Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2023. Том 64, № 5

УДК 517.98

ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА, В КОТОРЫХ ВСЕ АРХИМЕДОВЫ КОНУСЫ ЗАМКНУТЫ

А. Е. Гутман, И. А. Емельяненков

Аннотация. Предложено исчерпывающее описание класса локально выпуклых пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты. Введено понятие квазиплотного множества и показано, что описываемый класс состоит из конечномерных и счетномерных пространств X, у которых топологически сопряженное пространство X' квазиплотно в алгебраически сопряженном пространстве $X^{\#}$.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.505

Ключевые слова: архимедово упорядоченное векторное пространство, локально выпуклое пространство, слабая топология, конус, клин.

Анатолию Георгиевичу Кусраеву
в связи с его 70-летием

§ 1. Основные обозначения и термины

Символ $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots\}$. Множества целых, рациональных и вещественных чисел обозначаются символами $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. Символ $\mathbb{R}^+$ служит для обозначения совокупности $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geqslant 0\}$ положительных вещественных чисел. Множество $\mathbb{R}$ наделяется стандартными операциями и топологией, относительно которых оно является полем и локально выпуклым пространством. Символом $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ условимся обозначать множество вещественных чисел, снабженное дискретной топологией.

Знак «$\subset$» обозначает нестрогое включение множеств. Символ присваивания «$:=$» используется в значении «полагается равным» или «равно по определению».

В дальнейшем под *векторным пространством* понимается векторное пространство над $\mathbb{R}$. Термин *подпространство* всюду означает векторное подпространство.

Замкнутые, открытые и полуоткрытые числовые промежутки обозначаются символами $[\alpha, \beta]$, $]\alpha, \beta[$ и $[\alpha, \beta[$. Если X — векторное пространство, $x, y \in X$ и $x \neq y$, то $[x, y] := x + [0, 1]\,(y - x)$ и $[x, y[\; := x + [0, 1[\,(y - x)$. Для удобства полагаем $[x, x] := [x, x[\; := \{x\}$. Множество $S \subset X$ называется *поглощающим*, если для каждого $x \in X$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что $[0, \varepsilon x[\; \subset S$. Символ $\operatorname{core} S$ обозначает *ядро* S — совокупность элементов $s \in S$, для которых множество $S - s$ является поглощающим. Символы $\operatorname{lin} S$ и $\operatorname{co} S$ служат для обозначения

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2022–0004).

линейной и выпуклой оболочки множества S. Подмножество $W \subset X$ называется *клином*, если $W \neq \varnothing$, $W + W \subset W$ и $\mathbb{R}^+ W \subset W$. Клин W называется *конусом*, если $W \cap -W = \{0\}$.

Для любого множества I символом $\mathbb{R}^I_{\mathrm{fin}}$ обозначается подпространство $\mathbb{R}^I$, состоящее из финитных функций, т. е. функций $x\colon I \to \mathbb{R}$ с конечными носителями $\operatorname{supp} x := \{i \in I : x(i) \neq 0\}$. Кортежи $x = (x(1), \dots, x(n)) \in \mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, традиционно считаются функциями $x\colon \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$. В дальнейшем используются обозначения

$$e_n := \chi_{\{n\}} = (0, \dots, 0, \underset{(n)}{1}, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};$$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n := \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_n\} = \bigl\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}} : \operatorname{supp} x \subset \{1, \dots, n\}\bigr\}.$$

Линейный оператор $\pi_n\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$\pi_n s := s\big|_{\{1,\dots,n\}} = (s(1), \dots, s(n)). \tag{1}$$

Условимся использовать обозначение (1) не только для последовательностей $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, но и для кортежей $s \in \mathbb{R}^m$, где $m \geqslant n$.

Если X — векторное пространство, то символом $X^\#$ обозначается *алгебраически сопряженное* к X пространство линейных функционалов $f\colon X \to \mathbb{R}$. Если X снабжено векторной топологией, то символ X' служит обозначением *топологически сопряженного* к X пространства — подпространства $X^\#$, состоящего из непрерывных функционалов.

Символы $\operatorname{cl} S$ и $\operatorname{int} S$ или, точнее, $\operatorname{cl}_X S$ и $\operatorname{int}_X S$ обозначают замыкание и внутренность множества S в топологическом пространстве X.

§ 2. Введение

2.1. Понятие конуса тесно взаимосвязано с понятием *упорядоченного векторного пространства* — вещественного векторного пространства X, снабженного таким отношением порядка $\leqslant$, что для любых $x, y, z \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}^+$ из $x \leqslant y$ следует $x + z \leqslant y + z$ и $\lambda x \leqslant \lambda y$. А именно, если $(X, \leqslant)$ — упорядоченное векторное пространство, то множество $X^+ := \{x \in X : x \geqslant 0\}$ является конусом; и наоборот: если $K \subset X$ — конус и $x \leqslant_K y \Leftrightarrow y - x \in K$, то $(X, \leqslant_K)$ — упорядоченное векторное пространство и $X^+ = K$ (см., например, [1, 3.2; 2]).

2.2. Упорядоченное векторное пространство $(X, \leqslant)$ называют *архимедовым* при выполнении следующего условия:

$$\text{если } x, y \in X,\ y \geqslant 0 \text{ и } x \leqslant \tfrac{1}{n} y \text{ для всех } n \in \mathbb{N}, \text{ то } x \leqslant 0.$$

Конус K в векторном пространстве X называется *архимедовым*, если архимедово соответствующее упорядоченное векторное пространство $(X, \leqslant_K)$.

2.3. Предложение [3, 3.1]. *Следующие свойства конуса K в векторном пространстве X равносильны:*

(a) *K архимедов;*
(b) *$X \setminus K = \operatorname{core}(X \setminus K)$;*
(c) *для любых $x, y \in X$ из $[x, y[\subset K$ следует $y \in K$;*
(d) *для любых $x, y \in X$ множество $\{\lambda \in \mathbb{R} : x + \lambda y \in K\}$ замкнуто;*
(e) *пересечение K с любым подпространством X размерности $\leqslant 2$ замкнуто;*
(f) *пересечение K с любым конечномерным подпространством X замкнуто;*

(g) *K секвенциально замкнут в какой-либо хаусдорфовой векторной топологии на X;*

(h) *K секвенциально замкнут в сильнейшей локально выпуклой топологии на X.*

$\triangleleft$ Импликации (a)$\Leftarrow$(b)$\Leftarrow$(c)$\Leftarrow$(d)$\Leftarrow$(e)$\Leftarrow$(f)$\Leftarrow$(g)$\Leftarrow$(h) очевидны.

(a)$\Rightarrow$(f). Рассмотрим конечномерное подпространство $X_0 \subset X$ и положим $K_0 := K \cap X_0$. Поскольку в подпространстве $\operatorname{lin} K_0 \subset X_0$ конус K_0 имеет непустую внутренность, он замкнут в $\operatorname{lin} K_0$ (см. [2, 2.4]), а значит, и в X_0.

(f)$\Rightarrow$(h). Пусть τ — сильнейшая локально выпуклая топология на X. Благодаря условию (f) достаточно показать, что линейная оболочка любой сходящейся в τ последовательности $x_n \to x$ имеет конечную размерность. В противном случае нашлась бы такая подпоследовательность $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, что $x \notin \operatorname{lin}\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, и тогда сходимость $x_{n_k} \to x$ в τ противоречила бы наличию (непрерывного) линейного функционала, равного 0 на $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ и 1 в точке x. $\triangleright$

2.4. В предложении 2.3 прослеживается связь между алгебраическим понятием архимедовости и топологическим понятием замкнутости. В случае, когда упорядоченное векторное пространство X снабжено некоторой хаусдорфовой векторной топологией, архимедовость конуса X^+ и его замкнутость можно переформулировать в терминах перехода к пределу в линейных неравенствах. Из свойства 2.3(f) очевидно, что архимедовость X^+ означает допустимость перехода к пределу в линейных неравенствах с фиксированными векторами и переменными коэффициентами: если $x_1, \dots, x_n \in X$ и $(\lambda_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ $(i = 1, \dots, n)$ — сходящиеся числовые последовательности, то

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} x_i \geqslant 0 \ (j \in \mathbb{N}) \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} \lim_{j\to\infty} \lambda_{ij} x_i \geqslant 0. \tag{2}$$

Если же конус X^+ замкнут, то переход к пределу в линейных неравенствах допустим без каких-либо ограничений: для любых сходящихся сетей $(x_{ij})_{j\in J}$ в X и $(\lambda_{ij})_{j\in J}$ в $\mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ справедлива импликация

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} x_{ij} \geqslant 0 \ (j \in J) \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} \lim_{j\in J} \lambda_{ij} \lim_{j\in J} x_{ij} \geqslant 0. \tag{3}$$

Эти соображения обосновывают целесообразность описания класса топологических векторных пространств, в которых архимедовость конуса влечет его замкнутость или, что то же самое, (2) влечет (3).

2.5. Замкнутый конус заведомо архимедов, в то время как обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Простым примером незамкнутого архимедова конуса служит множество $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\right)^+$ положительных финитных последовательностей в любом из классических банаховых пространств ℓ^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Как известно, архимедовость конуса и его замкнутость равносильны в конечномерном случае. До недавнего времени этим простым наблюдением фактически исчерпывались сведения о классе пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты. Начало соответствующему исследованию было положено в работе [3], где обсуждаемая проблема получила решение для локально выпуклых пространств несчетной размерности.

Теорема [3, 4.2, 4.3]. *Пусть E — базис Гамеля хаусдорфова локально выпуклого пространства X, и пусть $e_0 \in E$. Если $|E| > |\mathbb{N}|$, то $\mathbb{R}^+C$ — незамкнутый архимедов конус в X, где*

$$C = \Big\{ \sum_{e\in E} x(e)e \,:\, x \in \big(\mathbb{R}^E_{\mathrm{fin}}\big)^+,\ x(e_0) = 1,\ \sum_{e\neq e_0} x(e) \leqslant 1,\ \sum_{e\neq e_0} \sqrt{x(e)} \geqslant 1 \Big\}.$$

Таким образом, в несчетномерном случае незамкнутые архимедовы конусы существуют даже в сильнейшей локально выпуклой топологии. С другой стороны, в конечномерных пространствах все архимедовы конусы замкнуты. Счетномерный же случай оказался более сложным, и вопрос об исчерпывающем описании локально выпуклых пространств, в которых замкнуты все архимедовы конусы, до сих пор оставался открытым.

2.6. Поскольку во всех локально выпуклых топологиях, согласованных с данной двойственностью, замкнутые выпуклые множества одни и те же (см., например, [1, 10.4.9; 4, 8-3-6]), изучаемое свойство локально выпуклого пространства X полностью определяется топологически сопряженным к нему пространством X', а точнее, расположением X' в $X^\#$. При этом можно считать, что пространство X снабжено слабой топологией, согласованной с двойственностью между X и X'. С учетом того факта, что всякое счетномерное векторное пространство X изоморфно $\mathbb{R}^\mathbb{N}_{\mathrm{fin}}$, а алгебраически сопряженное к нему пространство $X^\#$ изоморфно $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, рассматриваемая задача может быть сформулирована следующим образом.

Задача [3, 4.5]. Описать векторные подпространства $Y \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$, для которых все архимедовы конусы в $\mathbb{R}^\mathbb{N}_{\mathrm{fin}}$ замкнуты в слабой топологии, наведенной на $\mathbb{R}^\mathbb{N}_{\mathrm{fin}}$ пространством Y посредством двойственности $\langle x \,|\, y\rangle = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x(n)y(n)$.

Решению этой задачи посвящена данная статья. В параграфе 3 приведены известные и вспомогательные сведения о двойственности и полярах. Параграфы 4–7 посвящены исследованию понятия квазивнутренности и связанных с ним новых понятий квазилокальной ограниченности, квазиплотности и проективности, которые играют ключевую роль на пути к решению. В параграфе 8 установлен основной результат статьи — теорема 8.5, содержащая решение поставленной задачи. Итог подведен в теореме 8.6, где дано исчерпывающее описание класса локально выпуклых пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты: этот класс состоит из конечномерных и счетномерных пространств X с квазиплотными сопряженными пространствами $X' \subset X^\#$. В том же параграфе приведены два следствия, одно из которых подтверждает выдвинутую в [3] гипотезу, а другое предлагает короткое обоснование результата работы [5]. В заключительном параграфе 9 сформулированы несколько вопросов, на данный момент остающихся открытыми.

§ 3. Двойственность

Приведем основные сведения, обозначения и соглашения, связанные с двойственностью между векторными пространствами и со слабыми локально выпуклыми топологиями.

