

УДК 517.98

БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ УНИВЕРСУМ КАК АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА. II. ИНТЕНСИОНАЛЬНЫЕ ИЕРАРХИИ

А. Е. Гутман

Аннотация. Для булевозначных алгебраических систем теоретико-множественной сигнатуры исследованы понятия транзитивности, регулярности и σ -регулярности. Введено понятие универсума над произвольной экстенциональной булевозначной системой и предложено описание структуры универсума посредством различных иерархий. Полученные результаты использованы для доказательства единственности булевозначного универсума с точностью до единственного изоморфизма.

Ключевые слова: булевозначная алгебраическая система, теория множеств, булевозначный анализ, универсум, кумулятивная иерархия.

*Юрию Леонидовичу Ершову
в связи с его 80-летием*

Статья продолжает [1] и является второй частью работы, посвященной исследованию булевозначных алгебраических систем теоретико-множественной сигнатуры.

В первой части разработан аппарат частичных элементов булевозначной системы, изучены предикативные булевозначные классы, допускающие квантификацию, предложена интерпретация принципа перемешивания в терминах соединений антицепей частичных элементов, а также установлена взаимосвязь между цикличностью и достижением максимума экстенциональными булевозначными функциями.

Нумерация параграфов второй части начинается с 7, продолжая нумерацию статьи [1]. В §7 исследуется понятие транзитивной булевозначной подсистемы и доказывается аналог леммы А. Леви об абсолютности ограниченных формул для транзитивных моделей. В §8 синтаксис оценок истинности расширяется кванторами по предикативным булевозначным классам. В §9 изучается понятие регулярной булевозначной системы и исследуется вопрос о том, для каких булевых алгебр B совпадают классы регулярных и σ -регулярных B -систем. В §10 вводится понятие булевозначного универсума над произвольной экстенциональной булевозначной системой и устанавливается тесная взаимосвязь такого универсума с интенциональной иерархией — булевозначным аналогом кумулятивной иерархии фон Неймана. В §11 приводится характеристика классического булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ как алгебраической системы, доказывается единственность такой системы с точностью до единственного изоморфизма

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2 (проект № 0314–2019–0005).

и для любой полной булевой алгебры B устанавливается логическая независимость условий, фигурирующих в определении B -значного универсума. В § 12 предлагается описание структуры булевозначного универсума посредством различных иерархий.

При упоминании любых пунктов параграфов 1–6 неявно подразумевается статья [1]: например, ссылка на п. 2.8 означает ссылку [1, 2.8].

Всюду ниже B — произвольная полная булева алгебра, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел, $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ — наименьший бесконечный ординал. Класс всех ординалов обозначается символом Ord , а класс всех предельных ординалов — символом Lim Ord . Кроме того, используются обозначения $\text{Ord}^\bullet := \text{Ord} \cup \{\infty\}$, где $\alpha < \infty$ для всех $\alpha \in \text{Ord}$, и $\text{Lim Ord}^\bullet := \text{Lim Ord} \cup \{\infty\}$.

§ 7. Транзитивность

Множество или класс Y называют транзитивным, если

$$(\forall x, y)(x \in y \Rightarrow x \in Y).$$

Транзитивные классы традиционно используются в теории множеств в качестве моделей фрагментов и модификаций самой теории множеств. При работе с такими моделями полезным инструментом служит лемма А. Леви об абсолютности ограниченных формул. В этом параграфе исследуется понятие транзитивной булевозначной подсистемы и доказывается соответствующий аналог леммы А. Леви.

7.1. Если Y — подсистема B -системы X (см. п. 2.8), то запись $\%Y$ можно понимать двояко: как совокупность $(Y \times B)/\sim$ частичных элементов системы Y (см. п. 3.1) или как подкласс $\{x|_b : x \in Y, b \in B\} \subset \%X$. Выбор в данном случае непринципиален, поскольку соответствие

$$\sim_Y(y, b) \mapsto \sim_X(y, b), \quad y \in Y, b \in B,$$

обеспечивает естественное вложение $\%Y = (Y \times B)/\sim$ в $\%X = (X \times B)/\sim$, и в любом случае можно считать, что $\%Y \subset \%X$.

Аналогичная двусмысленность возникает при интерпретации символа $P\uparrow$ для $P \subset \%Y$ (см. п. 3.5). В рамках системы X или Y булевозначный класс $P\uparrow$ является соответственно функцией $P\uparrow_x : X \rightarrow B$ или $P\uparrow_y : Y \rightarrow B$. Но и в этом случае выбор интерпретации не имеет принципиального характера, так как функции $P\uparrow_x$ и $P\uparrow_y$ совпадают на Y , поэтому истинность включения $[y \in P\uparrow]$ для $y \in Y$ не зависит от системы, в которой она вычисляется. Действительно, если $y \in Y$ и $P = \{y_i|_{b_i} : i \in I\}$, где $y_i \in Y$ и $b_i \in B$, то

$$\begin{aligned} [y \in P\uparrow_y]_Y &= P\uparrow_y(y) = \bigvee_{i \in I} [y = y_i|_{b_i}]_Y = \bigvee_{i \in I} [y = y_i]_Y \wedge b_i \\ &= \bigvee_{i \in I} [y = y_i]_X \wedge b_i = \bigvee_{i \in I} [y = y_i|_{b_i}]_X = P\uparrow_x(y) = [y \in P\uparrow_x]_X. \end{aligned}$$

По этой причине вместо $[y \in P\uparrow_y]_Y$ или $[y \in P\uparrow_x]_X$ в дальнейшем будем писать просто $[y \in P\uparrow]$ и иногда добавлять индексы X или Y лишь для того, чтобы подчеркнуть, в какой системе производится вычисление.

Чуть большая аккуратность необходима в обращении с формулой $y \simeq P\uparrow$ для $y \in Y$ и $P \subset {}^{\%}Y$ (см. п. 3.19). Из соотношения $y \simeq P\uparrow_x$ в X вытекает аналогичное соотношение $y \simeq P\uparrow_y$ в Y , но, как показано в п. 7.3, обратная импликация имеет место для всех $y \in Y$ и $P \subset {}^{\%}Y$ в том и только в том случае, когда подсистема $Y \subset X$ транзитивна.

7.2. Пусть X — произвольная B -система. Подкласс $Y \subset X$ назовем *транзитивным* в X , если подъем $Y\uparrow$ транзитивен внутри X , т. е.

$$X \models (\forall x, y)(x \in y \in Y\uparrow \Rightarrow x \in Y\uparrow).$$

Будем говорить, что Y — *транзитивная подсистема* X , и писать $Y \preceq X$, если Y — непустой транзитивный подкласс X , снабженный индуцированными из X интерпретациями (см. п. 2.8).

Следующие свойства подкласса $Y \subset X$ равносильны:

- (a) Y транзитивен в X ;
- (b) $(\forall y \in Y) X \models (y \subset Y\uparrow)$;
- (c) $(\forall x \in X)(\forall y \in Y) [x \in y] \leq [x \in Y\uparrow]$;
- (d) $(\forall x \in X)(\forall y \in Y) [x \in y] = \bigvee_{z \in Y} [x = z] \wedge [z \in y]$.

\triangleleft Импликации (a) \Rightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftarrow (d) очевидны. Импликация (b) \Rightarrow (a) вытекает из леммы 3.18(d).

(c) \Rightarrow (d). С учетом (c) и 2.4 для любых $x \in X$ и $y \in Y$ имеем

$$\begin{aligned} \bigvee_{z \in Y} [x = z] \wedge [z \in y] &\leq [x \in y] \leq [x \in Y\uparrow] \wedge [x \in y] \\ &= \bigvee_{z \in Y} [x = z] \wedge [x \in y] = \bigvee_{z \in Y} [x = z] \wedge [z \in y]. \quad \triangleright \end{aligned}$$

7.3. Пусть Y — подсистема B -системы X . Следующие утверждения равносильны:

- (a) $X \models (y = P\uparrow_x) \Leftrightarrow Y \models (y = P\uparrow_y)$ для любого элемента $y \in Y$ и любого класса $P \subset {}^{\%}Y$;
- (b) $X \models (y = y\downarrow_y\uparrow_x)$ для всех $y \in Y$;
- (c) $Y \preceq X$.

\triangleleft (a) \Rightarrow (b). Согласно лемме 4.3 для всех $y \in Y$ справедливо соотношение $Y \models (y = y\downarrow_y\uparrow_y)$, а значит, $X \models (y = y\downarrow_y\uparrow_x)$ благодаря (a).

Импликация (b) \Rightarrow (c) вытекает из 7.2(b) и леммы 3.17(b).

(c) \Rightarrow (a). Пусть $Y \preceq X$, $y \in Y$ и $P \subset {}^{\%}Y$. Из 7.2(b) и леммы 3.17(b) следует, что $X \models (y \subset Y\uparrow_x, P\uparrow_x \subset Y\uparrow_x)$ и тем самым $X \models (y = y \cap Y\uparrow_x, P\uparrow_x = P\uparrow_x \cap Y\uparrow_x)$. Поэтому с учетом леммы 3.18(d) имеем

$$\begin{aligned} X \models (y = P\uparrow_x) &\Leftrightarrow X \models (y \cap Y\uparrow_x = P\uparrow_x \cap Y\uparrow_x) \\ &\Leftrightarrow X \models (\forall z \in Y\uparrow_x)(z \in y \Leftrightarrow z \in P\uparrow_x) \\ &\Leftrightarrow (\forall z \in Y) X \models (z \in y \Leftrightarrow z \in P\uparrow_x) \Leftrightarrow (\forall z \in Y) Y \models (z \in y \Leftrightarrow z \in P\uparrow_y) \\ &\Leftrightarrow Y \models (\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z \in P\uparrow_y) \Leftrightarrow Y \models (y = P\uparrow_y). \quad \triangleright \end{aligned}$$

7.4. Пусть φ — формула сигнатуры $\{=, \in\}$, и пусть U — переменная, терм или символ класса. *Релятивизацией* φ на U называется формула, полученная из φ в результате замены каждого квантора $(\forall x)$ и $(\exists x)$, где x — произвольная переменная, соответствующим квантором $(\forall x \in U)$ и $(\exists x \in U)$ (см. [2, 12.6]).

Релятивизация формулы φ на U обозначается символом $U \vDash \varphi$ или, более подробно, $U \vDash \varphi(\bar{x})$, где $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$ — список, содержащий все свободные переменные формулы φ . Выбор обозначения для релятивизации основан на том факте, что для любых $\bar{x} \in U$ утверждение $U \vDash \varphi(\bar{x})$ равносильно истинности $\varphi(\bar{x})$ в двузначной алгебраической системе $(U, =_U, \in_U)$ со стандартными интерпретациями равенства и принадлежности.

7.5. Формулу сигнатуры $\{=, \in\}$ назовем *синтаксически ограниченной*, если ее можно построить из атомарных формул $x = y$ и $x \in y$ с помощью дизъюнкции, отрицания и добавления кванторов вида $(\exists x \in y)$, где x и y — символы переменных. Говорят, что φ — *ограниченная формула*, если существует такая синтаксически ограниченная формула ψ , что $\vdash (\varphi \Leftrightarrow \psi)$, т. е. эквивалентность $\varphi \Leftrightarrow \psi$ доказуема в теории предикатов (является тавтологией). Ограниченные формулы называют также формулами класса Σ_0 , Π_0 или Δ_0 . Как легко видеть, если в формуле φ каждое вхождение квантора имеет вид $(\exists x \in y)$ или $(\forall x \in y)$, то φ — ограниченная формула. Примером ограниченной формулы служит релятивизация $U \vDash \varphi$ любой формулы φ на переменную U .

Приведенное ниже утверждение является следствием классической леммы А. Леви об абсолютности ограниченных формул для транзитивных моделей [3, лемма 34; 2, лемма 12.9].

Лемма. Пусть $\varphi(\bar{y})$ — ограниченная формула со свободными переменными $\bar{y} = y_1, \dots, y_n$. Если X — V -система и $Y \preceq X$, то

$$(\forall \bar{y} \in Y) [\varphi(\bar{y})]_X = [\varphi(\bar{y})]_Y.$$

◁ Поскольку лемма А. Леви доказывается в рамках теории предикатов без специальных аксиом, она является тавтологией. Согласно 3.9 заключение этой леммы для транзитивного внутри X булевозначного класса $Y \uparrow_X$ истинно в X :

$$X \vDash (\forall \bar{y} \in Y \uparrow_X)(\varphi(\bar{y}) \Leftrightarrow Y \uparrow_X \vDash \varphi(\bar{y}))$$

и, в частности,

$$(\forall \bar{y} \in Y) [\varphi(\bar{y})]_X = [Y \uparrow_X \vDash \varphi(\bar{y})]_X,$$

где $Y \uparrow_X \vDash \varphi(\bar{y})$ — релятивизация $\varphi(\bar{y})$ на $Y \uparrow_X$. Равенство

$$[Y \uparrow_X \vDash \varphi(\bar{y})]_X = [\varphi(\bar{y})]_Y$$

легко доказывается индукцией по сложности синтаксически ограниченной формулы φ . ▷

7.6. В дальнейшем пригодится более сильная версия леммы А. Леви, действующая булевозначные классы.

Теорема. Пусть φ — ограниченная формула со свободными переменными $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m$. Если X — V -система и $Y \preceq X$, то

$$[\varphi(y_1, \dots, y_n, \Phi_1, \dots, \Phi_m)]_X = [\varphi(y_1, \dots, y_n, \Phi_1|_Y, \dots, \Phi_m|_Y)]_Y \quad (12)$$

для любых $y_1, \dots, y_n \in Y$, $\Phi_1, \dots, \Phi_m \in X$, $\Phi_1, \dots, \Phi_m \leq Y \uparrow_X$.

◁ Формулу φ назовем *абсолютной*, если она удовлетворяет условию (12) для любого разбиения списка свободных переменных на две группы y_1, \dots, y_n и z_1, \dots, z_m . (Отметим, что из-за присутствия произвольных булевозначных классов условие (12), вообще говоря, является бесконечным утверждением, см. § 1.)

Из 3.9 следует, что для доказательства теоремы достаточно установить абсолютность синтаксически ограниченных формул. Воспользуемся индукцией по сложности формулы.

Покажем, что атомарные формулы абсолютны. Пусть $y \in Y$, $\Phi, \Psi \in X$ и $\Phi, \Psi \leq Y \uparrow_X$. Тогда $X \models (y \subset Y \uparrow_X)$ благодаря транзитивности подсистемы Y и, кроме того, $X \models (\Phi, \Psi \subset Y \uparrow_X)$ согласно лемме 3.17(а). Следовательно, с учетом леммы 3.18 имеем

$$\begin{aligned}
[y \in \Phi]_X &= \Phi(y) = \Phi|_Y(y) = [y \in \Phi|_Y]_Y; \\
[y = \Phi]_X &= [(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z \in \Phi)]_X = [(\forall z \in Y \uparrow_X)(z \in y \Leftrightarrow z \in \Phi)]_X \\
&= \bigwedge_{z \in Y} [z \in y]_X \Leftrightarrow_B [z \in \Phi]_X = \bigwedge_{z \in Y} [z \in y]_Y \Leftrightarrow_B [z \in \Phi|_Y]_Y \\
&= [(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z \in \Phi|_Y)]_Y = [y = \Phi|_Y]_Y; \\
[\Phi \in y]_X &= [(\exists z)(z = \Phi \wedge z \in y)]_X = [(\exists z \in Y \uparrow_X)(z = \Phi \wedge z \in y)]_X \\
&= \bigvee_{z \in Y} [z = \Phi]_X \wedge [z \in y]_X = \bigvee_{z \in Y} [z = \Phi|_Y]_Y \wedge [z \in y]_Y \\
&= [(\exists z)(z = \Phi|_Y \wedge z \in y)]_Y = [\Phi|_Y \in y]_Y; \\
[\Phi = \Psi]_X &= [(\forall z)(z \in \Phi \Leftrightarrow z \in \Psi)]_X = [(\forall z \in Y \uparrow_X)(z \in \Phi \Leftrightarrow z \in \Psi)]_X \\
&= \bigwedge_{z \in Y} [z \in \Phi]_X \Leftrightarrow_B [z \in \Psi]_X = \bigwedge_{z \in Y} [y \in \Phi|_Y]_Y \Leftrightarrow_B [z \in \Psi|_Y]_Y \\
&= [(\forall z)(z \in \Phi|_Y \Leftrightarrow z \in \Psi|_Y)]_Y = [\Phi|_Y = \Psi|_Y]_Y; \\
[\Phi \in \Psi]_X &= [(\exists z)(z = \Phi \wedge z \in \Psi)]_X = [(\exists z \in Y \uparrow_X)(z = \Phi \wedge z \in \Psi)]_X \\
&= \bigvee_{z \in Y} [z = \Phi]_X \wedge [z \in \Psi]_X = \bigvee_{z \in Y} [z = \Phi|_Y]_Y \wedge [z \in \Psi|_Y]_Y \\
&= [(\exists z)(z = \Phi|_Y \wedge z \in \Psi|_Y)]_Y = [\Phi|_Y \in \Psi|_Y]_Y.
\end{aligned}$$

Как легко видеть, абсолютность формул сохраняется отрицанием и дизъюнкцией. Остается показать, что из абсолютности формулы $\varphi(x, y, \bar{y}, \bar{z})$ вытекает абсолютность формулы $\psi(y, \bar{y}, \bar{z}) := (\exists x \in y) \varphi(x, y, \bar{y}, \bar{z})$. Действительно, если $y, \bar{y} = y_1, \dots, y_n \in Y$, $\Phi, \bar{\Phi} = \Phi_1, \dots, \Phi_m \in X$, $\Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_m \leq Y \uparrow_X$, то с учетом соотношений $X \models (y \subset Y \uparrow_X)$, $X \models (\Phi \subset Y \uparrow_X)$ и абсолютности φ имеем

$$\begin{aligned}
[\psi(y, \bar{y}, \bar{\Phi})]_X &= [(\exists x)(x \in y \wedge \varphi(x, y, \bar{y}, \bar{\Phi}))]_X = [(\exists x \in Y \uparrow_X)(x \in y \wedge \varphi(x, y, \bar{y}, \bar{\Phi}))]_X \\
&= \bigvee_{x \in Y} [x \in y]_X \wedge [\varphi(x, y, \bar{y}, \bar{\Phi})]_X = \bigvee_{x \in Y} [x \in y]_Y \wedge [\varphi(x, y, \bar{y}, \bar{\Phi}|_Y)]_Y \\
&= [(\exists x)(x \in y \wedge \varphi(x, y, \bar{y}, \bar{\Phi}|_Y))]_Y = [\psi(y, \bar{y}, \bar{\Phi}|_Y)]_Y; \\
[\psi(\Phi, \bar{y}, \bar{\Phi})]_X &= [(\exists x)(x \in \Phi \wedge \varphi(x, \Phi, \bar{y}, \bar{\Phi}))]_X = [(\exists x \in Y \uparrow_X)(x \in \Phi \wedge \varphi(x, \Phi, \bar{y}, \bar{\Phi}))]_X \\
&= \bigvee_{x \in Y} [x \in \Phi]_X \wedge [\varphi(x, \Phi, \bar{y}, \bar{\Phi})]_X = \bigvee_{x \in Y} [x \in \Phi|_Y]_Y \wedge [\varphi(x, \Phi|_Y, \bar{y}, \bar{\Phi}|_Y)]_Y \\
&= [(\exists x)(x \in \Phi|_Y \wedge \varphi(x, \Phi|_Y, \bar{y}, \bar{\Phi}|_Y))]_Y = [\psi(\Phi|_Y, \bar{y}, \bar{\Phi}|_Y)]_Y. \quad \triangleright
\end{aligned}$$

7.7. Следствие. Если B -система X экстенциональна и $Y \preceq X$, то Y экстенциональна.

