrow}$ регулярен (см. лемму 9.4) и $\varnothing \neq \Phi \cap X_\beta{\uparrow} \subset X_\beta{\uparrow} \setminus X_0{\uparrow}$, имеется такой элемент $y \in \Phi \cap X_\beta{\uparrow}$, что $y \cap \Phi \cap X_\beta{\uparrow} = \varnothing$. В силу транзитивности $X_\beta{\uparrow}$ из $y \in X_\beta{\uparrow}$ следует $y \subset X_\beta{\uparrow}$. Таким образом, $y \cap \Phi = y \cap \Phi \cap X_\beta{\uparrow} = \varnothing$.

(b) Рассмотрим семейство подсистем $X_\alpha \subset X$ ($\alpha \in \operatorname{Ord}^\bullet$), построенное с помощью трансфинитной рекурсии согласно (23), начиная с данной подсистемы $X_0 \subset X$.

Индукцией по $\alpha \in \operatorname{Ord}^\bullet$ покажем, что $X_\alpha \preccurlyeq X$. Случай $\alpha = 0$ содержится в условии 10.7(a). Предположим, что $X_\alpha \preccurlyeq X$, рассмотрим произвольные элементы $x \in X$, $y \in X_{\alpha+1}$ и установим неравенство $[x \in y] \leqslant [x \in X_{\alpha+1}{\uparrow}]$. Если $y \in X_\alpha$, то $[x \in y] \leqslant [x \in X_\alpha{\uparrow}] \leqslant [x \in X_{\alpha+1}{\uparrow}]$, а если $y \in \mathscr{P}_X(X_\alpha)$, то $y \simeq P{\uparrow}$, $P \subset {}^{\%}X_\alpha$, и тогда с учетом леммы 3.17(b) имеем $[x \in y] = [x \in P{\uparrow}] \leqslant [x \in X_\alpha{\uparrow}] \leqslant [x \in X_{\alpha+1}{\uparrow}]$. Если же $\alpha \in \operatorname{Lim}\operatorname{Ord}^\bullet$ и $X_\beta \preccurlyeq X$ для всех $\beta < \alpha$, то $X_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} X_\beta \preccurlyeq X$ в силу леммы 7.10(c).

Согласно лемме 7.10(a) из доказанного выше следует $X_\alpha \preccurlyeq X_{\alpha+1}$ для всех $\alpha \in \operatorname{Ord}$, что соответствует условию 10.1(a) в определении надстройки. Условия 10.1(b),(c) обеспечиваются определением $X_{\alpha+1}$, а 10.1(d) вытекает из 10.7(e). Таким образом, семейство $(X_\alpha)_{\alpha\in\operatorname{Ord}^\bullet}$ является интенсиональной иерархией.

Для доказательства равенства $X = X_\infty$ потребуется несколько вспомогательных фактов. Покажем, что

$$(\forall\, x \in X)(\exists\, y \in X_\infty)\ [x = y] = [x \subset X_\infty{\uparrow}]. \tag{25}$$

В случае $x \in X_0$ утверждение (25) очевидно. Пусть $x \notin X_0$. В силу 10.7(d) элемент $x \in X$ предикативен, а значит, по лемме 4.10 имеется такое множество $P \subset {}^{\%}X_\infty$, что $[x \subset X_\infty{\uparrow}] = [x = P{\uparrow}]$. Согласно (a) система X_∞ удовлетворяет условию 10.7(c), поэтому булевозначный класс $P{\uparrow}$ реализуется некоторым элементом $y \in X_\infty$, который является искомым.

Покажем также, что

$$(\forall\, x \in X)\ [x \in X_\infty\!\uparrow] = [x \subset X_\infty\!\uparrow]. \tag{26}$$

Неравенство «$\leqslant$» обеспечивается транзитивностью подсистемы $X_\infty \subset X$. С другой стороны, согласно (25) для всякого $x \in X$ имеется элемент $y \in X_\infty$, удовлетворяющий равенству $[x = y] = [x \subset X_\infty\!\uparrow]$, и, следовательно,

$$[x \subset X_\infty\!\uparrow] = [x = y] \wedge [y \in X_\infty\!\uparrow] \leqslant [x \in X_\infty\!\uparrow].$$

Переходя к доказательству равенства $X = X_\infty$ от противного, допустим, что существует элемент $x \in X$, не принадлежащий X_∞. Положим $b := [x \notin X_\infty\!\uparrow] = [x \not\subset X_\infty\!\uparrow]$ (см. (26)). Заметим, что $b \neq 0_B$. Действительно, если $b = 0_B$, то $X \vDash (x \subset X_\infty\!\uparrow)$ и тогда благодаря (25) найдется такой элемент $y \in X_\infty$, что $[x = y] = [x \subset X_\infty\!\uparrow] = 1_B$, т. е. $x \simeq y$, откуда с учетом 10.7(e) следует $x = y$ и тем самым $x \in X_\infty$. Пусть $\Phi := \neg(X_\infty\!\uparrow)$ — дополнение $X_\infty\!\uparrow$ в X. Поскольку система X регулярна вне X_0 (см. п. 10.7(f)), из $\Phi \leqslant \neg(X_0\!\uparrow)$ и $[\Phi \neq \varnothing] \geqslant b$ следует $[(\exists\, y \in \Phi)(y \cap \Phi = \varnothing)] \geqslant b$, поэтому $[y \in \Phi \wedge y \cap \Phi = \varnothing] \neq 0_B$ для некоторого элемента $y \in X$. С другой стороны, согласно (26)

$$[y \in \Phi\ \wedge\ y \cap \Phi = \varnothing] = [y \notin X_\infty\!\uparrow\ \wedge\ y \subset X_\infty\!\uparrow] = 0_B.$$

Единственность упомянутой в (b) интенсиональной иерархии вытекает из леммы 10.6(a). Действительно, если $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Ord}^\bullet}$ и $(Y_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Ord}^\bullet}$ — такие интенсиональные иерархии, что $X_0 = Y_0$ и $X_\infty = Y_\infty$, то для всех $\alpha \in \mathrm{Ord}^\bullet$ справедливо соотношение $(\mathrm{id}_{X_\infty})|_{X_\alpha} : X_\alpha \leftrightarrow_B Y_\alpha$, т. е. $X_\alpha = Y_\alpha$. ▷

10.9. Приведенное ниже утверждение вытекает из лемм 10.5, 10.6(c) и теоремы 10.8.

Теорема. (a) *Для любой экстенсиональной B-системы Y существует единственный с точностью до изоморфизма B-значный универсум X над X_0 такой, что $X_0 \leftrightarrow_B Y$.*

(b) *Если X и Y — B-значные универсумы над X_0 и Y_0 соответственно, то любой изоморфизм $f_0 \colon X_0 \leftrightarrow_B Y_0$ продолжается до единственного изоморфизма $f \colon X \leftrightarrow_B Y$.*

Применяя утверждение (a) к какой-либо экстенсиональной B-системе Y и рассматривая B-значный универсум X над копией X_0 системы Y, условимся отождествлять X_0 с Y и называть X *булевозначным универсумом над Y*.