3.1. Тройку $(X, Y, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ назовем *пространством с двойственностью*, если X и Y — векторные пространства и $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ — двойственность между X и Y, т. е. билинейный функционал $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ такой, что $\ker\langle\cdot|\, = \{0\}$ и

$\ker|\cdot\rangle = \{0\}$, где $\langle x| = \langle x\,|\,\cdot\rangle$ и $|y\rangle = \langle\cdot\,|\,y\rangle$ для $x \in X$ и $y \in Y$. Пространство с двойственностью называют также *двойственной парой* (см. [4, 8-2-1]). Вместо $(X, Y, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ будем писать $X|Y$ или просто X, если из контекста ясно, какое пространство Y и какая двойственность $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ имеются в виду. Для $x \in X$ функционал $\langle x| \in Y^{\#}$ обозначается символом $\hat{x}$.

При рассмотрении пространства с двойственностью $(X, Y, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ пространство Y по умолчанию наделяется *сопряженной двойственностью*: $Y = Y|X = (Y, X, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle^*)$, где $\langle y\,|\,x\rangle^* = \langle x\,|\,y\rangle$. В частности, если $y \in Y$, то $\hat{y} = |y\rangle \in X^{\#}$.

3.2. Всякое хаусдорфово локально выпуклое пространство X по умолчанию считается пространством $X|X' = (X, X', \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ с двойственностью $\langle x\,|\,f\rangle = f(x)$. Наоборот, всякое пространство с двойственностью $X = (X, Y, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ наделяется соответствующей слабой топологией $\sigma(X|Y)$ и тем самым считается хаусдорфовым локально выпуклым пространством. При этом отображение $|\cdot\rangle\colon y \in Y \mapsto \hat{y} \in X^{\#}$ является линейным и топологическим изоморфизмом между локально выпуклыми пространствами $Y = Y|X$ и $X' = X'|X$.

3.3. Пусть X — векторное пространство, снабженное хаусдорфовой локально выпуклой топологией τ. Слабая топология $\sigma := \sigma(X|X')$, которой по умолчанию наделяется пространство с двойственностью $X|X'$, может не совпадать с τ. Тем не менее в силу равенства $(X,\sigma)' = (X,\tau)'$ локально выпуклые пространства (X,σ) и (X,τ) имеют одни и те же замкнутые выпуклые множества, замыкания выпуклых множеств и ограниченные множества (см. [4, 8-1-3, 8-3-6, 8-3-7, 8-4-1]). Следовательно, если в утверждении о каком-либо локально выпуклом пространстве X употребление топологии не выходит за рамки упомянутых выше понятий, то в доказательстве такого утверждения можно предполагать, что $X = X|X'$.

3.4. Для любого множества I векторное пространство $\mathbb{R}^I_{\mathrm{fin}}$ по умолчанию считается пространством $\mathbb{R}^I_{\mathrm{fin}}\big|\mathbb{R}^I = \big(\mathbb{R}^I_{\mathrm{fin}}, \mathbb{R}^I, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle\big)$ с двойственностью $\langle x\,|\,y\rangle = \sum\limits_{i\in I} x(i)y(i)$. Эта же двойственность подразумевается при рассмотрении пар вида $\mathbb{R}^I_{\mathrm{fin}}\big|Y$, где Y — подпространство $\mathbb{R}^I$. Как легко видеть, $\{\hat{y} : y \in \mathbb{R}^I\} = (\mathbb{R}^I_{\mathrm{fin}})^{\#}$.

Пространство $\mathbb{R}^I$ наделяется сопряженной двойственностью: $\mathbb{R}^I = \mathbb{R}^I\big|\mathbb{R}^I_{\mathrm{fin}}$. Слабая топология $\sigma\big(\mathbb{R}^I\big|\mathbb{R}^I_{\mathrm{fin}}\big)$, по умолчанию рассматриваемая в этом пространстве, совпадает с тихоновской топологией произведения $\mathbb{R}^I = \prod\limits_{i\in I}\mathbb{R}$, также называемой топологией поточечной сходимости. Отсюда, в частности, вытекает известный критерий компактности в $\mathbb{R}^I$: подмножество $\mathbb{R}^I$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. (Это так, например, потому, что всякое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^I$ содержится в произведении вида $\prod\limits_{i\in I}[\alpha_i, \beta_i]$, которое компактно по теореме Тихонова.)

Если $n \in \mathbb{N}$, то $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^I = \mathbb{R}^I_{\mathrm{fin}}$, где $I = \{1, \dots, n\}$, а значит, к пространству $\mathbb{R}^n$ применимы все соглашения и обозначения, введенные выше для $\mathbb{R}^I$ и $\mathbb{R}^I_{\mathrm{fin}}$. В частности, $\mathbb{R}^n$ по умолчанию считается пространством $\mathbb{R}^n|\mathbb{R}^n$ с двойственностью $\langle x\,|\,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x(i)y(i)$.

3.5. Пусть X — векторное пространство. Если Y — произвольное подпространство $X^{\#}$, то билинейный функционал $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, определенный формулой $\langle x\,|\,y\rangle = y(x)$, не обязан быть двойственностью: из условий $\ker\langle\cdot| = \{0\}$ и $\ker|\cdot\rangle = \{0\}$ заведомо выполняется лишь второе.

Предложение. *Следующие свойства пространства $Y \subset X^{\#}$ равносильны:*

(a) $(x, y) \mapsto y(x)$ *— двойственность между X и Y;*

(b) *слабая топология $\sigma(X|Y)$ хаусдорфова;*

(c) *если $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$, то $y(x_1) \neq y(x_2)$ для некоторого $y \in Y$;*

(d) *для любого ненулевого $x \in X$ найдется $y \in Y$ такой, что $y(x) \neq 0$;*

(e) *для любых линейно независимых $x_1, \dots, x_n \in X$ и любых $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ найдется $y \in Y$ такой, что $y(x_1) = \lambda_1, \dots, y(x_n) = \lambda_n$;*

(f) *Y плотно в $X^{\#}|X$;*

(g) $\mathrm{cl}\, Y = X^{\#}$ *в топологическом пространстве $\mathbb{R}^X_{\mathrm{D}}$.*

В литературе плотные подпространства $X^{\#}|X$ называют также тотальными над X, разделяющими или фундаментальными. Если Y — подпространство X', где X — хаусдорфово локально выпуклое пространство, то плотность Y в X' равносильна плотности Y в $X^{\#}$ (см. [4, 8-3-9]). По этой причине использование терминов «плотное подпространство X'» и «плотное подпространство $X^{\#}$» не приводит к двусмысленности.

При рассмотрении векторного пространства X и плотного подпространства $Y \subset X^{\#}$ между X и Y по умолчанию вводится двойственность $\langle x \,|\, y \rangle = y(x)$ и рассматриваются соответствующие двойственные пары $X|Y$ и $Y|X$.

3.6. Приведенное ниже описание плотных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ легко вывести из предложения 3.5.

Предложение. *Следующие свойства пространства $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильны:*

(a) *Y — плотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;*

(b) *$\pi_n Y = \mathbb{R}^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$;*

(c) *$\pi_n e_n \in \pi_n Y$ для всех $n \in \mathbb{N}$;*

(d) *Y плотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{D}}$.*

3.7. Пусть $X|Y$ — двойственная пара, $R \subset \mathbb{R}$ и $S \subset X$. Множество

$$S^{\langle R \rangle} := \{y \in Y : \langle s \,|\, y \rangle \in R \text{ для всех } s \in S\}$$

назовем *полярой S относительно R.* Перечислим классические частные случаи поляр:

$S^{\oplus} := S^{\langle \mathbb{R}^+ \rangle}$ — *двойственный клин* к S, часто обозначаемый в литературе символом S';

$S^{\ominus} := S^{\langle -\mathbb{R}^+ \rangle} = -S^{\oplus}$ — *нормальный клин* к S; множество $(S - x)^{\ominus}$ называют нормальным клином к S в точке $x \in X$;

$S^{\boxplus} := (S \backslash \{0\})^{\langle]0,\infty[\rangle} = \{y \in Y : \langle s \,|\, y \rangle > 0 \text{ для всех } s \in S \backslash \{0\}\}$ — совокупность *строго положительных* относительно S элементов двойственного пространства;

$S^{\odot} := S^{\langle]-\infty,1] \rangle}$ — *односторонняя поляра* S;

$S^{\circ} := S^{\langle [-1,1] \rangle}$ — *абсолютная поляра* S;

$S^{\perp} := S^{\langle \{0\} \rangle}$ — *аннулятор* S.

Напомним, что пространство Y по умолчанию наделяется сопряженной двойственностью: $Y = Y|X$. В частности, если $T \subset Y$, то $T^{\langle R \rangle} \subset X$ (см. предложение 3.8(a) ниже).

3.8. Предложение. *Пусть $X|Y$ — двойственная пара. Для любых $R \subset \mathbb{R}$ и $S \subset X$ справедливы следующие соотношения:*

(a) $S \subset S^{\langle R\rangle\langle R\rangle}$;

(b) *если $R_0 \subset R$ и $S_0 \subset S$, то $S_0^{\langle R\rangle} \supset S^{\langle R_0\rangle}$;*

(c) *если $0 \in R$, то $0 \in S^{\langle R\rangle}$;*

(d) *если R — выпуклое (абсолютно выпуклое, замкнутое) подмножество $\mathbb{R}$, то $S^{\langle R\rangle}$ — выпуклое (абсолютно выпуклое, замкнутое) подмножество Y;*

(e) *если R поглощающее (т. е. $0 \in \operatorname{int} R$) и S ограничено, то $S^{\langle R\rangle}$ поглощающее;*

(f) *если $R \cap -R$ ограничено и S поглощающее, то $S^{\langle R\rangle}$ ограничено;*

(g) *если $R \cap -R$ ограничено и $S^{\langle R\rangle}$ поглощающее, то S ограничено.*

3.9. Следствие [6, 5.102]. *Для любого подмножества S хаусдорфова локально выпуклого пространства справедливы следующие утверждения:*

(a) *поляры $S^{\oplus}$, $S^{\ominus}$, $S^{\boxplus}$, $S^{\odot}$ выпуклы;*

(b) *поляры $S^{\bigcirc}$, $S^{\perp}$ абсолютно выпуклы;*

(c) *поляры $S^{\oplus}$, $S^{\ominus}$, $S^{\odot}$, $S^{\bigcirc}$, $S^{\perp}$ замкнуты и содержат 0;*

(d) *если S поглощающее, то $S^{\odot}$ и $S^{\bigcirc}$ ограничены;*

(e) *S ограничено $\Leftrightarrow$ $S^{\odot}$ поглощающее $\Leftrightarrow$ $S^{\bigcirc}$ поглощающее.*

3.10. Теорема о биполяре [6, 5.103]. *Если S — непустое подмножество хаусдорфова локально выпуклого пространства, то*

$$S^{\odot\odot} = \operatorname{cl}\operatorname{co}(S \cup \{0\}), \quad S^{\bigcirc\bigcirc} = \operatorname{cl}\operatorname{co}(S \cup -S).$$

3.11. Теорема [2, 2.13]. *Если $X|Y$ — двойственная пара и W — клин в X, то $W^{\oplus}$ — замкнутый клин в Y и $W^{\oplus\oplus} = \operatorname{cl} W$.*

§ 4. Квазивнутренность

Всюду в этом параграфе X — хаусдорфово локально выпуклое пространство. В соответствии с соглашениями 3.1 и 3.2 пространства X и X' по умолчанию наделяются двойственностью: $X = X|X'$, $X' = X'|X$. (В частности, если $S \subset X'$, то $S^{\odot} \subset X$.)

Элемент x множества $S \subset X$ называют относительно квазивнутренней точкой S и пишут $x \in \operatorname{qri} S$, если $\operatorname{cl} \mathbb{R}^{+}(S - x)$ — векторное подпространство X. Понятие относительной квазивнутренности было введено и изучено в [7] и получило дальнейшее распространение в выпуклом анализе и методах оптимизации. В рассматриваемом случае оказывается полезным несколько иное, но очень близкое понятие квазивнутренности (см., например, [8, 2.1.2]). Большинство представленных в этом параграфе фактов о квазивнутренности имеют аналоги, установленные в [7] для относительной квазивнутренности. Каждое из таких утверждений снабжено соответствующей ссылкой.

4.1. *Квазивнутренность* $\operatorname{qi} S$ множества $S \subset X$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{qi} S := \{x \in S : \operatorname{cl} \mathbb{R}^{+}(S - x) = X\}.$$

(Заметим, что в этом определении нельзя ослабить включение $x \in S$ до $x \in X$ даже для выпуклого множества S. Например, если $X \neq \{0\}$ и $S = K \backslash \{0\}$, где K — плотный конус в X, то $0 \notin S$, в то время как $\operatorname{cl} \mathbb{R}^{+}(S - 0) = \operatorname{cl} K = X$.) Элементы $\operatorname{qi} S$ называются *квазивнутренними точками* множества S. Множество S назовем *квазиоткрытым*, если $\operatorname{qi} S = S$.