◁ Согласно определению 2.7 экстенциональность B -системы X означает $X \models (\forall x, y) \varphi(x, y)$, где

$$\varphi(x, y) := (\forall z \in x)(z \in y) \wedge (\forall z \in y)(z \in x) \Rightarrow x = y.$$

Таким образом, если X экстенциональна, то $X \models (\forall x, y \in Y \uparrow_x) \varphi(x, y)$, откуда благодаря теореме 7.6 и ограниченности формулы $(\forall x, y \in u) \varphi(x, y)$ следует $Y \models (\forall x, y \in (Y \uparrow_x)|_Y) \varphi(x, y)$, т. е. $Y \models (\forall x, y) \varphi(x, y)$, что равносильно экстенциональности Y . \triangleright

7.8. Следствие. Пусть $\varphi(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m)$ — произвольная формула. Если X — B -система и $Y \preceq X$, то

$$[Y \uparrow_x \models \varphi(y_1, \dots, y_n, \Phi_1, \dots, \Phi_m)]_X = [\varphi(y_1, \dots, y_n, \Phi_1|_Y, \dots, \Phi_m|_Y)]_Y$$

для любых $y_1, \dots, y_n \in Y$, $\Phi_1, \dots, \Phi_m \in X$, $\Phi_1, \dots, \Phi_m \leq Y \uparrow_x$, где $Y \uparrow_x \models \varphi$ — релятивизация φ на $Y \uparrow_x$.

\triangleleft С учетом ограниченности формулы $x \models \varphi(\bar{y}, \bar{z})$ из теоремы 7.6 следует

$$[Y \uparrow_x \models \varphi(\bar{y}, \bar{\Phi})]_X = [(Y \uparrow_x)|_Y \models \varphi(\bar{y}, \bar{\Phi}|_Y)]_Y = [Y \uparrow_Y \models \varphi(\bar{y}, \bar{\Phi}|_Y)]_Y = [\varphi(\bar{y}, \bar{\Phi}|_Y)]_Y. \triangleright$$

7.9. Пусть I — непустое множество или класс. Семейство B -систем $(X_i)_{i \in I}$ назовем *направленным*, если для любых $i, j \in I$ имеется индекс $k \in I$ такой, что X_i и X_j являются подсистемами X_k . Как легко видеть, на объединении $X := \bigcup_{i \in I} X_i$ такого семейства существует единственная пара функций $=_X, \in_X: X^2 \rightarrow B$, которая превращает X в B -систему, содержащую все X_i в качестве подсистем. Имея в виду это обстоятельство, при рассмотрении какого-либо направленного семейства B -систем условимся по умолчанию считать его объединение B -системой.

7.10. Лемма. (а) Пусть Y и Z — подсистемы B -системы X . Если $Z \preceq X$ и $Z \subset Y$, то $Z \preceq Y$.

(б) Если X, Y, Z — B -системы и $Z \preceq Y \preceq X$, то $Z \preceq X$.

(с) Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — непустое семейство подсистем B -системы X . Если $X_i \preceq X$ для всех $i \in I$, то $\bigcup_{i \in I} X_i \preceq X$.

(д) Пусть I — непустое направленное упорядоченное множество или класс, $(X_i)_{i \in I}$ — семейство B -систем и $X_i \preceq X_j$ при $i \leq j$. Тогда $X_i \preceq \bigcup_{j \in I} X_j$ для любых $i \in I$.

(е) Пусть $(X_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ — семейство B -систем, $X_\alpha \preceq X_{\alpha+1}$ для $\alpha \in \text{Ord}$ и $\bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta \preceq X_\alpha$ для $\alpha \in \text{Lim Ord}$. Тогда $X_\gamma \preceq X_\beta \preceq \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} X_\alpha$ для любых $\gamma \leq \beta \in \text{Ord}$.

\triangleleft (а) Если $Z \subset Y \subset X$, $Z \preceq X$, $y \in Y$ и $z \in Z$, то $[y \in z] \leq [y \in Z \uparrow_x]_X = [y \in Z \uparrow_Y]_Y$.

(б) Если $Z \preceq Y \preceq X$, то с учетом 7.2(д) для всех $x \in X$ и $z \in Z$ имеем

$$[x \in z] = \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge [y \in z] \leq \bigvee_{y \in Y} [x = y] \wedge [y \in Z \uparrow] \leq [x \in Z \uparrow].$$

(с) Если $x \in X$ и $y \in Y := \bigcup_{i \in I} X_i$, то $y \in X_i$ для некоторого индекса $i \in I$, откуда в силу соотношения $X_i \preceq X$ следует, что $[x \in y] \leq [x \in X_i \uparrow]_X \leq [x \in Y \uparrow]_X$.

(д) Если $i \in I$, $x \in X := \bigcup_{j \in I} X_j$ и $y \in X_i$, то $x \in X_j$ для некоторого индекса $i \leq j \in I$, откуда с учетом $X_i \preceq X_j$ следует, что $[x \in y] \leq [x \in X_i \uparrow]_{X_j} = [x \in X_i \uparrow]_X$.

(е) Для $0 \neq \alpha \in \text{Ord}$ положим $\mathcal{X}_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta$ и заметим, что $\mathcal{X}_\alpha \preceq X_\alpha$.

Действительно, при $\alpha \in \text{Lim Ord}$ это соотношение явно фигурирует в условии, а если $\alpha = \alpha_0 + 1$, то с учетом очевидной монотонности семейства $(X_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ имеем $\mathcal{X}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta = \bigcup_{\beta \leq \alpha_0} X_\beta = X_{\alpha_0} \preceq X_{\alpha_0+1} = X_\alpha$.

Индукцией по α покажем, что $X_\beta \preceq X_\alpha$ при $\beta < \alpha$. Рассмотрим произвольный ординал α , предположим, что

$$X_\gamma \preceq X_\beta \text{ при } \gamma < \beta < \alpha, \quad (13)$$

и установим соотношение $X_\beta \preceq X_\alpha$ для всех $\beta < \alpha$. Если $\beta < \alpha$, то согласно (13) и (d) имеем $X_\beta \preceq \mathcal{X}_\alpha$, откуда благодаря $\mathcal{X}_\alpha \preceq X_\alpha$ и (b) следует $X_\beta \preceq X_\alpha$.

Осталось заметить, что с учетом (d) из установленного выше вытекает соотношение $X_\beta \preceq \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} X_\alpha$ для всех $\beta \in \text{Ord}$. \triangleright

§ 8. Квантификация по булевозначным классам

В этом параграфе язык оценок истинности расширяется кванторами по предикативным булевозначным классам, устанавливается аналог леммы А. Леви для формул расширенного языка и доказывается принцип максимума для булевозначных классов.

8.1. Пусть φ — произвольная формула, X — B -система. Условимся записывать в виде $(\forall \Phi \in X) \varphi(\Phi)$ и $(\exists \Phi \in X) \varphi(\Phi)$ утверждения о том, что $\varphi(\Phi)$ выполняется для любого или соответственно некоторого предикативного булевозначного класса $\Phi \in X$. Поскольку предикативные классы допускают квантификацию (см. п. 4.6), рассматриваемые утверждения не являются бесконечными и каждое из них может быть записано одной формулой:

$$\begin{aligned} (\forall \Phi \in X) \varphi(\Phi) &\Leftrightarrow (\forall P \subset \%X) \varphi(P\uparrow), \\ (\exists \Phi \in X) \varphi(\Phi) &\Leftrightarrow (\exists P \subset \%X) \varphi(P\uparrow). \end{aligned}$$

Аналогично определяются выражения $\bigwedge_{\Phi \in X} \tau(\Phi)$ и $\bigvee_{\Phi \in X} \tau(\Phi)$ для термина $\tau(x)$:

$$\bigwedge_{\Phi \in X} \tau(\Phi) = \bigwedge_{P \subset \%X} \tau(P\uparrow), \quad \bigvee_{\Phi \in X} \tau(\Phi) = \bigvee_{P \subset \%X} \tau(P\uparrow).$$

8.2. Пусть φ — формула, X — B -система и $\Phi \in X$. В дальнейшем при употреблении выражения $[\varphi(\Phi, \dots)]_X$ или $X \models \varphi(\Phi, \dots)$ подразумевается, что формула φ может содержать несколько свободных переменных, некоторые из которых, возможно, заменены символами булевозначных классов, т. е. запись $\varphi(\Phi, \dots)$ служит сокращением для $\varphi(\Phi, y_1, \dots, y_m, \Psi_1, \dots, \Psi_n)$, где $y_i \in X$ и $\Psi_j \in X$ — произвольные наперед заданные элементы и булевозначные классы.

Расширим синтаксис булевозначных оценок кванторами по предикативным булевозначным классам, полагая

$$\begin{aligned} [(\forall \Phi) \varphi(\Phi, \dots)]_X &:= \bigwedge_{\Phi \in X} [\varphi(\Phi, \dots)]_X, \\ [(\exists \Phi) \varphi(\Phi, \dots)]_X &:= \bigvee_{\Phi \in X} [\varphi(\Phi, \dots)]_X. \end{aligned}$$

Как легко видеть, если система X экстенциональна и удовлетворяет принципу подъема, то кванторы по классам в X равноценны обычным кванторам: $[(\forall \Phi) \varphi(\Phi, \dots)]_X = [(\forall x) \varphi(x, \dots)]_X$, $[(\exists \Phi) \varphi(\Phi, \dots)]_X = [(\exists x) \varphi(x, \dots)]_X$.

8.3. Следующее утверждение показывает, что в любой B -системе булевозначные классы удовлетворяют аналогу принципа максимума (см. п. 6.1).

Если φ — формула и X — B -система, то функция $\Phi \in X \mapsto [\varphi(\Phi, \dots)] \in B$ достигает максимума, т. е.

$$(\exists \Psi \in X) [\varphi(\Psi, \dots)] = [(\exists \Phi) \varphi(\Phi, \dots)].$$

В частности,

$$X \models (\forall \Phi) \varphi(\Phi, \dots) \Leftrightarrow (\forall \Phi \in X) X \models \varphi(\Phi, \dots),$$

$$X \models (\exists \Phi) \varphi(\Phi, \dots) \Leftrightarrow (\exists \Phi \in X) X \models \varphi(\Phi, \dots).$$

◁ Положим $b := [(\exists \Phi) \varphi(\Phi, \dots)] = \bigvee_{\Phi \in X} [\varphi(\Phi, \dots)]$. По принципу исчерпывания [4, 2.1.10(1)] существуют антицепь $(d_i)_{i \in I} \subset B$ и семейство предикативных классов $\Phi_i \in X$ ($i \in I$) такие, что $\bigvee_{i \in I} d_i = b$ и $d_i \leq [\varphi(\Phi_i, \dots)]$ для всех $i \in I$. Определим предикативный класс $\Phi: X \rightarrow B$, полагая $\Phi(x) := \bigvee_{i \in I} \Phi_i(x) \wedge d_i$ для $x \in X$. Тогда для всех $i \in I$ и $x \in X$ справедливо равенство $\Phi_i(x) \wedge d_i = \Phi(x) \wedge d_i$, откуда

$$[\Phi_i = \Phi] = [(\forall x)(x \in \Phi_i \Leftrightarrow x \in \Phi)] = \bigwedge_{x \in X} (\Phi_i(x) \Leftrightarrow_B \Phi(x)) \geq d_i$$

и, следовательно, с учетом 3.9

$$b = \bigvee_{i \in I} d_i \leq \bigvee_{i \in I} [\varphi(\Phi_i, \dots)] \wedge [\Phi_i = \Phi] \leq [\varphi(\Phi, \dots)]. \triangleright$$

8.4. Лемма. Пусть φ — формула, X — B -система и $\Psi \in X$. Тогда

$$[(\forall \Phi \subset \Psi) \varphi(\Phi, \dots)] = [(\forall \Phi) \varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)] = \bigwedge_{\Phi \in X: \Phi \leq \Psi} [\varphi(\Phi, \dots)].$$

В частности, следующие свойства булевозначного класса Ψ равносильны:

- (a) $X \models (\forall \Phi \subset \Psi) \varphi(\Phi, \dots)$;
- (b) $X \models (\forall \Phi) \varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)$;
- (c) $(\forall \Phi \in X) \Phi \leq \Psi \Rightarrow X \models \varphi(\Phi, \dots)$.

◁ Для любого предикативного класса $\Phi \in X$ определим $\Phi_0 \in X$, полагая $\Phi_0(x) := \Phi(x) \wedge \Psi(x)$ для всех $x \in X$. Тогда $\Phi_0 \leq \Psi$ и $[\Phi_0 \subset \Psi] = [\Phi_0 = \Phi \cap \Psi] = 1_B$.

Поскольку $[\Phi_0 \subset \Psi \Rightarrow \varphi(\Phi_0, \dots)] = [\varphi(\Phi_0, \dots)] = [\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)]$, имеет место неравенство

$$\bigwedge_{\Phi \in X} [\Phi \subset \Psi \Rightarrow \varphi(\Phi, \dots)] \leq \bigwedge_{\Phi \in X} [\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)].$$

Далее, если $\Phi \leq \Psi$, то $[\Phi \cap \Psi = \Phi] = 1_B$ и $[\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)] = [\varphi(\Phi, \dots)]$, а значит,

$$\bigwedge_{\Phi \in X} [\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)] \leq \bigwedge_{\Phi \in X: \Phi \leq \Psi} [\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)] = \bigwedge_{\Phi \in X: \Phi \leq \Psi} [\varphi(\Phi, \dots)].$$

Наконец, из соотношений

$$[\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots) \Rightarrow (\Phi \subset \Psi \Rightarrow \varphi(\Phi, \dots))] = [(\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots) \wedge \Phi \cap \Psi = \Phi) \Rightarrow \varphi(\Phi, \dots)] = 1_B$$

вытекает неравенство

$$[\varphi(\Phi_0, \dots)] = [\varphi(\Phi \cap \Psi, \dots)] \leq [\Phi \subset \Psi \Rightarrow \varphi(\Phi, \dots)]$$

и, следовательно,

$$\bigwedge_{\Phi \in X: \Phi \leq \Psi} [\varphi(\Phi, \dots)] \leq \bigwedge_{\Phi \in X} [\Phi \subset \Psi \Rightarrow \varphi(\Phi, \dots)]. \triangleright$$

8.5. Лемма. Пусть φ — ограниченная формула. Если X — B -система, $Y \preceq X$, $\bar{y} = y_1, \dots, y_m \in Y$, $\Psi, \bar{\Psi} = \Psi_1, \dots, \Psi_n \in X$ и $\Psi, \bar{\Psi} \leq Y \uparrow_X$, то

$$[(\forall \Phi \subset \Psi) \varphi(\Phi, \bar{y}, \bar{\Psi})]_X = [(\forall \Phi \subset \Psi|_Y) \varphi(\Phi, \bar{y}, \bar{\Psi}|_Y)]_Y.$$

◁ Если $\Phi \in Y$ и $\Phi \leq \Psi|_Y$, то $\Phi \uparrow_X \leq \Psi$ в силу леммы 3.7(b) и, кроме того, $(\Phi \uparrow_X)|_Y = \Phi$. Следовательно, с учетом теоремы 7.6 и леммы 8.4 имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & [(\forall \Phi \subset \Psi) \varphi(\Phi, \bar{y}, \bar{\Psi})]_X = \bigwedge_{\Phi \in X: \Phi \leq \Psi} [\varphi(\Phi, \bar{y}, \bar{\Psi})]_X \\ & \leq \bigwedge_{\Phi \in Y: \Phi \leq \Psi|_Y} [\varphi(\Phi \uparrow_X, \bar{y}, \bar{\Psi})]_X = \bigwedge_{\Phi \in Y: \Phi \leq \Psi|_Y} [\varphi((\Phi \uparrow_X)|_Y, \bar{y}, \bar{\Psi}|_Y)]_Y \\ & = \bigwedge_{\Phi \in Y: \Phi \leq \Psi|_Y} [\varphi(\Phi, \bar{y}, \bar{\Psi}|_Y)]_Y = [(\forall \Phi \subset \Psi|_Y) \varphi(\Phi, \bar{y}, \bar{\Psi}|_Y)]_Y. \end{aligned}$$

Обратное неравенство также обеспечивается теоремой 7.6 и леммой 8.4:

$$\begin{aligned} & [(\forall \Phi \subset \Psi|_Y) \varphi(\Phi, \bar{y}, \bar{\Psi}|_Y)]_Y = \bigwedge_{\Phi \in Y: \Phi \leq \Psi|_Y} [\varphi(\Phi, \bar{y}, \bar{\Psi}|_Y)]_Y \\ & \leq \bigwedge_{\Phi \in X: \Phi|_Y \leq \Psi|_Y} [\varphi(\Phi|_Y, \bar{y}, \bar{\Psi}|_Y)]_Y = \bigwedge_{\Phi \in X: \Phi|_Y \leq \Psi|_Y} [\varphi(\Phi, \bar{y}, \bar{\Psi})]_X \\ & \leq \bigwedge_{\Phi \in X: \Phi \leq \Psi} [\varphi(\Phi, \bar{y}, \bar{\Psi})]_X = [(\forall \Phi \subset \Psi) \varphi(\Phi, \bar{y}, \bar{\Psi})]_X. \triangleright \end{aligned}$$

§ 9. Регулярность

Аксиома регулярности (фундирования) имеет вид

$$\rho := (\forall x) \mu(x),$$

где

$$\mu(x) := ((\exists y)(y \in x) \Rightarrow (\exists y \in x)(\forall z \in x)(z \notin y)) \quad (14)$$

или, что то же самое,

$$\mu(x) := (x \neq \emptyset \Rightarrow (\exists y \in x)(y \cap x = \emptyset)).$$

Если \mathbb{V} — класс всех множеств и $(\mathbb{V}_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ — кумулятивная иерархия фон Неймана, определяемая по рекурсивному правилу

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_0 &= \emptyset; \\ \mathbb{V}_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha), \quad \alpha \in \text{Ord}; \\ \mathbb{V}_\alpha &= \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbb{V}_\beta, \quad \alpha \in \text{Lim Ord}, \end{aligned} \quad (15)$$

то в рамках теории, полученной из ZFC исключением аксиомы регулярности ρ , равенство $\mathbb{V} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \mathbb{V}_\alpha$ равносильно ρ (см. [2, § 6]). Кроме того, в этой теории аксиома регулярности равносильна σ -регулярности — отсутствию такой последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, что $x_{n+1} \in x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

В этом параграфе вводятся и изучаются понятия регулярной и σ -регулярной булевозначной системы и исследуется вопрос о том, для каких булевых алгебр B классы регулярных и σ -регулярных B -систем совпадают.