§ 11. Булевозначный универсум

В данном параграфе формулируются определяющие свойства классического булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ как алгебраической системы, доказывается существование такой системы и ее единственность с точностью до единственного изоморфизма. Эти известные факты (см. [4, 9]) воспроизводятся здесь как прямые следствия установленных в § 10 общих свойств булевозначного универсума над произвольной экстенсиональной системой. К новым результатам можно отнести приведенные ниже примеры булевозначных систем с необычными сочетаниями свойств. Эти примеры показывают, что для любой полной булевой алгебры B ни одно из условий, перечисленных в определении B-значного универсума, не вытекает из остальных.

11.1. Булевозначную систему X называют *булевозначным* (точнее, B-*значным*) *универсумом* (см. [9, 3.4]), если она удовлетворяет следующим условиям:

(a) X экстенсиональна: $X \vDash (\forall\, x, y)((\forall\, z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \;\Rightarrow\; x = y)$;

(b) X интенсиональна: $(\forall\, P \subset {}^{\%}X)(\exists\, x \in X)(x \simeq P{\uparrow})$;

(c) X предикативна: $(\forall\, x \in X)(\exists\, P \subset {}^{\%}X)(x \simeq P{\uparrow})$;

(d) X отделима: $(\forall\, x, y \in X)(X \vDash (x = y) \;\Rightarrow\; x = y)$;

(e) X регулярна: $X \vDash (\boldsymbol{\forall}\, \Phi)((\exists\, y)(y \in \Phi) \Rightarrow (\exists\, y \in \Phi)(\forall\, z \in \Phi)(z \notin y))$.

Отметим, что в силу (b) и (c) регулярность (e) системы X равносильна истинности в X аксиомы регулярности (см. п. 9.1).

11.2. Лемма. *Пусть Y — произвольная экстенсиональная B-система. Если B-система X является булевозначным универсумом над Y, то*

(a) *X экстенсиональна;*

(b) *X интенсиональна;*

(c) *X предикативна тогда и только тогда, когда Y предикативна;*

(d) *X отделима тогда и только тогда, когда Y отделима;*

(e) *X регулярна тогда и только тогда, когда Y регулярна.*

$\triangleleft$ Утверждения (a) и (b) явно входят в определение 10.7; (c) следует из 7.3(a) и 10.7(a); (d) обеспечивается условием 10.7(e); (e) вытекает из леммы 9.7, следствия 9.6 и условия 10.7(f). $\triangleright$

11.3. Из леммы 11.2 следует, что понятие B-значного универсума совпадает с понятием булевозначного универсума над предикативной отделимой регулярной B-системой. Простейшей из таких B-систем является одноэлементная регулярная B-система. (Было бы еще проще говорить об универсуме над $\varnothing$, но алгебраическая система не может быть пустой.)

Следствие. *Следующие свойства B-системы X эквивалентны:*

(a) *X является булевозначным универсумом;*

(b) *X является булевозначным универсумом над $\{y\}$, где y — такой элемент X, что $X \vDash (y = \varnothing)$;*

(c) *X является булевозначным универсумом над одноэлементной B-системой $Y = \{y\}$, удовлетворяющей соотношению $Y \vDash (y \notin y)$.*

11.4. Следующее утверждение, приведенное (без доказательства) в [9, 3.4], вытекает из теоремы 10.9 и следствия 11.3.

Теорема[1]**.** (a) *Для любой полной булевой алгебры B существует единственный с точностью до изоморфизма B-значный универсум.*

(b) *Для любых B-значных универсумов X и Y существует единственный изоморфизм $f\colon X \leftrightarrow_B Y$.*

11.5. Булевозначный универсум, характеризуемый с точностью до изоморфизма, обозначают символом $\mathbb{V}^{(B)}$, а соответствующие оценки истинности $[\varphi]_{\mathbb{V}^{(B)}}$ записывают в виде $[\![\varphi]\!]$ (см. [4, 9]). При этом булевозначный универсум является моделью ZFC (см. [4, 4.4]). Точнее говоря, имеются такие определяемые с параметром B классы $\mathbb{V}^{(B)}$, $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$, что

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ZFC},\ B \text{ — полная булева алгебра} \vdash \\
&\qquad (\mathbb{V}^{(B)}, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!]) \text{ — } B\text{-значный универсум}, \\
&\qquad (\mathbb{V}^{(B)}, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!]) \vDash \mathrm{ZFC}.
\end{aligned}
$$

---

[1] Автор признателен профессору Роберту М. Соловею за плодотворное обсуждение схемы доказательства этой теоремы.

Приведенные ниже примеры 11.6–11.10 показывают, что для любой полной булевой алгебры B каждое из пяти условий (a)–(e), перечисленных в определении 11.1 булевозначного универсума, существенно, т. е. не вытекает из четырех остальных. Основными инструментами здесь служат теорема 10.9(a) и лемма 11.2.

11.6. Пример. Для любой полной булевой алгебры B существует B-значная система, которая является интенсиональной, предикативной, отделимой и регулярной, но не экстенсиональной.

$\triangleleft$ Расширим ZFC определениями констант $2_1 := \{\{\varnothing\}\}$ и $2_2 := \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Рассмотрим булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ и элементы $\varnothing^\wedge, \{\varnothing\}^\wedge, 2_1^\wedge, 2_2^\wedge \in \mathbb{V}^{(B)}$, реализующие подъемы $\varnothing\uparrow$, $\{\varnothing^\wedge\}\uparrow$, $\{\{\varnothing\}^\wedge\}\uparrow$ и $\{\varnothing^\wedge, \{\varnothing\}^\wedge\}\uparrow$ соответственно. Как легко видеть, $\mathbb{V}^{(B)} \vDash (2_1^\wedge = 2_1)$ и $\mathbb{V}^{(B)} \vDash (2_2^\wedge = 2_2)$ (см. п. 2.5).

Покажем, что подсистема

$$X := \{x \in \mathbb{V}^{(B)} : \mathbb{V}^{(B)} \vDash (x \not\subset \{\varnothing\})\} \subset \mathbb{V}^{(B)}$$

обладает заявленными свойствами.