4.2. При необходимости символ квазивнутренности, как и символ замыкания, снабжается уточняющим индексом: $\mathrm{qi}_X\, S = \{x \in S : \mathrm{cl}_X\, \mathbb{R}^+(S - x) = X\}$ для $S \subset X$. Если Y — плотное подпространство X, то в случае $S \subset Y$ имеет место равенство $\mathrm{qi}_Y\, S = \mathrm{qi}_X\, S$. (Действительно, благодаря плотности Y в X соотношения $\mathrm{cl}_Y\, \mathbb{R}^+(S - y) = Y$ и $\mathrm{cl}_X\, \mathbb{R}^+(S - y) = X$ равносильны для каждого элемента $y \in S$.) В таком контексте условимся использовать запись $\mathrm{qi}\, S$ без указания пространства, относительно которого определяется квазивнутренность.

4.3. Лемма. *Если C — непустое выпуклое подмножество X, то*

$$C^{\ominus} = (\mathrm{cl}\, \mathbb{R}^+ C)^{\odot}, \quad C^{\ominus\odot} = \mathrm{cl}\, \mathbb{R}^+ C.$$

◁ Для любого функционала $f \in X'$ с учетом включения $\mathbb{R}^+(\mathrm{cl}\, \mathbb{R}^+ C) \subset \mathrm{cl}\, \mathbb{R}^+ C$ справедливы соотношения

$$f \in C^{\ominus} \;\Leftrightarrow\; f \leqslant 0 \text{ на } \mathrm{cl}\, \mathbb{R}^+ C \;\Leftrightarrow\; f \leqslant 1 \text{ на } \mathrm{cl}\, \mathbb{R}^+ C \;\Leftrightarrow\; f \in (\mathrm{cl}\, \mathbb{R}^+ C)^{\odot},$$

откуда благодаря теореме о биполяре 3.10 следует

$$C^{\ominus\odot} = (\mathrm{cl}\, \mathbb{R}^+ C)^{\odot\odot} = \mathrm{cl}\, \mathrm{co}\, (\mathrm{cl}\, \mathbb{R}^+ C \cup \{0\}) = \mathrm{cl}\, \mathbb{R}^+ C. \;▷$$

4.4. Предложение [7, 2.8]. *Для любого выпуклого множества $C \subset X$ и любого элемента $x \in X$ имеет место эквивалентность*

$$x \in \mathrm{qi}\, C \;\Leftrightarrow\; x \in C \text{ и } (C - x)^{\oplus} = \{0\}.$$

◁ Можно считать, что $x = 0$. Если $0 \in \mathrm{qi}\, C$, то $\mathrm{cl}\, \mathbb{R}^+ C = X$, откуда с учетом леммы 4.3 следует, что $-C^{\oplus} = C^{\ominus} = (\mathrm{cl}\, \mathbb{R}^+ C)^{\odot} = X^{\odot} = \{0\}$. Наоборот, если $C^{\oplus} = \{0\}$, то, вновь привлекая лемму 4.3, заключаем, что $\mathrm{cl}\, \mathbb{R}^+ C = C^{\ominus\odot} = (-C^{\oplus})^{\odot} = \{0\}^{\odot} = X$. ▷

В дальнейшем предложение 4.4 будет многократно использоваться без явных ссылок.

4.5. Предложение [7, 2.9]. *Если C — выпуклое множество, $x \in \mathrm{qi}\, C$ и $y \in C$, то $[x, y[\subset \mathrm{qi}\, C$.*

◁ Можно считать, что $x = 0$. Пусть $0 \in \mathrm{qi}\, C$, $y \in C$ и $0 < \lambda < 1$. Покажем, что $\lambda y \in \mathrm{qi}\, C$, для чего рассмотрим функционал $f \in (C - \lambda y)^{\oplus}$ и установим равенство $f = 0$. Подставляя в неравенство $f(c - \lambda y) \geqslant 0$ значения $c = 0$ и $c = y$, соответственно получаем $f(y) \leqslant 0$ и $f(y) \geqslant 0$. Следовательно, $f(c) = f(c - \lambda y) \geqslant 0$ для всех $c \in C$, т. е. $f \in C^{\oplus}$. С другой стороны, из $0 \in \mathrm{qi}\, C$ вытекает $C^{\oplus} = \{0\}$. ▷

4.6. Следствие [7, 2.11]. *Квазивнутренность выпуклого множества выпукла.*

4.7. Предложение [7, 2.12]. *Если C — выпуклое множество с непустой квазивнутренностью, то $\mathrm{cl}\, \mathrm{qi}\, C = \mathrm{cl}\, C$.*

◁ Достаточно показать, что $C \subset \mathrm{cl}\, \mathrm{qi}\, C$. Пусть $y \in C$. По условию имеется точка $x \in \mathrm{qi}\, C$. Согласно предложению 4.5 справедливо включение $[x, y[\subset \mathrm{qi}\, C$. Остается заметить, что $y \in \mathrm{cl}\, [x, y[$. ▷

4.8. Предложение [7, 2.13]. *Пусть C и D — выпуклые подмножества X, причем $\operatorname{int} D \neq \varnothing$. Тогда $\operatorname{qi} C \cap \operatorname{int} D = \operatorname{qi}(C \cap D)$.*

$\lhd$ С помощью сдвига доказываемое утверждение сводится к эквивалентности включений $0 \in \operatorname{qi} C \cap \operatorname{int} D$ и $0 \in \operatorname{qi}(C \cap D)$.

Пусть $0 \in \operatorname{qi} C \cap \operatorname{int} D$. Рассмотрим произвольный функционал $f \in (C \cap D)^{\oplus}$ и покажем, что $f = 0$. Поскольку $0 \in C \cap \operatorname{int} D$, для всякого элемента $c \in C$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $\varepsilon c \in C \cap D$, а значит, $f(c) = \frac{1}{\varepsilon} f(\varepsilon c) \geqslant 0$. Следовательно, $f \in C^{\oplus}$. С другой стороны, из $0 \in \operatorname{qi} C$ следует $C^{\oplus} = \{0\}$.

Наоборот, пусть $(C \cap D)^{\oplus} = \{0\}$. Допустим вопреки доказываемому, что $0 \notin \operatorname{int} D$. Поскольку $\operatorname{int} D \neq \varnothing$, по теореме отделимости найдется ненулевой функционал $f \in X'$ такой, что $f \geqslant 0$ на D. Но тогда, в частности, $f \in (C \cap D)^{\oplus}$, а значит, $f = 0$. $\rhd$

4.9. Предложение. *Пусть C — выпуклое подмножество X.*

(a) *Справедливы включения $\operatorname{int} C \subset \operatorname{core} C \subset \operatorname{qi} C$.*

(b) *Включения в утверждении* (a) *могут быть строгими одновременно. Например, если $f \in X^{\#} \backslash X'$ и $C = \{x \in X : f(x) \geqslant 0\}$, то $\operatorname{int} C = \varnothing$, $\operatorname{core} C = \{x \in X : f(x) > 0\}$ и $\operatorname{qi} C = C$.*

(c) *Если пространство X конечномерно, то $\operatorname{int} C = \operatorname{qi} C$.*

(d) *Если $\operatorname{int} C \neq \varnothing$, то $\operatorname{int} C = \operatorname{qi} C$* (см. [7, 2.14]).

(e) *В пространстве $X := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ абсолютно выпуклое компактное множество $C := \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x| \leqslant 1\}$ имеет пустую внутренность и непустую квазивнутренность.*

$\lhd$ (d) Если $\operatorname{int} C \neq \varnothing$, то с учетом предложения 4.8 справедливы равенства $\operatorname{int} C = \operatorname{qi} X \cap \operatorname{int} C = \operatorname{qi}(X \cap C) = \operatorname{qi} C$.

(e) Для любого элемента $x \in C$ имеем $\mathbb{R}^{+}(C - x) \subset \ell^{\infty} \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, а значит, $x \notin \operatorname{int} C$. С другой стороны, $0 \in \operatorname{qi} C$, так как $\operatorname{cl} \mathbb{R}^{+} C = \operatorname{cl} \ell^{\infty} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $\rhd$

4.10. Предложение. *Если C — выпуклое подмножество X, то множество $\operatorname{qi} C$ квазиоткрыто, т. е. $\operatorname{qi}\operatorname{qi} C = \operatorname{qi} C$.*

$\lhd$ Достаточно предположить $0 \in \operatorname{qi} C$ и установить включение $0 \in \operatorname{qi}\operatorname{qi} C$. Рассмотрим произвольный функционал $f \in (\operatorname{qi} C)^{\oplus}$ и покажем, что $f = 0$. Поскольку $\operatorname{qi} C \neq \varnothing$, согласно предложению 4.7 справедливо равенство $\operatorname{cl}\operatorname{qi} C = \operatorname{cl} C$, а значит, из положительности непрерывного функционала f на $\operatorname{qi} C$ вытекает его положительность на C. Следовательно, $f = 0$, поскольку $C^{\oplus} = \{0\}$. $\rhd$

4.11. Операция квазивнутренности $\operatorname{qi}\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$, вообще говоря, не является внутренностью относительно какой-либо топологии на X, поскольку равенство $\operatorname{qi}(S_1 \cap S_2) = \operatorname{qi} S_1 \cap \operatorname{qi} S_2$ может нарушаться, причем для выпуклых множеств S_1 и S_2. Например, если $X \neq \{0\}$ и K — плотный конус в X, то $0 \in \operatorname{qi}(K) \cap \operatorname{qi}(-K)$, в то время как $K \cap -K = \{0\}$ и поэтому $0 \notin \operatorname{qi}(K \cap -K)$.

4.12. Следующий факт служит незначительным усилением предложения [8, 2.1.1].

Предложение. (a) *Для любого выпуклого множества $C \subset X$ имеет место включение $\operatorname{qi} C^{\oplus} \subset C^{\boxplus}$.*

(b) *Если W — замкнутый клин в X, то $\operatorname{qi} W^{\oplus} = W^{\boxplus}$.*

$\lhd$ (a) Допустим, $f \in \operatorname{qi} C^{\oplus}$, но $f(x) = 0$ для некоторого элемента $x \in C \backslash \{0\}$. Тогда для всех $g \in C^{\oplus}$ имеем $\langle x \,|\, g - f \rangle = \langle x \,|\, g \rangle \geqslant 0$, т. е. $x \in (C^{\oplus} - f)^{\oplus}$, что невозможно, поскольку $(C^{\oplus} - f)^{\oplus} = \{0\}$.

(b) Допустим, что $f > 0$ на $W \backslash \{0\}$, но $f \notin \operatorname{qi} W^{\oplus}$. Тогда $(W^{\oplus} - f)^{\oplus} \neq \{0\}$ и, следовательно, существует такой ненулевой элемент $x \in X$, что $\langle x \,|\, g\rangle \geqslant \langle x \,|\, f\rangle$ для всех $g \in W^{\oplus}$. Поскольку $W^{\oplus}$ — клин, отсюда следует $\langle x \,|\, g\rangle \geqslant 0$ для всех $g \in W^{\oplus}$, а значит, $x \in W^{\oplus\oplus} = \operatorname{cl} W = W$ (см. теорему 3.11) и поэтому $\langle x \,|\, f\rangle > 0$. Но тогда $\langle x \,|\, g\rangle \geqslant \langle x \,|\, f\rangle > 0$ для всех $g \in W^{\oplus}$, что невозможно, так как $0 \in W^{\oplus}$. ▷

4.13. Теорема. *Для любого выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ справедливо равенство*

$$\operatorname{qi} C = \{c \in C : \pi_n c \in \operatorname{int} \pi_n C \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}.$$

В частности, выпуклое множество C квазиоткрыто в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ тогда и только тогда, когда каждая проекция $\pi_n C$ открыта в $\mathbb{R}^n$.

◁ Достаточно установить эквивалентность

$$0 \in \operatorname{qi} C \;\Leftrightarrow\; 0 \in C \text{ и } 0 \in \operatorname{int} \pi_n C \text{ для всех } n \in \mathbb{N},$$

которая с учетом предложений 4.4 и 4.9 (c) сводится к эквивалентности

$$C^{\oplus} = \{0\} \;\Leftrightarrow\; (\pi_n C)^{\oplus} = \{0\} \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $C^{\oplus} = \{0\}$. Если $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\hat{x} \geqslant 0$ на $\pi_n C$, то для последовательности $y := (x(1), \ldots, x(n), 0, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ выполняется неравенство $\hat{y} \geqslant 0$ на C, откуда $y = 0$ и, в частности, $x = \pi_n y = 0$.

Наоборот, пусть $(\pi_n C)^{\oplus} = \{0\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$ и $\hat{x} \geqslant 0$ на C, то $(\pi_n x)\hat{} \geqslant 0$ на $\pi_n C$, откуда $\pi_n x = 0$, а значит, $x = 0$. ▷

§ 5. Квазилокальная ограниченность

Данный параграф посвящен исследованию нового понятия — квазилокально ограниченного локально выпуклого пространства. Как выяснится позже (см. § 6), такие пространства обладают рядом полезных свойств, связанных с замкнутостью конусов в наведенных ими слабых топологиях. Основным результатом этого параграфа является теорема 5.10, согласно которой пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ является квазилокально ограниченным.