9.1. Пусть X — B -система и $\Psi \in X$. Будем говорить, что *булевозначный класс Ψ регулярен в X* , если

$$X \models (\forall \Phi \subset \Psi) \mu(\Phi)$$

(см. (14)), и что *B -система X регулярна вне подкласса $Y \subset X$* , если дополнение $\neg(Y\uparrow)$ булевозначного класса $Y\uparrow$ регулярно в X , т. е.

$$X \models (\forall \Phi)(\Phi \cap Y\uparrow = \emptyset \Rightarrow \mu(\Phi)).$$

Систему X назовем *регулярной*, если в X регулярен наибольший булевозначный класс $X\uparrow$, т. е.

$$X \models (\forall \Phi) \mu(\Phi).$$

Регулярность системы X очевидным образом связана с истинностью в X аксиомы регулярности ρ :

- (а) если X предикативна, то из регулярности X следует истинность $X \models \rho$;
- (б) если X интенциональна, то из истинности $X \models \rho$ следует регулярность X ;
- (с) если X удовлетворяет принципу подъема, то регулярность X равносильна истинности $X \models \rho$.

9.2. Лемма. Следующие свойства B -системы X равносильны:

- (а) система X не является регулярной;
- (б) существует множество $P \subset {}^{\%}X$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} (\exists p \in P) \text{ dom } p \neq 0_B, \\ (\forall p \in P) \bigvee_{q \in P} [q \in p] \geq \text{dom } p; \end{aligned}$$

- (с) существует последовательность множеств $P_n \subset {}^{\%}X$ ($n \in \mathbb{N}$), удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned} P_n \text{ — антицепь;} \\ \bigvee_{p \in P_n} \text{dom } p = \bigvee_{p \in P_1} \text{dom } p \neq 0_B; \\ (\forall p \in P_n) (\forall q \in P_{n+1}) (\text{dom } p \wedge \text{dom } q \neq 0_B \Rightarrow \text{dom } q = [q \in p]); \\ (\forall p \in P_n) \bigvee_{q \in P_{n+1}} [q \in p] = \text{dom } p. \end{aligned}$$

\triangleleft (а) \Rightarrow (б). Если система X не является регулярной, то согласно 8.3 и теореме 4.5(а) существует множество $P \subset {}^{\%}X$, для которого $X \not\models \mu(P\uparrow)$. Последнее означает, что

$$b := [P\uparrow \neq \emptyset] \wedge [(\forall y \in P\uparrow)(\exists z \in P\uparrow)(z \in y)] \neq 0_B.$$

Покажем, что множество $\{p|_b : p \in P\}$ удовлетворяет условиям (б). Действительно, с учетом (3)

$$\bigvee_{p \in P} \text{dom } p|_b = \bigvee_{p \in P} \text{dom } p \wedge b = [P\uparrow \neq \emptyset] \wedge b = b \neq 0_B.$$

Кроме того, согласно лемме 3.18

$$b \leq [(\forall y \in P\uparrow)(\exists z \in P\uparrow)(z \in y)] = \bigwedge_{p \in P} \neg \text{dom } p \vee \bigvee_{q \in P} [q \in p].$$

Следовательно, для всех $p \in P$

$$b \leq \neg \text{dom } p \vee \bigvee_{q \in P} [q \in p]$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \bigvee_{q \in P} [q \in p|b] &= \bigvee_{q \in P} [q \in p] \wedge \text{dom } p \wedge b \\ &= \left(\neg \text{dom } p \vee \bigvee_{q \in P} [q \in p] \right) \wedge \text{dom } p \wedge b \geq \text{dom } p \wedge b = \text{dom } p|b. \end{aligned}$$

(b) \Rightarrow (c). Пусть $P \subset {}^{\%}X$ удовлетворяет условиям (b). По принципу исчерпывания для каждого $p \in {}^{\%}P$ из равенства $\bigvee_{q \in P} [q \in p] = \text{dom } p$ следует существование такой антицепи $D(p) \subset {}^{\%}P$, что $\text{dom } q = [q \in p]$ для всех $q \in D(p)$ и $\bigvee_{q \in D(p)} [q \in p] = \text{dom } p$. По той же причине существует антицепь $P_1 \subset {}^{\%}P$ такая, что

$$\bigvee_{p \in P_1} \text{dom } p = \bigvee_{p \in P} \text{dom } p \neq 0_B.$$

Определим множества $P_n \subset {}^{\%}P$ ($n \in \mathbb{N}$), полагая

$$P_{n+1} := \bigcup_{p \in P_n} D(p), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Элементарная проверка показывает, что P_n удовлетворяют всем условиям, перечисленным в (c).

(c) \Rightarrow (a). Пусть последовательность $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет (c). Положим $P := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ и покажем, что $X \not\leq \mu(P\uparrow)$. Действительно, согласно (3)

$$[P\uparrow \neq \emptyset] = \bigvee_{p \in P} \text{dom } p \geq \bigvee_{p \in P_1} \text{dom } p \neq 0_B,$$

но с учетом леммы 3.18

$$\begin{aligned} [(\exists y \in P\uparrow)(\forall z \in P\uparrow)(z \notin y)] &= [(\exists y \in P\uparrow)\neg(\exists z \in P\uparrow)(z \in y)] \\ &= \bigvee_{p \in P} \text{dom } p \wedge \neg \left(\bigvee_{q \in P} \text{dom } q \wedge [q \in p] \right) \\ &= \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{p \in P_n} \text{dom } p \wedge \neg \left(\bigvee_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{q \in P_m} \text{dom } q \wedge [q \in p] \right) \\ &\leq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{p \in P_n} \text{dom } p \wedge \neg \left(\bigvee_{q \in P_{n+1}} [q \in p] \right) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{p \in P_n} \text{dom } p \wedge \neg \text{dom } p = 0_B. \triangleright \end{aligned}$$

9.3. Следующее утверждение вытекает из леммы 8.5 благодаря ограниченности формулы $\mu(x)$.

Следствие. Пусть X — B -система, $Y \preceq X$, $\Psi \in X$ и $\Psi \leq Y\uparrow_X$. Класс Ψ регулярен в X тогда и только тогда, когда класс $\Psi|_Y$ регулярен в Y .

9.4. Лемма. Пусть X и Y — B -системы, и пусть $Z \subset Y \preceq X$. Если система Y регулярна вне Z , то в X истинно утверждение о регулярности разности $Y\uparrow \setminus Z\uparrow$, т. е.

$$X \models (\forall \Phi \subset Y\uparrow \setminus Z\uparrow) \mu(\Phi).$$

\triangleleft Положим $\Psi := Y\uparrow_X \wedge \neg(Z\uparrow_X)$. Регулярность Y вне Z означает, что класс $\neg(Z\uparrow_Y)$ регулярен в Y , откуда с учетом следствия 9.3 и соотношений $\Psi \leq Y\uparrow_X$, $\Psi|_Y = \neg(Z\uparrow_Y)$ вытекает регулярность класса Ψ в X . Остается заметить, что $X \models (\Psi = Y\uparrow \setminus Z\uparrow)$. \triangleright

9.5. Лемма. Пусть X и Y — B -системы, и пусть $Z \subset Y \preceq X$. Если система Y регулярна вне Z , а X регулярна вне Y , то X регулярна вне Z .

◁ Установим истинность $X \vDash (\forall \Phi)(\Phi \cap Z \uparrow = \emptyset \Rightarrow \mu(\Phi))$ путем «рассуждений внутри X » (см. п. 3.10).

Пусть $\Phi \cap Z \uparrow = \emptyset$ и $\Phi \neq \emptyset$. Найдем такой элемент $y \in \Phi$, что $y \cap \Phi = \emptyset$. Если $\Phi \cap Y \uparrow = \emptyset$, то искомым y существует в силу регулярности $\neg Y \uparrow$. Пусть теперь $\Phi \cap Y \uparrow \neq \emptyset$. Поскольку класс $Y \uparrow \setminus Z \uparrow$ регулярен (см. лемму 9.4) и $\emptyset \neq \Phi \cap Y \uparrow \subset Y \uparrow \setminus Z \uparrow$, имеется такой элемент $y \in \Phi \cap Y \uparrow$, что $y \cap \Phi \cap Y \uparrow = \emptyset$. Тогда $y \cap \Phi = y \cap \Phi \cap Y \uparrow = \emptyset$, так как в силу транзитивности $Y \uparrow$ из $y \in Y \uparrow$ следует $y \subset Y \uparrow$. ▷

9.6. Следствие. Пусть X и Y — B -системы и $Y \preceq X$. Если система Y регулярна, а X регулярна вне Y , то X регулярна.

9.7. Лемма. Если B -система X регулярна, то любая подсистема $Y \subset X$ регулярна.

◁ Рассмотрим произвольные семейства $(y_i)_{i \in I} \subset Y$ и $(b_i)_{i \in I} \subset B$ и покажем, что $Y \vDash \mu(P \uparrow_Y)$, где $P := \{y_i | b_i : i \in I\}$. Действительно, используя регулярность системы X и лемму 3.18, заключаем, что

$$\begin{aligned} [P \uparrow_Y \neq \emptyset]_Y &= \bigvee_{i \in I} b_i = [P \uparrow_X \neq \emptyset]_X \leq [(\exists y \in P \uparrow_X)(\forall z \in P \uparrow_X)(z \notin y)]_X \\ &= \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in I} ([y_j \notin y_i]_X \wedge b_i \wedge b_j) \vee \neg b_j = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in I} ([y_j \notin y_i]_Y \wedge b_i \wedge b_j) \vee \neg b_j \\ &= [(\exists y \in P \uparrow_Y)(\forall z \in P \uparrow_Y)(z \notin y)]_Y. \quad \triangleright \end{aligned}$$

9.8. Пусть X — B -система и $\Psi \in X$. Будем говорить, что *булевозначный класс Ψ σ -регулярен в X* , если

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [x_n \in \Psi] \wedge [x_{n+1} \in x_n] = 0_B$$

для любой последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. Будем говорить, что *B -система X σ -регулярна вне подкласса $Y \subset X$* , если дополнение $\neg(Y \uparrow)$ булевозначного класса $Y \uparrow$ σ -регулярно в X , т. е.

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [x_n \notin Y \uparrow] \wedge [x_{n+1} \in x_n] = 0_B$$

для любой последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. Систему X назовем *σ -регулярной*, если в X σ -регулярен наибольший класс $X \uparrow$, т. е.

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [x_{n+1} \in x_n] = 0_B$$

для любой последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$.

9.9. Теорема. Пусть X — B -система.

(а) Если класс $\Psi \in X$ регулярен в X , то Ψ σ -регулярен в X .

(б) Если $Y \subset X$ и разность $X \setminus Y$ предциклична, то регулярность и σ -регулярность X вне Y равносильны.

◁ (а) Пусть класс Ψ регулярен в X . Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ и покажем, что

$$b := \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [x_n \in \Psi] \wedge [x_{n+1} \in x_n] = 0_B.$$

Положим $\Phi := \{x_n : n \in \mathbb{N}\uparrow$. Тогда $[\Phi \neq \emptyset] = 1_B$ и, кроме того, с учетом леммы 3.18

$$[\Phi \subset \Psi] = [(\forall x \in \Phi)(x \in \Psi)] = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [x_n \in \Psi] \geq b,$$

откуда благодаря регулярности Ψ в X следует, что $[(\exists y \in \Phi)(\forall z \in \Phi)(z \notin y)] \geq b$. С другой стороны, вновь привлекая лемму 3.18, заключаем:

$$\begin{aligned} [(\exists y \in \Phi)(\forall z \in \Phi)(z \notin y)] &= \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} [x_m \notin x_n] \\ &= \neg \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{m \in \mathbb{N}} [x_m \in x_n] \leq \neg \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [x_{n+1} \in x_n] \leq \neg b. \end{aligned}$$

(b) Пусть разность $Z := X \setminus Y \neq \emptyset$ преддиклична, и пусть система X σ -регулярна вне Y . Рассмотрим произвольный класс $\Phi \in X$, удовлетворяющий неравенству $\Phi \leq \neg(Y\uparrow)$, и покажем, что $X \models \mu(\Phi)$, т. е.

$$b := [\Phi \neq \emptyset \wedge (\forall y \in \Phi)(y \cap \Phi \neq \emptyset)] = 0_B.$$

Предварительно заметим, что для любого булевозначного класса $\Psi \in X$

$$(\exists x \in X) [(\exists y \in \Phi) \Psi(y)] = [x \in \Phi] \wedge [\Psi(x)]. \quad (16)$$

Действительно, согласно лемме 3.17(d) справедливо соотношение

$$X \models (\Phi \subset X\uparrow \setminus Y\uparrow \subset Z\uparrow),$$

откуда с учетом лемм 3.18 и 5.11 вытекают равенства

$$\begin{aligned} [(\exists y \in \Phi) \Psi(y)] &= [(\exists y \in Z\uparrow)(\Phi(y) \wedge \Psi(y))] \\ &= [(\exists y \in (\text{mix } Z)\uparrow)(\Phi(y) \wedge \Psi(y))] = \bigvee_{y \in \text{mix } Z} \Phi(y) \wedge \Psi(y), \end{aligned}$$

причем по теореме 6.5 функция $\Phi \wedge \Psi$ достигает максимума на циклическом классе $\text{mix } Z$.

Согласно (16) имеется такой элемент $x_1 \in X$, что $[x_1 \in \Phi] = [\Phi \neq \emptyset] \geq b$. Из $[(\forall y \in \Phi)(y \cap \Phi \neq \emptyset)] \geq b$ следует $[x_1 \cap \Phi \neq \emptyset] \geq b$, т. е. $[(\exists y \in \Phi)(y \in x_1)] \geq b$, а значит, в силу (16) существует элемент $x_2 \in X$ такой, что $[x_2 \in \Phi] \wedge [x_2 \in x_1] \geq b$. «Итерируя» эти рассуждения (а строго говоря, применяя рекурсию и аксиому выбора), получаем последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ элементов X , удовлетворяющую неравенствам $[x_n \notin Y\uparrow] \wedge [x_{n+1} \in x_n] \geq [x_n \in \Phi] \wedge [x_{n+1} \in x_n] \geq b$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Благодаря σ -регулярности X вне Y отсюда следует, что $b = 0$. \triangleright

9.10. Завершим параграф исследованием вопроса о том, для каких полных булевых алгебр B совпадают понятия регулярной и σ -регулярной B -системы.

Говорят, что элемент $c \in B$ *вписан* (*строго вписан*) в множество $D \subset B$, и пишут $c \preceq D$ ($c \prec D$), если $c \leq d$ ($c < d$) для какого-либо элемента $d \in D$. Говорят, что множество $C \subset B$ *вписано* (*строго вписано*) в D , и пишут $C \preceq D$ ($C \prec D$), если $c \preceq D$ ($c \prec D$) для всех $c \in C$. Элемент c или множество C называют *вписанным в последовательность* $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ подмножеством B , если $c \preceq D_n$ ($C \preceq D_n$) для всех $n \in \mathbb{N}$.

Множество $C \subset B$ называется *покрытием* булевой алгебры B , если $\vee C = 1_B$. *Разбиением* булевой алгебры называют разбиение единицы, т. е. покрытие, являющееся антицепью. Напомним, что согласно принципу исчерпывания в любое покрытие можно вписать разбиение.