Согласно 2.3(a) из тавтологий $2_1, 2_2 \not\subset \{\varnothing\}$ и $2_1 \neq 2_2$ следует, что $2_1^\wedge, 2_2^\wedge \in X$ и $[2_1^\wedge = 2_2^\wedge]_X = [\![2_1^\wedge = 2_2^\wedge]\!] = 0_B$. С другой стороны, для всех $x \in X$

$$\begin{aligned}[x \in 2_1^\wedge]_X &= [\![x \in 2_1^\wedge]\!] = [\![x \in 2_1 \wedge x \not\subset \{\varnothing\}]\!] = 0_B \\ &= [\![x \in 2_2 \wedge x \not\subset \{\varnothing\}]\!] = [\![x \in 2_2^\wedge]\!] = [x \in 2_2^\wedge]_X.\end{aligned} \tag{27}$$

Таким образом, $X \vDash (2_1^\wedge \neq 2_2^\wedge)$ и $X \vDash (\forall\, x)(x \in 2_1^\wedge \Leftrightarrow x \in 2_2^\wedge)$, а значит, система X не является экстенсиональной.

Чтобы доказать интенсиональность X, для произвольного подмножества $P \subset {}^{\%}X$ рассмотрим элемент $u \in \mathbb{V}^{(B)}$, реализующий подъем $P\uparrow$, положим $x := u|_b \sqcup 2_1^\wedge|_{\neg b}$ (см. п. 5.3), где $b := \bigvee\limits_{p \in P} \operatorname{dom} p$, и покажем, что $x \in X$ и $x \simeq P\uparrow_X$. Согласно лемме 3.18(a) справедливы соотношения

$$\begin{aligned}[\![P\uparrow \not\subset \{\varnothing\}]\!] &= [\![(\exists\, y \in P\uparrow)(y \notin \{\varnothing\})]\!] \\ = \bigvee_{p \in P} [\![p \notin \{\varnothing\}]\!] &\geqslant \bigvee_{p \in P} [\![p \not\subset \{\varnothing\}]\!] = \bigvee_{p \in P} \operatorname{dom} p = b,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$[\![x \not\subset \{\varnothing\}]\!] = ([\![u \not\subset \{\varnothing\}]\!] \wedge b) \vee ([\![2_1 \not\subset \{\varnothing\}]\!] \wedge \neg b) = ([\![P\uparrow \not\subset \{\varnothing\}]\!] \wedge b) \vee \neg b = 1_B,$$

т. е. $x \in X$. Кроме того, для всех $y \in X$ с учетом равенства $[\![y \in 2_1^\wedge]\!] = 0_B$ (см. (27)) имеем

$$\begin{aligned}[y \in x]_X &= [\![y \in x]\!] = ([\![y \in u]\!] \wedge b) \vee ([\![y \in 2_1^\wedge]\!] \wedge \neg b) = [\![y \in P\uparrow]\!] \wedge b \\ &= [\![y \in P\uparrow \wedge P\uparrow \neq \varnothing]\!] = [\![y \in P\uparrow]\!] = P\uparrow(y) = P\uparrow_X(y).\end{aligned}$$

Предикативность и отделимость X непосредственно вытекают из предикативности и отделимости $\mathbb{V}^{(B)}$, поскольку $x\Downarrow_X \subset x\Downarrow_{\mathbb{V}^{(B)}}$ и $[x = y]_X = [\![x = y]\!]$ для всех $x, y \in X$. Регулярность X следует из регулярности $\mathbb{V}^{(B)}$ согласно лемме 9.7. $\triangleright$

11.7. Пример. Для любой полной булевой алгебры B существует B-значная система, которая является экстенсиональной, предикативной, отделимой и регулярной, но не интенсиональной.

$\triangleleft$ Экстенсиональность, предикативность, отделимость и регулярность одноэлементной системы $\{x\}$ с интерпретациями $[x = x] = 1_B$ и $[x \in x] = 0_B$ очевидны. Поскольку $[x \in x] = 0_B \neq 1_B = \{x\}\uparrow(x)$, булевозначный класс $\{x\}\uparrow$ не реализуется (единственным) элементом x, а значит, рассматриваемая система не интенсиональна. $\triangleright$

11.8. Пример. Для любой полной булевой алгебры B существует B-значная система, которая является экстенсиональной, интенсиональной, отделимой и регулярной, но не предикативной.

$\triangleleft$ Пусть Z — экстенсиональная, отделимая, регулярная B-значная система, носитель которой является собственным классом, отличным от класса всех множеств. (В качестве Z можно взять, например, изоморфную копию $\{\varnothing\}\times\mathbb{V}^{(B)}$ булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$.) Рассмотрим произвольное множество ∞, не принадлежащее Z, положим $Y := Z\cup\{\infty\}$ и распространим на Y булевозначные интерпретации Z, полагая $[\infty=\infty]_Y = 1_B$, $[\infty\in\infty]_Y = [z=\infty]_Y = [\infty=z]_Y = [\infty\in z]_Y = 0_B$ и $[z\in\infty]_Y = 1_B$ для всех $z\in Z$. Элементарная проверка показывает, что Y является B-системой.

Чтобы установить экстенсиональность Y, рассмотрим произвольные элементы $x, y\in Y$ и покажем, что $[(\forall z)(z\in x\Leftrightarrow z\in y)]_Y \leqslant [x=y]_Y$. Случай $x, y\in Z$ сводится к экстенсиональности Z, случай $x=y=\infty$ тривиален, а в случае $x\in Z$ и $y=\infty$ требуемое неравенство обеспечивается регулярностью Z, так как из истинности $Z\vDash\mu(\{x\}\!\uparrow)$ следует $Z\vDash(x\notin x)$ и поэтому

$$[(\forall z)(z\in x\Leftrightarrow z\in\infty)]_Y \leqslant [x\in x\Leftrightarrow x\in\infty]_Y = [x\in x]_Z = 0_B = [x=\infty]_Y.$$

Как легко видеть, система Y отделима и $Z\preccurlyeq Y$. Поскольку

$$Y\vDash(\forall\,\Phi)(\Phi\cap Z\!\uparrow=\varnothing\Rightarrow\Phi\subset\{\infty\}),$$

система Y регулярна вне Z. По следствию 9.6 регулярность Z влечет регулярность Y. Система Y не является предикативной, так как насыщенный спуск $\infty\!\Downarrow$ содержит собственный класс $\infty\!\downarrow = Z$.

Из леммы 11.2 следует, что булевозначный универсум над Y удовлетворяет всем требованиям, указанным в условии. $\triangleright$

11.9. Пример. Для любой полной булевой алгебры B существует B-значная система, которая является экстенсиональной, интенсиональной, предикативной и регулярной, но не отделимой.

$\triangleleft$ Согласно лемме 11.2 всеми перечисленными свойствами обладает булевозначный универсум над двухэлементной B-системой Y с интерпретациями $=_Y : Y^2\to\{1_B\}$, $\in_Y : Y^2\to\{0_B\}$. $\triangleright$

11.10. Пример. Для любой полной булевой алгебры B существует B-значная система, которая является экстенсиональной, интенсиональной, предикативной и отделимой, но не регулярной.