Всюду ниже X — хаусдорфово локально выпуклое пространство.

5.1. Выпуклое множество $C \subset X$ назовем *квазилокально ограниченным в точке* $x \in \operatorname{qi} C$, если $x \in \operatorname{qi} B$ для некоторого ограниченного подмножества $B \subset C$. Пространство X назовем *квазилокально ограниченным*, если в X любое выпуклое множество C квазилокально ограничено в каждой точке $x \in \operatorname{qi} C$.

Как легко видеть, всякое нормированное пространство квазилокально ограничено. Более широкий класс примеров квазилокально ограниченных пространств обеспечивается предложением 5.9.

5.2. Предложение. *Если пространство X бесконечномерно и $X' = X^{\#}$, то любое ограниченное подмножество X обладает пустой квазивнутренностью. В частности, такое пространство X не является квазилокально ограниченным.*

◁ Пусть X бесконечномерно, $X' = X^{\#}$, и пусть S — подмножество X с непустой квазивнутренностью. Можно считать, что $0 \in \operatorname{qi} S$ и тем самым $\operatorname{cl} \mathbb{R}^{+} S = X$. Рассмотрим максимальное линейно независимое подмножество $E \subset S$. Тогда $S \subset \operatorname{lin} E$, и множество E бесконечно, так как в противном случае $X = \operatorname{cl} \mathbb{R}^{+} S \subset \operatorname{cl} \operatorname{lin} E = \operatorname{lin} E$ вопреки бесконечномерности X. Следовательно, существует неограниченная функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, которая продолжается до неограниченного на S функционала $\overline{f} \in X^{\#} = X'$. ▷

5.3. Лемма. *Пусть C — выпуклое подмножество X и $x \in \operatorname{qi} C$. Положим $D := \frac{1}{2}(C + x) = \frac{1}{2}(C - x) + x$. Тогда $x \in \operatorname{qi} D$ и $D \subset \operatorname{qi} C$. В частности, если $0 \in \operatorname{qi} C$, то $\frac{1}{2}C \subset \operatorname{qi} C$.*

◁ Включение $x \in \operatorname{qi} D$ вытекает из $x \in D$ и $(D - x)^{\oplus} = \frac{1}{2}(C - x)^{\oplus} = \{0\}$. Кроме того, благодаря предложению 4.5 для всех $c \in C$ имеют место включения $\frac{1}{2}(c + x) \in [x, c[\subset \operatorname{qi} C$, а значит, $D \subset \operatorname{qi} C$. ▷

5.4. Предложение. *Пусть выпуклое множество $C \subset X$ квазилокально ограничено в точке $x \in \operatorname{qi} C$. Тогда*

(a) *существует ограниченное выпуклое подмножество $B \subset C$ такое, что $x \in \operatorname{qi} B$, $B \subset \operatorname{qi} C$ и $\operatorname{cl} B \subset \operatorname{qi} \operatorname{cl} C$;*

(b) *если C замкнуто, то существует замкнутое ограниченное выпуклое подмножество $B \subset C$ такое, что $x \in \operatorname{qi} B \subset \operatorname{cl} \operatorname{qi} B = B \subset \operatorname{qi} C$.*

◁ Можно считать, что $x = 0$.

(a) Пусть $0 \in \operatorname{qi} B_0$, где B_0 — ограниченное подмножество C. Тогда множество $B := \frac{1}{2} \operatorname{co} B_0$ является искомым. Действительно, включение $0 \in \operatorname{qi} B$ очевидно, а благодаря лемме 5.3 справедливы включения $B \subset \frac{1}{2}C \subset \operatorname{qi} C$ и $\operatorname{cl} B \subset \frac{1}{2} \operatorname{cl} C \subset \operatorname{qi} \operatorname{cl} C$.

(b) Согласно утверждению (a) имеется ограниченное выпуклое подмножество $B_0 \subset C$ такое, что $0 \in \operatorname{qi} B_0$ и $\operatorname{cl} B_0 \subset \operatorname{qi} \operatorname{cl} C = \operatorname{qi} C$. Поскольку $\operatorname{qi} \operatorname{cl} B_0 \neq \varnothing$, в силу предложения 4.7 имеем $\operatorname{cl} \operatorname{qi} \operatorname{cl} B_0 = \operatorname{cl} B_0$ и, следовательно, $0 \in \operatorname{qi} \operatorname{cl} B_0 \subset \operatorname{cl} \operatorname{qi} \operatorname{cl} B_0 = \operatorname{cl} B_0 \subset \operatorname{qi} C$. Таким образом, множество $B := \operatorname{cl} B_0$ является искомым. ▷

5.5. Предложение. *Пространство X квазилокально ограничено тогда и только тогда, когда любой плотный клин $W \subset X$ содержит такое ограниченное подмножество $B \subset W$, что $0 \in \operatorname{qi} B$.*

◁ В пояснении нуждается лишь достаточность. Пусть C — выпуклое подмножество X и $0 \in \operatorname{qi} C$. Покажем, что $0 \in \operatorname{qi} B$ для некоторого ограниченного подмножества $B \subset C$. По условию плотный клин $\mathbb{R}^{+}C$ содержит такое ограниченное подмножество $\overline{B} \subset \mathbb{R}^{+}C$, что $0 \in \operatorname{qi} \overline{B}$. Можно считать $\overline{B}$ выпуклым. Тогда пересечение $B := \overline{B} \cap C$ является искомым. Поскольку $\operatorname{cl} \mathbb{R}^{+}\overline{B} = X$, для установления требуемого соотношения $\operatorname{cl} \mathbb{R}^{+}B = X$ достаточно рассмотреть произвольный элемент $\bar{b} \in \overline{B}$ и заметить, что $\bar{b} \in \mathbb{R}^{+}B$. Действительно, из включения $\overline{B} \subset \mathbb{R}^{+}C$ следует $\bar{b} = \lambda c$ для некоторых $\lambda \geqslant 0$ и $c \in C$. Если $\lambda \leqslant 1$, то $\bar{b} = \lambda c \in [0, c] \subset C$, а значит, $\bar{b} \in \overline{B} \cap C = B$ и, в частности, $\bar{b} \in \mathbb{R}^{+}B$. Если же $\lambda > 1$, то $c \in [0, \lambda c] = [0, \bar{b}] \subset \overline{B}$, откуда $c \in \overline{B} \cap C = B$ и тогда вновь $\bar{b} = \lambda c \in \mathbb{R}^{+}B$. ▷

5.6. Локально выпуклое пространство назовем *субнормируемым*, если его топология слабее некоторой нормируемой топологии.

Очевидно, всякое нормируемое пространство субнормируемо. Метризуемость, вообще говоря, не влечет субнормируемость. Например, пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ метризуемо, но не содержит ограниченных поглощающих множеств и поэтому не субнормируемо (см. предложение 5.7).

5.7. Предложение. *Следующие свойства локально выпуклого пространства X равносильны:*

(a) *X субнормируемо;*

(b) *на X существует норма с ограниченным в X шаром;*

(c) *в X существует ограниченное поглощающее множество;*

(d) *в X существует ограниченное множество с непустым ядром;*
(e) *в X существует ограниченный базис Гамеля.*

$\triangleleft$ (a)$\Rightarrow$(b). Если B — единичный шар нормы, чья топология сильнее топологии пространства X, то B ограничен в X. Действительно, любая окрестность нуля U в X содержит шар εB для некоторого $\varepsilon > 0$, а значит, $B \subset \frac{1}{\varepsilon}U$.

Импликации (b)$\Rightarrow$(c)$\Leftrightarrow$(d) тривиальны.

(c)$\Rightarrow$(e). Если B — ограниченное поглощающее множество и E — базис Гамеля, то имеется семейство таких чисел $\lambda_e > 0$, что $\lambda_e e \in B$ для всех $e \in E$, и тогда $\{\lambda_e e : e \in E\}$ — ограниченный базис Гамеля.

(e)$\Rightarrow$(a). Пусть E — ограниченный базис Гамеля в X. Определим на X норму, полагая $\|x\| := \sum\limits_{e\in E} |x_e|$, где x_e — коэффициент при e в разложении x по базису E. Покажем, что топология нормы $\|\cdot\|$ сильнее топологии пространства X. Любая окрестность нуля в X содержит абсолютно выпуклую подокрестность U. Из ограниченности E вытекает включение $E \subset \lambda U$ для некоторого числа $\lambda > 0$. Поскольку единичный шар B нормы $\|\cdot\|$ представляет собой абсолютно выпуклую оболочку множества E, имеем $B \subset \lambda U$. Следовательно, $\frac{1}{\lambda}B \subset U$, а значит, U является окрестностью нуля в топологии нормы $\|\cdot\|$. $\triangleright$

5.8. Предложение. *Субнормируемость X равносильна субнормируемости X'.*

$\triangleleft$ Если B — ограниченное поглощающее подмножество X, то согласно следствию 3.9(d),(e) его поляра $B^{\odot}$ — ограниченное поглощающее подмножество X'. По той же причине существование ограниченного поглощающего множества в X' влечет существование такого множества в X. $\triangleright$

5.9. Предложение. *Всякое субнормируемое пространство является квазилокально ограниченным.*

$\triangleleft$ Пусть B — ограниченное поглощающее подмножество X (см. предложение 5.7), и пусть W — плотный клин в X. Тогда $\mathbb{R}^+(W \cap B) = W$, а значит, $\mathrm{cl}\,\mathbb{R}^+(W\cap B) = X$, т. е. $0 \in \mathrm{qi}\,(W\cap B)$. Остается сослаться на предложение 5.5. $\triangleright$

Заметим, что обратное утверждение не имеет места: например, пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ квазилокально ограничено (см. теорему 5.10), но не субнормируемо.

5.10. Теорема. *Пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ является квазилокально ограниченным.*

$\triangleleft$ Используя предложение 5.5, рассмотрим произвольный плотный клин $W \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и покажем, что $0 \in \mathrm{qi}\,B$ для некоторого ограниченного подмножества $B \subset W$. По теореме 4.13 для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем $0 \in \mathrm{int}\,\pi_n W$, а поскольку проекция $\pi_n W$ является клином в $\mathbb{R}^n$, справедливо равенство $\pi_n W = \mathbb{R}^n$. Следовательно, для всех $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \{1,\dots,n\}$ найдутся такие элементы $w^+_{nm}, w^-_{nm} \in W$, что $\pi_n w^+_{nm} = \pi_n e_m$ и $\pi_n w^-_{nm} = -\pi_n e_m$. Положим

$$B := \mathrm{co}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{w^+_{n1},\dots,w^+_{nn},w^-_{n1},\dots,w^-_{nn}\} \cup \{0\}\Big).$$

Очевидно, $B \subset W$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $\pi_n B$ содержит векторы $\pi_n w^{\pm}_{n1} = \pm\pi_n e_1, \dots, \pi_n w^{\pm}_{nn} = \pm\pi_n e_n$, выпуклая оболочка которых является шаром ℓ^1-нормы в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, $0 \in \mathrm{int}\,\pi_n B$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и поэтому $0 \in \mathrm{qi}\,B$ согласно теореме 4.13. Для доказательства ограниченности множества B рассмотрим произвольное число $k \in \mathbb{N}$ и покажем, что числовое множество $B(k) := \{b(k) : b \in B\}$ ограничено. Действительно, для всех $n \geqslant k$

и $m \in \{1, \dots, n\}$ справедливы соотношения

$$w^{\pm}_{nm}(k) = \bigl(\pi_n w^{\pm}_{nm}\bigr)(k) = (\pm \pi_n e_m)(k) \in \{-1, 0, 1\},$$

а значит, $B(k)$ лежит в выпуклой оболочке конечного множества

$$\bigcup_{n=1}^{k-1} \bigl\{w^{\pm}_{n1}(k), \dots, w^{\pm}_{nn}(k)\bigr\} \cup \{-1, 0, 1\}. \ \triangleright$$

§ 6. Квазиплотность

В данном параграфе исследована связь между двумя новыми понятиями — квазиплотного подпространства и строго замкнутого конуса. Основными результатами здесь являются теорема 6.11 и ее следствие 6.12, согласно которому строгая замкнутость конусов наследуется топологиями, наведенными квазиплотными подпространствами квазилокально ограниченных пространств.

Всюду в этом параграфе X — хаусдорфово локально выпуклое пространство. Символом $\mathscr{P}_{\rm cbc}(X)$ условимся обозначать совокупность всех замкнутых ограниченных выпуклых подмножеств X.