Теорема [5, § 19; 6]. Следующие свойства полной булевой алгебры B равносильны:

(а) для любого множества I и любого семейства $(b_i^n)_{i \in I}^{n \in \mathbb{N}}$ элементов B справедливо соотношение

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{i \in I} b_i^n = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} b_{i(n)}^n;$$

(б) в любую последовательность покрытий B можно вписать покрытие;

(с) в любую последовательность разбиений B можно вписать разбиение;

(д) для любой последовательности разбиений $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ булевой алгебры B и любого ненулевого элемента $a \in B$ существует последовательность $d_n \in D_n$ ($n \in \mathbb{N}$) такая, что

$$a \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} d_n \neq 0_B.$$

Булева алгебра B , удовлетворяющая любому из эквивалентных условий (а)–(д), называется ω -дистрибутивной или (ω, ∞) -дистрибутивной.

Всякая атомная полная булева алгебра ω -дистрибутивна. Пополнение булевой фактор-алгебры $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ является безатомной ω -дистрибутивной булевой алгеброй (см. [6, следствие леммы 5; 7, пример 9]). Классическим примером полной булевой алгебры, не являющейся ω -дистрибутивной, служит булева алгебра классов эквивалентности измеримых по Лебегу подмножеств \mathbb{R} .

9.11. Измельчением в булевой алгебре B условимся называть последовательность $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ подмножеств B , удовлетворяющую следующим условиям:

(а) $\bigvee C_n = \bigvee C_1 \neq 0_B$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(б) $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} c_n = 0_B$ для любой последовательности $c_n \in C_n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Измельчение $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ назовем *разбивающим*, если для всех $n \in \mathbb{N}$

(с) $0_B \notin C_n$;

(д) C_n — антицепь;

(е) $C_{n+1} \prec C_n$.

9.12. Проверка следующего утверждения не составляет труда.

Лемма. Пусть $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — разбивающее измельчение в булевой алгебре B , и пусть $X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

(а) Для каждого $x \in X$ существует единственная конечная последовательность элементов $c_1 \in C_1, c_2 \in C_2, \dots, c_n \in C_n$ такая, что $c_1 > c_2 > \dots > c_n = x$.

(б) Если $n \neq m$, то $C_n \cap C_m = \emptyset$.

(с) Для всякого $x \in X$ обозначим через $h(x)$ то единственное число $n \in \mathbb{N}$, для которого $x \in C_n$. Если $(x_i)_{i \in I} \subset X$ и $\bigvee_{i \in I} h(x_i) = \infty$, то $\bigwedge_{i \in I} x_i = 0_B$.

9.13. Теорема. Следующие свойства полной булевой алгебры B равносильны:

(а) в B существует разбивающее измельчение;

(б) в B существует измельчение;

(с) булева алгебра B не является ω -дистрибутивной.

\Leftarrow Импликация (а) \Rightarrow (б) тривиальна. Импликацию (б) \Rightarrow (с) легко установить с помощью теоремы 9.10(д). Покажем, что (с) \Rightarrow (а).

Если булева алгебра B не является ω -дистрибутивной, то согласно теореме 9.10(d) существуют последовательность разбиений $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и ненулевой элемент $a \in B$ такие, что

$$a \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} d_n = 0_B \quad (17)$$

для любой последовательности $d_n \in D_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Согласно (17) в последовательность $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не вписывается никакой ненулевой элемент $b \leq a$, а значит, для всякого такого b можно ввести в рассмотрение натуральное число

$$m(b) := \min\{n \in \mathbb{N} : b \not\leq D_n\}.$$

Поскольку $\bigvee D_{m(b)} = 1_B$ и $b \not\leq D_{m(b)}$, существует такой элемент $d \in D_{m(b)}$, что $0_B < b \wedge d < b$. Таким образом, множество

$$P(b) := \{b \wedge d : d \in D_{m(b)}\} \setminus \{0_B\}$$

обладает следующими свойствами:

$$P(b) \text{ — антицепь, } \bigvee P(b) = b, \quad 0_B < c < b \text{ для всех } c \in P(b).$$

Рекурсивно определим множества $C_n \subset B$ ($n \in \mathbb{N}$), полагая

$$\begin{aligned} C_1 &:= P(a); \\ C_{n+1} &:= \bigcup_{b \in C_n} P(b), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

и установим, что последовательность $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ является разбивающим измельчением. Условия 9.11(a),(c)–(e) очевидны. Остается обосновать 9.11(b).

Индукцией по $n \in \mathbb{N}$ покажем, что $m(b) \geq n$ для всех $b \in C_n$. База индукции $n = 1$ тривиальна. Предположим, что $m(b) \geq n$ при $b \in C_n$, рассмотрим произвольный элемент $c \in C_{n+1}$ и установим неравенство $m(c) \geq n+1$. По определению C_{n+1} имеет место представление $c = b \wedge d$ для некоторых $b \in C_n$, $d \in D_{m(b)}$. Поскольку элемент b вписан в $D_1, \dots, D_{m(b)-1}$, в силу неравенства $c \leq b$ это же верно для c , а значит, $m(c) \geq m(b) \geq n$. Кроме того, из $c \not\leq D_{m(c)}$ и $c \leq d \in D_{m(b)}$ следует, что $m(c) \neq m(b)$, а значит, $m(c) \geq n+1$.

Пусть теперь $c_n \in C_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По доказанному выше $m(c_{n+1}) > n$, откуда $c_{n+1} \not\leq D_n$ и, следовательно, $c_{n+1} \leq d_n$ для некоторой последовательности $d_n \in D_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Привлекая (17), заключаем, что

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} c_n = c_1 \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} c_{n+1} \leq a \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} d_n = 0_B. \quad \triangleright$$

9.14. Теорема. *Классы регулярных и σ -регулярных B -систем совпадают тогда и только тогда, когда булева алгебра B является ω -дистрибутивной.*

◁ НЕОБХОДИМОСТЬ. Если булева алгебра B не является ω -дистрибутивной, то согласно теореме 9.13 в B существует разбивающее измельчение $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Положим $X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Как и в лемме 9.12(c), для всякого $x \in X$ обозначим через $h(x)$ то единственное число $n \in \mathbb{N}$, для которого $x \in C_n$. Превратим X в B -систему, полагая для $x, y \in X$

$$\begin{aligned} [x = y] &:= \begin{cases} 1_B, & \text{если } x = y, \\ 0_B & \text{в противном случае;} \end{cases} \\ [x \in y] &:= \begin{cases} x, & \text{если } h(x) = h(y) + 1, \\ 0_B & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Установим σ -регулярность системы X , для чего рассмотрим произвольную последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ и покажем, что $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [x_{n+1} \in x_n] = 0_B$. Это соотношение очевидно, если $[x_{n+1} \in x_n] = 0_B$ для какого-либо $n \in \mathbb{N}$. В противном случае $h(x_{n+1}) = h(x_n) + 1$ и $[x_{n+1} \in x_n] = x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} h(x_{n+1}) = \infty$, откуда с учетом леммы 9.12(с) следует

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [x_{n+1} \in x_n] = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} = 0_B.$$

Система X не является регулярной, так как множество

$$P := \{x|_x : x \in X\} \subset {}^{\%}X$$

удовлетворяет условиям (b) леммы 9.2. Действительно, для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in C_n$

$$\begin{aligned} \bigvee_{y \in X} [y|_y \in x|_x] &= x \wedge \bigvee_{y \in X} [y \in x] \wedge y \geq x \wedge \bigvee_{y \in C_{n+1}} [y \in x] \wedge y \\ &= x \wedge \bigvee_{y \in C_{n+1}} y = x \wedge \vee C_{n+1} = x \wedge \vee C_n = x = \text{dom } x|_x. \end{aligned}$$

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть X — σ -регулярная, но не регулярная B -система. Рассмотрим множества $P_n \subset {}^{\%}X$ ($n \in \mathbb{N}$), удовлетворяющие условиям (с) леммы 9.2, положим

$$C_n := \{\text{dom } p : p \in P_n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (18)$$

и покажем, что последовательность $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ является измельчением в булевой алгебре B (см. теорему 9.13). Действительно, для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\vee C_n = \bigvee_{p \in P_n} \text{dom } p = \bigvee_{p \in P_1} \text{dom } p = \vee C_1 \neq 0_B.$$

Пусть $c_n \in C_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} c_n = 0_B$. Последнее соотношение очевидно, если $(\exists n \in \mathbb{N}) c_n \wedge c_{n+1} = 0_B$. Пусть теперь $c_n \wedge c_{n+1} \neq 0_B$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Согласно (18) для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется элемент $p_n \in P_n$ такой, что $c_n = \text{dom } p_n$. Поскольку $\text{dom } p_n \wedge \text{dom } p_{n+1} = c_n \wedge c_{n+1} \neq 0_B$, из условий 9.2(с) следует, что $c_{n+1} = \text{dom } p_{n+1} = [p_{n+1} \in p_n]$. Таким образом,

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} c_n \leq \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} c_{n+1} = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [p_{n+1} \in p_n] = 0_B$$

благодаря σ -регулярности системы X . \triangleright

§ 10. Интенциональная иерархия

Кумулятивная иерархия фон Неймана $(V_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ над множеством или классом V_0 определяется посредством трансфинитной рекурсии

$$\begin{aligned} V_{\alpha+1} &= V_\alpha \cup \mathcal{P}(V_\alpha), \quad \alpha \in \text{Ord}; \\ V_\alpha &= \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta, \quad \alpha \in \text{Lim Ord}. \end{aligned} \quad (19)$$

В этом параграфе определяется интенциональная иерархия, служащая аналогом иерархии (19) для булевозначных систем, вводится понятие булевозначного универсума над произвольной экстенциональной булевозначной системой и устанавливается тесная взаимосвязь такого универсума с соответствующей интенциональной иерархией.

10.1. Начнем с характеристики надстройки, представляющей собой булевозначный аналог дискретного шага $V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathcal{P}(V_\alpha)$ иерархии (19).

Пусть X — произвольная экстенциональная B -система, и пусть Y — подкласс X . Введем следующие понятия:

$$\begin{aligned} X \text{ интенциональна над } Y &\Leftrightarrow (\forall P \subset {}^{\%}Y)(\exists x \in X)(x \simeq P\uparrow) \\ &\Leftrightarrow (\forall \Phi \in X: \Phi \leq Y\uparrow)(\exists x \in X)(x \simeq \Phi); \\ X \text{ предикативна над } Y &\Leftrightarrow (\forall x \in X \setminus Y)(\exists P \subset {}^{\%}Y)(x \simeq P\uparrow) \\ &\Leftrightarrow X = Y \cup \mathcal{P}_X(Y); \\ X \text{ отделима над } Y &\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\forall z \in X \setminus Y)(x \simeq z \Rightarrow x = z) \\ &\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \simeq x_2, x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1, x_2 \in Y). \end{aligned}$$

Будем говорить, что экстенциональная B -система X является *надстройкой* над подсистемой Y , если

- (a) $Y \preceq X$;
- (b) X интенциональна над Y ;
- (c) X предикативна над Y ;
- (d) X отделима над Y .

Экстенциональную B -систему X назовем *надстройкой над копией* B -системы Z , если X является надстройкой над какой-либо подсистемой, изоморфной Z .

10.2. Лемма. Для любой экстенциональной булевозначной системы Z существует надстройка над копией Z .

◁ Рассмотрим произвольную экстенциональную B -систему Z , ее изоморфную копию $Y := \{\emptyset\} \times Z$ и положим (см. п. 4.2)

$$\mathcal{Y} := \{P \subset {}^{\%}Y : P \text{ насыщено, } \neg(\exists y \in Y)(y \simeq P\uparrow)\}.$$

Заметим, что $Y \cap \mathcal{Y} = \emptyset$. Действительно, по определению 3.1 любое подмножество $P \subset {}^{\%}Y$ состоит из пар, в то время как всякий элемент произведения $Y = \{\emptyset\} \times Z$ в подходе Куратовского имеет вид $\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, z\}\}$ и тем самым содержит элемент $\{\emptyset\}$, не являющийся парой.

Положим $X := Y \cup \mathcal{Y}$ и продолжим на X^2 интерпретации $=_Y, \in_Y$, полагая

$$\begin{aligned} =_x(y, z) &:= =_Y(y, z), & \in_x(y, z) &:= \in_Y(y, z), \\ =_x(P, Q) &:= [P\uparrow_Y = Q\uparrow_Y]_Y, & \in_x(P, Q) &:= [P\uparrow_Y \in Q\uparrow_Y]_Y, \\ =_x(P, y) &:= [P\uparrow_Y = y]_Y, & \in_x(P, y) &:= [P\uparrow_Y \in y]_Y, \\ =_x(y, P) &:= [y = P\uparrow_Y]_Y, & \in_x(y, P) &:= [y \in P\uparrow_Y]_Y \end{aligned}$$

для всех $y, z \in Y$ и $P, Q \in \mathcal{Y}$.

Тот факт, что $(X, =_x, \in_x)$ является B -системой, устанавливается элементарной проверкой условий, перечисленных в определении 2.1. В большинстве случаев для этой проверки достаточны «синтаксический сахар» 3.8 и истинность в Y пропозициональных аксиом и аксиом равенства (см. п. 3.9). Поясним лишь пять случаев, в трех из которых используется экстенциональность системы Y , а в двух других — очевидное неравенство $[\varphi(x)]_Y \leq [(\exists x) \varphi(x)]_Y$.

Если $x, y, z \in Y$ и $P, Q \in \mathcal{Y}$, то

$$\begin{aligned} =_x(x, P) \wedge =_x(P, z) &= [x = P\uparrow_Y \wedge P\uparrow_Y = z]_Y \\ &= [(\forall y)(y \in x \Leftrightarrow y \in P\uparrow_Y) \wedge (\forall y)(y \in P\uparrow_Y \Leftrightarrow y \in z)]_Y \\ &\leq [(\forall y)(y \in x \Leftrightarrow y \in z)]_Y \leq [x = z]_Y = =_x(x, z); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \in_x(P, y) \wedge =_x(P, z) &= [P\uparrow_Y \in y \wedge P\uparrow_Y = z]_Y \\ &= [(\exists x)(P\uparrow_Y = x \wedge x \in y) \wedge P\uparrow_Y = z]_Y \\ &= [(\exists x)((\forall u)(u \in P\uparrow_Y \Leftrightarrow u \in x) \wedge x \in y) \wedge (\forall u)(u \in P\uparrow_Y \Leftrightarrow u \in z)]_Y \\ &\leq [(\exists x)((\forall u)(u \in z \Leftrightarrow u \in x) \wedge x \in y)]_Y \\ &\leq [(\exists x)(z = x \wedge x \in y)]_Y \leq [z \in y]_Y = \in_x(z, y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \in_x(P, Q) \wedge =_x(P, z) &= [P\uparrow_Y \in Q\uparrow_Y \wedge P\uparrow_Y = z]_Y \\ &= [(\exists x)(P\uparrow_Y = x \wedge x \in Q\uparrow_Y) \wedge P\uparrow_Y = z]_Y \\ &= [(\exists x)((\forall y)(y \in P\uparrow_Y \Leftrightarrow y \in x) \wedge x \in Q\uparrow_Y) \wedge (\forall y)(y \in P\uparrow_Y \Leftrightarrow y \in z)]_Y \\ &\leq [(\exists x)((\forall y)(y \in z \Leftrightarrow y \in x) \wedge x \in Q\uparrow_Y)]_Y \\ &\leq [(\exists x)(z = x \wedge x \in Q\uparrow_Y)]_Y \leq [z \in Q\uparrow_Y]_Y = \in_x(z, Q); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \in_x(x, y) \wedge =_x(x, P) &= [x \in y \wedge x = P\uparrow_Y]_Y \\ &\leq [(\exists x)(P\uparrow_Y = x \wedge x \in y)]_Y = [P\uparrow_Y \in y]_Y = \in_x(P, y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \in_x(x, P) \wedge =_x(x, Q) &= [x \in P\uparrow_Y \wedge x = Q\uparrow_Y]_Y \\ &\leq [(\exists x)(Q\uparrow_Y = x \wedge x \in P\uparrow_Y)]_Y = [Q\uparrow_Y \in P\uparrow_Y]_Y = \in_x(Q, P). \end{aligned}$$

Покажем, что система X экстенциональна. Действительно, если $u, v \in X$ и $[\cdot \in u]_X = [\cdot \in v]_X$, то в каждом из трех случаев

$$u, v \in Y; \quad u \in Y, v \in \mathcal{Y}; \quad u, v \in \mathcal{Y}$$

имеем

$$\begin{aligned} [u = v]_X &= \left\{ \begin{array}{l} [u = v]_Y = \bigwedge_{z \in Y} [z \in u]_Y \Leftrightarrow_B [z \in v]_Y \\ [u = v\uparrow_Y]_Y = \bigwedge_{z \in Y} [z \in u]_Y \Leftrightarrow_B [z \in v\uparrow_Y]_Y \\ [u\uparrow_Y = v\uparrow_Y]_Y = \bigwedge_{z \in Y} [z \in u\uparrow_Y]_Y \Leftrightarrow_B [z \in v\uparrow_Y]_Y \end{array} \right\} \\ &= \bigwedge_{z \in Y} [z \in u]_X \Leftrightarrow_B [z \in v]_X = 1_B. \end{aligned}$$

10.1(a). Установим транзитивность подсистемы $Y \subset X$, проверив условие 7.2(c). Пусть $u \in X$ и $v \in Y$. Если $u \in Y$, то $[u \in v]_X \leq 1_B = [u \in Y\uparrow_X]_X$, а если $u \in \mathcal{Y}$, то

$$\begin{aligned} [u \in v]_X &= [u\uparrow_Y \in v]_Y = [(\exists y)(u\uparrow_Y = y \wedge y \in v)]_Y \\ &\leq [(\exists y)(u\uparrow_Y = y)]_Y = \bigvee_{y \in Y} [u\uparrow_Y = y]_Y = \bigvee_{y \in Y} [u = y]_X = [u \in Y\uparrow_X]_X. \end{aligned}$$

В дальнейшем пригодится следующее соотношение в X :

$$P \simeq P\uparrow_x \text{ для всех } P \in \mathscr{P}. \quad (20)$$

Пусть $P = \{y_i | b_i : i \in I\} \in \mathscr{P}$. Покажем, что $[x \in P]_X = [x \in P\uparrow_x]_X$ для всех $x \in X$. Действительно, если $y \in Y$, то $[y \in P]_X = [y \in P\uparrow_y]_Y = [y \in P\uparrow_x]_X$ (см. пп. 7.1, 7.6), а если $Q \in \mathscr{P}$, то с учетом леммы 3.16

$$\begin{aligned} [Q \in P]_X &= [Q\uparrow_y \in P\uparrow_y]_Y = \bigvee_{p \in P} [Q\uparrow_y = p]_Y \\ &= \bigvee_{i \in I} [Q\uparrow_y = y_i]_Y \wedge b_i = \bigvee_{i \in I} [Q = y_i]_X \wedge b_i = [Q \in P\uparrow_x]_X. \end{aligned}$$

10.1(b). Рассмотрим подмножество $P \subset {}^%Y$ и покажем, что $x \simeq P\uparrow_x$ для некоторого элемента $x \in X$.