$\triangleleft$ Поскольку одноэлементное множество $Y=\{y\}$, снабженное интерпретациями $[y=y]_Y = [y\in y]_Y = 1_B$, является экстенсиональной, предикативной, отделимой и не регулярной B-системой, согласно лемме 11.2 булевозначный универсум над Y обладает заявленными в условии свойствами. $\triangleright$

§ 12. Иерархии в булевозначном универсуме

В этом параграфе предложены описания структуры булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ посредством четырех иерархий, одна из которых воспроизводит интенсиональную иерархию, вторая служит спуском иерархии фон Неймана, а две другие порождаются подъемами специального вида и перемешиваниями.

В соответствии с соглашением 3.20 для всякого подмножества $P\subset{}^{\%}\mathbb{V}^{(B)}$ булевозначный класс $P\!\uparrow\Subset\mathbb{V}^{(B)}$ отождествляется с реализующим его элементом $\mathbb{V}^{(B)}$.

12.1. Иерархия, описанная в следующей теореме, соответствует классической конструкции (неотделимого) булевозначного универсума [4, 4.1.2; 6, (14.15)] и за вычетом нулевого члена совпадает с интенсиональной иерархией (23) над одноэлементной регулярной B-системой.

Теорема. *С помощью трансфинитной рекурсии определим семейство подмножеств $\mathbb{V}^{(B)}_\alpha \subset \mathbb{V}^{(B)}$ ($\alpha \in \mathrm{Ord}$), полагая*

$$\begin{aligned} &\mathbb{V}^{(B)}_0 = \varnothing; \\ &\mathbb{V}^{(B)}_{\alpha+1} = \mathscr{P}_{\mathbb{V}^{(B)}}\bigl(\mathbb{V}^{(B)}_\alpha\bigr), \quad \alpha \in \mathrm{Ord}; \\ &\mathbb{V}^{(B)}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{V}^{(B)}_\beta, \qquad \alpha \in \mathrm{Lim\,Ord}. \end{aligned} \tag{28}$$

Тогда

$$\mathbb{V}^{(B)} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} \mathbb{V}^{(B)}_\alpha. \tag{29}$$

При этом семейство $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Ord}^\bullet}$, определенное по правилу

$$X_\alpha = \begin{cases} \mathbb{V}^{(B)}_{\alpha+1} & \text{для } \alpha < \omega; \\ \mathbb{V}^{(B)}_\alpha & \text{для } \omega \leqslant \alpha < \infty; \\ \mathbb{V}^{(B)} & \text{для } \alpha = \infty, \end{cases}$$

является интенсиональной иерархией над $X_0 = \mathbb{V}^{(B)}_1 = \{\varnothing\!\uparrow\}$. В частности, $\mathbb{V}^{(B)}_\beta$ — транзитивное подмножество $\mathbb{V}^{(B)}_\alpha$ для всех $\beta \leqslant \alpha \in \mathrm{Ord}^\bullet$, где $\mathbb{V}^{(B)}_\infty := \mathbb{V}^{(B)}$.

$\triangleleft$ Индукцией по $\alpha \in \mathrm{Ord}$ покажем, что $\mathbb{V}^{(B)}_\beta \subset \mathbb{V}^{(B)}_\alpha$ при $\beta < \alpha$. Пусть $\mathbb{V}^{(B)}_\gamma \subset \mathbb{V}^{(B)}_\beta$ для всех $\gamma < \beta < \alpha$. Рассмотрим произвольные $\beta < \alpha$ и $x \in \mathbb{V}^{(B)}_\beta$ и покажем, что $x \in \mathbb{V}^{(B)}_\alpha$. Случаи $\alpha = 0$ и $\alpha \in \mathrm{Lim\,Ord}$ тривиальны. Пусть $\alpha = \alpha_0 + 1$. Из определения (28) следует, что $x \in \mathscr{P}_{\mathbb{V}^{(B)}}\bigl(\mathbb{V}^{(B)}_\gamma\bigr)$ для некоторого ординала $\gamma < \beta \leqslant \alpha_0 < \alpha$. По предположению индукции $\mathbb{V}^{(B)}_\gamma \subset \mathbb{V}^{(B)}_{\alpha_0}$, а значит, $x \in \mathscr{P}_{\mathbb{V}^{(B)}}\bigl(\mathbb{V}^{(B)}_\gamma\bigr) \subset \mathscr{P}_{\mathbb{V}^{(B)}}\bigl(\mathbb{V}^{(B)}_{\alpha_0}\bigr) = \mathbb{V}^{(B)}_\alpha$.

Из включений $X_\alpha \subset X_{\alpha+1}$ следует, что $X_{\alpha+1} = X_\alpha \cup \mathscr{P}_{X_\infty}(X_\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Остается воспользоваться теоремой 10.8(b). $\triangleright$

12.2. Следствие [4, 4.1.3]. *Пусть C — произвольный подкласс $\mathbb{V}^{(B)}$. Если $P\!\uparrow \in C$ для всех $P \subset {}^{\%}C$, то $C = \mathbb{V}^{(B)}$.*

$\triangleleft$ Допустим, $C \neq \mathbb{V}^{(B)}$. По теореме 12.1 существует наименьший ординал α, для которого имеется элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}_\alpha \setminus C$. Из (28) видно, что $\alpha \neq 0$ и $\alpha \notin \mathrm{Lim\,Ord}$. С другой стороны, если $\alpha = \beta + 1$, то $x = P\!\uparrow$ для некоторого подмножества $P \subset {}^{\%}\mathbb{V}^{(B)}_\beta$, и тогда из $\mathbb{V}^{(B)}_\beta \subset C$ вытекает $x \in C$. $\triangleright$

12.3. Поскольку булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ является моделью ZFC, в нем истинно утверждение

$$\mathbb{V} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} \mathbb{V}_\alpha$$

о представимости класса всех множеств $\mathbb{V}$ в виде объединения классической кумулятивной иерархии фон Неймана $(\mathbb{V}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Ord}}$ (см. (15)).

Определим *спуск иерархии* $(\mathbb{V}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Ord}}$ из $\mathbb{V}^{(B)}$, сопоставляя каждому ординалу α спуск $\mathscr{V}_\alpha\!\downarrow$ того элемента $\mathscr{V}_\alpha \in \mathbb{V}^{(B)}$, который внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ равен соответствующему члену $\mathbb{V}_{\alpha^\wedge}$ иерархии фон Неймана (см. [4, 4.4.10]):

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathscr{V}_\alpha = \mathbb{V}_{\alpha^\wedge}).$$

Было бы естественно ожидать, что иерархия (28), являющаяся булевозначным аналогом иерархии (15), совпадает со спуском последней: $\big(\mathbb{V}_\alpha^{(B)}\big)_{\alpha\in\mathrm{Ord}} = (\mathscr{V}_\alpha{\downarrow})_{\alpha\in\mathrm{Ord}}$. Тем не менее в случае бесконечной булевой алгебры B это не так, поскольку не все подмножества $\mathbb{V}_\alpha^{(B)} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ цикличны. Действительно, если $(d_n)_{n\in\omega}$ — разбиение единицы, составленное из ненулевых элементов $d_n \in B$, то соединение $\bigsqcup\limits_{n\in\omega} n^\wedge|_{d_n}$ принадлежит $\mathscr{V}_\omega{\downarrow}$, но не принадлежит $\mathbb{V}_\omega^{(B)} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathbb{V}_n^{(B)}$.