6.1. Лемма. *Пусть Z — подпространство X. Следующие свойства подмножества $S \subset X$ равносильны:*

(a) *если $B \in \mathscr{P}_{\rm cbc}(X)$ и $\operatorname{qi}(Z \cap B) \neq \varnothing$, то $S \cap B \neq \varnothing$;*

(b) *если $B \in \mathscr{P}_{\rm cbc}(X)$ и $\operatorname{qi}(Z \cap B) \neq \varnothing$, то $S \cap \operatorname{qi} B \neq \varnothing$;*

(c) *если $B \in \mathscr{P}_{\rm cbc}(Z)$ и $\operatorname{qi} B \neq \varnothing$, то $S \cap \operatorname{cl} B \neq \varnothing$;*

(d) *если $B \in \mathscr{P}_{\rm cbc}(Z)$ и $\operatorname{qi} B \neq \varnothing$, то $S \cap \operatorname{qi} \operatorname{cl} B \neq \varnothing$,*

где операции cl *и* qi *во всех пунктах производятся в пространстве X.*

$\triangleleft$ (a)⇒(b). Пусть $B \in \mathscr{P}_{\rm cbc}(X)$ и $z \in \operatorname{qi}(Z \cap B)$. Положим $C := \frac{1}{2}(B - z) + z$. Очевидно, $C \in \mathscr{P}_{\rm cbc}(X)$. Из равенств $Z \cap C - z = \frac{1}{2}(Z \cap B - z)$ и $(Z \cap B - z)^{\oplus} = \{0\}$ следует, что $(Z \cap C - z)^{\oplus} = \{0\}$, т. е. $z \in \operatorname{qi}(Z \cap C)$. Тогда $S \cap C \neq \varnothing$ согласно условию (a). Кроме того, $C \subset \operatorname{qi} B$ по лемме 5.3. Следовательно, $S \cap \operatorname{qi} B \neq \varnothing$.

(b)⇒(d). Пусть $B \in \mathscr{P}_{\rm cbc}(Z)$ и $\operatorname{qi} B \neq \varnothing$. Ясно, что $\operatorname{cl} B \in \mathscr{P}_{\rm cbc}(X)$. Включение $Z \cap \operatorname{cl} B \supset B$ влечет $\operatorname{qi}(Z \cap \operatorname{cl} B) \supset \operatorname{qi} B \neq \varnothing$, а значит, $S \cap \operatorname{qi} \operatorname{cl} B \neq \varnothing$ согласно условию (b).

Импликация (d)⇒(c) тривиальна.

(c)⇒(a). Пусть $B \in \mathscr{P}_{\rm cbc}(X)$ и $\operatorname{qi}(Z \cap B) \neq \varnothing$. Поскольку $Z \cap B \in \mathscr{P}_{\rm cbc}(Z)$, условие (c) влечет $S \cap \operatorname{cl}(Z \cap B) \neq \varnothing$. При этом $\operatorname{cl}(Z \cap B) \subset \operatorname{cl} B = B$. $\triangleright$

6.2. Подмножество $S \subset X$, удовлетворяющее перечисленным в лемме 6.1 равносильным условиям (a)–(d), будем называть *квазиплотным в X относительно Z*. Множество, квазиплотное в X относительно X, назовем *квазиплотным* в X. Таким образом, следующие утверждения равносильны:

(a) S квазиплотно в X;

(b) если $B \in \mathscr{P}_{\rm cbc}(X)$ и $\operatorname{qi} B \neq \varnothing$, то $S \cap B \neq \varnothing$;

(c) если $B \in \mathscr{P}_{\rm cbc}(X)$ и $\operatorname{qi} B \neq \varnothing$, то $S \cap \operatorname{qi} B \neq \varnothing$.

6.3. Предложение. *Если в X существует ограниченное множество с непустой квазивнутренностью, то всякое квазиплотное подмножество X плотно в X.*

$\triangleleft$ Пусть B — ограниченное подмножество X, имеющее непустую квазивнутренность. Можно считать, что $0 \in \operatorname{qi} B$. Допустим, в X имеется квазиплотное, но не плотное множество S. Тогда найдутся U и u такие, что U — замкнутое выпуклое подмножество X, $u \in \operatorname{int} U$ и $U \subset X \setminus S$. Положим $\overline{B} := \operatorname{cl} \operatorname{co} B$

и $C := (\overline{B}+u)\cap U$. Ясно, что $C \in \mathscr{P}_{\text{cbc}}(X)$, причем $\operatorname{qi} C \neq \varnothing$. Действительно, поскольку $u \in \overline{B}+u$ и $((\overline{B}+u)-u)^{\oplus} = \overline{B}^{\oplus} \subset B^{\oplus} = \{0\}$, имеем $u \in \operatorname{qi}(\overline{B}+u)$, откуда с учетом предложения 4.8 следует $u \in \operatorname{qi}(\overline{B}+u)\cap \operatorname{int} U = \operatorname{qi}((\overline{B}+u)\cap U) = \operatorname{qi} C$. Тогда квазиплотность S в X влечет непустоту пересечения $S\cap C$, которая противоречит включениям $C \subset U \subset X\backslash S$. ▷

Если же в X все ограниченные множества имеют пустую квазивнутренность (см., например, предложение 5.2), то $\mathscr{P}_{\text{cbc}}(X) = \varnothing$, и тогда в соответствии с определением 6.2 любое подмножество X квазиплотно.

6.4. Следствие. *В пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ все квазиплотные множества являются плотными.*

◁ Благодаря предложению 6.3 достаточно заметить, что $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x| \leqslant 1\}$ — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ с непустой квазивнутренностью (см. предложение 4.9(e)). ▷

Обратное утверждение неверно: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\text{fin}}$ служит примером плотного, но не квазиплотного подмножества $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Действительно, множество

$$B := \left\{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |s(n)-1| \leqslant \tfrac{1}{2} \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\right\}$$

принадлежит $\mathscr{P}_{\text{cbc}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, причем $(1,1,\dots) \in \operatorname{qi} B$, в то время как $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\text{fin}} \cap B = \varnothing$.

6.5. *Псевдобазой* (соответственно, *базой*) клина K в X называется такое выпуклое подмножество $B \subset K$, что $0 \notin B$ и для любого ненулевого элемента $x \in K$ существует (соответственно, существует единственное) число $\lambda > 0$, для которого $\lambda x \in B$. Очевидно, всякий клин, имеющий псевдобазу, является конусом. Как известно (см., например, [9, 3.6]), наличие базы у конуса K равносильно существованию строго положительного на $K\backslash\{0\}$ линейного функционала.

6.6. Предложение. *Следующие свойства клина $K \subset X$ равносильны:*

(a) *$K^{\boxplus} \neq \varnothing$, т. е. существует такой функционал $f \in X'$, что $f > 0$ на $K\backslash\{0\}$;*

(b) *K имеет такую псевдобазу B, что $0 \notin \operatorname{cl} B$;*

(c) *K имеет такую базу B, что $0 \notin \operatorname{cl} B$;*

(d) *$K\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}^{+}U$ для некоторого открытого выпуклого множества $U \subset X$ такого, что $0 \notin U$;*

(e) *$K\backslash\{0\} \subset \operatorname{int} \overline{K}$ для некоторого конуса $\overline{K} \subset X$.*

6.7. Клин $K \subset X$ назовем *строго замкнутым*, если каждый элемент $x \in X\backslash K$ строго отделим от $K\backslash\{0\}$, т. е. существует функционал $f \in X'$ такой, что $f > 0$ на $K\backslash\{0\}$ и $f(x) < 0$.

Очевидно, строго замкнутый клин является конусом. В конечномерном пространстве всякий замкнутый конус строго замкнут. Множества положительных последовательностей $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^{+}$ и $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\text{fin}}\right)^{+}$ служат примерами замкнутых, но не строго замкнутых конусов в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\text{fin}}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\text{fin}}|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\text{fin}}$. С другой стороны, в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\text{fin}}|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ все замкнутые конусы строго замкнуты (см. теорему 8.4).

6.8. Предложение. *Следующие свойства клина $K \subset X$ равносильны:*

(a) *K — строго замкнутый конус;*

(b) *K замкнут и $K^{\boxplus} \neq \varnothing$;*

(c) *K замкнут и имеет замкнутую псевдобазу;*

(d) *K замкнут и имеет замкнутую базу.*

◁ С учетом предложения 6.6 в пояснении нуждается лишь импликация (b)⇒(a). Пусть K замкнут, $g \in K^{\boxplus}$ и $x \in X\backslash K$. По теореме о строгой отделимости существует функционал $h \in X'$ такой, что $h \geqslant 0$ на K и $h(x) < 0$.

Пусть $\lambda > 0$ — такое число, что $\lambda h(x) < -g(x)$. Тогда функционал $f := g + \lambda h$ строго отделяет x от $K\backslash\{0\}$. $\rhd$

6.9. Лемма. *Если $C \in \mathscr{P}_{\mathrm{cbc}}(X)$, $C \neq \varnothing$ и $0 \notin C$, то $\mathbb{R}^+C$ — замкнутый конус в X.*

$\lhd$ Множество $\mathbb{R}^+C$, очевидно, является конусом. Для доказательства его замкнутости рассмотрим сети $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}^+$ и $c_\alpha \in C$, предположим, что $\lambda_\alpha c_\alpha \to x \in X$, и установим включение $x \in \mathbb{R}^+C$. Можно считать, что $x \neq 0$. Поскольку множество C замкнуто и не содержит 0, по теореме о строгой отделимости существует такой функционал $f \in X'$, что $f \geqslant 1$ на C. Из ограниченности C вытекает ограниченность сети $f(c_\alpha)$. Переходя к подсети, можно считать, что $f(c_\alpha) \to \mu$ для некоторого числа $\mu \geqslant 1$. Положим $\lambda := \frac{f(x)}{\mu}$. Соотношения $\frac{1}{f(c_\alpha)} \to \frac{1}{\mu}$ и $f(\lambda_\alpha c_\alpha) \to f(x)$ влекут $\lambda_\alpha = \frac{1}{f(c_\alpha)} f(\lambda_\alpha c_\alpha) \to \frac{1}{\mu} f(x) = \lambda$. Так как C ограничено и $\lambda_\alpha c_\alpha \to x \neq 0$, сеть λ_α не может сходиться к нулю, а значит, $\lambda > 0$. Будем считать, что $\lambda_\alpha > 0$ для всех α. Поскольку $\frac{1}{\lambda_\alpha} \to \frac{1}{\lambda}$ и $\lambda_\alpha c_\alpha \to x$, имеем $c_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha}\lambda_\alpha c_\alpha \to \frac{1}{\lambda}x$. Привлекая замкнутость C, заключаем, что $\frac{1}{\lambda}x \in C$, и, следовательно, $x \in \mathbb{R}^+C$. $\rhd$

6.10. Лемма. *Пусть Y и Z — плотные подпространства X', $B \in \mathscr{P}_{\mathrm{cbc}}(X')$, $\mathrm{qi}\,\mathrm{cl}\,(Z \cap B) \neq \varnothing$, $Y \cap B = \varnothing$. Тогда $(Z \cap B)^\oplus \subset X$ — конус, строго замкнутый в $X|Z$ и плотный (в частности, не замкнутый) в $X|Y$.*

$\lhd$ По условию для множеств $C := Z \cap B$ и $D := \mathrm{cl}\,C$ справедливы соотношения $D \in \mathscr{P}_{\mathrm{cbc}}(X')$, $0 \notin D \subset B$, $\mathrm{qi}\,D \neq \varnothing$. Из леммы 6.9 следует, что $\mathbb{R}^+D$ — замкнутый конус в X'. Положим $K := C^\oplus = D^\oplus = (\mathbb{R}^+D)^\oplus$. Благодаря теореме 3.11 имеем $K^\oplus = (\mathbb{R}^+D)^{\oplus\oplus} = \mathbb{R}^+D$. Поскольку $C \subset Z$, клин $K = C^\oplus$ замкнут в $X|Z$. Кроме того, согласно предложению 4.12(a) выполняются включения $Z \cap K^\boxplus \supset Z \cap \mathrm{qi}\,K^\oplus \supset Z \cap \mathrm{qi}\,D = \mathrm{qi}\,D \neq \varnothing$, а значит, K — строго замкнутый конус в $X|Z$ (см. предложение 6.8(b)). Из условия $Y \cap B = \varnothing$ следует $Y \cap K^\oplus = Y \cap \mathbb{R}^+D \subset Y \cap \mathbb{R}^+B = \{0\}$. Привлекая предложение 4.4, заключаем, что $0 \in \mathrm{qi}_{X|Y} K$, т. е. $\mathrm{cl}_{X|Y} K = X$. $\rhd$

6.11. Теорема. *Пусть Y и Z — плотные подпространства X'. Рассмотрим следующие условия:*

(a) *всякий строго замкнутый конус в $X|Z$ строго замкнут в $X|Y$;*

(b) *всякий строго замкнутый конус в $X|Z$ замкнут в $X|Y$;*

(c) *Y квазиплотно в X' относительно Z.*

Тогда справедливы импликации (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c), *а если пространство Z квазилокально ограничено, то условия* (a)–(c) *равносильны.*

$\lhd$ Импликация (a)$\Rightarrow$(b) тривиальна, а (b)$\Rightarrow$(c) сразу следует из леммы 6.10 с учетом леммы 6.1(a). Предположим, что пространство Z квазилокально ограничено, и установим импликацию (c)$\Rightarrow$(a).