Пусть $\bar{P} := P\uparrow_y \downarrow_y \subset {}^%Y$ — насыщенная оболочка P в системе Y (см. п. 4.4). Поскольку $P \subset \bar{P} \subset P\uparrow_x \downarrow_x$, имеем $P\uparrow_x \leq \bar{P}\uparrow_x \leq P\uparrow_x \downarrow_x \uparrow_x$ и, следовательно, $P\uparrow_x = \bar{P}\uparrow_x$ в силу равенства $P\uparrow_x \downarrow_x \uparrow_x = P\uparrow_x$ (см. лемму 4.3). Если $y \simeq \bar{P}\uparrow_y$ в Y для некоторого элемента $y \in Y$, то $y \simeq \bar{P}\uparrow_x$ в X согласно 7.3, а значит, $x := y \simeq \bar{P}\uparrow_x = P\uparrow_x$. Если же $\neg(\exists y \in Y)(y \simeq \bar{P}\uparrow_y)$, то $\bar{P} \in \mathscr{P}$ и в этом случае $x := \bar{P} \simeq \bar{P}\uparrow_x = P\uparrow_x$ благодаря (20).

Утверждение 10.1(c) является прямым следствием (20).

10.1(d). Пусть $y \in Y$ и $P \in \mathscr{P}$. По определению \mathscr{P} имеем $y \not\leq P\uparrow_y$ в Y , откуда согласно 7.3 следует, что $y \not\leq P\uparrow_x$ в X , а значит, $y \not\leq P$ в силу (20).

Пусть теперь $P, Q \in \mathscr{P}$ и $P \simeq Q$. Из (20) вытекает равенство $P\uparrow_x = Q\uparrow_x$. Тогда $P\uparrow_y = (P\uparrow_x)|_Y = (Q\uparrow_x)|_Y = P\uparrow_y$, а поскольку P и Q — насыщенные подмножества ${}^%Y$, согласно лемме 4.2 имеем $P = P\uparrow_y \downarrow_y = Q\uparrow_y \downarrow_y = Q$. \triangleright

10.3. Лемма. (а) Если B -система X является надстройкой над подсистемой $Y \subset X$, $f: X \leftrightarrow_B X$ и $f|_Y = \text{id}_Y$, то $f = \text{id}_X$.

(б) Если B -системы X и X' являются надстройками над подсистемами $Y \subset X$ и $Y' \subset X'$, то любой изоморфизм $f: Y \leftrightarrow_B Y'$ продолжается до единственного изоморфизма $f: X \leftrightarrow_B X'$. В частности, надстройка над копией булевозначной системы единственна с точностью до изоморфизма.

◁ (а) Предварительно заметим, что из экстенциональности системы X и условия 10.1(c) вытекает следующее соотношение:

$$(\forall x_1, x_2 \in X \setminus Y) [x_1 = x_2]_X = \bigwedge_{y \in Y} [y \in x_1 \Leftrightarrow y \in x_2]_X. \quad (21)$$

Действительно, для любого элемента $x \in X \setminus Y$ имеется подмножество $P \subset {}^%Y$ такое, что $X \models (x = P\uparrow_x)$, откуда с учетом истинности $X \models (P\uparrow_x \subset Y\uparrow_x)$ (см. лемму 3.17(b)) вытекает $X \models (x \subset Y\uparrow_x)$. Следовательно,

$$X \models (x_1 = x_2 \Leftrightarrow (\forall y \in Y\uparrow_x)(y \in x_1 \Leftrightarrow y \in x_2))$$

для всех $x_1, x_2 \in X \setminus Y$. Остается сослаться на лемму 3.18.

Пусть X, Y и f удовлетворяют условиям, перечисленным в (а). Рассмотрим произвольный элемент $x \in X \setminus Y$ и покажем, что $f(x) = x$. Учитывая (21) и равенства $f(y) = y$ для $y \in Y$, заключаем:

$$\begin{aligned} [f(x) = x]_X &= \bigwedge_{y \in Y} [y \in f(x) \Leftrightarrow y \in x]_X \\ &= \bigwedge_{y \in Y} [f(y) \in f(x)]_X \Leftrightarrow_B [y \in x]_X = \bigwedge_{y \in Y} [y \in x]_X \Leftrightarrow_B [y \in x]_X = 1_B. \end{aligned}$$

Таким образом, $f(x) \simeq x$, откуда в силу 10.1(d) вытекает равенство $f(x) = x$, поскольку $x \notin Y$.

(b) Единственность продолжения \bar{f} следует из (a). Покажем существование. Рассмотрим произвольные экстенциональные B -системы X и X' , являющиеся надстройками над подсистемами $Y \subset X$ и $Y' \subset X'$, и изоморфизм $f: Y \leftrightarrow_B Y'$. Согласно 10.1(c) существует семейство подмножеств $P_x \subset {}^{\%}Y$ таких, что $x \simeq P_x \uparrow_X$ для всех $x \in X \setminus Y$. Для $x \in X \setminus Y$ положим $P'_x := f^{\%}(P_x) \subset {}^{\%}Y'$ (см. п. 3.15). В силу 10.1(b) имеется функция $g: X \setminus Y \rightarrow X'$, удовлетворяющая соотношению $g(x) \simeq P'_x \uparrow_{X'}$ для всех $x \in X \setminus Y$. Определим $f: X \rightarrow X'$, полагая

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in Y, \\ g(x), & \text{если } x \in X \setminus Y, \end{cases}$$

и покажем, что $\bar{f}: X \leftrightarrow_B X'$. Ради удобства введем обозначение $x' := \bar{f}(x) \in X'$ для $x \in X$. Таким образом, $f: y \mapsto y'$ — изоморфизм Y на Y' , и для всех $x \in X \setminus Y$

$$\begin{aligned} P_x \subset {}^{\%}Y, \quad P'_x &= f^{\%}(P_x) \subset {}^{\%}Y', \\ x \simeq P_x \uparrow_X, \quad x' &\simeq P'_x \uparrow_{X'}. \end{aligned}$$

Покажем, что функция \bar{f} сохраняет истинность атомарных формул. Пусть $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ — любая из (ограниченных) формул $x_1 = x_2$, $x_1 \in x_2$, $x_1 = y_1$, $x_1 \in y_1$, $y_1 \in x_1$, $y_1 = y_2$, $y_1 \in y_2$. Тогда согласно лемме 3.15 и теореме 7.6 для всех $x_1, x_2 \in X \setminus Y$ и $y_1, y_2 \in Y$ имеем

$$\begin{aligned} [\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)]_X &= [\varphi(P_{x_1} \uparrow_X, P_{x_2} \uparrow_X, y_1, y_2)]_X \\ &= [\varphi(P_{x_1} \uparrow_Y, P_{x_2} \uparrow_Y, y_1, y_2)]_Y = [\varphi(P'_{x_1} \uparrow_{Y'}, P'_{x_2} \uparrow_{Y'}, y'_1, y'_2)]_{Y'} \\ &= [\varphi(P'_{x_1} \uparrow_{X'}, P'_{x_2} \uparrow_{X'}, y'_1, y'_2)]_{X'} = [\varphi(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2)]_{X'}. \end{aligned} \quad (22)$$

Покажем, что функция $\bar{f}: X \rightarrow X'$ инъективна. Инъективность \bar{f} на Y обеспечивается инъективностью изоморфизма $f: Y \rightarrow Y'$. Если же хотя бы один из элементов $x_1, x_2 \in X$ не принадлежит Y , то с учетом равенства $[x_1 = x_2]_X = [x'_1 = x'_2]_{X'}$ (см. (22)) из $x'_1 = x'_2$ следует $x_1 \simeq x_2$ и тогда $x_1 = x_2$ согласно 10.1(d).

Наконец, установим сюръективность функции $\bar{f}: X \rightarrow X'$. Рассмотрим произвольный элемент $z \in X'$ и покажем, что $z = x'$ для некоторого $x \in X$. Если $z \in Y'$, то нужный элемент $x \in X$ существует благодаря сюръективности изоморфизма $f: Y \rightarrow Y'$. Пусть $z \in X' \setminus Y'$. Согласно 10.1(c) имеется подмножество $P' \subset {}^{\%}Y'$, для которого $z \simeq P' \uparrow_{X'}$. Положим $P := (f^{\%})^{-1}(P') \subset Y$. В силу 10.1(b) существует элемент $x \in X$, удовлетворяющий соотношению $x \simeq P \uparrow_X$. Если $x \in Y$, то с учетом 7.3 и леммы 3.15 имеют место импликации

$$x \simeq P \uparrow_X \Rightarrow x \simeq P \uparrow_Y \Rightarrow x' \simeq P' \uparrow_{Y'} \Rightarrow x' \simeq P' \uparrow_{X'} \Rightarrow x' \simeq z,$$

приводящие к противоречию с условием 10.1(d). Следовательно, $x \notin Y$ и тогда благодаря 7.3 и лемме 3.15

$$\begin{aligned} x \simeq P \uparrow_X &\Rightarrow P_x \uparrow_X = P \uparrow_X \Rightarrow P_x \uparrow_Y = P \uparrow_Y \\ &\Rightarrow P'_x \uparrow_{Y'} = P' \uparrow_{Y'} \Rightarrow P'_x \uparrow_{X'} = P' \uparrow_{X'} \Rightarrow x' \simeq z, \end{aligned}$$

откуда согласно 10.1(d) вытекает равенство $x' = z$. \triangleright

10.4. Семейство экстенциональных B -систем $(X_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}^\bullet}$ назовем *интенциональной иерархией* или, точнее, *B -значной интенциональной иерархией над X_0* , если

$$\begin{aligned} X_{\alpha+1} & \text{ — надстройка над } X_\alpha, \quad \alpha \in \text{Ord}; \\ X_\alpha & = \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta, \quad \alpha \in \text{Lim Ord}^\bullet. \end{aligned}$$

При этом $X_\beta \preceq X_\alpha$ для любых $\beta \leq \alpha \in \text{Ord}^\bullet$ (см. лемму 7.10(e)).

10.5. Лемма. *Для любой экстенциональной B -системы Y существует интенциональная иерархия $(X_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}^\bullet}$ такая, что $X_0 \leftrightarrow_B Y$.*

◁ Требуемую иерархию несложно построить на основе лемм 7.10 и 10.2 с помощью конструкции индуктивного предела (см., например, [8, III.1.11]). Действительно, определим семейство B -систем Y_α ($\alpha \in \text{Ord}^\bullet$) и изоморфных вложений $f_\beta^\alpha: Y_\beta \rightarrow Y_\alpha$ ($\beta \leq \alpha \in \text{Ord}^\bullet$), удовлетворяющих соотношениям $f_\alpha^\alpha = \text{id}_{Y_\alpha}$ и $f_\gamma^\alpha = f_\beta^\alpha \circ f_\gamma^\beta$ ($\gamma \leq \beta \leq \alpha \in \text{Ord}^\bullet$), посредством следующей рекурсивной процедуры:

$$Y_0 := Y, f_0^0 := \text{id}_{Y_0};$$

для $\alpha \in \text{Ord}$

$Y_{\alpha+1}$ — надстройка над копией B -системы Y_α (см. пп. 10.1, 10.2),

$f_{\alpha+1}^{\alpha+1}$ — соответствующий изоморфизм Y_α на подсистему $Y_{\alpha+1}$,

$f_{\alpha+1}^{\alpha+1} := \text{id}_{Y_{\alpha+1}}$, $f_\beta^{\alpha+1} := f_\alpha^{\alpha+1} \circ f_\beta^\alpha$ для $\beta < \alpha + 1$;

для $\alpha \in \text{Lim Ord}^\bullet$

$$Y_\alpha := \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \{\beta\} \times Y_\beta \right) / \sim,$$

где для $\beta, \gamma < \alpha$, $\mu := \max\{\beta, \gamma\}$, $x \in Y_\beta$, $y \in Y_\gamma$

$$(\beta, x) \sim (\gamma, y) \Leftrightarrow f_\beta^\mu(x) = f_\gamma^\mu(y),$$

$$=_{Y_\alpha} (\sim(\beta, x), \sim(\gamma, y)) := =_{Y_\mu} (f_\beta^\mu(x), f_\gamma^\mu(y)),$$

$$\in_{Y_\alpha} (\sim(\beta, x), \sim(\gamma, y)) := \in_{Y_\mu} (f_\beta^\mu(x), f_\gamma^\mu(y)),$$

$$f_\alpha^\alpha := \text{id}_{Y_\alpha}, f_\beta^\alpha(x) := \sim(\beta, x) \text{ для } \beta < \alpha, x \in Y_\beta.$$

Из 7.3, 7.10 и 10.1 следует, что семейство B -систем $X_\alpha := f_\alpha^\infty(Y_\alpha)$ ($\alpha \in \text{Ord}^\bullet$) является искомой интенциональной иерархией. ▷

10.6. Лемма. *Пусть $(X_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}^\bullet}$ и $(Y_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}^\bullet}$ — B -значные интенциональные иерархии.*

(а) Если $f: X_\infty \leftrightarrow_B Y_\infty$ и $f|_{X_0}: X_0 \leftrightarrow_B Y_0$, то $f|_{X_\alpha}: X_\alpha \leftrightarrow_B Y_\alpha$ для всех $\alpha \in \text{Ord}^\bullet$.

(б) Если $f, g: X_\infty \leftrightarrow_B Y_\infty$ и $f|_{X_0} = g|_{X_0}$, то $f|_{X_\alpha} = g|_{X_\alpha}$ для всех $\alpha \in \text{Ord}^\bullet$.

(с) Любой изоморфизм $f_0: X_0 \leftrightarrow_B Y_0$ продолжается до единственного изоморфизма $f: X_\infty \leftrightarrow_B Y_\infty$.

◁ (а), (б) При использовании индукции по $\alpha \in \text{Ord}^\bullet$ базовый и предельный шаги тривиальны, а шаг $\alpha \mapsto \alpha + 1$ легко обосновать для утверждения (а) с помощью леммы 3.15 и 10.1(b), (с), а для утверждения (б) — с помощью (а) и леммы 10.3(a).

(с) Трансфинитной рекурсией на основе леммы 10.3(b) легко построить такое семейство изоморфизмов $f_\alpha: X_\alpha \leftrightarrow_B Y_\alpha$ ($\alpha \in \text{Ord}^\bullet$), что $f_\alpha \subset f_\beta$ при $\alpha \leq \beta$. Тогда $f := f_\infty$ — искомый изоморфизм. Единственность продолжения вытекает из (б). ▷

10.7. Будем говорить, что B -система X является *булевозначным* (B -значным) *универсумом над* X_0 , если выполняются следующие условия:

- (a) $X_0 \preceq X$;
- (b) X экстенциональна;
- (c) X интенциональна;
- (d) элементы $X \setminus X_0$ предикативны;
- (e) X отделима над X_0 ;
- (f) X регулярна вне X_0 .

Согласно следствию 6.9 из условий (b) и (c) вытекает цикличность класса $\mathcal{P}_X(X)$ всех предикативных элементов X , откуда с учетом (d) следует, что разность $X \setminus X_0$ является предцикличной, а значит, по теореме 9.9(b) условие (f) равносильно σ -регулярности X вне X_0 .

Как легко видеть, булевозначный универсум X над X_0 является булевозначным универсумом над любой подсистемой Y , удовлетворяющей соотношениям $X_0 \subset Y \preceq X$.

10.8. Теорема. (a) Если $(X_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}^\bullet}$ — интенциональная иерархия, то X_∞ — булевозначный универсум над X_0 .

(b) Если X — булевозначный универсум над X_0 , то существует единственная интенциональная иерархия $(X_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}^\bullet}$ такая, что $X = X_\infty$. При этом

$$\begin{aligned} X_{\alpha+1} &= X_\alpha \cup \mathcal{P}_X(X_\alpha), & \alpha \in \text{Ord}; \\ X_\alpha &= \bigcup_{\alpha < \beta} X_\beta, & \alpha \in \text{Lim Ord}^\bullet. \end{aligned} \quad (23)$$

◁ (a) Проверим условия 10.7(a)–(f) для $X = X_\infty$.

10.7(a). В силу леммы 7.10(e) система X_0 , как и каждая из систем X_α , является транзитивной подсистемой X_∞ . Отметим, что по этой причине выполнение соотношения $x \simeq P\uparrow$ в любой из систем X_α равносильно его выполнению в X_∞ (см. п. 7.3).

Условие 10.7(b) входит в определение интенциональной иерархии.

10.7(c). Пусть P — подмножество $\%X_\infty = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \%X_\alpha$. Выбирая для каждого элемента $p \in P$ ординал $\alpha(p)$, удовлетворяющий условию $p \in \%X_{\alpha(p)}$, заключаем, что $P \subset \%X_\alpha$, где $\alpha := \vee \{\alpha(p) : p \in P\}$, а значит, $P\uparrow \simeq x$ для некоторого $x \in X_{\alpha+1}$ согласно 10.1(b).

10.7(d). Если $x \in X_\infty \setminus X_0$, то $x \in X_{\alpha+1}$ для некоторого $\alpha \in \text{Ord}$ и поэтому $(\exists P \subset \%X_\alpha)(x \simeq P\uparrow)$ согласно 10.1(c).

10.7(e). Пусть $x, y \in X_\infty$, $x \simeq y$ и $x \neq y$. Положим $\alpha := \min\{\beta \in \text{Ord} : x, y \in X_\beta\}$ и покажем, что $\alpha = 0$. Действительно, ординал α не может быть предельным, поскольку в этом случае $X_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta$ и тогда имеется ординал $\beta < \alpha$, для которого $x, y \in X_\beta$. Если же $\alpha = \beta + 1$, то $x, y \in X_\beta$ в силу 10.1(d).

10.7(f). Докажем, что все системы X_α (включая X_∞) регулярны вне X_0 , применив индукцию по $\alpha \in \text{Ord}^\bullet$.

Случай $\alpha = 0$ тривиален: система X_0 , очевидно, регулярна вне X_0 .

Пусть система X_α регулярна вне X_0 . Согласно лемме 9.5 для доказательства регулярности $X_{\alpha+1}$ вне X_0 достаточно показать регулярность $X_{\alpha+1}$ вне X_α . Из 10.1(c) с учетом леммы 3.17(b) следует, что

$$X_{\alpha+1} \models (\forall y)(y \in X_\alpha \uparrow \vee y \subset X_\alpha \uparrow). \quad (24)$$

Рассмотрим произвольный булевозначный класс $\Phi \in X_{\alpha+1}$ и установим истинность

$$X_{\alpha+1} \models (\Phi \cap X_{\alpha} \uparrow = \emptyset \wedge \Phi \neq \emptyset \Rightarrow (\exists y \in \Phi)(y \cap \Phi = \emptyset))$$

путем «рассуждений внутри $X_{\alpha+1}$ » (см. п. 3.10). Пусть $\Phi \cap X_{\alpha} \uparrow = \emptyset$ и $\Phi \neq \emptyset$. Возьмем любой элемент $y \in \Phi$ и покажем, что $y \cap \Phi = \emptyset$. Действительно, из $\Phi \cap X_{\alpha} \uparrow = \emptyset$ следует $y \notin X_{\alpha} \uparrow$, а значит, $y \subset X_{\alpha} \uparrow$ согласно (24) и поэтому $y \cap \Phi \subset X_{\alpha} \uparrow \cap \Phi = \emptyset$.

Пусть теперь $\alpha \in \text{Lim Ord}^*$, и пусть системы X_{β} регулярны вне X_0 для всех $\beta < \alpha$. Согласно лемме 8.4 для доказательства регулярности X_{α} вне X_0 достаточно рассмотреть булевозначный класс $\Phi \in X_{\alpha}$, удовлетворяющий неравенству $\Phi \leq \neg(X_0 \uparrow_{x_{\alpha}})$, и показать $X_{\alpha} \models \mu(\Phi)$ или, что равносильно,

$$(\forall x \in X_{\alpha}) X_{\alpha} \models (x \in \Phi \Rightarrow (\exists y \in \Phi)(y \cap \Phi = \emptyset)).$$

Если $x \in X_{\alpha} = \bigcup_{\beta < \alpha} X_{\beta}$, то $x \in X_{\beta}$ для некоторого ординала $\beta < \alpha$. Установим истинность

$$X_{\alpha} \models (x \in \Phi \Rightarrow (\exists y \in \Phi)(y \cap \Phi = \emptyset))$$

путем «рассуждений внутри X_{α} ». Опираясь на соотношения $\Phi \cap X_0 \uparrow = \emptyset$, $x \in X_{\beta} \uparrow$ и $x \in \Phi$, покажем, что $(\exists y \in \Phi)(y \cap \Phi = \emptyset)$. Поскольку класс $X_{\beta} \uparrow \setminus X_0 \uparrow$ регулярен (см. лемму 9.4) и $\emptyset \neq \Phi \cap X_{\beta} \uparrow \subset X_{\beta} \uparrow \setminus X_0 \uparrow$, имеется такой элемент $y \in \Phi \cap X_{\beta} \uparrow$, что $y \cap \Phi \cap X_{\beta} \uparrow = \emptyset$. В силу транзитивности $X_{\beta} \uparrow$ из $y \in X_{\beta} \uparrow$ следует $y \subset X_{\beta} \uparrow$. Таким образом, $y \cap \Phi = y \cap \Phi \cap X_{\beta} \uparrow = \emptyset$.

(b) Рассмотрим семейство подсистем $X_{\alpha} \subset X$ ($\alpha \in \text{Ord}^*$), построенное с помощью трансфинитной рекурсии согласно (23), начиная с данной подсистемы $X_0 \subset X$.

Индукцией по $\alpha \in \text{Ord}^*$ покажем, что $X_{\alpha} \preceq X$. Случай $\alpha = 0$ содержится в условии 10.7(a). Предположим, что $X_{\alpha} \preceq X$, рассмотрим произвольные элементы $x \in X$, $y \in X_{\alpha+1}$ и установим неравенство $[x \in y] \leq [x \in X_{\alpha+1} \uparrow]$. Если $y \in X_{\alpha}$, то $[x \in y] \leq [x \in X_{\alpha} \uparrow] \leq [x \in X_{\alpha+1} \uparrow]$, а если $y \in \mathcal{R}_{\alpha}(X_{\alpha})$, то $y \simeq P \uparrow$, $P \subset {}^{\%}X_{\alpha}$, и тогда с учетом леммы 3.17(b) имеем $[x \in y] = [x \in P \uparrow] \leq [x \in X_{\alpha} \uparrow] \leq [x \in X_{\alpha+1} \uparrow]$. Если же $\alpha \in \text{Lim Ord}^*$ и $X_{\beta} \preceq X$ для всех $\beta < \alpha$, то $X_{\alpha} = \bigcup_{\alpha < \beta} X_{\beta} \preceq X$ в силу леммы 7.10(c).

Согласно лемме 7.10(a) из доказанного выше следует $X_{\alpha} \preceq X_{\alpha+1}$ для всех $\alpha \in \text{Ord}$, что соответствует условию 10.1(a) в определении надстройки. Условия 10.1(b),(c) обеспечиваются определением $X_{\alpha+1}$, а 10.1(d) вытекает из 10.7(e). Таким образом, семейство $(X_{\alpha})_{\alpha \in \text{Ord}^*}$ является интенциональной иерархией.

Для доказательства равенства $X = X_{\infty}$ потребуются несколько вспомогательных фактов. Покажем, что

$$(\forall x \in X)(\exists y \in X_{\infty}) [x = y] = [x \subset X_{\infty} \uparrow]. \quad (25)$$

В случае $x \in X_0$ утверждение (25) очевидно. Пусть $x \notin X_0$. В силу 10.7(d) элемент $x \in X$ предикативен, а значит, по лемме 4.10 имеется такое множество $P \subset {}^{\%}X_{\infty}$, что $[x \subset X_{\infty} \uparrow] = [x = P \uparrow]$. Согласно (a) система X_{∞} удовлетворяет условию 10.7(c), поэтому булевозначный класс $P \uparrow$ реализуется некоторым элементом $y \in X_{\infty}$, который является искомым.

Покажем также, что

$$(\forall x \in X) [x \in X_\infty \uparrow] = [x \subset X_\infty \uparrow]. \quad (26)$$

Неравенство « \leq » обеспечивается транзитивностью подсистемы $X_\infty \subset X$. С другой стороны, согласно (25) для всякого $x \in X$ имеется элемент $y \in X_\infty$, удовлетворяющий равенству $[x = y] = [x \subset X_\infty \uparrow]$, и, следовательно,

$$[x \subset X_\infty \uparrow] = [x = y] \wedge [y \in X_\infty \uparrow] \leq [x \in X_\infty \uparrow].$$

Переходя к доказательству равенства $X = X_\infty$ от противного, допустим, что существует элемент $x \in X$, не принадлежащий X_∞ . Положим $b := [x \notin X_\infty \uparrow] = [x \not\subset X_\infty \uparrow]$ (см. (26)). Заметим, что $b \neq 0_B$. Действительно, если $b = 0_B$, то $X \models (x \subset X_\infty \uparrow)$ и тогда благодаря (25) найдется такой элемент $y \in X_\infty$, что $[x = y] = [x \subset X_\infty \uparrow] = 1_B$, т. е. $x \simeq y$, откуда с учетом 10.7(e) следует $x = y$ и тем самым $x \in X_\infty$. Пусть $\Phi := \neg(X_\infty \uparrow)$ — дополнение $X_\infty \uparrow$ в X . Поскольку система X регулярна вне X_0 (см. п. 10.7(f)), из $\Phi \leq \neg(X_0 \uparrow)$ и $[\Phi \neq \emptyset] \geq b$ следует $[(\exists y \in \Phi)(y \cap \Phi = \emptyset)] \geq b$, поэтому $[y \in \Phi \wedge y \cap \Phi = \emptyset] \neq 0_B$ для некоторого элемента $y \in X$. С другой стороны, согласно (26)

$$[y \in \Phi \wedge y \cap \Phi = \emptyset] = [y \notin X_\infty \uparrow \wedge y \subset X_\infty \uparrow] = 0_B.$$

Единственность упомянутой в (b) интенциональной иерархии вытекает из леммы 10.6(a). Действительно, если $(X_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ и $(Y_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ — такие интенциональные иерархии, что $X_0 = Y_0$ и $X_\infty = Y_\infty$, то для всех $\alpha \in \text{Ord}$ справедливо соотношение $(\text{id}_{X_\infty})|_{X_\alpha} : X_\alpha \leftrightarrow_B Y_\alpha$, т. е. $X_\alpha = Y_\alpha$. \square

10.9. Приведенное ниже утверждение вытекает из лемм 10.5, 10.6(c) и теоремы 10.8.

Теорема. (a) Для любой экстенциональной B -системы Y существует единственный с точностью до изоморфизма B -значный универсум X над X_0 такой, что $X_0 \leftrightarrow_B Y$.

(b) Если X и Y — B -значные универсумы над X_0 и Y_0 соответственно, то любой изоморфизм $f_0 : X_0 \leftrightarrow_B Y_0$ продолжается до единственного изоморфизма $f : X \leftrightarrow_B Y$.

Применяя утверждение (a) к какой-либо экстенциональной B -системе Y и рассматривая B -значный универсум X над копией X_0 системы Y , условимся отождествлять X_0 с Y и называть X булевозначным универсумом над Y .

§ 11. Булевозначный универсум

В данном параграфе формулируются определяющие свойства классического булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ как алгебраической системы, доказываются существование такой системы и ее единственность с точностью до единственного изоморфизма. Эти известные факты (см. [4, 9]) воспроизводятся здесь как прямые следствия установленных в § 10 общих свойств булевозначного универсума над произвольной экстенциональной системой. К новым результатам можно отнести приведенные ниже примеры булевозначных систем с необычными сочетаниями свойств. Эти примеры показывают, что для любой полной булевой алгебры B ни одно из условий, перечисленных в определении B -значного универсума, не вытекает из остальных.

11.1. Булевозначную систему X называют *булевозначным* (точнее, *B -значным*) *универсумом* (см. [9, 3.4]), если она удовлетворяет следующим условиям:

- (a) X экстенциональна: $X \models (\forall x, y)((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$;
- (b) X интенциональна: $(\forall P \subset {}^{\%}X)(\exists x \in X)(x \simeq P\uparrow)$;
- (c) X предикативна: $(\forall x \in X)(\exists P \subset {}^{\%}X)(x \simeq P\uparrow)$;
- (d) X отделима: $(\forall x, y \in X)(X \models (x = y) \Rightarrow x = y)$;
- (e) X регулярна: $X \models (\forall \Phi)((\exists y)(y \in \Phi) \Rightarrow (\exists y \in \Phi)(\forall z \in \Phi)(z \notin y))$.

Отметим, что в силу (b) и (c) регулярность (e) системы X равносильна истинности в X аксиомы регулярности (см. п. 9.1).

11.2. Лемма. Пусть Y — произвольная экстенциональная B -система. Если B -система X является булевозначным универсумом над Y , то

- (a) X экстенциональна;
- (b) X интенциональна;
- (c) X предикативна тогда и только тогда, когда Y предикативна;
- (d) X отделима тогда и только тогда, когда Y отделима;
- (e) X регулярна тогда и только тогда, когда Y регулярна.

◁ Утверждения (a) и (b) явно входят в определение 10.7; (c) следует из 7.3(a) и 10.7(a); (d) обеспечивается условием 10.7(e); (e) вытекает из леммы 9.7, следствия 9.6 и условия 10.7(f). ▷

11.3. Из леммы 11.2 следует, что понятие B -значного универсума совпадает с понятием булевозначного универсума над предикативной отделимой регулярной B -системой. Простейшей из таких B -систем является одноэлементная регулярная B -система. (Было бы еще проще говорить об универсуме над \emptyset , но алгебраическая система не может быть пустой.)

Следствие. Следующие свойства B -системы X эквивалентны:

- (a) X является булевозначным универсумом;
- (b) X является булевозначным универсумом над $\{y\}$, где y — такой элемент X , что $X \models (y = \emptyset)$;
- (c) X является булевозначным универсумом над одноэлементной B -системой $Y = \{y\}$, удовлетворяющей соотношению $Y \models (y \notin y)$.

11.4. Следующее утверждение, приведенное (без доказательства) в [9, 3.4], вытекает из теоремы 10.9 и следствия 11.3.

Теорема¹⁾. (a) Для любой полной булевой алгебры B существует единственный с точностью до изоморфизма B -значный универсум.

(b) Для любых B -значных универсумов X и Y существует единственный изоморфизм $f: X \leftrightarrow_B Y$.

11.5. Булевозначный универсум, характеризуемый с точностью до изоморфизма, обозначают символом $\mathbb{V}^{(B)}$, а соответствующие оценки истинности $[\varphi]_{\mathbb{V}^{(B)}}$ записывают в виде $\llbracket \varphi \rrbracket$ (см. [4, 9]). При этом булевозначный универсум является моделью ZFC (см. [4, 4.4]). Точнее говоря, имеются такие определяемые с параметром B классы $\mathbb{V}^{(B)}$, $\llbracket \cdot = \cdot \rrbracket$ и $\llbracket \cdot \in \cdot \rrbracket$, что

ZFC, B — полная булева алгебра \vdash

$(\mathbb{V}^{(B)}, \llbracket \cdot = \cdot \rrbracket, \llbracket \cdot \in \cdot \rrbracket)$ — B -значный универсум,

$(\mathbb{V}^{(B)}, \llbracket \cdot = \cdot \rrbracket, \llbracket \cdot \in \cdot \rrbracket) \models \text{ZFC}$.

¹⁾ Автор признателен профессору Роберту М. Соловею за плодотворное обсуждение схемы доказательства этой теоремы.

Приведенные ниже примеры 11.6–11.10 показывают, что для любой полной булевой алгебры B каждое из пяти условий (а)–(е), перечисленных в определении 11.1 булевозначного универсума, существенно, т. е. не вытекает из четырех остальных. Основными инструментами здесь служат теорема 10.9(а) и лемма 11.2.

11.6. ПРИМЕР. Для любой полной булевой алгебры B существует B -значная система, которая является интенциональной, предикативной, отделимой и регулярной, но не экстенциональной.

◁ Расширим ZFC определениями констант $2_1 := \{\{\emptyset\}\}$ и $2_2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Рассмотрим булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ и элементы $\emptyset^\wedge, \{\emptyset\}^\wedge, 2_1^\wedge, 2_2^\wedge \in \mathbb{V}^{(B)}$, реализующие подъемы $\emptyset^\uparrow, \{\emptyset^\wedge\}^\uparrow, \{\{\emptyset\}^\wedge\}^\uparrow$ и $\{\emptyset^\wedge, \{\emptyset\}^\wedge\}^\uparrow$ соответственно. Как легко видеть, $\mathbb{V}^{(B)} \models (2_1^\wedge = 2_1)$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models (2_2^\wedge = 2_2)$ (см. п. 2.5).

Покажем, что подсистема

$$X := \{x \in \mathbb{V}^{(B)} : \mathbb{V}^{(B)} \models (x \not\subseteq \{\emptyset\})\} \subset \mathbb{V}^{(B)}$$

обладает заявленными свойствами.

Согласно 2.3(а) из тавтологий $2_1, 2_2 \not\subseteq \{\emptyset\}$ и $2_1 \neq 2_2$ следует, что $2_1^\wedge, 2_2^\wedge \in X$ и $[2_1^\wedge = 2_2^\wedge]_X = [2_1^\wedge = 2_2^\wedge] = 0_B$. С другой стороны, для всех $x \in X$

$$\begin{aligned} [x \in 2_1^\wedge]_X &= [x \in 2_1^\wedge] = [x \in 2_1 \wedge x \not\subseteq \{\emptyset\}] = 0_B \\ &= [x \in 2_2 \wedge x \not\subseteq \{\emptyset\}] = [x \in 2_2^\wedge] = [x \in 2_2^\wedge]_X. \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, $X \models (2_1^\wedge \neq 2_2^\wedge)$ и $X \models (\forall x)(x \in 2_1^\wedge \Leftrightarrow x \in 2_2^\wedge)$, а значит, система X не является экстенциональной.

Чтобы доказать интенциональность X , для произвольного подмножества $P \subset {}^*X$ рассмотрим элемент $u \in \mathbb{V}^{(B)}$, реализующий подъем P^\uparrow , положим $x := u|_b \sqcup 2_1^\wedge|_{\neg b}$ (см. п. 5.3), где $b := \bigvee_{p \in P} \text{dom } p$, и покажем, что $x \in X$ и $x \simeq P^\uparrow_x$.

Согласно лемме 3.18(а) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} [P^\uparrow \not\subseteq \{\emptyset\}] &= [(\exists y \in P^\uparrow)(y \not\subseteq \{\emptyset\})] \\ &= \bigvee_{p \in P} [p \not\subseteq \{\emptyset\}] \geq \bigvee_{p \in P} [p \not\subseteq \{\emptyset\}] = \bigvee_{p \in P} \text{dom } p = b, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$[x \not\subseteq \{\emptyset\}] = ([u \not\subseteq \{\emptyset\}] \wedge b) \vee ([2_1 \not\subseteq \{\emptyset\}] \wedge \neg b) = ([P^\uparrow \not\subseteq \{\emptyset\}] \wedge b) \vee \neg b = 1_B,$$

т. е. $x \in X$. Кроме того, для всех $y \in X$ с учетом равенства $[y \in 2_1^\wedge] = 0_B$ (см. (27)) имеем

$$\begin{aligned} [y \in x]_X &= [y \in x] = ([y \in u] \wedge b) \vee ([y \in 2_1^\wedge] \wedge \neg b) = [y \in P^\uparrow] \wedge b \\ &= [y \in P^\uparrow \wedge P^\uparrow \neq \emptyset] = [y \in P^\uparrow] = P^\uparrow(y) = P^\uparrow_x(y). \end{aligned}$$

Предикативность и отделимость X непосредственно вытекают из предикативности и отделимости $\mathbb{V}^{(B)}$, поскольку $x \downarrow_x \subset x \downarrow_{\mathbb{V}^{(B)}}$ и $[x = y]_X = [x = y]$ для всех $x, y \in X$. Регулярность X следует из регулярности $\mathbb{V}^{(B)}$ согласно лемме 9.7. ▷

11.7. ПРИМЕР. Для любой полной булевой алгебры B существует B -значная система, которая является экстенциональной, предикативной, отделимой и регулярной, но не интенциональной.

◁ Экстенциональность, предикативность, отделимость и регулярность одноэлементной системы $\{x\}$ с интерпретациями $[x = x] = 1_B$ и $[x \in x] = 0_B$ очевидны. Поскольку $[x \in x] = 0_B \neq 1_B = \{x\}^\uparrow(x)$, булевозначный класс $\{x\}^\uparrow$ не реализуется (единственным) элементом x , а значит, рассматриваемая система не интенциональна. ▷

11.8. ПРИМЕР. Для любой полной булевой алгебры B существует B -значная система, которая является экстенциональной, интенциональной, отделимой и регулярной, но не предикативной.

◁ Пусть Z — экстенциональная, отделимая, регулярная B -значная система, носитель которой является собственным классом, отличным от класса всех множеств. (В качестве Z можно взять, например, изоморфную копию $\{\emptyset\} \times \mathbb{V}^{(B)}$ булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$.) Рассмотрим произвольное множество ∞ , не принадлежащее Z , положим $Y := Z \cup \{\infty\}$ и распространим на Y булевозначные интерпретации Z , полагая $[\infty = \infty]_Y = 1_B$, $[\infty \in \infty]_Y = [z = \infty]_Y = [\infty = z]_Y = [\infty \in z]_Y = 0_B$ и $[z \in \infty]_Y = 1_B$ для всех $z \in Z$. Элементарная проверка показывает, что Y является B -системой.

Чтобы установить экстенциональность Y , рассмотрим произвольные элементы $x, y \in Y$ и покажем, что $[(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)]_Y \leq [x = y]_Y$. Случай $x, y \in Z$ сводится к экстенциональности Z , случай $x = y = \infty$ тривиален, а в случае $x \in Z$ и $y = \infty$ требуемое неравенство обеспечивается регулярностью Z , так как из истинности $Z \models \mu(\{x\}\uparrow)$ следует $Z \models (x \notin x)$ и поэтому

$$[(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in \infty)]_Y \leq [x \in x \Leftrightarrow x \in \infty]_Y = [x \in x]_Z = 0_B = [x = \infty]_Y.$$

Как легко видеть, система Y отделима и $Z \preccurlyeq Y$. Поскольку

$$Y \models (\forall \Phi)(\Phi \cap Z \uparrow = \emptyset \Rightarrow \Phi \subset \{\infty\}),$$

система Y регулярна вне Z . По следствию 9.6 регулярность Z влечет регулярность Y . Система Y не является предикативной, так как насыщенный спуск $\infty \downarrow$ содержит собственный класс $\infty \downarrow = Z$.

Из леммы 11.2 следует, что булевозначный универсум над Y удовлетворяет всем требованиям, указанным в условии. ▷

11.9. ПРИМЕР. Для любой полной булевой алгебры B существует B -значная система, которая является экстенциональной, интенциональной, предикативной и регулярной, но не отделимой.

◁ Согласно лемме 11.2 всеми перечисленными свойствами обладает булевозначный универсум над двухэлементной B -системой Y с интерпретациями $=_Y : Y^2 \rightarrow \{1_B\}$, $\in_Y : Y^2 \rightarrow \{0_B\}$. ▷

11.10. ПРИМЕР. Для любой полной булевой алгебры B существует B -значная система, которая является экстенциональной, интенциональной, предикативной и отделимой, но не регулярной.

◁ Поскольку одноэлементное множество $Y = \{y\}$, снабженное интерпретациями $[y = y]_Y = [y \in y]_Y = 1_B$, является экстенциональной, предикативной, отделимой и не регулярной B -системой, согласно лемме 11.2 булевозначный универсум над Y обладает заявленными в условии свойствами. ▷

§ 12. Иерархии в булевозначном универсуме

В этом параграфе предложены описания структуры булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$ посредством четырех иерархий, одна из которых воспроизводит интенциональную иерархию, вторая служит спуском иерархии фон Неймана, а две другие порождаются подъемами специального вида и перемешиваниями.

В соответствии с соглашением 3.20 для всякого подмножества $P \subset {}^{\%}\mathbb{V}^{(B)}$ булевозначный класс $P \uparrow \in \mathbb{V}^{(B)}$ отождествляется с реализующим его элементом $\mathbb{V}^{(B)}$.

12.1. Иерархия, описанная в следующей теореме, соответствует классической конструкции (неотделимого) булевозначного универсума [4, 4.1.2; 6, (14.15)] и за вычетом нулевого члена совпадает с интенциональной иерархией (23) над одноэлементной регулярной B -системой.

Теорема. *С помощью трансфинитной рекурсии определим семейство подмножеств $\mathbb{V}_\alpha^{(B)} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ ($\alpha \in \text{Ord}$), полагая*

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_0^{(B)} &= \emptyset; \\ \mathbb{V}_{\alpha+1}^{(B)} &= \mathcal{P}_{\mathbb{V}^{(B)}}(\mathbb{V}_\alpha^{(B)}), \quad \alpha \in \text{Ord}; \\ \mathbb{V}_\alpha^{(B)} &= \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbb{V}_\beta^{(B)}, \quad \alpha \in \text{Lim Ord}. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда

$$\mathbb{V}^{(B)} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \mathbb{V}_\alpha^{(B)}. \quad (29)$$

При этом семейство $(X_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}^\bullet}$, определенное по правилу

$$X_\alpha = \begin{cases} \mathbb{V}_{\alpha+1}^{(B)} & \text{для } \alpha < \omega; \\ \mathbb{V}_\alpha^{(B)} & \text{для } \omega \leq \alpha < \infty; \\ \mathbb{V}^{(B)} & \text{для } \alpha = \infty, \end{cases}$$

является интенциональной иерархией над $X_0 = \mathbb{V}_1^{(B)} = \{\emptyset\}$. В частности, $\mathbb{V}_\beta^{(B)}$ — транзитивное подмножество $\mathbb{V}_\alpha^{(B)}$ для всех $\beta \leq \alpha \in \text{Ord}^\bullet$, где $\mathbb{V}_\infty^{(B)} := \mathbb{V}^{(B)}$.

◁ Индукцией по $\alpha \in \text{Ord}$ покажем, что $\mathbb{V}_\beta^{(B)} \subset \mathbb{V}_\alpha^{(B)}$ при $\beta < \alpha$. Пусть $\mathbb{V}_\gamma^{(B)} \subset \mathbb{V}_\beta^{(B)}$ для всех $\gamma < \beta < \alpha$. Рассмотрим произвольные $\beta < \alpha$ и $x \in \mathbb{V}_\beta^{(B)}$ и покажем, что $x \in \mathbb{V}_\alpha^{(B)}$. Случаи $\alpha = 0$ и $\alpha \in \text{Lim Ord}$ тривиальны. Пусть $\alpha = \alpha_0 + 1$. Из определения (28) следует, что $x \in \mathcal{P}_{\mathbb{V}^{(B)}}(\mathbb{V}_\gamma^{(B)})$ для некоторого ординала $\gamma < \beta \leq \alpha_0 < \alpha$. По предположению индукции $\mathbb{V}_\gamma^{(B)} \subset \mathbb{V}_{\alpha_0}^{(B)}$, а значит, $x \in \mathcal{P}_{\mathbb{V}^{(B)}}(\mathbb{V}_{\alpha_0}^{(B)}) \subset \mathcal{P}_{\mathbb{V}^{(B)}}(\mathbb{V}_{\alpha_0}^{(B)}) = \mathbb{V}_\alpha^{(B)}$.

Из включений $X_\alpha \subset X_{\alpha+1}$ следует, что $X_{\alpha+1} = X_\alpha \cup \mathcal{P}_{X_\infty}(X_\alpha)$ для всех $\alpha \in \text{Ord}$. Остается воспользоваться теоремой 10.8(b). ▷

12.2. Следствие [4, 4.1.3]. *Пусть C — произвольный подкласс $\mathbb{V}^{(B)}$. Если $P \uparrow \in C$ для всех $P \subset {}^{\%}C$, то $C = \mathbb{V}^{(B)}$.*

◁ Допустим, $C \neq \mathbb{V}^{(B)}$. По теореме 12.1 существует наименьший ординал α , для которого имеется элемент $x \in \mathbb{V}_\alpha^{(B)} \setminus C$. Из (28) видно, что $\alpha \neq 0$ и $\alpha \notin \text{Lim Ord}$. С другой стороны, если $\alpha = \beta + 1$, то $x = P \uparrow$ для некоторого подмножества $P \subset {}^{\%}\mathbb{V}_\beta^{(B)}$, и тогда из $\mathbb{V}_\beta^{(B)} \subset C$ вытекает $x \in C$. ▷

12.3. Поскольку булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ является моделью ZFC, в нем истинно утверждение

$$\mathbb{V} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \mathbb{V}_\alpha$$

о представимости класса всех множеств \mathbb{V} в виде объединения классической кумулятивной иерархии фон Неймана $(\mathbb{V}_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ (см. (15)).

Определим *спуск иерархии* $(\mathcal{V}_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ из $\mathbb{V}^{(B)}$, сопоставляя каждому ординалу α спуск $\mathcal{V}_\alpha \downarrow$ того элемента $\mathcal{V}_\alpha \in \mathbb{V}^{(B)}$, который внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ равен соответствующему члену $\mathbb{V}_{\alpha^\wedge}$ иерархии фон Неймана (см. [4, 4.4.10]):

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathcal{V}_\alpha = \mathbb{V}_{\alpha^\wedge}).$$

Было бы естественно ожидать, что иерархия (28), являющаяся булевозначным аналогом иерархии (15), совпадает со спуском последней: $(\mathbb{V}_\alpha^{(B)})_{\alpha \in \text{Ord}} = (\mathcal{Y}_{\alpha\downarrow})_{\alpha \in \text{Ord}}$. Тем не менее в случае бесконечной булевой алгебры B это не так, поскольку не все подмножества $\mathbb{V}_\alpha^{(B)} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ цикличны. Действительно, если $(d_n)_{n \in \omega}$ — разбиение единицы, составленное из ненулевых элементов $d_n \in B$, то соединение $\bigsqcup_{n \in \omega} n^\wedge \upharpoonright_{d_n}$ принадлежит $\mathcal{Y}_{\omega\downarrow}$, но не принадлежит $\mathbb{V}_\omega^{(B)} = \bigcup_{n \in \omega} \mathbb{V}_n^{(B)}$.

Следующее утверждение показывает, что для превращения иерархии (28) в спуск иерархии фон Неймана достаточно добавить перемешивания на предельных шагах.

Теорема. *С помощью трансфинитной рекурсии определим семейство подмножеств $\mathbb{U}_\alpha^{(B)} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ ($\alpha \in \text{Ord}$), полагая*

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_0^{(B)} &= \emptyset; \\ \mathbb{U}_{\alpha+1}^{(B)} &= \mathcal{P}_{\mathbb{V}^{(B)}}(\mathbb{U}_\alpha^{(B)}), \quad \alpha \in \text{Ord}; \\ \mathbb{U}_\alpha^{(B)} &= \text{mix} \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbb{U}_\beta^{(B)}, \quad \alpha \in \text{Lim Ord}. \end{aligned}$$

Тогда $(\mathbb{U}_\alpha^{(B)})_{\alpha \in \text{Ord}}$ — спуск иерархии фон Неймана $(\mathbb{V}_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ из $\mathbb{V}^{(B)}$, т. е.

$$\mathbb{U}_\alpha^{(B)} = \mathcal{Y}_{\alpha\downarrow} \text{ для всех } \alpha \in \text{Ord},$$

где \mathcal{Y}_α — элементы $\mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющие соотношениям $\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathcal{Y}_\alpha = \mathbb{V}_{\alpha^\wedge})$.

◁ Докажем равенство $\mathbb{U}_\alpha^{(B)} = \mathcal{Y}_{\alpha\downarrow}$ индукцией по $\alpha \in \text{Ord}$.

База индукции $\alpha = 0$ тривиальна: $\mathbb{U}_0^{(B)} = \emptyset = \emptyset\upharpoonright\downarrow = \mathcal{Y}_{0\downarrow}$.

Если $\mathbb{U}_\alpha^{(B)} = \mathcal{Y}_{\alpha\downarrow}$, то, учитывая соотношение

$$\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathcal{P}(\mathbb{U}_\alpha^{(B)}\upharpoonright) = \mathcal{P}(\mathcal{Y}_{\alpha\downarrow}\upharpoonright) = \mathcal{P}(\mathcal{Y}_\alpha) = \mathcal{P}(\mathbb{V}_{\alpha^\wedge}) = \mathbb{V}_{\alpha^\wedge+1} = \mathbb{V}_{(\alpha+1)^\wedge} = \mathcal{Y}_{\alpha+1})$$

и используя лемму 3.17(b),(c) и следствие 6.4, заключаем, что для всех $x \in \mathbb{V}^{(B)}$

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{U}_{\alpha+1}^{(B)} &\Leftrightarrow x \in \mathcal{P}_{\mathbb{V}^{(B)}}(\mathbb{U}_\alpha^{(B)}) \Leftrightarrow (\exists P \subset {}^{\%}\mathbb{U}_\alpha^{(B)})(x = P\upharpoonright) \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models (x \subset \mathbb{U}_\alpha^{(B)}\upharpoonright) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models (x \in \mathcal{P}(\mathbb{U}_\alpha^{(B)}\upharpoonright)) \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models (x \in \mathcal{Y}_{\alpha+1}) \Leftrightarrow x \in \mathcal{Y}_{\alpha+1\downarrow}. \end{aligned}$$

Если $\alpha \in \text{Lim Ord}$ и $\mathbb{U}_\beta^{(B)} = \mathcal{Y}_{\beta\downarrow}$ для всех $\beta < \alpha$, то с учетом равенства $\alpha^\wedge = \{\beta^\wedge : \beta \in \alpha\}\upharpoonright$, леммы 3.18(a), п. 5.10 и следствия 6.4 для всех $x \in \mathbb{V}^{(B)}$ имеем

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{U}_\alpha^{(B)} &\Leftrightarrow x \in \text{mix} \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbb{U}_\beta^{(B)} \Leftrightarrow \vee \left\{ [x = y] : y \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbb{U}_\beta^{(B)} \right\} = 1_B \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{\beta < \alpha} \bigvee_{y \in \mathbb{U}_\beta^{(B)}} [x = y] = 1_B \Leftrightarrow \bigvee_{\beta < \alpha} [x \in \mathbb{U}_\beta^{(B)}\upharpoonright] = 1_B \Leftrightarrow \bigvee_{\beta < \alpha} [x \in \mathcal{Y}_{\beta\downarrow}\upharpoonright] = 1_B \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{\beta < \alpha} [x \in \mathcal{Y}_\beta] = 1_B \Leftrightarrow \bigvee_{\beta < \alpha} [x \in \mathbb{V}_{\beta^\wedge}] = 1_B \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models (\exists \beta \in \alpha^\wedge)(x \in \mathbb{V}_\beta) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \left(x \in \bigcup_{\beta < \alpha^\wedge} \mathbb{V}_\beta \right) \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models (x \in \mathbb{V}_{\alpha^\wedge}) \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models (x \in \mathcal{Y}_\alpha) \Leftrightarrow x \in \mathcal{Y}_{\alpha\downarrow}. \triangleright \end{aligned}$$

12.4. В построении иерархии (28) задействованы подъемы $P\upharpoonright$ произвольных множеств P частичных элементов:

$$\mathbb{V}_{\alpha+1}^{(B)} = \mathcal{P}_{\mathbb{V}^{(B)}}(\mathbb{V}_\alpha^{(B)}) = \{P\upharpoonright : P \subset {}^{\%}\mathbb{V}_\alpha^{(B)}\}.$$

С другой стороны, согласно следствию 5.15(b) всякий элемент булевозначного универсума представляется в виде подъема $(Y|_b)\uparrow$ множества $Y|_b$ частичных элементов с одной и той же областью определения b . В этой связи выглядит естественной гипотеза о том, что булевозначный универсум может быть выстроен в иерархию подъемов вида $(Y|_b)\uparrow$. Тем не менее приведенный ниже факт опровергает эту гипотезу.

Теорема. Пусть отделимая экстенциональная B -система X удовлетворяет принципу подъема. С помощью трансфинитной рекурсии определим семейство подмножеств $Y_\alpha \subset X$ ($\alpha \in \text{Ord}$), полагая

$$Y_\alpha = \left\{ (Y|_b)\uparrow : Y \subset \bigcup_{\beta < \alpha} Y_\beta, b \in B \right\}, \quad \alpha \in \text{Ord}.$$

Если булева алгебра B бесконечна, то $\bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} Y_\alpha \neq X$.

◁ Рекурсивно определим последовательность $(y_n)_{n \in \omega} \subset X$, полагая

$$y_0 := \emptyset\uparrow, \quad y_{n+1} := \{y_n\}\uparrow, \quad n \in \omega.$$

Зафиксируем произвольную антицепь $(d_n)_{n \in \omega}$ ненулевых элементов B и рассмотрим подъемы

$$x_i := \{y_n|_{d_{n+i}} : n \in \omega\}\uparrow, \quad i \in \omega. \quad (30)$$

Поскольку $x_i = \left(\bigcup_{n \in \omega} \{y_n\}|_{d_{n+i}} \right)\uparrow$ и $\{y_n\}\uparrow = y_{n+1}$, согласно лемме 6.8²⁾ справедливы соотношения

$$x_i = \text{ext} \bigsqcup_{n \in \omega} y_{n+1}|_{d_{n+i}}, \quad i \in \omega. \quad (31)$$

Для завершения доказательства достаточно установить, что $x_i \notin Y_\alpha$ при всех $\alpha \in \text{Ord}$, $i \in \omega$. Воспользуемся трансфинитной индукцией по α . Рассмотрим $\alpha \in \text{Ord}$, предположим, что $x_i \notin Y_\beta$ для всех $\beta < \alpha$, $i \in \omega$, и допустим, что $x_i \in Y_\alpha$ для некоторого $i \in \omega$. Тогда $x_i = (Y|_b)\uparrow$, где $Y \subset \bigcup_{\beta < \alpha} Y_\beta$, $b \in B$. При этом $[y \in x_i] = [x_i \neq \emptyset] = \bigvee_{n \in \omega} d_{n+i} = b$ для всех $y \in Y$ (см. следствие 5.15(b)).

Поскольку $[x_i \neq \emptyset] \neq 0_B$, множество Y непусто, а значит, существуют $\beta < \alpha$ и $y \in Y_\beta$ такие, что $[y \in x_i] = b$. С учетом (30) имеем

$$\bigvee_{n \in \omega} d_{n+i} = [y \in x_i] = \bigvee_{n \in \omega} [y = y_n] \wedge d_{n+i},$$

откуда по лемме 5.1(a) следует, что $d_{n+i} = [y = y_n] \wedge d_{n+i}$, т. е. $[y = y_n] \geq d_{n+i}$ для всех $n \in \omega$, а значит, $y|_b = \bigsqcup_{n \in \omega} y_n|_{d_{n+i}}$. Учитывая равенство $y_0 = \emptyset\uparrow$ и соотношение (31), заключаем:

$$\text{ext } y|_b = \text{ext} \bigsqcup_{n \in \omega} y_{n+1}|_{d_{(n+1)+i}} = \text{ext} \bigsqcup_{n \in \omega} y_{n+1}|_{d_{n+(i+1)}} = x_{i+1}. \quad (32)$$

Поскольку $y \in Y_\beta$, имеются $Z \subset \bigcup_{\gamma < \beta} Y_\gamma$ и $c \in B$ такие, что $y = (Z|_c)\uparrow$. Тогда для всех $x \in X$

$$\begin{aligned} [x \in \text{ext } y|_b] &= [x \in y|_b] = [x \in y] \wedge b = [x \in (Z|_c)\uparrow] \wedge b \\ &= \bigvee_{z \in Z} [x = z|_c] \wedge b = \bigvee_{z \in Z} [x = z|_{c \wedge b}] = [x \in (Z|_{c \wedge b})\uparrow], \end{aligned}$$

откуда с учетом (32) следует, что $x_{i+1} = \text{ext } y|_b = (Z|_{c \wedge b})\uparrow \in Y_\beta$ вопреки предположению индукции. ▷

²⁾ В формулировке леммы 6.8 в [1] имеется опечатка: вместо $\bigsqcup_{i \in I} x_i$ должно быть $\bigsqcup_{i \in I} x_i|_{d_i}$.

12.5. Лемма. Если $(Z_i)_{i \in I}$ — семейство подмножеств $\mathbb{V}^{(B)}$, $(d_i)_{i \in I} \subset B$ — разбиение единицы и $(b_i)_{i \in I} \subset B$, то существуют такие $Y \subset \text{mix} \bigcup_{i \in I} Z_i$ и $b \in B$, что

$$\bigsqcup_{i \in I} (Z_i|b_i)\uparrow|_{d_i} = (Y|b)\uparrow.$$

◁ Положим $Z := \bigcup_{i \in I} Z_i \subset \mathbb{V}^{(B)}$ и $P := \bigcup_{i \in I} Z_i|b_i \wedge d_i \subset {}^{\%}Z$. Согласно лемме 6.8 имеет место равенство $\bigsqcup_{i \in I} (Z_i|b_i)\uparrow|_{d_i} = P\uparrow$, а благодаря следствию 5.15(a) существуют $Y \subset \text{mix} Z$ и $b \in B$ такие, что $P\uparrow = (Y|b)\uparrow$. ▷

12.6. Согласно теореме 12.4 для построения булевозначного универсума недостаточно одних только подъемов с постоянной областью определения. Приведенные ниже результаты показывают, что ситуация изменится, если на предельных шагах иерархии добавить перемешивания.

Теорема. С помощью трансфинитной рекурсии определим семейство подмножеств $Y_\alpha \subset \mathbb{V}^{(B)}$ ($\alpha \in \text{Ord}$), полагая

$$\begin{aligned} Y_0 &= \emptyset; \\ Y_{\alpha+1} &= \{(Y|b)\uparrow : Y \subset Y_\alpha, b \in B\}, \quad \alpha \in \text{Ord}; \\ Y_\alpha &= \text{mix} \bigcup_{\beta < \alpha} Y_\beta, \quad \alpha \in \text{Lim Ord}. \end{aligned} \tag{33}$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

- (a) $Y_\alpha \subset Y_\beta$ при $\alpha \leq \beta$;
- (b) множества Y_α цикличны для всех $\alpha \in \text{Ord}$;
- (c) $\mathbb{V}_\alpha^{(B)} \subset Y_{\alpha+1}$ для всех $\alpha \in \text{Ord}$;
- (d) $\mathbb{V}^{(B)} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} Y_\alpha$.

◁ (a) Докажем, что $Y_\alpha \subset Y_\beta$ для всех $\alpha \leq \beta$, воспользовавшись индукцией по β . Пусть $\beta \in \text{Ord}$, и пусть

$$Y_{\alpha_1} \subset Y_{\alpha_2} \quad \text{для всех} \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 < \beta. \tag{34}$$

Рассмотрим произвольный ординал $\alpha \leq \beta$ и установим включение $Y_\alpha \subset Y_\beta$. Это включение очевидно, если $\alpha = 0$, $\alpha = \beta$ или $\beta \in \text{Lim Ord}$. Поэтому будем считать, что $0 < \alpha < \beta$ и $\beta = \beta_0 + 1$ для некоторого $\beta_0 \in \text{Ord}$. Зафиксируем произвольный элемент $x \in Y_\alpha$ и покажем, что $x \in Y_\beta$.

Если $\alpha = \alpha_0 + 1$ для некоторого $\alpha_0 \in \text{Ord}$, то $x = (Y|b)\uparrow$, где $Y \subset Y_{\alpha_0}$, $b \in B$. Поскольку $\alpha_0 < \beta_0 < \beta$, в силу (34) справедливо включение $Y_{\alpha_0} \subset Y_{\beta_0}$, а значит, $Y \subset Y_{\beta_0}$ и, следовательно, $x = (Y|b)\uparrow \in Y_{\beta_0+1} = Y_\beta$.

Пусть теперь $\alpha \in \text{Lim Ord}$. Тогда $Y_\alpha = \text{mix} \bigcup_{\gamma < \alpha} Y_\gamma$ и поэтому $x = \bigsqcup_{i \in I} x_i|_{d_i}$, где $(d_i)_{i \in I} \subset B$ — разбиение единицы, $x_i \in Y_{\gamma_i}$, $\gamma_i < \alpha$ ($i \in I$). Поскольку ординал α является предельным, для всех $i \in I$ имеет место неравенство $\gamma_i + 1 < \alpha$ и, в частности, $\gamma_i < \gamma_i + 1 < \beta$, откуда благодаря (34) следует, что $Y_{\gamma_i} \subset Y_{\gamma_i+1}$. Таким образом, $x_i \in Y_{\gamma_i+1}$, а значит, $x_i = (Z_i|b_i)\uparrow$ для некоторых $Z_i \subset Y_{\gamma_i}$, $b_i \in B$ ($i \in I$) и тем самым $x = \bigsqcup_{i \in I} (Z_i|b_i)\uparrow|_{d_i}$. Согласно лемме 12.5 существуют

такие $Y \subset \text{mix} \bigcup_{i \in I} Z_i$ и $b \in B$, что $x = (Y|b)\uparrow$. Заметим, что

$$\text{mix} \bigcup_{i \in I} Z_i \subset \text{mix} \bigcup_{i \in I} Y_{\gamma_i} \subset \text{mix} \bigcup_{\gamma < \alpha} Y_\gamma = Y_\alpha$$

и, кроме того, в силу (34) из $\alpha \leq \beta_0 < \beta$ вытекает $Y_\alpha \subset Y_{\beta_0}$. Следовательно, $Y \subset Y_{\beta_0}$ и поэтому $x = (Y|_b)\uparrow \in Y_{\beta_0+1} = Y_\beta$.

(б) Применяя индукцию, рассмотрим произвольный ординал α , предположим, что $\text{mix } Y_\beta = Y_\beta$ для всех $\beta < \alpha$, и установим равенство $\text{mix } Y_\alpha = Y_\alpha$. В случае $\alpha = 0$ или $\alpha \in \text{Lim Ord}$ это равенство очевидно. Пусть $\alpha = \beta + 1$ для некоторого $\beta \in \text{Ord}$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \text{mix } Y_\alpha$ и покажем, что $x \in Y_\alpha$. Поскольку $x \in \text{mix } Y_{\beta+1} = \text{mix}\{(Z|_b)\uparrow : Z \subset Y_\beta, b \in B\}$, имеются разбиение единицы $(d_i)_{i \in I} \subset B$ и семейства $Z_i \subset Y_\beta, b_i \in B$ ($i \in I$) такие, что $x = \bigsqcup_{i \in I} (Z_i|_{b_i})\uparrow_{d_i}$. Из леммы 12.5 вытекает представление $x = (Y|_b)\uparrow$ для некоторых $Y \subset \text{mix} \bigcup_{i \in I} Z_i$ и $b \in B$. По предположению индукции имеем $\text{mix} \bigcup_{i \in I} Z_i \subset \text{mix } Y_\beta = Y_\beta$, а значит, $Y \subset Y_\beta$ и тем самым $x = (Y|_b)\uparrow \in Y_{\beta+1} = Y_\alpha$.

(с) Вновь действуя по индукции, зафиксируем ординал α , предположим, что $\mathbb{V}_\beta^{(B)} \subset Y_{\beta+1}$ для всех $\beta < \alpha$, рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathbb{V}_\alpha^{(B)}$ и покажем, что $x \in Y_{\alpha+1}$. Из (28) следует, что $x = P\uparrow$ для некоторого подмножества $P \subset {}^\omega \mathbb{V}_\beta^{(B)}$, где $\beta < \alpha$. Согласно следствию 5.15(a) имеются $Y \subset \text{mix } \mathbb{V}_\beta^{(B)}$ и $b \in B$ такие, что $x = (Y|_b)\uparrow$. По предположению индукции $\mathbb{V}_\beta^{(B)} \subset Y_{\beta+1}$. Кроме того, из (а) вытекает включение $Y_{\beta+1} \subset Y_\alpha$. Таким образом, $\mathbb{V}_\beta^{(B)} \subset Y_\alpha$, откуда с учетом (б) следует $Y \subset \text{mix } \mathbb{V}_\beta^{(B)} \subset \text{mix } Y_\alpha = Y_\alpha$ и поэтому $x = (Y|_b)\uparrow \in Y_{\alpha+1}$.

Равенство (д) вытекает из (с) и (29). \triangleright

12.7. Следующее утверждение показывает, что равенство 12.6(d) сохранит силу, если на дискретных шагах иерархии (33) ограничиться подъемами множеств всюду определенных элементов.

Теорема. С помощью трансфинитной рекурсии определим семейство подмножеств $Z_\alpha \subset \mathbb{V}^{(B)}$ ($\alpha \in \text{Ord}$), полагая

$$\begin{aligned} Z_0 &= \emptyset; \\ Z_{\alpha+1} &= \{Z\uparrow : Z \subset Z_\alpha\}, \quad \alpha \in \text{Ord}; \\ Z_\alpha &= \text{mix} \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta, \quad \alpha \in \text{Lim Ord}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbb{V}^{(B)} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} Z_\alpha.$$

\triangleleft Определим функцию $\delta: \text{Ord} \rightarrow \text{Ord}$ следующей рекурсивной формулой:

$$\delta(\alpha) = \vee\{\delta(\beta) : \beta < \alpha\} + \omega, \quad \alpha \in \text{Ord}.$$

Благодаря теореме 12.6(d) достаточно доказать, что

$$(\forall \alpha \in \text{Ord})(Y_\alpha \subset Z_{\delta(\alpha)}),$$

где Y_α определены в (33). Используя индукцию по $\alpha \in \text{Ord}$, предположим, что $Y_\beta \subset Z_{\delta(\beta)}$ для всех $\beta < \alpha$, и установим включение $Y_\alpha \subset Z_{\delta(\alpha)}$.

Пусть $\alpha = \beta + 1$. Из очевидной монотонности функции δ следует, что

$$\delta(\alpha) = \vee\{\delta(\gamma) : \gamma < \alpha\} + \omega = \vee\{\delta(\gamma) : \gamma \leq \beta\} + \omega = \delta(\beta) + \omega.$$

Рассмотрим произвольный элемент $x \in Y_\alpha = Y_{\beta+1}$. Согласно (33) имеются $Y \subset Y_\beta$ и $b \in B$ такие, что $x = (Y|_b)\uparrow$. Тогда для всех $z \in \mathbb{V}^{(B)}$

$$\begin{aligned} \llbracket z \in x \rrbracket &= \llbracket z \in (Y|_b)\uparrow \rrbracket = \bigvee_{y \in Y} \llbracket z = y|_b \rrbracket = \bigvee_{y \in Y} \llbracket z = y \rrbracket \wedge b = \llbracket z \in Y\uparrow \rrbracket \wedge b \\ &= \llbracket z \in (Y\uparrow)|_b \rrbracket = \llbracket z \in (Y\uparrow)|_b \rrbracket \vee 0_B = \llbracket z \in (Y\uparrow)|_b \rrbracket \vee \llbracket z \in (\emptyset\uparrow)|_{-b} \rrbracket, \end{aligned}$$

откуда по лемме 5.6(d) вытекает равенство $x = (Y\uparrow)|_b \sqcup \emptyset\uparrow|_{-b}$. Из включений $Y, \emptyset \subset Y_\beta \subset Z_{\delta(\beta)}$ следует $Y\uparrow, \emptyset\uparrow \in Z_{\delta(\beta)+1}$ и поэтому

$$x = (Y\uparrow)|_b \sqcup \emptyset\uparrow|_{-b} \in \text{mix } Z_{\delta(\beta)+1} \subset \text{mix } \bigcup_{\gamma < \delta(\beta)+\omega} Z_\gamma = Z_{\delta(\beta)+\omega} = Z_{\delta(\alpha)}.$$

Если $\alpha \in \text{Lim Ord}$, то

$$Y_\alpha = \text{mix } \bigcup_{\beta < \alpha} Y_\beta \subset \text{mix } \bigcup_{\beta < \alpha} Z_{\delta(\beta)} \subset \text{mix } \bigcup_{\gamma < \delta(\alpha)} Z_\gamma = Z_{\delta(\alpha)}. \triangleright$$

12.8. Следствие. Если C — циклический подкласс $\mathbb{V}^{(B)}$ и $Y\uparrow \in C$ для всех $Y \subset C$, то $C = \mathbb{V}^{(B)}$.

\triangleleft Допустим, $C \neq \mathbb{V}^{(B)}$. По теореме 12.7 существует наименьший ординал α , для которого имеется элемент $x \in Z_\alpha \setminus C$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $x = Y\uparrow$ для некоторого подмножества $Y \subset Z_\beta$, и тогда из $Z_\beta \subset C$ вытекает $x \in C$. Если же $\alpha \in \text{Lim Ord}$, то $x = \sqcup P$ для некоторой максимальной антицепи $P \subset {}^{\%} \left(\bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta \right)$, и тогда из $\bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta \subset C$ вытекает $x \in \text{mix } C = C$. \triangleright

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутман А. Е. Булевозначный универсум как алгебраическая система. I. Основные принципы // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 1041–1062.
2. Jech T. Set theory. The third millennium edition, revised and expanded. Berlin, etc.: Springer-Verl., 2003.
3. Lévy A. A hierarchy of formulas in set theory. Providence: Amer. Math. Soc., 1965.
4. Курсаев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
5. Сикорский Р. Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.
6. Jech T. Distributive laws // Handbook of Boolean algebras. Amsterdam; London: North-Holland, 1989. Chapter 8. P. 317–331.
7. Gutman A. E. Locally one-dimensional K -spaces and σ -distributive Boolean algebras // Sib. Adv. Math. 1995. V. 5, N 1. P. 42–48.
8. Бурбаки Н. Начала математики. Ч. 1. Основные структуры анализа. Книга 1. Теория множеств. М.: Мир, 1965.
9. Solovay R. M., Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math. 1971. V. 94, N 2. P. 201–245.

Гутман Александр Ефимович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

gutman@math.nsc.ru