Следующее утверждение показывает, что для превращения иерархии (28) в спуск иерархии фон Неймана достаточно добавить перемешивания на предельных шагах.

Теорема. *С помощью трансфинитной рекурсии определим семейство подмножеств* $\mathbb{U}_\alpha^{(B)} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ $(\alpha \in \mathrm{Ord})$, *полагая*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{U}_0^{(B)} = \varnothing;\\
&\mathbb{U}_{\alpha+1}^{(B)} = \mathscr{P}_{\mathbb{V}^{(B)}}\big(\mathbb{U}_\alpha^{(B)}\big), \quad \alpha \in \mathrm{Ord};\\
&\mathbb{U}_\alpha^{(B)} = \mathrm{mix} \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{U}_\beta^{(B)}, \quad \alpha \in \mathrm{Lim\,Ord}.
\end{aligned}$$

Тогда $\big(\mathbb{U}_\alpha^{(B)}\big)_{\alpha\in\mathrm{Ord}}$ *— спуск иерархии фон Неймана* $(\mathbb{V}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Ord}}$ *из* $\mathbb{V}^{(B)}$, *т. е.*

$$\mathbb{U}_\alpha^{(B)} = \mathscr{V}_\alpha{\downarrow} \ \ \text{для всех } \alpha \in \mathrm{Ord},$$

где $\mathscr{V}_\alpha$ *— элементы* $\mathbb{V}^{(B)}$, *удовлетворяющие соотношениям* $\mathbb{V}^{(B)} \vDash (\mathscr{V}_\alpha = \mathbb{V}_{\alpha^\wedge})$.

$\vartriangleleft$ Докажем равенство $\mathbb{U}_\alpha^{(B)} = \mathscr{V}_\alpha{\downarrow}$ индукцией по $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

База индукции $\alpha = 0$ тривиальна: $\mathbb{U}_0^{(B)} = \varnothing = \varnothing{\uparrow}{\downarrow} = \mathscr{V}_0{\downarrow}$.

Если $\mathbb{U}_\alpha^{(B)} = \mathscr{V}_\alpha{\downarrow}$, то, учитывая соотношение

$$\mathbb{V}^{(B)} \vDash \Big(\mathscr{P}\big(\mathbb{U}_\alpha^{(B)}{\uparrow}\big) = \mathscr{P}(\mathscr{V}_\alpha{\downarrow}{\uparrow}) = \mathscr{P}(\mathscr{V}_\alpha) = \mathscr{P}(\mathbb{V}_{\alpha^\wedge}) = \mathbb{V}_{\alpha^\wedge+1} = \mathbb{V}_{(\alpha+1)^\wedge} = \mathscr{V}_{\alpha+1}\Big)$$

и используя лемму 3.17(b),(c) и следствие 6.4, заключаем, что для всех $x \in \mathbb{V}^{(B)}$

$$\begin{aligned}
x \in \mathbb{U}_{\alpha+1}^{(B)} &\Leftrightarrow x \in \mathscr{P}_{\mathbb{V}^{(B)}}\big(\mathbb{U}_\alpha^{(B)}\big) \Leftrightarrow \big(\exists\, P \subset {}^{\%}\mathbb{U}_\alpha^{(B)}\big)(x = P{\uparrow}) \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \vDash \big(x \subset \mathbb{U}_\alpha^{(B)}{\uparrow}\big)\\
&\Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \vDash \Big(x \in \mathscr{P}\big(\mathbb{U}_\alpha^{(B)}{\uparrow}\big)\Big) \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \vDash (x \in \mathscr{V}_{\alpha+1}) \Leftrightarrow x \in \mathscr{V}_{\alpha+1}{\downarrow}.
\end{aligned}$$

Если $\alpha \in \mathrm{Lim\,Ord}$ и $\mathbb{U}_\beta^{(B)} = \mathscr{V}_\beta{\downarrow}$ для всех $\beta < \alpha$, то с учетом равенства $\alpha^\wedge = \{\beta^\wedge : \beta \in \alpha\}{\uparrow}$, леммы 3.18(a), п. 5.10 и следствия 6.4 для всех $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ имеем

$$\begin{aligned}
&x \in \mathbb{U}_\alpha^{(B)} \Leftrightarrow x \in \mathrm{mix} \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{U}_\beta^{(B)} \Leftrightarrow \vee\Big\{[\![x = y]\!] : y \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{U}_\beta^{(B)}\Big\} = 1_B\\
&\Leftrightarrow \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{y\in\mathbb{U}_\beta^{(B)}} [\![x = y]\!] = 1_B \Leftrightarrow \bigvee_{\beta<\alpha} [\![x \in \mathbb{U}_\beta^{(B)}{\uparrow}]\!] = 1_B \Leftrightarrow \bigvee_{\beta<\alpha} [\![x \in \mathscr{V}_\beta{\downarrow}{\uparrow}]\!] = 1_B\\
&\Leftrightarrow \bigvee_{\beta<\alpha} [\![x \in \mathscr{V}_\beta]\!] = 1_B \Leftrightarrow \bigvee_{\beta\in\alpha} [\![x \in \mathbb{V}_{\beta^\wedge}]\!] = 1_B \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \vDash (\exists\, \beta \in \alpha^\wedge)(x \in \mathbb{V}_\beta)\\
&\Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \vDash \Big(x \in \bigcup_{\beta<\alpha^\wedge} \mathbb{V}_\beta\Big) \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \vDash (x \in \mathbb{V}_{\alpha^\wedge}) \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \vDash (x \in \mathscr{V}_\alpha) \Leftrightarrow x \in \mathscr{V}_\alpha{\downarrow}. \ \vartriangleright
\end{aligned}$$

12.4. В построении иерархии (28) задействованы подъемы $P{\uparrow}$ произвольных множеств P частичных элементов:

$$\mathbb{V}_{\alpha+1}^{(B)} = \mathscr{P}_{\mathbb{V}^{(B)}}\big(\mathbb{V}_\alpha^{(B)}\big) = \big\{P{\uparrow} : P \subset {}^{\%}\mathbb{V}_\alpha^{(B)}\big\}.$$

С другой стороны, согласно следствию 5.15(b) всякий элемент булевозначного универсума представляется в виде подъема $(Y|_b)\!\uparrow$ множества $Y|_b$ частичных элементов с одной и той же областью определения b. В этой связи выглядит естественной гипотеза о том, что булевозначный универсум может быть выстроен в иерархию подъемов вида $(Y|_b)\!\uparrow$. Тем не менее приведенный ниже факт опровергает эту гипотезу.