Пусть Y квазиплотно в X' относительно Z, и пусть K — строго замкнутый конус в $X|Z$. Для доказательства строгой замкнутости K в $X|Y$ рассмотрим произвольный элемент $x \in X\backslash K$ и установим существование такого функционала $y \in Y$, что $y > 0$ на $K\backslash\{0\}$ и $y(x) < 0$. В терминах поляры $K^\boxplus$ и открытого полупространства $H_0 := \{f \in X' : f(x) < 0\}$ текущая цель формулируется следующим образом:

$$Y \cap K^\boxplus \cap H_0 \neq \varnothing. \tag{4}$$

Благодаря строгой замкнутости K в $X|Z$ имеем $Z \cap K^\boxplus \cap H_0 \neq \varnothing$, что согласно предложению 4.12(b) означает наличие элемента $z \in \mathrm{qi}\,(Z \cap K^\oplus) \cap H_0$

(см. п. 4.2). В силу квазилокальной ограниченности Z найдется такое множество $B \in \mathscr{P}_{\mathrm{cbc}}(Z)$, что $z \in \mathrm{qi}\, B$ и $B \subset Z \cap K^{\oplus}$ (см. предложение 5.4(b)). Положим $C := \mathrm{cl}\, B \cap H$, где $H := \{f \in X' : f(x) \leqslant 0\}$. Ясно, что $C \in \mathscr{P}_{\mathrm{cbc}}(X')$. Кроме того, поскольку $\mathrm{int}\, H = H_0 \neq \varnothing$, согласно предложению 4.8 имеем $z \in \mathrm{qi}\, B \cap H_0 = \mathrm{qi}\,(B \cap H) = \mathrm{qi}\,(Z \cap B \cap H) \subset \mathrm{qi}\,(Z \cap C)$. Привлекая квазиплотность Y в X' относительно Z, заключаем, что $Y \cap \mathrm{qi}\, C \neq \varnothing$. Вновь используя предложение 4.8, имеем $\mathrm{qi}\, C = \mathrm{qi}\,(\mathrm{cl}\, B \cap H) = \mathrm{qi}\,\mathrm{cl}\, B \cap H_0 \subset H_0$, а значит, $Y \cap \mathrm{qi}\, C \cap H_0 \neq \varnothing$. Для обоснования соотношения (4) осталось заметить, что $\mathrm{qi}\, C \subset \mathrm{qi}\,\mathrm{cl}\, B \subset \mathrm{qi}\,\mathrm{cl}\, K^{\oplus} = \mathrm{qi}\, K^{\oplus} \subset K^{\boxplus}$. ▷

6.12. Следствие. *Пусть Y — плотное подпространство X', и пусть пространство X' квазилокально ограничено. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) *всякий строго замкнутый конус в X строго замкнут в $X|Y$;*
(b) *всякий строго замкнутый конус в X замкнут в $X|Y$;*
(c) *Y квазиплотно в X'.*

Если вопреки условию (c) существует такое множество $B \in \mathscr{P}_{\mathrm{cbc}}(X')$, что $\mathrm{qi}\, B \neq \varnothing$ и $Y \cap B = \varnothing$, то $B^{\oplus}$ служит примером строго замкнутого конуса в X, не замкнутого (более того, плотного) в $X|Y$.

§ 7. Проективные множества

Пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$, снабженное сильнейшей локально выпуклой топологией, является прямым пределом (копределом) $\varinjlim \mathbb{R}^n$ последовательности $(\mathbb{R}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ в категории локально выпуклых пространств относительно вложений $\mathbb{R}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^n \times \{(0,\dots,0)\} \subset \mathbb{R}^m$ $(n \leqslant m)$ и совпадает со строгим индуктивным пределом последовательности подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n = \mathrm{lin}\,\{e_1,\dots,e_n\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ (см. [4, 13-3-3; 10, 19.4]). Соответствующее двойственное пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ представляет собой обратный предел $\varprojlim \mathbb{R}^n$ в той же категории относительно проекций $(x \mapsto \pi_n x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(m \geqslant n)$ и совпадает с топологическим проективным пределом последовательности локально выпуклых пространств $\mathbb{R}^n$ относительно проекций $\pi_n\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^n$ (см. [10, 19.8]).

Приведенные выше соображения служат идейной предпосылкой для введения понятий проективного множества, проективной последовательности и проективного предела, исследованию которых посвящен этот параграф. Основной целью являются связи перечисленных понятий с понятием квазивнутренности.

Как и прежде, пространства $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ наделяются естественной двойственностью и снабжаются соответствующими слабыми топологиями (см. п. 3.4).

7.1. Пусть $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность подмножеств $S_n \subset \mathbb{R}^n$. Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ назовем *цепью* в $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, если $x_n \in S_n$ и $x_n = \pi_n x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В этом случае *объединение цепи* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ представляет собой такой элемент $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что $\pi_n s = x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Лемма. *Следующие свойства множества $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильны:*

(a) *если $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\pi_n s \in \pi_n S$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $s \in S$;*
(b) *если $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — цепь в $(\pi_n S)_{n\in\mathbb{N}}$, то $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in S$;*
(c) *S замкнуто в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{D}}$.*

Множество $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, обладающее равносильными свойствами (a)–(c), будем называть *проективным.* Примерами проективных множеств служат произвольные декартовы произведения $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n$, где $\Lambda_n \subset \mathbb{R}$. Кроме того, любое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ замкнуто также в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{D}}$ и поэтому является проективным.

7.2. Из леммы 7.1 следует, что для любого $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ следующие множества совпадают:

(a) $\{\bar{s} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \pi_n \bar{s} \in \pi_n S$ для всех $n \in \mathbb{N}\}$;

(b) $\Big\{ \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n : (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — цепь в $(\pi_n S)_{n\in\mathbb{N}} \Big\}$;

(c) наибольшее подмножество $\overline{S} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ такое, что $\pi_n \overline{S} = \pi_n S$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(d) проективное подмножество $\overline{S} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ такое, что $\pi_n \overline{S} = \pi_n S$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(e) наименьшее проективное подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, содержащее S;

(f) замыкание S в топологическом пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{D}}$.

Множество, описываемое любым из эквивалентных способов (a)–(f), будем называть *проективным замыканием* множества S.

7.3. Лемма. *Следующие свойства последовательности множеств $S_n \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ равносильны:*

(a) *существует такое множество $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что $S_n = \pi_n S$ для всех $n \in \mathbb{N}$;*

(b) *$S_n = \pi_n S_m$ при $n \leqslant m$;*

(c) *$S_n = \pi_n S_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

При этом множество

$$\begin{aligned} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi_n^{-1}(S_n) &= \big\{ s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \pi_n s \in S_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N} \big\} \\ &= \Big\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ — цепь в } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \Big\} \end{aligned} \tag{5}$$

представляет собой наибольшее среди множеств S, удовлетворяющих условию пункта (a)*, является единственным проективным среди таких множеств и совпадает с проективным замыканием любого из них.*

Последовательность $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющую условиям последней леммы, будем называть *проективной последовательностью*, а множество (5) будем обозначать символом $\varprojlim\,(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ или, менее громоздко, $\varprojlim S_n$, и называть *проективным пределом* последовательности $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Равенство $S = \varprojlim S_n$ будем иногда прочитывать так: S является проективным пределом множеств S_n.

Таким образом, для любой проективной последовательности $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и любого множества $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ имеют место следующие соотношения:

$$\varprojlim S_n = \big\{ s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \pi_n s \in S_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N} \big\}; \tag{6}$$

$$S = \varprojlim S_n \;\Leftrightarrow\; S \text{ проективно и } \pi_n S = S_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}; \tag{7}$$

$$S \text{ проективно } \;\Leftrightarrow\; S = \varprojlim \pi_n S. \tag{8}$$

7.4. Лемма. *Если $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — проективная последовательность выпуклых множеств с непустыми внутренностями, то $(\operatorname{int} C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — проективная последовательность и $\varprojlim \operatorname{int} C_n = \operatorname{qi} \varprojlim C_n$.*

$\triangleleft$ Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и покажем, что $\operatorname{int} C_n = \pi_n(\operatorname{int} C_{n+1})$.

Включение $\operatorname{int} C_n \supset \pi_n(\operatorname{int} C_{n+1})$ очевидно: если $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\varepsilon > 0$ и шар равномерной нормы $B(x, \varepsilon)$ содержится в C_{n+1}, то $B(\pi_n x, \varepsilon) = \pi_n(B(x, \varepsilon)) \subset \pi_n C_{n+1} = C_n$.

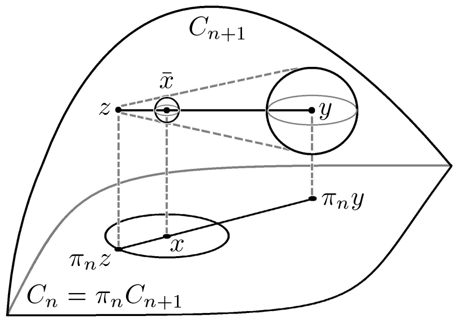

Рис. 1

Пусть теперь $x \in \operatorname{int} C_n$ (см. рис. 1). Покажем, что $x = \pi_n \bar{x}$ для некоторого элемента $\bar{x} \in \operatorname{int} C_{n+1}$. Рассмотрим произвольный элемент $y \in \operatorname{int} C_{n+1}$. Если $\pi_n y = x$, то доказывать нечего. Пусть $\pi_n y \neq x$. Поскольку $x \in \operatorname{int} C_n$, имеется такое число $\lambda > 0$, что $x + \lambda(x - \pi_n y) \in C_n$. Благодаря равенству $C_n = \pi_n C_{n+1}$ существует элемент $z \in C_{n+1}$, для которого $x + \lambda(x - \pi_n y) = \pi_n z$. Положим $\bar{x} := \frac{\lambda}{\lambda+1} y + \frac{1}{\lambda+1} z$. Из включения $y \in \operatorname{int} C_{n+1}$ следует, что $\bar{x} \in [y, z[\, \subset \operatorname{int} C_{n+1}$. Кроме того,

$$\pi_n \bar{x} = \tfrac{\lambda}{\lambda+1} \pi_n y + \tfrac{1}{\lambda+1} \pi_n z = \tfrac{\lambda}{\lambda+1} \pi_n y + \tfrac{1}{\lambda+1} (x + \lambda(x - \pi_n y)) = x.$$

Равенство $\underleftarrow{\lim} \operatorname{int} C_n = \operatorname{qi} \underleftarrow{\lim}\, C_n$ вытекает из соотношения (6) и теоремы 4.13, так как для всех $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$s \in \underleftarrow{\lim} \operatorname{int} C_n \;\Leftrightarrow\; s \in \underleftarrow{\lim}\, C_n \text{ и } \pi_n s \in \operatorname{int} C_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; s \in \operatorname{qi} \underleftarrow{\lim}\, C_n. \;\triangleright$$

7.5. В формулировке леммы 7.4 и выпуклость, и непустота внутренностей являются существенными требованиями.

Например, если $S_1 = [0, 2]$, $S_2 = [0, 1]^2 \cup ([1, 2] \times \{0\})$ и $S_n = S_2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ при $n > 2$, то $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — проективная последовательность и $\operatorname{int} S_n \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$, но последовательность $(\operatorname{int} S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не проективна, поскольку $\operatorname{int} S_1 = \,]0, 2[$, в то время как $\pi_1(\operatorname{int} S_2) = \pi_1(]0, 1[^2) = \,]0, 1[$.

Если же $S_1 = [0, 1]$ и $S_n = [0, 1] \times \{(0, \dots, 0)\}$ при $n > 1$, то $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — проективная последовательность и все множества S_n выпуклы, но последовательность $(\operatorname{int} S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ вновь не проективна, так как $\operatorname{int} S_1 = \,]0, 1[$, а $\pi_1(\operatorname{int} S_2) = \varnothing$.

7.6. Приведенное ниже утверждение вытекает из теоремы 4.13, леммы 7.4 и соотношения (8).

Следствие. *Если C — проективное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, то множество $\operatorname{qi} C$ проективно. Если, кроме того, $\operatorname{qi} C \neq \varnothing$, то $(\operatorname{int} \pi_n C)_{n \in \mathbb{N}}$ — проективная последовательность, $\operatorname{qi} C = \underleftarrow{\lim} \operatorname{int} \pi_n C$ и, в частности, $\pi_n \operatorname{qi} C = \operatorname{qi} \pi_n C = \operatorname{int} \pi_n C$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

7.7. Какое-либо свойство P подмножеств локально выпуклого пространства назовем *проективно инвариантным*, если для любого проективного множества $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ верно следующее: S обладает свойством P тогда и только тогда, когда $\pi_n S$ обладают свойством P для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. когда S является проективным пределом множеств, обладающих свойством P.