Теорема. *Пусть отделимая экстенсиональная B-система X удовлетворяет принципу подъема. С помощью трансфинитной рекурсии определим семейство подмножеств $Y_\alpha \subset X$ $(\alpha \in \mathrm{Ord})$, полагая*

$$Y_\alpha = \Big\{(Y|_b)\!\uparrow\, : \, Y \subset \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta,\ b \in B\Big\}, \quad \alpha \in \mathrm{Ord}.$$

Если булева алгебра B бесконечна, то $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Ord}} Y_\alpha \neq X$.

◁ Рекурсивно определим последовательность $(y_n)_{n\in\omega} \subset X$, полагая

$$y_0 := \varnothing\!\uparrow, \quad y_{n+1} := \{y_n\}\!\uparrow, \quad n \in \omega.$$

Зафиксируем произвольную антицепь $(d_n)_{n\in\omega}$ ненулевых элементов B и рассмотрим подъемы

$$x_i := \{y_n|_{d_{n+i}} : n \in \omega\}\!\uparrow, \quad i \in \omega. \tag{30}$$

Поскольку $x_i = \big(\bigcup\limits_{n\in\omega} \{y_n\}|_{d_{n+i}}\big)\!\uparrow$ и $\{y_n\}\!\uparrow = y_{n+1}$, согласно лемме 6.8[2)] справедливы соотношения

$$x_i = \operatorname{ext} \bigsqcup_{n\in\omega} y_{n+1}|_{d_{n+i}}, \quad i \in \omega. \tag{31}$$

Для завершения доказательства достаточно установить, что $x_i \notin Y_\alpha$ при всех $\alpha \in \mathrm{Ord}$, $i \in \omega$. Воспользуемся трансфинитной индукцией по α. Рассмотрим $\alpha \in \mathrm{Ord}$, предположим, что $x_i \notin Y_\beta$ для всех $\beta < \alpha$, $i \in \omega$, и допустим, что $x_i \in Y_\alpha$ для некоторого $i \in \omega$. Тогда $x_i = (Y|_b)\!\uparrow$, где $Y \subset \bigcup\limits_{\beta<\alpha} Y_\beta$, $b \in B$. При этом $[\![y \in x_i]\!] = [\![x_i \neq \varnothing]\!] = \bigvee\limits_{n\in\omega} d_{n+i} = b$ для всех $y \in Y$ (см. следствие 5.15(b)). Поскольку $[\![x_i \neq \varnothing]\!] \neq 0_B$, множество Y непусто, а значит, существуют $\beta < \alpha$ и $y \in Y_\beta$ такие, что $[\![y \in x_i]\!] = b$. С учетом (30) имеем

$$\bigvee_{n\in\omega} d_{n+i} = [\![y \in x_i]\!] = \bigvee_{n\in\omega} [\![y = y_n]\!] \wedge d_{n+i},$$

откуда по лемме 5.1(a) следует, что $d_{n+i} = [\![y = y_n]\!] \wedge d_{n+i}$, т. е. $[\![y = y_n]\!] \geqslant d_{n+i}$ для всех $n \in \omega$, а значит, $y|_b = \bigsqcup\limits_{n\in\omega} y_n|_{d_{n+i}}$. Учитывая равенство $y_0 = \varnothing\!\uparrow$ и соотношение (31), заключаем:

$$\operatorname{ext} y|_b = \operatorname{ext} \bigsqcup_{n\in\omega} y_{n+1}|_{d_{(n+1)+i}} = \operatorname{ext} \bigsqcup_{n\in\omega} y_{n+1}|_{d_{n+(i+1)}} = x_{i+1}. \tag{32}$$

Поскольку $y \in Y_\beta$, имеются $Z \subset \bigcup\limits_{\gamma<\beta} Y_\gamma$ и $c \in B$ такие, что $y = (Z|_c)\!\uparrow$. Тогда для всех $x \in X$

$$\begin{aligned}[\![x \in \operatorname{ext} y|_b]\!] &= [\![x \in y|_b]\!] = [\![x \in y]\!] \wedge b = [\![x \in (Z|_c)\!\uparrow]\!] \wedge b \\ &= \bigvee_{z\in Z} [\![x = z|_c]\!] \wedge b = \bigvee_{z\in Z} [\![x = z|_{c\wedge b}]\!] = [\![x \in (Z|_{c\wedge b})\!\uparrow]\!],\end{aligned}$$

откуда с учетом (32) следует, что $x_{i+1} = \operatorname{ext} y|_b = (Z|_{c\wedge b})\!\uparrow \in Y_\beta$ вопреки предположению индукции. ▷

[2)] В формулировке леммы 6.8 в [1] имеется опечатка: вместо $\bigsqcup\limits_{i\in I} x_i$ должно быть $\bigsqcup\limits_{i\in I} x_i|_{d_i}$.

12.5. Лемма. *Если $(Z_i)_{i\in I}$ — семейство подмножеств $\mathbb{V}^{(B)}$, $(d_i)_{i\in I}\subset B$ — разбиение единицы и $(b_i)_{i\in I}\subset B$, то существуют такие $Y\subset \operatorname{mix}\bigcup\limits_{i\in I} Z_i$ и $b\in B$, что*

$$\bigsqcup_{i\in I}(Z_i|_{b_i})\!\uparrow\!\big|_{d_i}=(Y|_b)\!\uparrow.$$

$\triangleleft$ Положим $Z:=\bigcup\limits_{i\in I} Z_i\subset\mathbb{V}^{(B)}$ и $P:=\bigcup\limits_{i\in I} Z_i|_{b_i\wedge d_i}\subset {}^{\%}Z$. Согласно лемме 6.8 имеет место равенство $\bigsqcup\limits_{i\in I}(Z_i|_{b_i})\!\uparrow\!\big|_{d_i}=P\!\uparrow$, а благодаря следствию 5.15(a) существуют $Y\subset\operatorname{mix}Z$ и $b\in B$ такие, что $P\!\uparrow=(Y|_b)\!\uparrow$. $\triangleright$

12.6. Согласно теореме 12.4 для построения булевозначного универсума недостаточно одних только подъемов с постоянной областью определения. Приведенные ниже результаты показывают, что ситуация изменится, если на предельных шагах иерархии добавить перемешивания.