Предложение. *Следующие свойства проективно инвариантны:*
(a) *непустота;*
(b) *выпуклость;*
(c) *ограниченность;*
(d) *компактность* (*замкнутость и ограниченность*);
(e) *выпуклость и квазиоткрытость;*
(f) *выпуклость и непустота квазивнутренности.*

◁ Проективная инвариантность свойств (a) и (c) очевидна. Проективная инвариантность (b) и (d) обеспечивается линейностью и непрерывностью отображений $\pi_n\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^n$ и представлением $S = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \pi_n^{-1}(\pi_n S)$, см. (5). Проективная инвариантность (e) и (f) вытекает из теоремы 4.13 и леммы 7.4. ▷

Как легко видеть, проективный предел замкнутых множеств замкнут. Тем не менее замкнутость не является проективно инвариантным свойством даже при дополнительном требовании выпуклости. Например, выпуклое множество

$$S = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : s(1) > 0,\ s(1)\cdot s(2) \geqslant 1\}$$

замкнуто (и поэтому проективно), но проекция $\pi_1 S = \,]0,\infty[$ не замкнута.

7.8. Подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, имеющее вид $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n$, где Λ_n — открытые подмножества $\mathbb{R}$, называется *открытой коробкой.* Топология на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, для которой открытые коробки служат базовыми открытыми множествами, называется *коробочной топологией.* Как легко видеть, для любого элемента $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ выпуклые открытые коробки

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \,]s(n)-\varepsilon_n, s(n)+\varepsilon_n[,\quad \varepsilon_n > 0, \tag{9}$$

образуют базу окрестностей точки s в коробочной топологии.

Предложение. (a) *Всякая выпуклая открытая коробка в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ служит примером проективного квазиоткрытого множества. Более того, все подмножества $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, открытые в коробочной топологии, квазиоткрыты.*

(b) *Утверждение, обратное* (a), *не имеет места. Например, проективное выпуклое множество*

$$C := \left\{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |s(1) - s(n)| < \tfrac{1}{n}\right\}$$

квазиоткрыто, но $\operatorname{int} C = \varnothing$ *в коробочной топологии.*

◁ (a) Первое утверждение следует из предложения 7.7(e), а второе вытекает из первого, так как любая коробочная окрестность содержит подокрестность вида (9).

(b) Проективность множества C очевидна. Его выпуклость и квазиоткрытость вытекают из предложения 7.7(e), так как проекции $\pi_n C$ — выпуклые открытые подмножества $\mathbb{R}^n$. Равенство $\operatorname{int} C = \varnothing$ в коробочной топологии обусловлено тем фактом, что все элементы $c \in C$ удовлетворяют условию $\lim\limits_{n\to\infty} c(n) = c(1)$, в то время как в любой непустой открытой коробке, очевидно, имеется последовательность, нарушающая это условие. ▷

§ 8. Критерий замкнутости архимедовых конусов

В этом параграфе после характеризации архимедовых конусов в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ (теорема 8.4) полученные ранее вспомогательные результаты применяются для решения целевой задачи — описания класса подпространств $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, обеспечивающих замкнутость всех архимедовых конусов в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|Y$. Основным результатом является теорема 8.5, согласно которой искомый класс составляют квазиплотные подпространства. Предложения 8.8 и 8.9 описывают этот класс, предлагая ряд необходимых и достаточных условий для квазиплотности подмножества $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

В качестве следствия дано исчерпывающее описание локально выпуклых пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты (теорема 8.6). Кроме того, получены ответы на вопросы, связанные с так называемыми «тонкими» пространствами — плотными подпространствами $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, для которых в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|Y$ существуют незамкнутые архимедовы конусы. А именно, следствие 8.10 подтверждает выдвинутую в [3] гипотезу о том, что пространство $\operatorname{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ не является тонким, и в частности, дает отрицательный ответ на поставленный в [3] и [5] вопрос о тонкости всех собственных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Кроме того, с помощью теоремы 8.5 удается предложить короткое обоснование результата работы [5] о существовании тонкого гиперпространства (следствие 8.11).

8.1. Последовательность подмножеств $S_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ назовем *индуктивной*, если она обладает любым из следующих равносильных свойств:

(a) существует такое множество $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$, что $S_n = S \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(b) $S_n = S_m \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$ при $n \leqslant m$;

(c) $S_n = S_{n+1} \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

При этом множество S, удовлетворяющее условию (a), единственно и равно объединению $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

8.2. Лемма [11, 3.3]. *Пусть K — замкнутый локально квазикомпактный конус в локально выпуклом пространстве X, X_0 — замкнутое подпространство X, и пусть $f_0 \in X_0'$. Если $f_0 \in (K \cap X_0)^{\boxplus}$, то f_0 допускает продолжение на X до функционала $f \in K^{\boxplus}$.*

8.3. Лемма. *Если $K_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ — индуктивная последовательность замкнутых конусов, то $(\pi_n K_n)^{\boxplus}$ $(n \in \mathbb{N})$ — проективная последовательность и*

$$\varprojlim\, (\pi_n K_n)^{\boxplus} = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\Big)^{\boxplus}. \tag{10}$$

$\triangleleft$ Рассмотрим $n \in \mathbb{N}$ и установим включение $(\pi_n K_n)^{\boxplus} \subset \pi_n(\pi_{n+1}K_{n+1})^{\boxplus}$. (Проверка обратного включения и равенства (10) не составляет труда.) Пусть $y \in (\pi_n K_n)^{\boxplus}$. Положим $X := \mathbb{R}^{n+1}$, $X_0 := \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset X$ и $K := \pi_{n+1}K_{n+1}$. Тогда K — замкнутый конус в X и $\hat{y} \circ \pi_n \in (\pi_n K_n \times \{0\})^{\boxplus} = (K \cap X_0)^{\boxplus}$. По лемме 8.2 имеется такой элемент $z \in K^{\boxplus}$, что $\hat{z} = \hat{y} \circ \pi_n$ на X_0. В этом случае $y = \pi_n z$ и, следовательно, $y \in \pi_n(\pi_{n+1}K_{n+1})^{\boxplus}$. $\triangleright$

8.4. Теорема. *Следующие свойства множества $K \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ равносильны:*

(a) *K — архимедов конус;*

(b) *K — замкнутый конус;*

(c) *K — строго замкнутый конус;*

(d) *$K \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$ — замкнутый конус в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$;*

(e) $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ *для некоторой индуктивной последовательности замкнутых конусов* $K_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$.

◁ Импликации (c)⇒(b)⇒(a)⇒(d)⇒(e) очевидны (см. предложение 2.3(f)). Покажем (e)⇒(c). В рамках условия (e) объединение $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, очевидно, является архимедовым конусом. Как известно, сильнейшая локально выпуклая топология τ на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ секвенциальна (см. [4, упр. 12-3-113]). С учетом предложения 2.3(h) отсюда следует, что архимедов конус K замкнут в топологии τ, а значит, и в слабой топологии $\sigma\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$. Далее, конусы $\pi_n K_n$ замкнуты в конечномерных пространствах $\mathbb{R}^n$ и поэтому строго замкнуты. Из предложения 6.8 следует, что $(\pi_n K_n)^{\boxplus} \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Привлекая лемму 8.3, заключаем, что $K^{\boxplus} = \varprojlim\, (\pi_n K_n)^{\boxplus} \neq \varnothing$. ▷

8.5. Приведенный ниже критерий содержит решение задачи, которой посвящена эта статья.

Теорема. *Следующие свойства плотного подпространства* $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *равносильны:*

(a) *в* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y$ *все архимедовы конусы замкнуты;*

(b) *в* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y$ *все архимедовы конусы строго замкнуты;*

(c) Y *квазиплотно в* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Если вопреки условию (c) *существует такое компактное выпуклое множество* $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *что* $\operatorname{qi} C \neq \varnothing$ *и* $Y \cap C = \varnothing$ (см. предложение 8.8(b)), *то* $C^{\oplus}$ *служит примером архимедова, но не замкнутого (более того, плотного) конуса в* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y$.

◁ Согласно теореме 5.10 двойственное к $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ квазилокально ограничено. Кроме того, по теореме 8.4 в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ совпадают классы строго замкнутых и архимедовых конусов. Остается воспользоваться следствием 6.12 с $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ в роли X. ▷

8.6. Теперь благодаря теоремам 2.5 и 8.5 появилась возможность дать исчерпывающее описание пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты.

Теорема. *В хаусдорфовом локально выпуклом пространстве* X *все архимедовы конусы замкнуты тогда и только тогда, когда* X *имеет конечную или счетную размерность и сопряженное пространство* X' *квазиплотно в* $X^{\#}$ *относительно слабой* топологии.*

8.7. Лемма. *Пусть* C — *проективное выпуклое подмножество* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *и пусть* $x \in \operatorname{qi} C$. *Положим* $D := \frac{1}{2}(C + x)$. *Тогда* $x \in \operatorname{qi} D$ *и* $\operatorname{cl} D \subset \operatorname{qi} C$.

◁ Можно считать, что $x = 0$. Включение $0 \in \operatorname{qi} \frac{1}{2}C$ очевидно. Поскольку $\operatorname{qi} C = \varprojlim \operatorname{int} \pi_n C$ (см. следствие 7.6), для доказательства включения $\operatorname{cl} \frac{1}{2}C \subset \operatorname{qi} C$ достаточно фиксировать $n \in \mathbb{N}$ и показать, что $\pi_n \operatorname{cl} \frac{1}{2}C \subset \operatorname{int} \pi_n C$. Согласно теореме 4.13 из $0 \in \operatorname{qi} C$ вытекает $0 \in \operatorname{int} \pi_n C$. Следовательно, $\operatorname{cl} \frac{1}{2}\pi_n C \subset \operatorname{int} \pi_n C$ (см., например, [1, 7.1.1(1)]). Остается заметить, что благодаря непрерывности линейного оператора $\pi_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^n$ справедливо включение $\pi_n \operatorname{cl} \frac{1}{2}C \subset \operatorname{cl} \frac{1}{2}\pi_n C$. ▷

8.8. Предложение. *Следующие свойства множества* $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *равносильны:*

(a) S *квазиплотно в* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;

(b) *если* C — *компактное выпуклое подмножество* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *и* $\operatorname{qi} C \neq \varnothing$, *то* $S \cap C \neq \varnothing$;

(c) *если* B — *непустое проективное ограниченное квазиоткрытое выпуклое подмножество* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *то* $S \cap B \neq \varnothing$;

(d) *если* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *— проективная последовательность непустых ограниченных открытых выпуклых множеств, то* $S\cap\varprojlim B_n\neq\varnothing$*;*

(e) *если* C *— проективное выпуклое подмножество* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *и* $\operatorname{qi}C\neq\varnothing$*, то* $S\cap C\neq\varnothing$*.*

◁ С учетом критерия компактности в пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (см. п. 3.4) эквивалентность (a)⇔(b) справедлива непосредственно по определению 6.2(b).

(b)⇒(c). Пусть $B\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ обладает свойствами, перечисленными в условии (c), и пусть $b\in B$. Положим $C:=\operatorname{cl}\frac{1}{2}(B+b)$. По лемме 8.7 имеем $\operatorname{qi}C\neq\varnothing$ и $C\subset B$. Поскольку C компактно (см. п. 3.4), из условия (b) следует $S\cap C\neq\varnothing$ и, в частности, $S\cap B\neq\varnothing$.

Эквивалентность (c)⇔(d) обеспечивается проективной инвариантностью комбинации перечисленных в условии (c) свойств проективного множества B (см. предложение 7.7).

(c)⇒(e). Пусть C — проективное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\operatorname{qi}C\neq\varnothing$. По лемме 8.7 имеется такое замкнутое выпуклое множество $D\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что $\operatorname{qi}D\neq\varnothing$ и $D\subset C$. Далее, благодаря теореме 5.10 и предложению 5.4(b) существует компактное выпуклое подмножество $B\subset D$, для которого $\operatorname{qi}B\neq\varnothing$. Будучи замкнутым, множество B проективно, а значит, согласно следствию 7.6 множество $\operatorname{qi}B$ также является проективным. Кроме того, $\operatorname{qi}B$ квазиоткрыто (см. предложение 4.10). Тогда из условия (c) следует $S\cap B\neq\varnothing$, откуда в силу включений $B\subset D\subset C$ вытекает $S\cap C\neq\varnothing$.