Теорема. *С помощью трансфинитной рекурсии определим семейство подмножеств $Y_\alpha\subset\mathbb{V}^{(B)}$ $(\alpha\in\mathrm{Ord})$, полагая*

$$\begin{aligned}
&Y_0=\varnothing;\\
&Y_{\alpha+1}=\{(Y|_b)\!\uparrow\,:\,Y\subset Y_\alpha,\ b\in B\},\quad &&\alpha\in\mathrm{Ord};\\
&Y_\alpha=\operatorname{mix}\bigcup_{\beta<\alpha}Y_\beta, &&\alpha\in\operatorname{Lim}\mathrm{Ord}.
\end{aligned}\tag{33}$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

(a) $Y_\alpha\subset Y_\beta$ *при* $\alpha\leqslant\beta$;

(b) *множества* Y_α *цикличны для всех* $\alpha\in\mathrm{Ord}$;

(c) $\mathbb{V}^{(B)}_\alpha\subset Y_{\alpha+1}$ *для всех* $\alpha\in\mathrm{Ord}$;

(d) $\mathbb{V}^{(B)}=\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Ord}}Y_\alpha$.

$\triangleleft$ (a) Докажем, что $Y_\alpha\subset Y_\beta$ для всех $\alpha\leqslant\beta$, воспользовавшись индукцией по β. Пусть $\beta\in\mathrm{Ord}$, и пусть

$$Y_{\alpha_1}\subset Y_{\alpha_2}\quad\text{для всех}\quad\alpha_1\leqslant\alpha_2<\beta.\tag{34}$$

Рассмотрим произвольный ординал $\alpha\leqslant\beta$ и установим включение $Y_\alpha\subset Y_\beta$. Это включение очевидно, если $\alpha=0$, $\alpha=\beta$ или $\beta\in\operatorname{Lim}\mathrm{Ord}$. Поэтому будем считать, что $0<\alpha<\beta$ и $\beta=\beta_0+1$ для некоторого $\beta_0\in\mathrm{Ord}$. Зафиксируем произвольный элемент $x\in Y_\alpha$ и покажем, что $x\in Y_\beta$.

Если $\alpha=\alpha_0+1$ для некоторого $\alpha_0\in\mathrm{Ord}$, то $x=(Y|_b)\!\uparrow$, где $Y\subset Y_{\alpha_0}$, $b\in B$. Поскольку $\alpha_0<\beta_0<\beta$, в силу (34) справедливо включение $Y_{\alpha_0}\subset Y_{\beta_0}$, а значит, $Y\subset Y_{\beta_0}$ и, следовательно, $x=(Y|_b)\!\uparrow\in Y_{\beta_0+1}=Y_\beta$.

Пусть теперь $\alpha\in\operatorname{Lim}\mathrm{Ord}$. Тогда $Y_\alpha=\operatorname{mix}\bigcup\limits_{\gamma<\alpha}Y_\gamma$ и поэтому $x=\bigsqcup\limits_{i\in I}x_i|_{d_i}$, где $(d_i)_{i\in I}\subset B$ — разбиение единицы, $x_i\in Y_{\gamma_i}$, $\gamma_i<\alpha$ $(i\in I)$. Поскольку ординал α является предельным, для всех $i\in I$ имеет место неравенство $\gamma_i+1<\alpha$ и, в частности, $\gamma_i<\gamma_i+1<\beta$, откуда благодаря (34) следует, что $Y_{\gamma_i}\subset Y_{\gamma_i+1}$. Таким образом, $x_i\in Y_{\gamma_i+1}$, а значит, $x_i=(Z_i|_{b_i})\!\uparrow$ для некоторых $Z_i\subset Y_{\gamma_i}$, $b_i\in B$ $(i\in I)$ и тем самым $x=\bigsqcup\limits_{i\in I}(Z_i|_{b_i})\!\uparrow\!\big|_{d_i}$. Согласно лемме 12.5 существуют такие $Y\subset\operatorname{mix}\bigcup\limits_{i\in I}Z_i$ и $b\in B$, что $x=(Y|_b)\!\uparrow$. Заметим, что

$$\operatorname{mix}\bigcup_{i\in I}Z_i\subset\operatorname{mix}\bigcup_{i\in I}Y_{\gamma_i}\subset\operatorname{mix}\bigcup_{\gamma<\alpha}Y_\gamma=Y_\alpha$$

и, кроме того, в силу (34) из $\alpha \leqslant \beta_0 < \beta$ вытекает $Y_\alpha \subset Y_{\beta_0}$. Следовательно, $Y \subset Y_{\beta_0}$ и поэтому $x = (Y|_b)\!\uparrow \in Y_{\beta_0+1} = Y_\beta$.

(b) Применяя индукцию, рассмотрим произвольный ординал α, предположим, что $\operatorname{mix} Y_\beta = Y_\beta$ для всех $\beta < \alpha$, и установим равенство $\operatorname{mix} Y_\alpha = Y_\alpha$. В случае $\alpha = 0$ или $\alpha \in \operatorname{Lim}\operatorname{Ord}$ это равенство очевидно. Пусть $\alpha = \beta + 1$ для некоторого $\beta \in \operatorname{Ord}$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \operatorname{mix} Y_\alpha$ и покажем, что $x \in Y_\alpha$. Поскольку $x \in \operatorname{mix} Y_{\beta+1} = \operatorname{mix}\{(Z|_b)\!\uparrow : Z \subset Y_\beta,\ b \in B\}$, имеются разбиение единицы $(d_i)_{i\in I} \subset B$ и семейства $Z_i \subset Y_\beta$, $b_i \in B$ $(i \in I)$ такие, что $x = \bigsqcup\limits_{i\in I} (Z_i|_{b_i})\!\uparrow\big|_{d_i}$. Из леммы 12.5 вытекает представление $x = (Y|_b)\!\uparrow$ для некоторых $Y \subset \operatorname{mix} \bigcup\limits_{i\in I} Z_i$ и $b \in B$. По предположению индукции имеем $\operatorname{mix} \bigcup\limits_{i\in I} Z_i \subset \operatorname{mix} Y_\beta = Y_\beta$, а значит, $Y \subset Y_\beta$ и тем самым $x = (Y|_b)\!\uparrow \in Y_{\beta+1} = Y_\alpha$.

(c) Вновь действуя по индукции, зафиксируем ординал α, предположим, что $\mathbb{V}^{(B)}_\beta \subset Y_{\beta+1}$ для всех $\beta < \alpha$, рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}_\alpha$ и покажем, что $x \in Y_{\alpha+1}$. Из (28) следует, что $x = P\!\uparrow$ для некоторого подмножества $P \subset {}^{\%}\mathbb{V}^{(B)}_\beta$, где $\beta < \alpha$. Согласно следствию 5.15(a) имеются $Y \subset \operatorname{mix} \mathbb{V}^{(B)}_\beta$ и $b \in B$ такие, что $x = (Y|_b)\!\uparrow$. По предположению индукции $\mathbb{V}^{(B)}_\beta \subset Y_{\beta+1}$. Кроме того, из (a) вытекает включение $Y_{\beta+1} \subset Y_\alpha$. Таким образом, $\mathbb{V}^{(B)}_\beta \subset Y_\alpha$, откуда с учетом (b) следует $Y \subset \operatorname{mix} \mathbb{V}^{(B)}_\beta \subset \operatorname{mix} Y_\alpha = Y_\alpha$ и поэтому $x = (Y|_b)\!\uparrow \in Y_{\alpha+1}$.