Импликация (e)⇒(b) очевидна, так как компактность влечет замкнутость, а замкнутость влечет проективность. ▷

8.9. Предложение. *В каждом из перечисленных ниже случаев множество* $S\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *является квазиплотным:*

(a) S *содержит* $\Lambda^{\mathbb{N}}$*, где* Λ *— плотное подмножество* $\mathbb{R}$*;*

(b) S *содержит* $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n$*, где* Λ_n *— плотные подмножества* $\mathbb{R}$*;*

(c) S *содержит проективное подмножество* P*, удовлетворяющее следующим условиям:*

$$\operatorname{cl}\{p(1):p\in P\}=\mathbb{R};\tag{11}$$

$$\operatorname{cl}\{p(n+1):p\in P,\ \pi_n p=x\}=\mathbb{R}\ \textit{ для всех } n\in\mathbb{N} \textit{ и } x\in\pi_n P.\tag{12}$$

◁ Условия (a) и (b) являются частными случаями (c), а для условия (c) легко проверяется критерий 8.8(d). Действительно, пусть $P\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет соотношениям (11) и (12), и пусть $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — проективная последовательность непустых открытых выпуклых множеств. Рекурсией по $n\in\mathbb{N}$ построим последовательность элементов $b_n\in B_n\cap\pi_nP$ следующим образом. Согласно (11) существует элемент $b_1\in B_1\cap\pi_1P$. Пусть определен элемент $b_n\in B_n\cap\pi_nP$. Поскольку $B_n=\pi_nB_{n+1}$, имеется такое число $\lambda\in\mathbb{R}$, что $(b_n(1),\dots,b_n(n),\lambda)\in B_{n+1}$. Благодаря открытости B_{n+1} существует число $\varepsilon>0$ такое, что $(b_n(1),\dots,b_n(n),\mu)\in B_{n+1}$ для всех $\mu\in\,]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[$. Из (12) вытекает наличие элемента $p\in P$, удовлетворяющего условиям $\pi_np=b_n$ и $p(n+1)\in\,]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[$. Положим $b_{n+1}:=\pi_{n+1}p$. Тогда $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — цепь и в $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, и в $(\pi_nP)_{n\in\mathbb{N}}$, а значит, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}b_n$ принадлежит и $\varprojlim B_n$, и P. ▷

8.10. В работе [3] плотные подпространства $Y\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, для которых в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y$ существуют незамкнутые архимедовы конусы, названы *тонкими.* (Благодаря теореме 8.5 теперь известно, что тонкие пространства — это в точности плотные подпространства, не являющиеся квазиплотными.) Следующий факт подтверждает гипотезу [3, 4.9], а также дает (отрицательный) ответ на поставленный в [3] и [5] вопрос о том, все ли собственные подпространства $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ являются тонкими.

Следствие. *В пространствах* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|\operatorname{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ *и* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|\operatorname{lin}\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *все архимедовы конусы замкнуты.*

$\lhd$ Пространство $\operatorname{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, очевидно, обладает свойством 8.9(a). Этим же свойством обладает и $\operatorname{lin}\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Действительно, по теореме Кронекера множество $\Lambda := \{m\sqrt{2}+n \,:\, m,n\in\mathbb{Z}\}$ плотно в $\mathbb{R}$. Остается заметить, что

$$\begin{aligned}\operatorname{lin}\mathbb{N}^{\mathbb{N}} &= \operatorname{lin}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \operatorname{lin}(\mathbb{N}-\mathbb{N})^{\mathbb{N}}\\ &= \operatorname{lin}\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \supset \sqrt{2}\,\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}+\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} = (\sqrt{2}\,\mathbb{Z}+\mathbb{Z})^{\mathbb{N}} = \Lambda^{\mathbb{N}}. \ \rhd\end{aligned}$$

8.11. Теорема 8.5 позволяет получить короткое подтверждение основного результата работы [5].

Следствие. *Если* $L\in(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{\#}$ *и* $L(s)=\lim\limits_{n\to\infty}s(n)$ *для сходящихся последовательностей* $s\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *то в пространстве* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|\ker L$ *существует незамкнутый архимедов конус.*

$\lhd$ Положим $C := \prod\limits_{n\in\mathbb{N}}\left[1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$. Тогда $\ker L\cap C=\varnothing$, а значит, согласно теореме 8.5 и предложениям 7.8 и 8.8 в пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|\ker L$ существует незамкнутый архимедов конус, причем $C^{\oplus}$ служит примером такого конуса. $\rhd$

§ 9. Открытые вопросы

В завершение сформулируем несколько естественных вопросов, на данный момент остающихся открытыми.

9.1. Квазилокальная ограниченность. В параграфе 5 предпринято лишь начальное изучение понятия квазилокальной ограниченности. В рамках более детального исследования было бы уместно прояснить взаимосвязи между следующими свойствами хаусдорфова локально выпуклого пространства X и, в частности, выяснить, какие из них равносильны:

(a) X квазилокально ограничено;

(b) всякое выпуклое подмножество X с непустой квазивнутренностью содержит ограниченное подмножество с непустой квазивнутренностью;

(c) в X существует ограниченное множество с непустой квазивнутренностью;

(d) в X существует плотное субнормируемое подпространство;

(e) для любого плотного клина $W\subset X$ существует субнормируемое подпространство $Z\subset X$ такое, что $Z\cap W$ плотно в X;

(f) всякое плотное подпространство X содержит плотное субнормируемое подпространство.

Перечислим импликации, представляющиеся очевидными: (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c)$\Leftrightarrow$(d), (e)$\Rightarrow$(f)$\Rightarrow$(d), (e)$\Rightarrow$(a).

9.2. Пределы квазилокально ограниченных пространств. Пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ представляет собой обратный предел $\varprojlim\mathbb{R}^n$ последовательности $(\mathbb{R}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ в категории локально выпуклых пространств относительно естественных проекций $\pi_n\colon\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}^n$ и $\pi_{nm}\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ $(n\leqslant m)$. Анализ доказательств теорем 4.13 и 5.10 позволяет выдвинуть гипотезу о том, что утверждения этих теорем допускают обобщение на случай произвольных обратных пределов.

А именно, пусть $(X, (\pi_i)_{i\in I})$ — обратный предел сети $(X_i)_{i\in I}$ локально выпуклых пространств. Если C — выпуклое подмножество X, имеет ли место равенство

$$\operatorname{qi} C = \{c \in C : \pi_i c \in \operatorname{qi} \pi_i C \text{ в } X_i \text{ для всех } i \in I\}?$$

Если пространства X_i квазилокально ограничены, обладает ли этим же свойством их обратный предел $\varprojlim X_i$?

9.3. Замкнутые тотальные клинья. Теорема 6.11 и ее следствие 6.12 предлагают критерии наследования строгой замкнутости конусов в пространстве, сопряженное к которому квазилокально ограничено. Из доказательства теоремы 6.11 видно, что доказываемое утверждение останется справедливым, если в его формулировке ослабить условие квазилокальной ограниченности пространства до требования квазилокальной ограниченности клиньев вида $K^{\oplus}$ в их квазивнутренних точках, где K — замкнутый конус в сопряженном пространстве. Приведенное ниже описание таких клиньев вытекает из [2, 2.13].

Подмножество S хаусдорфова локально выпуклого пространства X называют *тотальным*, если $\operatorname{cl}\operatorname{lin} S = X$ (см. [4, 2-3-12]).

Предложение. *Следующие свойства множества $W \subset X$ равносильны:*
(a) *W — замкнутый тотальный клин;*
(b) *W — замкнутый клин и $W^{\oplus}$ — конус;*
(c) *$W^{\oplus}$ — конус и $W^{\oplus\oplus} = W$;*
(d) *$W = K^{\oplus}$ для некоторого замкнутого конуса $K \subset X'$.*

Таким образом, утверждения теоремы 6.11 и следствия 6.12 сохраняют силу для пространств Z и соответственно X', в которых все замкнутые тотальные клинья квазилокально ограничены в своих квазивнутренних точках. Равносильно ли это условие квазилокальной ограниченности пространства?

9.4. Строго замкнутые конусы. Обозначим символами $\triangledown(X)$ и $\triangledown_{\mathrm{s}}(X)$ совокупности замкнутых и строго замкнутых конусов в хаусдорфовом локально выпуклом пространстве X. Если пространство X' квазилокально ограничено, то согласно следствию 6.12 квазиплотность подпространства $Y \subset X'$ равносильна включению $\triangledown_{\mathrm{s}}(X) \subset \triangledown(X|Y)$ и равенству $\triangledown_{\mathrm{s}}(X) = \triangledown_{\mathrm{s}}(X|Y)$. Как с этими утверждениями соотносятся равенства $\triangledown(X) = \triangledown(X|Y)$ и $\triangledown(X|Y) = \triangledown_{\mathrm{s}}(X|Y)$?

9.5. Строго замкнутые конусы в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Аналогичный вопрос возникает в связи с теоремой 8.5. Поскольку замкнутые конусы архимедовы, согласно этой теореме из квазиплотности подпространства $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ следует равенство $\triangledown\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y\big) = \triangledown_{\mathrm{s}}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y\big)$. Верно ли обратное? Иными словами, можно ли к списку 8.5(a)–(c) добавить утверждение о том, что в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y$ все замкнутые конусы строго замкнуты?

9.6. Поляры конусов. Если $K_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ — индуктивная последовательность замкнутых конусов, то согласно лемме 8.3 последовательность поляр $(\pi_n K_n)^{\boxplus}$ проективна. Проективна ли в этой ситуации последовательность двойственных клиньев $(\pi_n K_n)^{\oplus}$?

9.7. Квазиплотность и проективность. Согласно предложению 8.8 квазиплотность множества $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильна каждому из следующих условий:

(a) S пересекается с любым непустым выпуклым множеством $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, которое является ограниченным, квазиоткрытым и *проективным*;

(b) S пересекается с любым выпуклым множеством $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, которое имеет непустую квазивнутренность и является *проективным*.

Существенно ли требование проективности множеств B и C в этих двух условиях? Если исключить проективность, останутся ли эти условия равносильными квазиплотности S в случае, когда S является плотным векторным подпространством $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

9.8. Примеры квазиплотных пространств. Подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, обладающее сформулированными в предложении 8.9 свойствами (a), (b) и (c), назовем соответственно *экспоненциально плотным*, *декартово плотным* и *рекурсивно плотным*. Эти три свойства связаны очевидными импликациями (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c) и согласно предложению 8.9 влекут квазиплотность. На данный момент немногочисленный список примеров квазиплотных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ включает лишь пространства, экспоненциально плотные в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (см. следствие 8.10). В этой связи возникают три естественных вопроса — о существовании таких квазиплотных подпространств $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что

(a) Y декартово плотно, но не экспоненциально плотно;
(b) Y рекурсивно плотно, но не декартово плотно;
(c) Y не является рекурсивно плотным.

9.9. Коробочная плотность. Согласно предложению 8.8 подмножество пространства $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ квазиплотно тогда и только тогда, когда оно пересекается с каждым непустым проективным квазиоткрытым выпуклым множеством B. Поскольку в число таких множеств B входят открытые коробки (9), образующие базу коробочной топологии на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, отсюда следует, что всякое квазиплотное множество коробочно плотно. Верно ли обратное? Существует ли плотное подпространство $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, являющееся коробочно плотным, но не квазиплотным?

9.10. Топологичность квазиплотности. Если ответ на предыдущий вопрос оказывается отрицательным, и коробочная плотность не равносильна квазиплотности, то найдется ли на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ какая-либо иная топология, плотность относительно которой была бы равносильна квазиплотности? Топологична ли квазиплотность для плотных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

9.11. Конусы и линейно независимые множества. Несложно показать, что наличие незамкнутого линейно независимого множества в хаусдорфовом локально выпуклом пространстве влечет наличие в нем незамкнутого архимедова конуса (см. [3, 4.7]). Справедливо ли обратное утверждение? Существует ли такое плотное подпространство $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|Y$ все линейно независимые множества замкнуты, но имеются незамкнутые архимедовы конусы?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2006.
2. *Aliprantis C. D., Tourky R.* Cones and duality. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007.
3. *Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В.* Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах // Владикавк. мат. журн. 2015. Т. 17, № 3. С. 36–43.
4. *Wilansky A.* Modern methods in topological vector spaces. New York: McGraw-Hill, 1978.
5. *Сторожук К. В.* Тонкие гиперплоскости // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 1553–1555.
6. *Aliprantis C. D., Border K. C.* Infinite dimensional analysis. A hitchhiker's guide. 3rd ed. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2006.
7. *Borwein J. M., Lewis A. S.* Partially finite convex programming, Part I: Quasi relative interiors and duality theory // Math. Programming. 1992. V. 57. P. 15–48.
8. *Boţ R. I., Grad S.-M., Wanka G.* Duality in vector optimization. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2009.

9. *Peressini A. L.* Ordered topological vector spaces. New York, etc.: Harper & Row, 1967.
10. *Köthe G.* Topological vector spaces I. New York: Springer-Verlag, 1969.
11. *Anger B., Lembcke J.* Extension of linear forms with strict domination on locally compact cones // Math. Scand. 1980. V. 47. P. 251–265.

Поступила в редакцию 3 мая 2023 г.
После доработки 3 мая 2023 г.
Принята к публикации 16 мая 2023 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru

Емельяненков Иван Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
EmelIvanAl@yandex.ru