Равенство (d) вытекает из (c) и (29). $\triangleright$

12.7. Следующее утверждение показывает, что равенство 12.6(d) сохранит силу, если на дискретных шагах иерархии (33) ограничиться подъемами множеств всюду определенных элементов.

Теорема. *С помощью трансфинитной рекурсии определим семейство подмножеств* $Z_\alpha \subset \mathbb{V}^{(B)}$ $(\alpha \in \operatorname{Ord})$, *полагая*

$$
\begin{aligned}
&Z_0 = \varnothing; \\
&Z_{\alpha+1} = \{Z\!\uparrow\ :\ Z \subset Z_\alpha\}, \quad && \alpha \in \operatorname{Ord}; \\
&Z_\alpha = \operatorname{mix} \bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta, && \alpha \in \operatorname{Lim}\operatorname{Ord}.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\mathbb{V}^{(B)} = \bigcup_{\alpha\in\operatorname{Ord}} Z_\alpha.
$$

$\triangleleft$ Определим функцию $\delta\colon \operatorname{Ord} \to \operatorname{Ord}$ следующей рекурсивной формулой:

$$
\delta(\alpha) = \vee\{\delta(\beta) : \beta < \alpha\} + \omega, \quad \alpha \in \operatorname{Ord}.
$$

Благодаря теореме 12.6(d) достаточно доказать, что

$$
(\forall\, \alpha \in \operatorname{Ord})(Y_\alpha \subset Z_{\delta(\alpha)}),
$$

где Y_α определены в (33). Используя индукцию по $\alpha \in \operatorname{Ord}$, предположим, что $Y_\beta \subset Z_{\delta(\beta)}$ для всех $\beta < \alpha$, и установим включение $Y_\alpha \subset Z_{\delta(\alpha)}$.

Пусть $\alpha = \beta + 1$. Из очевидной монотонности функции δ следует, что

$$
\delta(\alpha) = \vee\{\delta(\gamma) : \gamma < \alpha\} + \omega = \vee\{\delta(\gamma) : \gamma \leqslant \beta\} + \omega = \delta(\beta) + \omega.
$$

Рассмотрим произвольный элемент $x \in Y_\alpha = Y_{\beta+1}$. Согласно (33) имеются $Y \subset Y_\beta$ и $b \in B$ такие, что $x = (Y|_b)\!\uparrow$. Тогда для всех $z \in \mathbb{V}^{(B)}$

$$
\begin{aligned}
[\![z \in x]\!] &= [\![z \in (Y|_b)\!\uparrow]\!] = \bigvee_{y \in Y} [\![z = y|_b]\!] = \bigvee_{y\in Y} [\![z = y]\!] \wedge b = [\![z \in Y\!\uparrow]\!] \wedge b \\
&= [\![z \in (Y\!\uparrow)|_b]\!] = [\![z \in (Y\!\uparrow)|_b]\!] \vee 0_B = [\![z \in (Y\!\uparrow)|_b]\!] \vee [\![z \in (\varnothing\!\uparrow)|_{\neg b}]\!],
\end{aligned}
$$

откуда по лемме 5.6(d) вытекает равенство $x = (Y\!\uparrow)|_b \sqcup \varnothing\!\uparrow\!|_{\neg b}$. Из включений $Y, \varnothing \subset Y_\beta \subset Z_{\delta(\beta)}$ следует $Y\!\uparrow, \varnothing\!\uparrow \in Z_{\delta(\beta)+1}$ и поэтому

$$
x = (Y\!\uparrow)|_b \sqcup \varnothing\!\uparrow\!|_{\neg b} \in \operatorname{mix} Z_{\delta(\beta)+1} \subset \operatorname{mix} \bigcup_{\gamma < \delta(\beta)+\omega} Z_\gamma = Z_{\delta(\beta)+\omega} = Z_{\delta(\alpha)}.
$$

Если $\alpha \in \operatorname{Lim}\operatorname{Ord}$, то

$$
Y_\alpha = \operatorname{mix} \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta \subset \operatorname{mix} \bigcup_{\beta<\alpha} Z_{\delta(\beta)} \subset \operatorname{mix} \bigcup_{\gamma<\delta(\alpha)} Z_\gamma = Z_{\delta(\alpha)}. \ \triangleright
$$

12.8. Следствие. *Если C — циклический подкласс $\mathbb{V}^{(B)}$ и $Y\!\uparrow \in C$ для всех $Y \subset C$, то $C = \mathbb{V}^{(B)}$.*

$\triangleleft$ Допустим, $C \neq \mathbb{V}^{(B)}$. По теореме 12.7 существует наименьший ординал α, для которого имеется элемент $x \in Z_\alpha \backslash C$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $x = Y\!\uparrow$ для некоторого подмножества $Y \subset Z_\beta$, и тогда из $Z_\beta \subset C$ вытекает $x \in C$. Если же $\alpha \in \operatorname{Lim}\operatorname{Ord}$, то $x = \sqcup P$ для некоторой максимальной антицепи $P \subset {}^{\%}\big(\bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta\big)$, и тогда из $\bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta \subset C$ вытекает $x \in \operatorname{mix} C = C$. $\triangleright$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман А. Е.* Булевозначный универсум как алгебраическая система. I. Основные принципы // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 1041–1062.
2. *Jech T.* Set theory. The third millennium edition, revised and expanded. Berlin, etc.: Springer-Verl., 2003.
3. *Lévy A.* A hierarchy of formulas in set theory. Providence: Amer. Math. Soc., 1965.
4. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
5. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.
6. *Jech T.* Distributive laws // Handbook of Boolean algebras. Amsterdam; London: North-Holland, 1989. Chapter 8. P. 317–331.
7. *Gutman A. E.* Locally one-dimensional K-spaces and σ-distributive Boolean algebras // Sib. Adv. Math. 1995. V. 5, N 1. P. 42–48.
8. *Бурбаки Н.* Начала математики. Ч. 1. Основные структуры анализа. Книга 1. Теория множеств. М.: Мир, 1965.
9. *Solovay R. M., Tennenbaum S.* Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math. 1971. V. 94, N 2. P. 201–245.

Поступила в редакцию 9 марта 2020 г.
После доработки 9 марта 2020 г.
Принята к публикации 8 апреля 2020 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru