ЮМИ

VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTRE
OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE
NORTH-CAUCASUS CENTER FOR MATHEMATICAL RESEARCH

TRENDS IN SCIENCE • THE SOUTH OF RUSSIA

MATHEMATICAL FORUM

Volume 14

MODERN MATHEMATICS. INTRODUCTORY LECTURES

(Project OTDE-Workshop)

Vladikavkaz
2023

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИИ НАУК

ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ЦЕНТР МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ИТОГИ НАУКИ • ЮГ РОССИИ

СЕРИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРУМ

Том 14

ВВОДНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ

(Проект OTDE-Workshop)

Владикавказ
2023

ББК 22.12+22.16
УДК 517

Редактор серии:
д. ф.-м. н., профессор А. Г. Кусраев

Редакторы тома:
д. ф.-м. н., профессор А. Е. Гутман,
д. ф.-м. н., профессор А. Г. Кусраев,
к. ф.-м. н. Ж. Д. Тотиева

Математический форум. Т. 14. Вводные лекции по современной математике (Проект OTDE-Workshop).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2023.—211 с.—(Итоги науки. Юг России).

Настоящий сборник представляет собой четырнадцатый том серии «Математический форум», в который вошли циклы обзорных лекций по новейшим разделам современной математики с формулировкой нерешенных задач и указанием актуальных направлений дальнейших исследований.

Mathematical Forum. Vol. 14. Modern Mathematics. Introductory Lectures (Project OTDE-Workshop).—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2023.—211 p.—(Trends in Science: The South of Russia).

This collection is the fourteenth volume in “Mathematical Forum” series, which includes survey courses on the recent issues of modern mathematics with unsolved problems and directions for further research.

ISBN 978-5-904695-46-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник представляет собой четырнадцатый выпуск серии «Математический форум», который издается Южным математическим институтом — филиалом Владикавказского научного центра Российской академии наук. Цель издания — укрепление позиций фундаментальной математики и интеграция научных исследований на Юге России, расширение и углубление научных контактов математиков региона с российскими и зарубежными коллегами.

В сборник вошли материалы проекта OTDE-Workshop (Workshops on operator theory and differential equations / Воркшопы по теории операторов и дифференциальным уравнениям), реализуемого совместно Южным математическим институтом ВНЦ РАН и Северо-Кавказским центром математических исследований ВНЦ РАН. В 2021 году проект носил название «Вводные лекции по современной математике» и представлял собой циклы обзорных лекций по новейшим разделам современной математики с формулировкой нерешенных задач и указанием актуальных направлений дальнейших исследований. Целью проекта является: помощь начинающим математикам в выборе научного направления, привлечение талантливой молодежи к математическим исследованиям, содействие профессиональному становлению и творческому росту, содействие формированию научных математических школ мирового уровня.

В программу проекта OTDE-Workshop вошли авторские курсы обзорных лекций ведущих российских ученых — специалистов в следующих научных областях: оптимизация и выпуклый анализ, прикладная математика и математическая гидродинамика, функциональный анализ и нестандартные методы анализа, дифференциальные уравнения и асимптотические методы.

Целю совместного курса «Булевозначный анализ и проблема Викстеда», состоящего из четырех лекций, **Гутмана Александра Ефимовича** — д.ф.-м.н., профессора, заведующего лабораторией функционального анализа Института математики им. С. Л. Соболева (г. Новосибирск) и **Кусраева Анатолия Георгиевича** —

д.ф.-м.н., профессора, научного руководителя Владикавказского научного центра (г. Владикавказ), специалистов в области функционального анализа и теории операторов, является эскизное изложение основ булевозначного анализа и его применения к одной проблеме из теории линейных операторов в векторных решетках.

Курс лекций «Элементы теории интегральных уравнений» **Дурдиева Дурдимурода Каландаровича** — д.ф.-м.н., профессора, заведующего Бухарским филиалом Института математики Академии наук Республики Узбекистан (г. Бухара, Республика Узбекистан), специалиста в области интегральных и дифференциальных уравнений и математической геофизики, содержит основные понятия и теоремы теории интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра, интегральных уравнений со слабыми особенностями, с симметричными, полярными ядрами. Рассмотрены также понятия дробного интегрирования и дифференцирования, собственных чисел и собственных функций интегрального оператора Фредгольма.

В лекциях **Левенштама Валерия Борисовича** — д. ф.-м. н., доцента, профессора кафедры алгебры и дискретной математики Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета (г. Ростов-на-Дону), специалиста в области дифференциальных уравнений, математической физики и асимптотических методов, изложен ряд начальных понятий теории асимтотических методов, разобраны некоторые приемы построения асимптотических разложений интегралов, зависящих от асимптотического параметра, а также рассмотрены обыкновенные дифференциальные уравнения, зависящие от асимптотического параметра, и показано, как строить асимптотические разложения их решений.

Вопросу оптимального восстановления линейных функционалов и операторов был посвящен цикл лекций **Магарил-Ильяева Георгия Георгиевича** — д. ф.-м. н., профессора, профессора кафедры общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва), специалиста в области теории приближений, теории экстремальных задач и выпуклого анализа. Изложены новые результаты по оптимальному восстановлению линейных функционалов и операторов. Сформулированы некоторые нерешенные задачи.

Цикл лекций **Тотиевой Жанны Дмитриевны** — к. ф.-м. н., старшего научного сотрудника отдела математического моделирования Южного математического института Владикавказского научного центра РАН (г. Владикавказ), специалиста в области прикладной математики и математического моделирования, знакомит читателя с некоторыми методами (как аналитическими, так и численными) решения начально-краевых задач для уравнений Сен-Венана. Приводятся начальные сведения по квазилинейным гиперболическим системам и смежным проблемам математического моделирования.

Участниками и слушателями OTDE-Workshop в 2021 году были студенты, магистранты, аспиранты и молодые ученые высших учебных заведений и научно-исследовательских организаций России и стран ближнего зарубежья, исследователи, заинтересованные в обсуждаемых научных направлениях. Отдельные лекции популярного характера посетили учащиеся 8–11 классов общеобразовательных учреждений, а также школьные преподаватели.

УДК 517.98

БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ АНАЛИЗ И ПРОБЛЕМА ВИКСТЕДА[1]

А. Е. Гутман, А. Г. Кусраев

Цель настоящего миникурса, состоящего из четырех лекций, — эскизное изложение основ булевозначного анализа и его применения к одной проблеме из теории линейных операторов в векторных решетках.

Ключевые слова: пространство Канторовича, проблема Викстеда, функциональное уравнение Коши, расширение поля, булевозначное моделирование, спуски и подъемы, булевозначные числа.

Введение

В течении последнего полувека все больше внимания уделяется синтетическим стандартным и нестандартным методам, характеризующимся комбинированием разных идей и технических средств из анализа, алгебры и математической логики. Одним из основных направлений, возникших на этом пути, является *булевозначный анализ* — исследование математических объектов посредством сравнительного анализа их представлений в двух различных теоретико-множественных моделях. Цель настоящего миникурса — продемонстрировать применение булевозначного анализа на примере одной проблемы из теории операторов в векторных решетках.

В первой лекции представлен необходимый минимум сведений о вещественных и комплексных *пространствах Канторовича* и порядково ограниченных операторах в них, а затем дается формулировка проблемы Викстеда: *описать расширенные пространства Канторовича, в которых все линейные операторы, перестановочные с порядковыми проекторами, являются порядково ограниченными.*

Во второй лекции показано, как строить нерегулярные решения функционального *уравнения Коши* с помощью *базиса Гамеля.* Затем

[1] Курс лекций подготовлен в Северо-Кавказском центре математических исследований ВНЦ РАН при поддержке Минобрнауки России, соглашения № 075-02-2021-1844, № 075-02-2022-896, № 075-02-2023-914. Работа А. Е. Гутмана выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

приводятся нужные сведения из теории расширения полей; основное внимание уделено продолжению *автоморфизмов* и *дифференцирований* полей, причем в этих вопросах роль базиса Гамеля играет *базис трансцендентности.*

Третья лекция посвящена эскизному изложению булевозначных моделей теории множеств. В ней сформулированы основные *принципы переноса, перемешивания и максимума.* Далее, представлены основные технические средства булевозначного анализа — операции *канонического вложения*, *спуска* и *подъема*, а также результаты их последовательного применения, иногда называемые *правилами сокращения стрелок* или *правилами Эшера.*

В четвертой лекции показывается, что проблема Викстеда — всего лишь новая форма вопроса о регулярности всех решений функционального уравнения Коши при некотором дополнительном условии однородности. Это обстоятельство связано с *теоремой Гордона*, утверждающей, что интерпретация поля действительных (комплексных чисел) в булевозначной модели представляет собой расширенное вещественное (комплексное) пространство Канторовича. Из этих фактов вытекают различные варианты решения проблемы Викстеда.

Необходимые сведения из теории векторных решеток содержатся в [1, 2], из булевозначного анализа — в [3, 4], из теории полей — в [5, 6]. Подробное изложение материала настоящего миникурса можно найти в [7] и [4, гл. 4].

Лекция 1.
Пространства Канторовича. Проблема Викстеда

1. Пространство Канторовича. Здесь мы коротко рассмотрим порядково полные векторные решетки, именуемые также пространствами Канторовича. Необходимые сведения имеются в книгах [1, 2, 8].

1.1. Пусть $\mathbb{F}$ — линейно упорядоченное поле. *Упорядоченное векторное пространство* над $\mathbb{F}$ — пара $(E, \leqslant)$, где E — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а $\leqslant$ — *векторный порядок* в E, т. е. отношение порядка в E, согласованное со структурой векторного пространства. Последнее означает, что неравенства в E можно складывать и умножать на положительные элементы поля $\mathbb{F}$. Задание векторного порядка в векторном пространстве E над полем $\mathbb{F}$ равносильно также указанию множества — *положительного конуса* $E^+ \subset E$ со свойствами: $E^+ + E^+ \subset E^+$; $\lambda E^+ \subset E^+$ $(0 \leqslant \lambda \in \mathbb{F})$; $E^+ \cap E^+ = \{0\}$. При этом порядок $\leqslant$ и конус E^+ связаны соотношением

$$x \leqslant y \leftrightarrow y - x \in E^+ \quad (x, y \in E).$$

Упорядоченное векторное пространство, являющееся решеткой, называют *векторной решеткой*[2]. Для элементов x, y векторной решетки E приняты обозначения: $x \vee y := \sup\{x, y\}$, $x \wedge y := \inf\{x, y\}$, $|x| := \sup\{x, -x\}$, $x^+ := \sup\{x, 0\}$, $x^- := (-x)^+$.

Пространством Канторовича или, короче, *K-пространством* называют такую векторную решетку, в которой всякое непустое порядково ограниченное множество имеет точные границы. Порядковая ограниченность множества означает, что оно содержится в каком-нибудь порядковом интервале $[a, b] := \{x \in E : \ a \leqslant x \leqslant b\}$ $(a, b \in E,\ a \leqslant b)$.

1.2. Элементы $x, y \in E$ называют *дизъюнктными* и пишут $x \perp y$, если $|x| \wedge |y| = 0$. *Компонентой* (или *полосой*) векторной решетки E называют множество вида $M^\perp := \{x \in E : \ (\forall\, y \in M)\ x \perp y\}$, где $M \subset E$. Совокупность всех полос E, упорядоченная по включению, является полной булевой алгеброй $\mathbb{B}(E)$, в которой булевы операции выглядят так:

$$L \wedge K = L \cap K, \quad L \vee K = (L \cup K)^{\perp\perp},$$
$$L^* = L^\perp \quad (L, K \in \mathbb{B}(E)).$$

Алгебра $\mathbb{B}(E)$ носит название *базы* E.

Элемент $\mathbb{1} \in E$ называют (*слабой порядковой*) *единицей*, если в E нет ненулевых элементов, дизъюнктных $\mathbb{1}$, т. е. если $\{\mathbb{1}\}^\perp = \{0\}$ или, что то же самое $\{\mathbb{1}\}^{\perp\perp} = E$. Элемент $e \in E$ называют *единичным* относительно $\mathbb{1}$ или *осколком единицы* $\mathbb{1}$, если $e \wedge (\mathbb{1} - e) = 0$. Множество $\mathscr{E}(E) := \mathscr{E}(\mathbb{1})$ всех единичных элементов снабжают индуцированным из E порядком. Упорядоченное множество $\mathscr{E}(E)$ является булевой алгеброй, в которой булево дополнение имеет вид $e^* := \mathbb{1} - e$ $(e \in \mathscr{E}(\mathbb{1}))$.

[2]В западной литературе векторные решетки также принято называть *пространствами Рисса* в честь венгерского математика Фридеша Рисса (Riesz Frigyes; 1880–1957), одного из основателей функционального анализа.

1.3. Для каждой полосы K в K-пространстве E имеет место разложение в прямую сумму $E = K \oplus K^{\perp}$. Тем самым однозначно определен оператор проектирования $[K]$ на подпространство K параллельно $K^{\perp}$, называемый *порядковым проектором* (или просто проектором, если контекст исключает путаницу). При этом выполняются неравенства $0 \leqslant [K]x \leqslant x$ для всех $0 \leqslant x \in E$. Наоборот, если линейный проектор π в E удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \pi x \leqslant x$ $(0 \leqslant x \in E)$, то $K := \pi(E)$ является компонентой, причем $\pi = [K]$. В множестве всех порядковых проекторов $\mathbb{P}(E)$ вводят порядок, полагая $\rho \leqslant \pi$ в том и только том случае, когда $\operatorname{im}\rho \subset \operatorname{im}\pi$. Полезно иметь в виду равносильное определение $\rho \leqslant \pi \leftrightarrow \rho\pi = \pi\rho = \rho$. Упорядоченное множество $\mathbb{P}(E)$ является полной булевой алгеброй, в которой булевы операции имеют вид:

$$\pi \wedge \rho = \pi\rho = \rho\pi, \quad \pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi\rho,$$
$$\pi^* = I_E - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathbb{P}(E)).$$

1.4. Теорема. *Пусть E — произвольное K-пространство. Отображение $K \mapsto [K]$ есть изоморфизм булевых алгебр $\mathbb{B}(E)$ и $\mathbb{P}(E)$. Если же в E имеется порядковая единица, то отображения $\pi \mapsto \pi\mathbb{1}$ из $\mathbb{P}(E)$ в $\mathscr{E}(E)$ и $e \mapsto \{e\}^{\perp\perp}$ из $\mathscr{E}(E)$ в $\mathbb{B}(E)$ также являются изоморфизмами булевых алгебр.*

1.5. Пусть E и F — векторные решетки. Линейный оператор $T : E \to F$ называют *положительным* и пишут $T \geqslant 0$, если $Tx \geqslant 0$ для каждого $0 \leqslant x \in E$, и *регулярным*, если $T = T_1 - T_2$ для некоторых положительных операторов $T_1, T_2 : E \to F$. Говорят, что оператор T *порядково ограничен* (или *о-ограничен*), если $T(M)$ — порядково ограниченное множество в F для любого порядково ограниченного $M \subset E$. Если F — это K-пространство, то классы регулярных и порядково ограниченных операторов совпадают. Более того, справедливо следующее утверждение.

1.6. Теорема Рисса — Канторовича. *Если E — векторная решетка и F — произвольное K-пространство, то пространство $L^{\sim}(E,F)$ всех регулярных операторов из E в F само является K-пространством.* (*Порядок в $L^{\sim}(E,F)$ вводится формулой:* $S \geqslant T \leftrightarrow S - T \geqslant 0$.)

1.7. Напомним, что *комплексной векторной решеткой* принято называть комплексификацию $E_{\mathbb{C}} := E \oplus iE$ вещественной векторной решетки E при условии, что существует модуль $|z|$ каждого элемента $z \in E_{\mathbb{C}}$, определяемый формулой

$$|z| := \sup_{0 \leqslant \theta < 2\pi} |(\cos\theta)x + (\sin\theta)y| \quad (z := x + iy \in E_{\mathbb{C}}).$$

В случае K-пространства последнее условие выполняется автоматически. Дизъюнктность элементов $z := x + iy$ и $z' := x' + iy'$ из $E_{\mathbb{C}}$ вводится, как обычно, формулой $z \perp z' \leftrightarrow |z| \wedge |z'| = 0$ и равносильна соотношению $\{x, y\} \perp \{x', y'\}$. Полоса J в $E_{\mathbb{C}}$ определяется как комплексификация $J = J_0 \oplus iJ_0$ полосы J_0 в E. Как и в вещественном случае, всякая полоса в $E_{\mathbb{C}}$ допускает представление в виде $\{z \in E_{\mathbb{C}} : (\forall\, v \in V)\, z \perp v\}$, где V — подмножество $E_{\mathbb{C}}$.

1.8. Рассмотрим вещественные векторные решетки E и F. Пространство $\mathbb{C}$-линейных операторов $L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$ изоморфно комплексификации вещественного пространства $\mathbb{R}$-линейных операторов $L(E, F)$. Оператор $T \in L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$ допускает и притом единственное представление в виде $T = T_1 + iT_2$, где $T_1, T_2 \in L(E, F)$, и произвольный оператор $S \in L(E, F)$ отождествляется со своим каноническим продолжением $\widetilde{S} \in L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$, определяемым формулой $\widetilde{S}z := Sx + iSy$, $z = x + iy$. В частности, если E и F рассматривать как вещественные подпространства $E_{\mathbb{C}}$ и $F_{\mathbb{C}}$ соответственно, то пространство $L(E, F)$ можно мыслить как вещественное подпространство $L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$.

Оператор $T = T_1 + iT_2$ называют положительным, если $T_1 \geqslant 0$ и $T_2 = 0$. Если $E_{\mathbb{C}} = J \oplus J^{\perp}$ для некоторого идеала $J \subset E_{\mathbb{C}}$, то существует проектор $P : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ с ядром $J^{\perp}$ и образом J. Ограничение P на E будет порядковым проектором в E и, в частности, P — положительный оператор.

1.9. Исторический комментарий. Порядково (дедекиндово) полные векторные решетки, т. е. K-пространства, выделил и начал изучать Л. В. Канторович[3]. В первой основополагающей работе на эту тему он писал: *«В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного обще-*

[3] Леонид Витальевич Канторович (1912–1986) — советский математик и экономист, действительный член Академии Наук СССР, лауреат премии по экономике памяти Альфреда Нобеля 1975 года, один из основателей теории операторов в векторных решетках.

го класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы». Здесь Л. В. Канторович сформулировал важную методологическую установку — *эвристический принцип переноса*, согласно которому элементы K-пространства суть обобщенные числа. Глубина и универсальность принципа Канторовича получили полное разъяснение только в рамках булевозначного анализа (см. [3, 4]).

2. Проблема Викстеда. В этом разделе введем класс нерасширяющих операторов и приведем формулировку проблемы Викстеда.

2.1. Пусть E — произвольное K-пространство. Для линейного оператора $T : E \to E$ равносильны следующие условия:

(1) $Te \in \{e\}^{\perp\perp}$ $(e \in E)$;

(2) $e \perp f \ \to \ Te \perp f$ $(e, f \in E)$;

(3) $T(K) \subset K$ $(K \in \mathbb{B}(E))$;

(4) $\pi \circ T = T \circ \pi$ $\ (\pi \in \mathbb{P}(E))$.

2.2. Говорят, что оператор T *сохраняет полосы* или является *нерасширяющим*, если имеет место одно (а тогда и любое) из указанных условий (1)–(4). Скажем, что оператор $T := T_1 + iT_2 : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ сохраняет полосы, если таковыми являются вещественные линейные операторы T_1 и T_2. Нетрудно показать, что если E — K-пространство, то оператор T сохраняет полосы в том и только в том случае, когда $\pi T = T\pi$ для всех $\pi \in \mathbb{P}(E)$.

2.3. Пространство Канторовича E называют *расширенным*, если в нем любое непустое множество попарно дизъюнктных положительных элементов имеет супремум.

В расширенном K-пространстве существует порядковая единица. Более того, если в расширенном K-пространстве E фиксировать порядковую единицу $\mathbb{1}$, то в E можно, и притом единственным способом, определить структуру коммутативного кольца так, что выполнены условия:

(1) для положительного $a \in E$ оператор умножения $x \mapsto ax$ положителен и сохраняет полосы;

(2) $\mathbb{1}$ служит кольцевой единицей.

Если векторная решетка E является одновременно кольцом (алгеброй) и выполнено условие (1), то E принято называть *f-кольцом* (*f-алгеброй*). Таким образом, в расширенном K-пространстве выбор порядковой единицы однозначно определяет структуру f-алгебры.

Комплексную f-алгебру $E_{\mathbb{C}}$ определим как комплексификацию вещественной f-алгебры E при условии, что существует модуль любого элемента, см. 1.7. Умножение в E естественно продолжается до умножения в $E_{\mathbb{C}}$ по формуле $(x+iy)(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+x'y)$. При этом $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ $(z_1, z_2 \in E_{\mathbb{C}})$.

2.4. Перечислим важнейшие примеры расширенных K-пространств. В 2.4 (1)–(3) отношение порядка вводится поточечно, т. е. $f \leqslant g$ означает, что $f(t) \leqslant g(t)$ для всех t из общей области определения f и g.

(1) Расширенным K-пространством является пространство $L^0(\Omega, \Sigma, \mu) := L^0_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ классов эквивалентности почти всюду конечных измеримых функций на Ω, где (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, причем μ σ-конечна (или, более общо, обладает свойством прямой суммы, см. [8, 1.1.8]). Комплексификация этого пространства $L^0_{\mathbb{C}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ — комплексное расширенное K-пространство, состоящее из классов эквивалентности почти всюду определенных комплексных измеримых функций на Ω. База K-пространства $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ изоморфна булевой фактор-алгебре $\Sigma/\mu^{-1}(0)$ — булевой алгебре измеримых множеств по модулю множеств нулевой меры. Порядковый проектор в $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ представляет собой оператор умножения на характеристическую функцию измеримого множества.

(2) Пространство $C_\infty(Q)$ непрерывных функций, определенных на экстремально несвязном компакте Q, со значениями в расширенной числовой прямой и принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотном множестве [8, 1.4.2]. Комплексификация этого пространства $C_\infty(Q, \mathbb{C})$ состоит из классов эквивалентности непрерывных комплекснозначных функций, определенных на открытых плотных подмножествах Q; эквивалентными считаются функции, совпадающие на пересечении своих областей определения. База этого K-пространства изоморфна булевой алгебре открыто-замкнутых подмножеств компакта Q. Порядковый проектор в $C_\infty(Q)$ — оператор умножения на характеристическую функцию открыто-замкнутого множества.

(3) Пространство $\mathrm{Bor}(Q)$ классов эквивалентности борелевских функций, определенных на топологическом пространстве Q. Две функции *эквивалентны*, если они совпадают на дополнении к множеству первой категории. База K-пространства $\mathrm{Bor}(Q)$ изоморфна булевой алгебре борелевских подмножеств Q по модулю множеств первой категории. Комплексификация $\mathrm{Bor}(Q, \mathbb{C})$ пространства $\mathrm{Bor}(Q)$ состоит из классов эквивалентности комплекснозначных борелевских функций, определенных на Q.

(4) Пространство $\overline{\mathfrak{A}}$ самосопряженных (не обязательно ограниченных) операторов в гильбертовом пространстве, присоединенных к коммутативной алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$. База K-пространства $\overline{\mathfrak{A}}$ изоморфна булевой алгебре всех ортогональных проекторов, входящих в $\mathfrak{A}$.

2.5. Проблема Викстеда. *Описать расширенные K-пространства, в которых все линейные нерасширяющие операторы порядково ограничены.*

2.6. В связи с проблемой Викстеда возникло следующее понятие. Рассмотрим расширенное K-пространство G с единицей $\mathbb{1}$. Множество $\mathscr{E} \subset G$ называют *локально линейно независимым*, если для любых попарно различных элементов $e_1, \dots, e_n \in \mathscr{E}$, ненулевых чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и порядкового проектора π в G равенство $\sum_{k=1}^n \lambda_k \pi e_k = 0$ влечет $\pi e_k = 0$ при $k := 1, \dots, n$. Максимальное локально линейно независимое множество в G называют *локальным базисом Гамеля G*.

Одноточечное множество $\{\mathbb{1}\}$ локально линейно независимо. Из леммы Куратовского — Цорна следует, что в каждом расширенном K-пространстве существует локальный базис Гамеля. Кроме того, локально линейно независимое множество $\mathscr{E} \subset G$ будет локальным базисом Гамеля для G, если и только если для каждого $x \in G$ найдется разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathbb{B}(G)$ такое, что для любого индекса $\xi \in \Xi$ существуют конечные множества элементов $e_1, \dots, e_n \in \mathscr{E}$ и чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, для которых $\pi_\xi x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \pi_\xi e_k$.

2.7. Элемент $e \in G_+$ именуют *локально постоянным относительно* $f \in G_+$, если $e = \sup_{\xi\in\Xi} \lambda_\xi \pi_\xi f$ для некоторого числового семейства $(\lambda_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и семейства $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов.

Для произвольного расширенного K-пространства G равносильны следующие утверждения:

(1) *все элементы G_+ являются локально постоянными относительно $\mathbb{1}$;*

(2) *все элементы G_+ являются локально постоянными относительно произвольной порядковой единицы $e \in G$;*

(3) *$\{\mathbb{1}\}$ — локальный базис Гамеля для G;*

(4) *каждый локальный базис Гамеля для G состоит из попарно дизъюнктных элементов.*

2.8. Расширенное K-пространство G называют *локально одномерным*, если G удовлетворяет любому из эквивалентных условий 2.7 (1)–(4).

2.9. Теорема. *Пусть G — расширенное K-пространство. Следующие утверждения эквиваленты:*

(1) *G локально одномерно;*

(2) *всякий нерасширяющий линейный оператор $T : G \to G$ порядково ограничен.*

$\lhd$ Этот результат установлен в [9, теорема 2.1] и [10, теорема 3.2]. $\rhd$

2.10. Исторический комментарий. Вопрос о том, всякий ли нерасширяющий (= коммутирующий с порядковыми проекторами) линейный оператор в расширенном пространстве Канторовича автоматически порядково ограничен, был поставлен в работе Э. В. Викстеда[4] [11] 1977 года. В 1978 году Ю. А. Абрамович[5], А. И. Векслер[6] и А. В. Колдунов[7] [12] анонсировали первый пример неограниченного нерасширяющего линейного оператора. Кроме того, выяснилось, что ответ на вопрос Викстеда зависит от пространства, в котором действуют операторы. В работах упомянутых трех авторов [9, 12] и П. Макполина[8] и А. В. Викстеда [10] были найдены классы векторных решеток, в которых нерасширяющий линейный оператор автоматически порядково ограничен. В этих же работах [9, 10] было установлено, что вопрос Викстеда имеет положительный ответ тогда и только тогда, когда рассматриваемое K-пространство локально одномерно. Тем самым, обсуждаемая задача свелась к характеризации локально одномерных K-пространств.

---

[4]Энтони Викстед (Anthony William Wickstead; 1947) — профессор Королевского университета Белфаста, специалист в области теории операторов в банаховых решетках.

[5]Юрий Александрович Абрамович (1945–2003) — советский/американский математик, известен работами в области векторных и банаховых решеток, один из основателей журнала «Positivity».

[6]Александр Ильич Векслер (1933–2011) — советский и российский математик, специалист в области упорядоченных пространств и операторов в них.

[7]Андрей Витальевич Колдунов (1948–2021) — советский и российский математик, специалист в области упорядоченных пространств и операторов в них.

[8]Питер Макполин (Peter McPolin) — ученик Э. Викстеда, опубликовал 7 математических работ, затем переключился на литературно-критические и педагогические исследования.

В 1980-х годах была выдвинута гипотеза о том, что для K-пространства свойства локальной одномерности и дискретности равносильны. Ошибочные доказательства справедливости этой гипотезы и ее отрицания были опубликованы соответственно в [10] и [12]. В 1993 г. А. В. Викстед [13] зафиксировал вопрос о справедливости этой гипотезы как открытый.

Лекция 2. Функциональное уравнение Коши. Расширения полей

3. Функциональное уравнение Коши. В этом параграфе коротко рассмотрим хорошо известный объект классического математического анализа, вынесенный в название. В дальнейшем (см. § 7) мы обнаружим, что нерасширяющие операторы в пространствах Канторовича — решения функционального уравнения Коши в новом обличии, а проблема Викстеда равнозначна вопросу о регулярности всех решений этого уравнения при дополнительном условии типа однородности.

3.1. Символом $\mathbb{F}$ будем обозначать числовое поле, совпадающее с $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Функциональное уравнение Коши с неизвестной функцией $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ имеет вид

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{F}).$$

Нетрудно видеть, что решение этого уравнения автоматически оказывается $\mathbb{Q}$-однородным, т. е. удовлетворяет еще одному функциональному уравнению:

$$f(qx) = qf(x) \quad (q \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{F}).$$

В дальнейшем нас интересует более общая ситуация. А именно, будем рассматривать систему функциональных уравнений

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{F}), \\ f(px) = pf(x) \quad (p \in \mathbb{P},\ x \in \mathbb{F}), \end{cases} \tag{L}$$

где $\mathbb{P}$ — подполе поля $\mathbb{F}$. Обозначим символом $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ поле $\mathbb{F}$, рассматриваемое как векторное пространство над полем $\mathbb{P}$. Как видно, решения системы (L) суть $\mathbb{P}$-линейные функции из $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ в $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$.

3.2. Теорема. *Пусть $\mathscr{E}$ — базис Гамеля векторного пространства $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$, а $\mathscr{F}(\mathscr{E},\mathbb{F})$ — пространство всех функций из $\mathscr{E}$ в $\mathbb{F}$. Множество всех решений системы (L) представляет собой векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, изоморфное $\mathscr{F}(\mathscr{E},\mathbb{F})$. Изоморфизм осуществляется сопоставлением решению f его ограничения $f|_{\mathscr{E}}$ на $\mathscr{E}$.*

$\lhd$ Множество всех решений системы (L) совпадает с множеством $L_{\mathbb{P}}(\mathbb{F})$ всех $\mathbb{P}$-линейных операторов, действующих в векторном пространстве $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$. Поэтому достаточно заметить, что векторные пространства $L_{\mathbb{P}}(\mathbb{F})$ и $\mathscr{F}(\mathscr{E},\mathbb{F})$ изоморфны.

Пусть $\mathscr{F}_0(\mathscr{E},\mathbb{P})$ — множество всех финитных функций, т. е. таких $\varphi:\mathscr{E}\to\mathbb{P}$, что множество $\{e\in\mathscr{E}:\varphi(e)\neq 0\}$ конечно. Тогда $\mathscr{F}_0(\mathscr{E},\mathbb{P})$ — векторное пространство над $\mathbb{P}$, изоморфное $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$. Изоморфизм устанавливается сопоставлением функции $\varphi\in\mathscr{F}_0(\mathscr{E},\mathbb{P})$ элемента $x_\varphi:=\sum_{e\in\mathscr{E}}\varphi(e)e$. Для произвольной функции $\psi\in\mathscr{F}(\mathscr{E},\mathbb{F})$ положим

$$f_\psi(x_\varphi):=\sum_{e\in\mathscr{E}}\varphi(e)\psi(e)\quad(\varphi\in\mathscr{F}_0(\mathscr{E},\mathbb{P})).$$

Тем самым определяется изоморфизм между векторными пространствами $\mathscr{F}(\mathscr{E},\mathbb{F})$ и $L_{\mathbb{P}}(\mathbb{F})$. $\rhd$

3.3. Теорема. *Произвольное решение системы уравнений (L) либо $\mathbb{F}$-линейно, либо имеет график, всюду плотный в пространстве $\mathbb{F}^2:=\mathbb{F}\times\mathbb{F}$.*

$\lhd$ Если решение f системы (L) $\mathbb{F}$-линейно, то оно имеет представление $f(x)=cx$ $(x\in\mathbb{F})$, где $c:=f(1)$. В противном случае найдутся ненулевые элементы $x_1,x_2\in\mathbb{F}$, для которых $f(x_1)/x_1\neq f(x_2)/x_2$. Отсюда вытекает линейная независимость векторов $v_1:=(x_1,f(x_1))$ и $v_2:=(x_2,f(x_2))$ из $\mathbb{F}^2$ над полем $\mathbb{F}$. Действительно, если $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2=0$ для некоторых $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$, то $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=0$ и $\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)=0$, причем система из последних двух уравнений имеет лишь тривиальное решение $\alpha_1=\alpha_2=0$, так как ее определитель $x_1f(x_2)-x_2f(x_1)\neq 0$ по предположению. Итак, всякую пару $(x,y)\in\mathbb{F}$ можно представить в виде $(x,y)=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2$ для некоторых $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$. Так как $\mathbb{P}$ плотно в $\mathbb{F}$, в любой окрестности пары (x,y) можно найти вектор вида $p_1v_1+p_2v_2$, где $p_1,p_2\in\mathbb{P}$. Тем самым множество $\{p_1v_1+p_2v_2:\,p_1,p_2\in\mathbb{P}\}$ плотно в $\mathbb{F}^2$. В то же время это множество содержится в графике функции f, так как с учетом

$\mathbb{P}$-линейности f справедливы равенства

$$p_1v_1 + p_2v_2 = (p_1x_1 + p_2x_2, p_1f(x_1) + p_2f(x_2)) = \\ = (p_1x_1 + p_2x_2, f(p_1x_1 + p_2x_2))$$

при любых $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$. $\triangleright$

3.4. Для того чтобы решение f системы (L) допускало представление $f(x) = cx$ $(x \in \mathbb{F})$, нужно потребовать какое-нибудь дополнительное условие регулярности. Таким очевидным условием является непрерывность, так как в силу $\mathbb{P}$-линейности f будет $f(p) = pf(1)$ и, воспользовавшись плотностью $\mathbb{P}$ в $\mathbb{F}$, получим требуемое представление. Приведем несколько других условий регулярности. Аддитивную функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ назовем *порядково ограниченной*, если она ограничена на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Решение f системы (L) при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ допускает представление $f(x) = cx$ $(x \in \mathbb{R})$ в том и только в том случае, когда выполнено любое из следующих условий (см. [14, § 2.1]):

(1) f непрерывна в некоторой точке;

(2) f монотонно убывает или монотонно возрастает;

(3) f порядково ограничена;

(4) f ограничена сверху или снизу на некотором измеримом множестве положительной лебеговой меры;

(5) f измеримо по Лебегу.

3.5. Рассмотрим теперь $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, и пусть $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0 + i\mathbb{P}_0$ для некоторого подполя $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{R}$. Тогда пространство решений системы (L) — комплексификация пространства решений той же системы при $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0$. Точнее, если $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — $\mathbb{P}_0$-линейная функция, то существует единственная $\mathbb{P}$-линейная функция $\widetilde{g} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, определяемая формулой

$$\widetilde{g}(z) = g(x) + ig(y) \quad (z = x + iy \in \mathbb{C}).$$

Наоборот, если $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — $\mathbb{P}$-линейная функция, то существует единственная пара $\mathbb{P}_0$-линейных функций $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что $f(z) = \widetilde{g}_1(z) + i\widetilde{g}_2(z)$ $(z \in \mathbb{C})$. Таким образом, любое решение f системы (L) имеет вид $f = f_1 + if_2$, где $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{P}_0$-линейны и $f_i(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$. Будем говорить, что f монотонна или ограничена, если таковы функции f_1 и f_2. Легко можно убедиться в справедливости следующих утверждений.

(1) График f плотен в $\mathbb{C}^2$ в том и только в том случае, когда график каждой из функций $f_1|_{\mathbb{R}}$ и $f_2|_{\mathbb{R}}$ плотен в $\mathbb{R}^2$.

(2) Решение f системы (L) при $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ и $\mathbb{P}=\mathbb{P}_0+i\mathbb{P}_0$, $\mathbb{P}_0\subset\mathbb{R}$, допускает представление $f(x) = cx$ $(x \in \mathbb{C})$ для некоторого $c\in\mathbb{C}$ в том и только в том случае, если выполнено любое из условий (1)–(5) из 3.4.

3.6. Теорема. *Пусть* $\mathbb{P}$ *— подполе поля* $\mathbb{F}$*, причем* $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0 + i\mathbb{P}_0$ *для некоторого подполя* $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{R}$*, если* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$*. Равносильны утверждения:*

(1) $\mathbb{F} = \mathbb{P}$;

(2) *любое решение системы* (L) *порядково ограничено.*

$\lhd$ Импликация (1) $\to$ (2) тривиальна. Противоположную импликацию докажем от противного. Предположение $\mathbb{F} \neq \mathbb{P}$ означает, что базис Гамеля $\mathscr{E}$ векторного пространства $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ содержит по крайней мере два ненулевых несовпадающих элемента $e_1, e_2 \in \mathscr{E}$. Определим функцию $\psi : \mathscr{E} \to \mathbb{F}$ так, чтобы $\psi(e_1)/e_1 \neq \psi(e_2)/e_2$. Тогда $\mathbb{P}$-линейная функция $f = f_\psi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, совпадающая с ψ на $\mathscr{E}$, имеет плотный в $\mathbb{F}^2$ график согласно 3.3. Следовательно, f_ψ не может быть порядково ограниченной, см. 3.4, 3.5. $\rhd$

3.7. Рассмотрим еще две системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{F}), \\ f(px) = pf(x) \quad (p \in \mathbb{P},\ x \in \mathbb{F}), \\ f(xy) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{F}), \end{cases} \tag{A}$$

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{F}), \\ f(px) = pf(x) \quad (p \in \mathbb{P},\ x \in \mathbb{F}), \\ f(xy) = f(x)y + xf(y) \quad (x, y \in \mathbb{F}). \end{cases} \tag{D}$$

Ненулевые решения системы (A) называют $\mathbb{P}$-*автоморфизмами* поля $\mathbb{F}$, а решения системы D — $\mathbb{P}$-*дифференцированиями* поля $\mathbb{F}$. Тождественный автоморфизм и нулевое дифференцирование принято называть *тривиальными.* Вопрос о существовании нетривиальных решений систем (A) и (D) требует привлечения более тонких результатов из теории полей, излагаемых в следующей части настоящей лекции.

3.8. Исторический комментарий. Первоначально изучение функциональных уравнений было связано с задачами физики. Ранние исследования относятся к XIV веку, хотя идея функционального уравнения использовалась и раньше. Несмотря на солидный возраст теория функциональных уравнений представляют собой живой раздел современной математики с многочисленными внутриматематическими взаимосвязями, с расширяющейся областью приложений к наукам о природе, человеке и обществе. Первое систематическое изложение основных функциональных уравнений было дано в книге О. Л. Коши[9] «Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, преподаваемых в Королевской Политехнической школе», опубликованном в 1821 году. Детальное изложение результатов, приложений и истории предмета см. в книге [14].

Существование разрывных решений функционального уравнения Коши впервые доказал Гамель[10] (1905), используя базис векторного пространства вещественных чисел над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

4. Расширения полей. В этом разделе собраны некоторые сведения из теории полей, необходимые для дальнейшего анализа систем (A) и (D).

4.1. Рассмотрим два поля K и L. Если K — подполе поля L, то говорят также, что L — *расширение поля* K. Расширение L поля K называют *алгебраическим*, если каждый элемент из L служит корнем ненулевого многочлена (от одной переменной) с коэффициентами из поля K. Другими словами расширение L поля K именуем алгебраическим, если всякий элемент $x \in L$ алгебраичен над K; последнее же означает существование конечного числа элементов $a_0, \ldots, a_n \in K$, $n \geqslant 1$, не равных нулю одновременно, для которых $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$. Расширение L поля K, не являющееся алгебраическим, называют *трансцендентным* (над K).

Напомним, что поле K алгебраически замкнуто, если всякий непостоянный многочлен с коэффициентами из K имеет хотя бы один корень в K. Эквивалентное условие состоит в том, что всякое алгебраическое расширение поля K совпадает с K.

Алгебраическим замыканием поля K называют такое его расширение, которое алгебраично над K и алгебраически замкнуто. В теории полей доказывается, что всякое поле K имеет единственное с точностью до K-изоморфизма алгебраическое замыкание (см. [5, 15]).

4.2. Пусть L — расширение поля K. Попарно различные элементы $x_1, \ldots, x_n \in L$ называют *алгебраически независимыми* над K, если для любого многочлена P от n переменных с коэффициента-

---

[9] Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy; 1789–1857) — французский математик и механик, один из наиболее активных творцов современного математического анализа, один из основоположников механики сплошных сред.

[10] Георг Карл Вильгельм Гамель (1877–1954 года) — немецкий математик и механик, ученик Давида Гильберта.

ми из поля K равенство $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ влечет $P \equiv 0$, т. е. все коэффициенты P равны нулю.

Как видно из этого определения, алгебраическая независимость элементов $x_1, \ldots, x_n$ равносильна линейной независимости над K множества всех одночленов вида $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$, где $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \geqslant 0$.

Множество $\mathscr{E} \subset L$ назовем алгебраически независимым, если всякое конечное его подмножество алгебраически независимо. Пустое множество считают алгебраически независимым. Максимальное по включению алгебраически независимое над K множество $\mathscr{E} \subset L$ называют *алгебраическим базисом* (или *базисом трансцендентности*) L. Символом $K(\mathscr{E})$ обозначают наименьшее подполе поля L, содержащее K и множество $\mathscr{E} \subset L$, и при этом говорят, что $K(\mathscr{E})$ получается из K присоединением множества $\mathscr{E}$. Если $L = K(\mathscr{E})$ и $\mathscr{E}$ алгебраически независимо, то L принято называть *чистым расширением* поля K, а $\mathscr{E}$ — *чистым базисом* L над K.

4.3. Теорема Штейница. *Всякое расширение L поля K допускает алгебраический базис $\mathscr{E}$ над K. При этом L служит алгебраическим расширением чистого расширения $K(\mathscr{E})$.*

4.4. Теорема о продолжении изоморфизмов. *Пусть L — расширение поля K и $\mathscr{E}$ — алгебраический базис L над K. Пусть i — изоморфизм K на некоторое поле K' и L' — алгебраически замкнутое расширение поля K'. Для любого алгебраически независимого семейства $(l_e)_{e \in \mathscr{E}}$ элементов расширения L' существует изоморфизм i' из L в L', продолжающий i и удовлетворяющий условию $i'(e) = l_e$ для всех $e \in \mathscr{E}$.*

4.5. Отображение $d : K \to L$ называют *дифференцированием подполя* $K \subset L$ в поле L, если $d(x+y) = d(x)+d(y)$ и $d(xy) = d(x)y+xd(y)$ для любых $x, y \in K$. Общий результат о продолжении дифференцирований, сформулированный в следующем пункте, использует понятие *сепарабельного расширения*. Для наших дальнейших целей нет необходимости углубляться в свойства сепарабельных расширений; детали можно найти в [5, 6]. Здесь нам достаточно отметить, что если поле K алгебраически замкнуто или имеет характеристику нуль, то любое расширение K будет сепарабельным.

4.6. Теорема о продолжении дифференцирований. *Пусть K — расширение поля k, L — расширение поля K и d — дифференцирование поля k в L.*

(1) *Если K — сепарабельное алгебраическое расширение поля k, то d однозначно продолжается до дифференцирования D поля K в L.*

(2) *Если K — сепарабельное расширение поля k с чистым алгебраическим базисом $\mathscr{E} \subset K$ над k, то для любого семейства $(l_e)_{e\in\mathscr{E}}$ элементов L существует и притом единственное дифференцирование D поля K в L, продолжающее d и удовлетворяющее условию $De = l_e$ для всех $e \in \mathscr{E}$.*

4.7. *Пусть $\mathbb{C}$ служит трансцендентным расширением поля $\mathbb{P}$. Тогда в $\mathbb{C}$ существует нетривиальный $\mathbb{P}$-автоморфизм.*

$\lhd$ Пусть $\mathscr{E}$ — базис трансцендентности расширения $\mathbb{C}$ над $\mathbb{P}$. Так как $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое расширение поля $\mathbb{P}(\mathscr{E})$, то любой $\mathbb{P}$-автоморфизм ϕ поля $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ продолжается до $\mathbb{P}$-автоморфизма Φ поля $\mathbb{C}$ (см. 4.4).

Для построение нетривиального $\mathbb{P}$-автоморфизма в $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ рассмотрим сначала случай, когда $\mathscr{E}$ содержит лишь один элемент e, т. е. когда $\mathbb{C}$ — алгебраическое расширение простого трансцендентного расширения $\mathbb{P}(e)$. Возьмем элементы $a, b, c, d \in \mathbb{P}$, для которых $ad - bc \neq 0$. Тогда $e' = (ae + b)/(ce + d)$ — порождающий элемент поля $\mathbb{P}(e)$, отличный от e. Поле $\mathbb{P}(e) = \mathbb{P}(e')$ изоморфно полю рациональных дробей от одной переменной t, следовательно, дробно-линейная подстановка $t \mapsto (at + b)/(ct + d)$ определяет $\mathbb{P}$-автоморфизм ϕ поля $\mathbb{P}(e)$, переводящий e в e' (см. [3, § 39]).

Допустим теперь, что $\mathscr{E}$ содержит по меньшей мере два разных элемента e_1 и e_2, и возьмем произвольное биективное отображение $\phi_0 : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, для которого $\phi_0(e_1) = e_2$. Вновь используя то обстоятельство, что $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое расширение поля $\mathbb{P}(\mathscr{E})$, можно построить $\mathbb{P}$-автоморфизм ϕ поля $\mathbb{C}$, для которого $\phi_0(e) = \phi(e)$ при всех $e \in \mathscr{E}$ (см. 4.4). Как видно, ϕ нетривиален. $\rhd$

4.8. *Пусть $\mathbb{C}$ служит трансцендентным расширением поля $\mathbb{P}$. Тогда в $\mathbb{C}$ существует нетривиальное $\mathbb{P}$-дифференцирование.*

$\lhd$ Воспользуемся вновь базисом трансцендентности $\mathscr{E}$ расширения $\mathbb{C}$ над $\mathbb{P}$. Известно, что любое дифференцирование поля $\mathbb{P}$ продолжается на чисто трансцендентное расширение, причем такое продолжение однозначно определяется заданием произвольных значений на базисе трансцендентности (см. (2) из 4.6). Таким образом, для любого отображения $d : \mathscr{E} \to \mathbb{C}$ существует единственное дифференцирование $D : \mathbb{P}(\mathscr{E}) \to \mathbb{C}$, для которого $D(e) = d(e)$ при всех $e \in \mathscr{E}$ и $D(x) = 0$ при $x \in \mathbb{P}$. Далее, $\mathbb{C}$ служит сепарабельным алгебраическим расширением поля $\mathbb{P}(\mathscr{E})$, следовательно, D допускает, и притом единственное, продолжение до дифференцирования $\overline{D} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (см. (1) из 4.6). Очевидно, что свобода в выборе d гарантирует нетривиальность $\overline{D}$. $\triangleright$

4.9. Теорема. *Пусть $\mathbb{C}$ служит расширением некоторого алгебраически замкнутого поля $\mathbb{P}$. Равносильны утверждения:*

(1) $\mathbb{C} = \mathbb{P}$;

(2) *в $\mathbb{C}$ нет нетривиальных $\mathbb{P}$-автоморфизмов;*

(3) *в $\mathbb{C}$ нет нетривиальных $\mathbb{P}$-дифференцирований.*

$\triangleleft$ Если $\mathbb{C} \neq \mathbb{P}$, то $\mathbb{C}$ — трансцендентное расширение поля $\mathbb{P}$, поэтому (2) $\to$ (1) и (3) $\to$ (1) вытекают из 4.7 и 4.8 соответственно. Обратные импликации очевидны. $\triangleright$

4.10. Исторический комментарий. Теория полей и тесно связанная с ней теория многочленов берут свое начало из решения алгебраических уравнений. Первое четкое определение абстрактного поля дал Генрих Вебер[11] в 1893 году. В знаменитой работе 1910 года Эрнст Штайниц[12] развил аксиоматическую теорию полей и предложил множество важных концепций, таких как простое поле, сепарабельные элементы, совершенное поле и степень трансцендентности расширения поля.

Лекция 3.
Булевозначное моделирование. Спуски и подъемы

5. Булевозначное моделирование. Здесь коротко представлена необходимая информация о булевозначных моделях теории множеств. Подробное изложение имеется в книгах [3, 16].

Отметим сразу же, что в контексте настоящей статьи формальная теория множеств и ее модели используются как техническое средство для исследования конкретных функционально-аналитических объектов и нет прямой связи наших рассмотрений с основаниями математики. Поэтому придерживаемся принятого в функциональном анализе уровня строгости.

---

[11] Генрих Мартин Вебер (Heinrich Martin Weber; 1842–1913) — немецкий математик и педагог, ученик Б. Римана; основные труды в области теории алгебраических чисел, алгебраических функций и математической физики.

[12] Эрнст Штайниц (также Штейниц; Ernst Steinitz; 1871–1928) — немецкий математик; основные труды посвящены теории графов и топологии, однако наибольшую известность получила работа «Алгебраическая теория полей», опубликованная в 1910 году.

5.1. Теория множество Цермело — Френкеля с аксиомой выбора обозначается символом ZFC. Язык теории множеств ZFC использует следующие символы (совокупность которых называют *алфавитом* ZFC): символы переменных $x, y, z, x_1, x_2, \dots$; скобки (,); пропозициональные связки (т. е. знаки алгебры высказываний) $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\neg$; кванторы $\forall$, $\exists$; знак равенства $=$; символ специального двухместного предиката $\in$. Из символов алфавита составляются слова, т. е. конечные последовательности символов из алфавита ZFC. Правильно составленные слова называют *формулами.* Точнее, формулы теории ZFC определяются обычной рекурсивной процедурой из атомарных формул вида $x = y$ и $x \in y$, с помощью разумной расстановки скобок, кванторов и пропозициональных связок.

При этом теория ZFC — это наименьшее множество формул, содержащее аксиомы ZFC и замкнутое относительно правил вывода (см. [17]). Формулы теории называют также теоремами этой теории. Теория ZFC включает обычные аксиомы и правила вывода теорий первого порядка с равенством, которые можно найти в любом университетском курсе математической логики (см., например, [17, 18]). Помимо этого принимаются *специальные* аксиомы — аксиомы *объемности, объединения, степени, подстановки, регулярности, бесконечности* и *выбора.*

Естественный смысл вкладывается в термины *свободная переменная* и *связанная переменная*, а также в понятие *область действия квантора.* Так, например, в формуле $(\forall\, x)\,(x \in y)$ переменная x связана (входит в область действия квантора $\forall$), а переменная y свободна. При желании подчеркнуть, что в формуле φ свободными являются переменные $x_1, \dots, x_n$ и только они, пишут $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

5.2. Содержательно область изменения переменных ZFC мыслят как мир множеств — универсум множеств. Иначе говоря, область изменения переменных содержит только множества. Вместо $\in(x, y)$ пишут $x \in y$ и говорят, что «x — элемент множества y», или «x принадлежит (содержится в, входит в) y».

Точное представление о классе всех множеств складывается на основе аксиоматики ZFC. Этот класс принято обозначать символом $\mathbb{V}$ и называть *универсумом фон Неймана*. В качестве исходного объекта этой конструкции принимается пустое множество. Элементарные шаги конструирования новых множеств из уже имеющихся — формирование множества подмножеств и объединения. Трансфинитное повторение этих шагов исчерпывает класс всех множеств $\mathbb{V}$.

Точнее, полагают

$$\mathbb{V} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathbb{V}_\alpha,$$

где On — класс всех ординалов и $\mathbb{V}_\alpha$ определяется по индукции:

$$\mathbb{V}_0 := \varnothing,$$

$$\mathbb{V}_{\alpha+1} := \mathscr{P}(\mathbb{V}_\alpha) \quad (\alpha \in \mathrm{On}),$$

$$\mathbb{V}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{V}_\beta \quad (\alpha \text{ — предельный ординал}).$$

Класс $\mathbb{V}$ представляет собой стандартную модель теории ZFC. Это означает, что любая теорема φ теории ZFC будет истинным теоретико-множественным утверждением, если переменные в формуле φ трактовать, как элементы универсума $\mathbb{V}$, а предикат $\in$ понимать как отношение «быть элементом» в $\mathbb{V}$.

5.3. Рассмотрим теперь конструкцию булевозначного универсума. Пусть $\mathbb{B}$ — фиксированная полная булева алгебра. Для произвольного ординала α положим

$$\mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})} := \big\{x : \ \mathrm{Funct}(x) \wedge (\exists\beta)\, (\beta < \alpha \wedge \mathrm{dom}(x) \subset \mathbb{V}_\beta^{(\mathbb{B})} \wedge \mathrm{im}(x) \subset \mathbb{B})\big\}.$$

Итак, в более подробной записи, семейство $\big(\mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})}\big)_{\alpha\in\mathrm{On}}$ определяется индукцией по ординалам:

$$\mathbb{V}_0^{(\mathbb{B})} := \varnothing,$$

$$\mathbb{V}_{\alpha+1}^{(\mathbb{B})} := \big\{x : \ X \to \mathbb{B} : \ X \subset \mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})}\big\};$$

$$\mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})} := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{V}_\beta^{(\mathbb{B})} \quad (\alpha \text{ — предельный ординал}).$$

Собрав воедино все эти множества $\mathbb{B}$-значных функций, получим класс

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} \mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})},$$

который и называют *булевозначным универсумом*. Элементы класса $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ принято называть $\mathbb{B}$-*значными множествами*.

5.4. Возьмем произвольную формулу $\varphi = \varphi(u_1, \dots, u_n)$ теории ZFC. Если заменить переменные $u_1, \dots, u_n$ элементами $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, то получим некоторое утверждение об объектах $x_1, \dots, x_n$. Вводится новый способ проверки истинности таких утверждений, отличный от способа, принятого в $\mathbb{V}$. Для этой цели указанному утверждению сопоставляют некоторую *оценку истинности* $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!]$, служащую элементом булевой алгебры $\mathbb{B}$. Тогда мы получаем возможность придать смысл формальным выражениям типа $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, где $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и φ — формула ZFC, т. е. определить, в каком точном смысле для элементов $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ выполнено теоретико-множественное высказывание $\varphi(u_1, \dots, u_n)$. Именно, будем говорить, что формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *истинна внутри* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ или *элементы* $x_1, \dots, x_n$ *удовлетворяют условию* φ, если $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] = \mathbb{1}$. При этом пишут $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Несложно убедиться, что аксиомы и теоремы исчисления предикатов первого порядка с равенством верны внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Приписывание булевых оценок истинности проводится двойной индукцией, учитывая характер построения формул из атомарных и задавая оценки атомарных формул $x \in y$ и $x = y$, где $x, y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, на основе конструкции $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Подробности этого определения можно найти в [3, 16].

5.5. В булевозначном универсуме $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ соотношение $[\![x = y]\!] = \mathbb{1}$ не влечет, вообще говоря, что $\mathbb{B}$-значные функции x и y (рассматриваемые как элементы $\mathbb{V}$) совпадают. Это обстоятельство затрудняет некоторые конструкции. В этой связи переходят от $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ к *отделимому булевозначному универсуму* $\overline{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$. Для определения последнего рассмотрим отношение $\{(x, y) : [\![x = y]\!] = \mathbb{1}\}$ в классе $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, представляющее собой, что очевидно, отношение эквивалентности. Выбирая элемент (представитель наименьшего ранга) в каждом классе эквивалентности, приходим к отделимому булевозначному универсуму $\overline{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$. Для обозначения последнего будем использовать тот же самый символ $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. полагаем $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} := \overline{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$. Для любой формулы φ теории ZFC и произвольных элементов x и y из $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ выполняется

$$[\![x = y]\!] = \mathbb{1} \to [\![\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(y)]\!].$$

Поэтому при вычислении булевых оценок истинности в отделимом универсуме можно использовать любые представители классов эквивалентности.

Важнейшие свойства булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ формулируются в виде трех принципов.

5.6. Принцип переноса. *Все теоремы* ZFC *истинны внутри* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, *символически*

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \textit{теорема}\ \mathrm{ZFC}.$$

Иными словами, если теоретико-множественная формула φ выражает доказуемое в ZFC утверждение, то $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi$. Иногда принцип переноса выражается словами: «$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — булевозначная модель теории ZFC».

5.7. Принцип максимума. *Для каждой формулы* $\varphi(x)$ *теории* ZFC *существует элемент* $x_0 \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, *для которого*

$$[\![(\exists x)\, \varphi(x)]\!] = [\![\varphi(x_0)]\!].$$

Иными словами, принцип максимума утверждает, что для любой формулы φ теории ZFC выполняется

$$\big(\exists\, x_0 \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}\big)\, [\![\varphi(x_0)]\!] = \bigvee_{x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}} [\![\varphi(x)]\!].$$

В частности, если внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ истинно утверждение «выполняется $\varphi(x)$ для некоторого x», то существует элемент x_0 в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ (в смысле универсума фон Неймана $\mathbb{V}$), для которого $[\![\varphi(x_0)]\!] = \mathbb{1}$. Символически,

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models (\exists\, x)\, \varphi(x) \ \to\ (\exists\, x_0)\, \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_0).$$

5.8. Принцип перемешивания. *Пусть* $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — *разбиение единицы в* $\mathbb{B}$. *Для любого семейства* $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ *элементов универсума* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ *существует единственный элемент* $x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ *такой, что* $b_\xi \leqslant [\![x = x_\xi]\!]$ *для всех* $\xi \in \Xi$. *Элемент* x *называют* перемешиванием *семейства* (x_ξ) *относительно* (b_ξ). *Перемешивание обозначается*

$$x = \mathrm{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi x_\xi) = \mathrm{mix}\{b_\xi x_\xi : \xi \in \Xi\}.$$

5.9. Исторический комментарий. Своим возникновением булевозначные модели теории множеств обязаны выдающемуся достижению П. Дж. Коэна[13], установившему в начале 1960-х годов совместимость отрицания гипотезы континуума CH с аксиомами теории множеств Цермело — Френкеля ZFC. Вместе с более ранним результатом К. Гёделя[14] о совместимости CH с ZFC, установленный П. Дж. Коэном факт означает независимость CH от обычных аксиом ZFC. Способ моделирования, предложенный П. Дж. Коэном и названный им *методом форсинга*, вызывал определенные трудности восприятия. Булевозначные модели изобрели Дана Скотт[15], Роберт М. Соловей[16] и Петр Вопенка[17] в 1960-х годах, чтобы помочь понять метод форсинга Пола Коэна. Булевозначные модели не только обеспечили привлекательную наглядность методу Коэна с точки зрения классических математиков, но и оказались мощным инструментом доказательства теорем о совместимости и независимости. Подробнее об этом можно прочитать в книге [16].

6. Спуски и подъемы. Сравнительный анализ миров (универсумов) $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ предполагает их тесную взаимосвязь. Иначе говоря, необходим математический аппарат, позволяющий узнавать, как связаны между собой интерпретации одного и того же факта в указанных выше двух моделях $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Основу такого аппарата составляют операции канонического вложения, спуска и подъема, представленные ниже.

6.1. Начнем с канонического вложения универсума фон Неймана в булевозначный универсум. Для $x \in \mathbb{V}$ обозначим символом $x^\wedge$

[13]Пол Джозеф Коэн (Paul Joseph Cohen; 1934–2007) — американский математик; известен доказательством совместимости отрицания континуум-гипотезы с аксиоматикой Цермело — Френкеля и независимости аксиомы выбора от остальных аксиом Цермело — Френкеля.

[14]Курт Фридрих Гёдель (Kurt Friedrich Gödel; 1906–1978) — австрийский логик, математик и философ математики; известен своими *теоремами о неполноте*, которые оказали огромное влияние на представление об основаниях математики.

[15]Дана Стюарт Скотт (Dana Stewart Scott; 1932) — американский математик, известный работами в области математической логики и информатики.

[16]Роберт Мартин Соловей (Robert Martin Solovay; 1938) — американский математик, работающий в области теории множеств; в частности, установил, что утверждение «каждое множество вещественных чисел является измеримым по Лебегу» совместимо с теорией множеств Цермело — Френкеля без аксиомы выбора.

[17]Петр Вопенка (Petr Vopěnka; 1935–2015) — чешский математик, разработал альтернативную теорию множеств, автор известного принципа Вопенки.

стандартное имя x в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. элемент, определяемый следующей схемой рекурсии:

$$\varnothing^{\wedge} := \varnothing, \quad \operatorname{dom}(x^{\wedge}) := \{y^{\wedge} : y \in x\}, \quad \operatorname{im}(x^{\wedge}) := \{\mathbb{1}\}.$$

Работая с отделимым булевозначным универсумом $\overline{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$, мы сохраняем символ $x^{\wedge}$ для обозначения выделенного элемента из соответствующего класса эквивалентности. Рассмотрим одно важное свойство отображения $x \mapsto x^{\wedge}$.

Формула называется *ограниченной,* если все содержащиеся в ней связанные переменные входят в нее под знаками ограниченных кванторов, т. е. кванторов, область действия которых ограничена каким-либо множеством. Последнее означает, что любая связанная переменная x встречается в виде $(\forall\, x \in y)$ или $(\exists\, x \in y)$ для некоторого y.

6.2. Ограниченный принцип переноса. *Для каждой ограниченной формулы* φ *теории* ZFC *и любого набора* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ *имеет место эквивалентность*

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_1^{\wedge}, \dots, x_n^{\wedge}).$$

6.3. Для произвольного элемента x из (отделимого) булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ определяется класс $x{\downarrow}$ формулой

$$x{\downarrow} := \left\{y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : [\![y \in x]\!] = \mathbb{1}\right\}.$$

Этот класс называют *спуском* элемента x. При этом класс $x{\downarrow}$ является множеством, т. е. $x{\downarrow} \in \mathbb{V}$ для любого $x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Если $[\![x \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}$, то $x{\downarrow}$ — непустое множество.

6.4. Пусть f — отображение из X в Y внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Это означает, что f, X и Y — элементы $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, причем $[\![f : X \to Y]\!] = \mathbb{1}$. Существует единственное отображение $f{\downarrow}$ из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$ такое, что

$$[\![f{\downarrow}(x) = f(x)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X{\downarrow}).$$

При этом для любого непустого подмножества A множества X внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ (т. е. $[\![A \subset X]\!] = \mathbb{1}$) выполняется $f{\downarrow}(A{\downarrow}) = f(A){\downarrow}$. Отображение $f{\downarrow}$ из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$ называют *спуском* f из $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Отображение $f{\downarrow}$ обладает следующим свойством *экстенсиональности:*

$$[\![x = x']\!] \leqslant [\![f{\downarrow}(x) = f{\downarrow}(x')]\!] \quad (x, x' \in X{\downarrow}).$$

Для спусков композиции отображений $g \circ f$, обратного отображения f^{-1} и тождественного отображения I_X имеют место следующие правила:

$$(g \circ f){\downarrow} = g{\downarrow} \circ f{\downarrow}, \quad (f^{-1}){\downarrow} = (f{\downarrow})^{-1}, \quad (I_X){\downarrow} = I_{X{\downarrow}}.$$

В силу этих правил можно рассматривать операцию спуска как ковариантный функтор из категории $\mathbb{B}$-значных множеств и отображений в категорию обычных (т. е. в смысле $\mathbb{V}$) множеств и отображений.

6.5. Для $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ обозначим символом $(x_1, \dots, x_n)^{\mathbb{B}}$ упорядоченную n-ку внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Предположим что P — это n-местное отношение на X внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. $X, P \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $[\![P \subset X^{n^\wedge}]\!] = \mathbb{1}$ $(n \in \omega)$. Тогда существует n-местное отношение P' на $X{\downarrow}$ такое, что

$$(x_1, \dots, x_n) \in P' \leftrightarrow [\![(x_1, \dots, x_n)^B \in P]\!] = \mathbb{1}.$$

Допуская некоторую вольность, отношение P' обозначают тем же символом $P{\downarrow}$ и называют его ***спуском*** отношения P.

6.6. Пусть $x \in \mathbb{V}$ и $x \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. x — множество, составленное из B-значных множеств или, в символической записи, $x \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})})$. Положим $\varnothing{\uparrow} := \varnothing$ и

$$\operatorname{dom}(x{\uparrow}) = x, \quad \operatorname{im}(x{\uparrow}) = \{\mathbb{1}\},$$

если $x \neq \varnothing$. Элемент $x{\uparrow}$ отделимого универсума (т. е. выделенный представитель класса $\{y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : [\![y = x{\uparrow}]\!] = \mathbb{1}\}$) называют ***подъемом*** множества x. Для соответствующего элемента отделимого универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ сохраняют те же название и обозначение.

6.7. Пусть $X, Y, f \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})})$ и f — соответствие из X в Y. Для существования соответствия $f{\uparrow}$ из $X{\uparrow}$ в $Y{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, удовлетворяющего условию

$$[\![f{\uparrow}(x) = f(x)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X),$$

необходимо и достаточно, чтобы f было ***экстенсионально***, т. е. чтобы для любых $x, x' \in X$ выполнялось соотношение

$$[\![x = x']\!] \leqslant [\![f(x) = f(x')]\!] \quad (x, x' \in X).$$

Отображение $f{\uparrow}$ с указанным свойством единственно и удовлетворяет соотношению $f{\uparrow}(A{\uparrow}) = f(A){\uparrow}$ $(A \subset X)$.

Композиция экстенсиональных отображений экстенсиональна. При этом подъем композиции отображений равен композиции (внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$) подъемов этих соответствий:

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models (g \circ f)\uparrow = g\uparrow \circ f\uparrow.$$

Отметим также, что если f и f^{-1} экстенсиональны, то $(f\uparrow)^{-1} = (f^{-1})\uparrow$.

6.8. Возьмем непустое множество X, т. е. $X \in \mathbb{V}$ и $X \neq \varnothing$. Пусть буква $\iota := \iota_X$ обозначает ограничение на X канонического вложения: $\iota : x \mapsto x^\wedge$ $(x \in X)$. Тогда $\iota(X)\uparrow = X^\wedge$ и $X = \iota^{-1}(X^\wedge\downarrow)$. Рассмотрим произвольный элемент $Y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающий непустое множество. Используя указанные соотношения можно распространить операцию подъема на отображения f из X в $Y\downarrow$ и операцию спуска на соответствия g из $X^\wedge$ в Y внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Именно, положим $f\Uparrow := (f \circ \iota^{-1})\uparrow$ и $g\Downarrow := g\downarrow \circ \iota$. Отображения $f\Uparrow$ и $g\Downarrow$ называют *модифицированным подъемом* f и *модифицированным спуском* g. (Если контекст исключает путаницу, то говорят по-прежнему о спусках и подъемах и используют простые стрелки.) Легко видеть, что $f\Uparrow$ — единственное отображение из $X^\wedge$ в Y внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, удовлетворяющее условию

$$[\![f\Uparrow(x^\wedge) = f(x)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X).$$

Аналогично, $g\Downarrow$ — единственное отображение из X в $Y\downarrow$ (в стандартной модели $\mathbb{V}$), удовлетворяющее равенству

$$[\![g\Downarrow(x) = g(x^\wedge)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X).$$

6.9. Для данного множества $X \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ обозначим символом $\operatorname{mix} X := \operatorname{mix}(X)$ множество всех перемешиваний вида $\operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, где $(x_\xi) \subset X$ и (b_ξ) — произвольное разбиение единицы в $\mathbb{B}$. Имеют место следующие *правила сокращения стрелок*, иногда называемые *правилами Эшера*[18].

Пусть X и X' — подмножества $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $f : X \to X'$ — экстенсиональное отображение. Предположим, что элементы $Y, Y', g \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$

[18]Мауриц Корнелис Эшер (Maurits Cornelis Escher; 1898–1972) — нидерландский художник-график; известен своими концептуальными литографиями, гравюрами на дереве и металле, в которых он мастерски исследовал пластические аспекты понятий бесконечности и симметрии.

таковы, что $[\![Y \neq \varnothing]\!] = [\![g : Y \to Y']\!] = \mathbb{1}$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$X{\uparrow}{\downarrow} = \operatorname{mix} X, \quad Y{\downarrow}{\uparrow} = Y; \qquad f{\uparrow}{\downarrow} = f, \quad g{\downarrow}{\uparrow} = g.$$

Имеются и другие правила сокращения стрелок но они нам не понадобятся.

6.10. Исторический комментарий. Спуски и подъемы (термины ввел С. С. Кутателадзе[19]) неявно использовались с самого создания булевозначных моделей, см. [16]. Систематизация аппарата булевозначного анализа и ее адаптация к задачам анализа осуществлена в работах А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе, см. [3, 4]. Взаимосвязи, существующие между основными операциями булевозначного анализа, давно и плодотворно используются в приложениях. Трудно здесь выделить вклад отдельных авторов, кроме основополагающих работ Д. Скотта, Р. Соловея и С. Тенненбаума. О роли булевозначных моделей в исследованиях по основаниям математики можно прочитать в предисловии к книге [16] (написанной Д. Скоттом). Д. Скотт предвидел более широкое значение булевозначных моделей в математике и писал еще в 1969 году: *“We must ask whether there is any interest in these nonstandard models aside from the independence proof; that is do they have any mathematical interest? The answer must be yes, but we cannot yet give a really good arguments.”* В настоящее время имеются весьма впечатляющие доводы в пользу этой позиции, см., например, монографии [3, 4, 19].

Лекция 4.
Решение проблемы Викстеда

7. Булевозначные числа. Булевозначная интерпретация поля комплексных чисел представляет собой расширенное комплексное K-пространство, причем нерасширяющий оператор в этом пространстве — интерпретация линейного отображения в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемого как векторные пространство над подполем $\mathbb{C}^{\wedge}$. Тем самым возникает возможность изучения некоторых классов операторов как функционалов.

[19] Семён Самсонович Кутателадзе (род. 1945) — советский и российский математик, специалист в области функционального анализа и его приложений; внес вклад в выпуклый анализ и оптимизацию, теорию выпуклых поверхностей и изопериметрических задач, теорию операторов в векторных решетках, нестандартные методы анализа; автор учебника «Основы функционального анализа», один из основателей журнала «Positivity».

7.1. Всюду ниже $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра, а $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — соответствующий булевозначный универсум. В силу принципа максимума существует элемент $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которого $[\![\, \mathscr{R}$ — поле действительных чисел $]\!] = \mathbb{1}$. Если формула $\varphi(x)$ представляет собой формальную запись аксиом архимедова упорядоченного поля (для x), то она эквивалентна ограниченной формуле. Так как для поля действительных чисел формула $\varphi(\mathbb{R})$ истинна, то согласно ограниченному принципу переноса 6.2 будет $[\![\, \varphi(\mathbb{R}^\wedge) \,]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $[\![\, \mathbb{R}^\wedge$ — архимедово упорядоченное поле $]\!] = \mathbb{1}$. Можно считать при этом, что $\mathbb{R}^\wedge$ — подполе поля $\mathscr{R}$ в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

7.2. Пусть $\mathbf{R}$ — несущее множество поля $\mathscr{R}$, на котором заданы алгебраические операции и порядок, обозначаемые символами $\oplus$, $\otimes$, $\circledleq$ соответственно. Тогда $\mathscr{R}$ представляет собой упорядоченную пятерку $(\mathbf{R}, \oplus, \otimes, \circledleq, 0^\wedge, 1^\wedge)$ внутри $\mathbb{V}^{\mathbb{B}}$; символически, $\mathbb{V}^{\mathbb{B}} \models \mathscr{R} = (\mathbf{R}, \oplus, \otimes, \circledleq, 0^\wedge, 1^\wedge)$.

Спуском поля $\mathscr{R}$ назовем множество $\mathbf{R}{\downarrow}$ на котором определены операции $\oplus{\downarrow}$, $\otimes{\downarrow}$ и предикат $\circledleq{\downarrow}$, а также имеются два выделенных элемента $0^\wedge$ и $1^\wedge$; символически, $\mathscr{R}{\downarrow} = (\mathbf{R}{\downarrow}, \oplus{\downarrow}, \otimes{\downarrow}, \circledleq{\downarrow}, 0^\wedge, 1^\wedge)$.

Если алгебраические операции и порядок в $\mathscr{R}{\downarrow}$ обозначить символами $+, \times, \leqslant$, то определение сложения, умножения и отношения порядка на множестве $\mathbf{R}{\downarrow}$ в более подробной записи выглядят так:

$$
\begin{gathered}
z = x + y \leftrightarrow [\![\, z = x \oplus y \,]\!] = \mathbb{1}, \\
z = x \times y \leftrightarrow [\![\, z = x \otimes y \,]\!] = \mathbb{1}, \\
x \leqslant y \leftrightarrow [\![\, x \circledleq y \,]\!] = \mathbb{1} \\
(x, y, z \in \mathbb{R}{\downarrow}).
\end{gathered}
$$

Можно показать, что $\mathscr{R}{\downarrow}$ служит коммутативным упорядоченным кольцом. Более того, $\mathscr{R}{\downarrow}$ будет упорядоченной алгеброй, если умножение элементов $\mathscr{R}{\downarrow}$ на действительные числа определить правилом

$$
y = \lambda x \leftrightarrow y = \lambda^\wedge \times x \leftrightarrow [\![\, y = \lambda^\wedge \otimes x \,]\!] = \mathbb{1} \quad (x, y \in \mathscr{R}{\downarrow},\ \lambda \in \mathbb{R}).
$$

7.3. Теорема Гордона. *Пусть $\mathscr{R}$ — поле действительных чисел в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда $\mathscr{R}{\downarrow}$ (со спущенными операциями и порядком) представляет собой расширенное K-пространство с порядковой единицей $\mathbb{1} = 1^\wedge$. Более того, существует булев изоморфизм χ булевой алгебры $\mathbb{B}$ на базу $\mathbb{P}(\mathscr{R}{\downarrow})$ такой, что для любых $x, y \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $b \in \mathbb{B}$*

справедливы эквивалентности:

$$\chi(b)x = \chi(b)y \leftrightarrow b \leqslant [\![x = y]\!],$$

$$\chi(b)x \leqslant \chi(b)y \leftrightarrow b \leqslant [\![x \leqslant y]\!].$$

7.4. В силу принципа максимума 5.9 существует элемент $\mathscr{C} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которого $[\![\mathscr{C}$ — поле комплексных чисел $]\!] = \mathbb{1}$. Так как равенство $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ выражается ограниченной теоретико-множественной формулой, то согласно ограниченному принципу переноса 6.2 будет $[\![\mathbb{C}^\wedge = \mathbb{R}^\wedge \oplus i^\wedge\mathbb{R}^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Кроме того, $\mathbb{R}^\wedge$ считают подполем поля $\mathscr{R}$, поэтому можно считать также, что $\mathbb{C}^\wedge$ — подполе поля $\mathscr{C}$. Если 1 — единица поля $\mathbb{C}$, то $1^\wedge$ — единица поля $\mathscr{C}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Будем писать i вместо $i^\wedge$ и $\mathbb{1}$ вместо $1^\wedge$.

7.5. Пусть $\mathbf{C}$ — несущее множество поля $\mathscr{C}$, а алгебраические операции обозначаем так же, как и в 7.2. Тогда $(\mathbf{C}, \oplus, \otimes, 0^\wedge, 1^\wedge)$ — упорядоченная пятерка внутри $\mathbb{V}^{\mathbb{B}}$. Спуском поля будет множество $\mathbf{C}{\downarrow}$, на котором определены операции $\oplus{\downarrow}$, $\otimes{\downarrow}$ и имеются два выделенных элемента $0^\wedge$ и $1^\wedge$. При этом $\mathscr{C}{\downarrow}$ будет комплексным коммутативным кольцом. Кроме того, $\mathscr{C}{\downarrow} = \mathscr{R}{\downarrow} \oplus i\mathscr{R}{\downarrow}$, следовательно, в силу теоремы Гордона 7.3 $\mathscr{C}{\downarrow}$ — расширенное комплексное K-пространство и комплексная f-алгебра одновременно, причем $1^\wedge$ — порядковая и кольцевая единица в $\mathscr{C}{\downarrow}$. Пространство $\mathscr{C}{\downarrow}$ зависит только от $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$, поэтому будем использовать также обозначение $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$.

7.6. Пусть $\mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ — множество всех нерасширяющих линейных операторов в $G_{\mathbb{C}}$, где $G := \mathscr{R}{\downarrow}$. Ясно, что $\mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ — комплексное векторное пространство. Более того, $\mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ будет точным унитарным модулем над кольцом $G_{\mathbb{C}}$, если для $g \in G_{\mathbb{C}}$ и $T \in \mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ определить оператор gT формулой $gT : x \mapsto g \cdot Tx$ $(x \in G_{\mathbb{C}})$. Это следует из того, что умножение на элемент $G_{\mathbb{C}}$ представляет собой нерасширяющий оператор и композиция нерасширяющих операторов есть нерасширяющий оператор.

7.7. Обозначим символом $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C})$ элемент $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающий пространство всех $\mathbb{C}^\wedge$-линейных отображений из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{C}$. Тогда $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C})$ — векторное пространство над полем $\mathbb{C}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, а $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C}){\downarrow}$ — точный унитарный модуль над $G_{\mathbb{C}}$.

7.8. *Линейный оператор в K-пространстве G или $G_{\mathbb{C}}$ будет нерасширяющим в том и только в том случае, когда он экстенсионален.*

$\lhd$ Как видно из теоремы Гордона 7.3, для произвольного линейного оператора $T : G \to G$ условие экстенсиональности $[\![x = y]\!] \leqslant [\![Tx = Ty]\!]$ $(x, y \in G = \mathscr{R}\!\downarrow)$ означает, что для любых $x, y \in G$ и $\pi \in \mathbb{P}(G)$ из равенства $\pi x = \pi y$ следует $\pi T x = \pi T y$. Ввиду линейности T последнее равносильно условию $\pi x = 0 \ \to \ \pi T x = 0$ $(x \in G, \pi \in \mathbb{P}(G))$. Если взять $x := \pi^{\perp} y$, то получим $\pi T \pi^{\perp} = 0$ или, что то же, $\pi T = \pi T \pi$. Согласно 2.1 последнее представляет собой одно из эквивалентных определений нерасширяющего оператора. В случае комплексного пространства $G_{\mathbb{C}}$ следует привлечь 2.2. $\rhd$

7.9. Теорема. *Модули* $\mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ *и* $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C})\!\downarrow$ *изоморфны. Изоморфизм устанавливается путем сопоставления нерасширяющему оператору его подъема.*

$\lhd$ Так как экстенсиональные отображения допускают подъем, то каждый оператор $T \in \mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ имеет подъем $\tau := T\!\uparrow$, который представляет собой единственную функцию из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{C}$, удовлетворяющую условию $[\![\tau(x) = Tx]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in G_{\mathbb{C}})$, см. 6.7. Нетрудно проверяется, что отображение $T \mapsto \tau$ является изоморфизмом модулей, причем обратным изоморфизмом служит отображение, сопоставляющее элементу $\tau \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C})\!\downarrow$ его спуск $\tau\!\downarrow$. $\rhd$

Теорема 7.9 сводит изучение нерасширяющих операторов в расширенном пространстве Канторовича к изучению решений функционального уравнения Коши с дополнительным условием однородности.

7.10. Исторический комментарий. В 1977 году Евгений Гордон[20], молодой преподаватель Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, опубликовал короткую заметку [20], начинавшуюся словами:

В настоящей работе устанавливается, что множество, элементами которого являются объекты, изображающие вещественные числа в булевозначной модели теории множеств $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$*, можно наделить линейной структурой и отношением порядка так, что оно превратится в расширенное* K*-пространство с базой* $\mathbb{B}$*. Показывается, что в некоторых случаях этот факт может быть использован для обобщения теорем о вещественных числах на расширенные* K*-пространства.*

Это заметка стала связующим звеном между различными разделами математики, что помогает, в частности, решать многочисленные задачи

[20]Евгений Израильевич Гордон (1949) — советский математик (с 1971 года работал в США), специалист в области нестандартного анализа, один из основателей булевозначного анализа.

функционального анализа в «полуупорядоченных векторных пространствах» с использованием техники булевозначных моделей теории множеств.

В том же году на симпозиуме по приложениям теории пучков к логике, алгебре и анализу (Дарем, 9–11 июля 1977 г.) Г. Такеути[21], известный специалист по теории доказательств, заметил, что если $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра ортогональных проекторов в гильбертовом пространстве H, то множество, элементы которого представляют вещественные числа в булевозначной модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, можно отождествить с векторной решеткой самосопряженных операторов в H, спектральные разложения которых принимают значения в $\mathbb{B}$ (см. [19]).

Эти два события ознаменовали рождение нового раздела функционального анализа, который Такеути обозначил термином *Булевозначный анализ*. История и достижения булевозначного анализа отражены в книгах [3] и [4].

8. Решение проблема Виксетда. В этом заключительном разделе сформулируем несколько результатов о наличии или отсутствии нерасширяющих линейных операторов в расширенных K-пространствах, которые можно получить, используя возможности, открываемые теоремой 7.9.

8.1. Напомним еще несколько определений, необходимых для формулировки основных результатов. Булеву σ-алгебру $\mathbb{B}$ называют *σ-дистрибутивной,* если для любой двойной последовательности $(b_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{B}$ выполнено условие

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\bigwedge_{m\in\mathbb{N}} b_{n,m} = \bigwedge_{\varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\bigvee_{n\in\mathbb{N}} b_{n,\varphi(n)}.$$

Другие эквивалентные определения имеются в книге [21]. Примером σ-дистрибутивной булевой алгебры служит полная атомная булева алгебра, т. е. алгебра всех подмножеств непустого множества. Важно подчеркнуть, что существуют и безатомные σ-дистрибутивные полные булевы алгебры (см. [8, 5.1.8]).

8.2. Пусть даны алгебра A и ее подалгебра A_0. Линейный оператор D из A_0 в A называют *дифференцированием*, если выполнено

[21] Гайши Такеути (Gaisi Takeuti; 1926–2017) — японский математик, известный своими работами в области теории доказательств; один из основателей булевозначного анализа; ученик Курта Гёделя, работал над непротиворечивостью действительных чисел.

условие

$$D(uv) = D(u)v + uD(v) \quad (u, v \in A_0).$$

Ядро дифференцирования представляет собой подалгебру. Ненулевое дифференцирование называют *нетривиальным.*

Пусть G — расширенное K-пространство с фиксированной мультипликативной структурой, E — подкольцо и подрешетка G, $D \in L(E_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{C}})$ и $D = D_1 + iD_2$. Оператор D будет комплексным дифференцированием в том и только в том случае, если D_1 и D_2 представляют собой вещественные дифференцирования из E в G.

$\lhd$ Нужно лишь в равенстве $D(uv) = D(u)v + uD(v)$ подставить $D := D_1 + iD_2$, вещественные $u := x \in E$ и $v := y \in E$, а затем приравнять вещественные и мнимые части полученного соотношения. $\rhd$

Эндоморфизмом алгебры называют линейный мультипликативный оператор в ней. Биективный эндоморфизм называют *автоморфизмом.* Тождественный автоморфизм принято называть *тривиальным.*

Если данные выше определения автоморфизма и дифференцирования относятся к алгебре над полем $\mathbb{P}$, то говорят также о $\mathbb{P}$-автоморфизмах и $\mathbb{P}$-дифференцированиях соответственно.

8.3. *Если $E^{\perp\perp} = G$, то любое дифференцирование из $E_{\mathbb{C}}$ в $G_{\mathbb{C}}$ является нерасширяющим оператором.*

$\lhd$ В силу 2.2 и 8.2 нужно лишь установить, что любое вещественное дифференцирование является нерасширяющим оператором. Пусть $D : E \to G$ — вещественное дифференцирование. Возьмем дизъюнктные $x, y \in E$. Так как в f-алгебре соотношение $x \perp y$ влечет $xy = 0$, то $0 = D(xy) = D(x)y + xD(y)$. Но элементы $D(x)y$ и $xD(y)$ также дизъюнктны по определению f-алгебры, поэтому $D(x)y = 0$ и $xD(y) = 0$. Отсюда в силу точности f-алгебры E получаем $D(x) \perp y$ и $x \perp D(y)$. Рассмотрим теперь дизъюнктные $x \in E$ и $g \in G$. По условию идеал I, порожденный множеством $\{x\}^{\perp}$ и точкой x, будет фундаментом в G, поэтому можем предположить, не ограничивая общности, что $g \in I$. В то же время, $|g| \leqslant y$ для некоторого $y \in E_+$, следовательно, $D(x) \perp g$ в силу доказанного выше. $\rhd$

8.4. Пусть $\mathscr{D}(\mathscr{C}{\downarrow})$ — множество всех дифференцирований, а $\mathscr{M}_N(\mathscr{C}{\downarrow})$ — множество всех нерасширяющих автоморфизмов в f-алгебре $\mathscr{C}{\downarrow}$. Пусть $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C})$ и $\mathscr{M}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C})$ — элементы $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающие множества всех $\mathbb{C}^{\wedge}$-дифференцирований и всех $\mathbb{C}^{\wedge}$-автоморфизмов в $\mathscr{C}$. Как видно, $\mathscr{D}(\mathscr{C}{\downarrow})$ — модуль над кольцом $\mathscr{C}{\downarrow}$ и $[\![\, \mathscr{D}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C})$ — комплексное векторное пространство $]\!] = \mathbb{1}$.

Операции спуска и подъема осуществляют изоморфизм модулей $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C}){\downarrow}$ и $\mathscr{D}(\mathscr{C}{\downarrow})$, а также биекцию множеств $\mathscr{M}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C}){\downarrow}$ и $\mathscr{M}_N(\mathscr{C}{\downarrow})$.

$\lhd$ Следует из 7.9. Нужно лишь заметить, что оператор $T \in \mathrm{End}_N(\mathscr{C}{\downarrow})$ будет дифференцированием (автоморфизмом) тогда и только тогда, когда $[\![\tau := T{\uparrow}$ — дифференцирование (автоморфизм)$]\!] = \mathbb{1}$. $\rhd$

8.5. *Порядково ограниченное дифференцирование и порядково ограниченный нерасширяющий автоморфизм расширенного f-кольца $G_{\mathbb{C}}$ тривиальны.*

$\lhd$ Можно считать $G_{\mathbb{C}} = \mathscr{C}{\downarrow}$. Если T — дифференцирование (нерасширяющий автоморфизм) f-кольца $G_{\mathbb{C}}$, то $[\![\tau := T{\uparrow}$ — $\mathbb{C}^\wedge$-дифференцирование ($\mathbb{C}^\wedge$-автоморфизм) поля $\mathscr{C}\,]\!] = \mathbb{1}$. Более того, T порядково ограничен тогда и только тогда, когда $[\![\tau$ порядково ограничен в $\mathscr{C}\,]\!] = \mathbb{1}$. Однако в поле $\mathscr{C}$ любое порядково ограниченное $\mathbb{C}^\wedge$-дифференцирование является нулевым и любой порядково ограниченный $\mathbb{C}^\wedge$-автоморфизм тождественен. В первом случае $T = 0$, а во втором $T = I$. $\rhd$

8.6. *Если $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{C}^\wedge \neq \mathscr{C}$, то в комплексной расширенной f-алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) = \mathscr{C}{\downarrow}$ существуют нетривиальное дифференцирование и нетривиальный нерасширяющий автоморфизм.*

$\lhd$ Можно показать, что в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ имеет место утверждение: поле $\mathbb{C}^\wedge$ алгебраически замкнуто в $\mathscr{C}$ (см. [22]). Но тогда условие $\mathbb{C}^\wedge \neq \mathscr{C}$ влечет за собой, что $\mathscr{C}$ служит трансцендентным расширением подполя $\mathbb{C}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Согласно 4.9 существуют нетривиальное $\mathbb{C}^\wedge$-дифференцирование $\delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ и нетривиальный $\mathbb{C}^\wedge$-автоморфизм $\alpha : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$. Если $D := \delta{\downarrow}$ и $A := \alpha{\downarrow}$, то в соответствии с 8.4 D — нетривиальное дифференцирование, а A — нетривиальный нерасширяющий автоморфизм f-алгебры $\mathscr{C}{\downarrow}$. $\rhd$

Следующий результат содержит решение проблемы Викстеда. Эквивалентности 8.7 (1) $\leftrightarrow$ 8.7 (2) $\leftrightarrow$ 8.7 (3) установлены А. Е. Гутманом в [23] для вещественного K-пространства $\mathbb{B}(\mathbb{R}) := \mathscr{R}{\downarrow}$. Эквивалентность 8.7 (3) $\leftrightarrow$ 8.7 (4) ранее была установлена в работах Ю. А. Абрамовича, А. И. Векслера, А. В. Колдунова [12] и П. Макполлина, А. В. Викстеда [10]. Оставшаяся часть теоремы 8.7 получена А. Г. Кусраевым [22].

8.7. Теорема. *Для произвольной полной булевой алгебры $\mathbb{B}$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *$\mathbb{B}$ является σ-дистрибутивной;*

(2) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathscr{C} = \mathbb{C}^{\wedge}$;

(3) *комплексное K-пространство $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ локально одномерно;*

(4) *в комплексном K-пространстве $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ все нерасширяющие линейные операторы порядково ограничены;*

(5) *в комплексной f-алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ нет ненулевых дифференцирований;*

(6) *в комплексной f-алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ всякий нерасширяющий эндоморфизм является порядковым проектором;*

(7) *в комплексной f-алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ нет нетривиальных нерасширяющих автоморфизмов.*

$\triangleleft$ (1) $\to$ (2): Известно [3, 10.7.6], что если булева алгебра $\mathbb{B}$ σ-дистрибутивна, то $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{R}^{\wedge} = \mathscr{R}$. Отсюда, используя принцип ограниченного переноса 6.2, выводим: $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathscr{C} = \mathscr{R} \oplus i\mathscr{R} = \mathbb{R}^{\wedge} \oplus i\mathbb{R}^{\wedge} = \mathbb{C}^{\wedge}$.

(2) $\to$ (1): Устанавливается аналогично.

(3) $\leftrightarrow$ (4): Вытекает из теоремы 2.9.

(2) $\to$ (4): Если $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{C}^{\wedge} = \mathscr{C}$, то внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ множество $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C})$ состоит из функций $\tau : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ вида $\tau(z) = cz$, где $c \in \mathscr{C}$. Но тогда оператор $T := \tau{\downarrow}$ из $\mathscr{C}{\downarrow}$ в $\mathscr{C}{\downarrow}$ также имеет вид $T(u) = gu$ для некоторого $g \in \mathscr{C}{\downarrow}$.

(4) $\to$ (2): Из (3) следует, что в K-пространстве $\mathscr{R}{\downarrow}$ все нерасширяющие линейные операторы порядково ограничены. Но тогда $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{R}^{\wedge} = \mathscr{R}$ (см. [3, теорема 10.7.6]), стало быть, $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathscr{C} = \mathbb{C}^{\wedge}$.

(4) $\to$ (5): Следует из 8.3 и 8.5.

(4) $\to$ (6): Нерасширяющий эндоморфизм $T : \mathscr{C}{\downarrow} \to \mathscr{C}{\downarrow}$ допускает представление $T = T_1 + iT_2$, где T_1, T_2 — нерасширяющие линейные операторы в вещественном K-пространстве $\mathscr{R}{\downarrow}$ (см. 2.2). В силу (4) T_1 и T_2 порядково ограничены, следовательно, $T_l x = c_l x$ ($x \in \mathscr{R}{\downarrow}$) для некоторых констант $c_1, c_2 \in \mathscr{R}{\downarrow}$. Как видно, $Tz = c \cdot z$ ($z \in \mathscr{C}{\downarrow}$), где $c := c_1 + ic_2$. Мультипликативность оператора T влечет $c^2 = c$, поэтому выполнены равенства $c_1^2 - c_2^2 = c_1$ и $2c_1c_2 = c_2$. Если $\pi := [c_2]$ — порядковый проектор в $\mathscr{R}{\downarrow}$ на полосу $\{c_2\}^{\perp\perp}$, то из второго равенства выводим $\pi c_1 = (1/2)\pi(\mathbb{1})$, а из первого вытекает $-\pi(c_2^2) = (1/4)\pi(\mathbb{1})$. Последнее возможно только при $\pi = 0$, значит $c_2 = 0$ и $0 \leqslant c_1^2 = c_1$. Но верно также $0 \leqslant (\mathbb{1} - c_1)^2 = \mathbb{1} - c_1$, значит, $c_1 \leqslant \mathbb{1}$. Теперь видно, что оператор $x \mapsto T_1 x = c_1 x$ служит

порядковым проектором в $\mathscr{R}{\downarrow}$ и, так как $T_2 = 0$, то его каноническое продолжение на $\mathscr{C}{\downarrow}$ совпадает с T.

(6) $\to$ (7): Очевидно.

Нужные для завершения доказательства импликации (5) $\to$ (2) и (7) $\to$ (2) вытекают из 4.9 и 8.6.

(5) $\to$ (2): Если в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ не выполняется равенство $\mathscr{C} = \mathbb{C}^{\wedge}$, то $b := [\![\mathscr{C} = \mathbb{C}^{\wedge}]\!] < \mathbb{1}$. Но тогда $b^* = [\![\mathscr{C} \neq \mathbb{C}^{\wedge}]\!] \neq \mathbb{0}$. В булевозначной модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B}_0)}$ над булевой алгеброй $\mathbb{B}_0 := [\mathbb{0}, b^*]$ имеет место неравенство $\mathscr{C} \neq \mathbb{C}^{\wedge}$. В силу утверждения 8.6 существует ненулевое дифференцирование D в полосе $b^*\mathscr{C}{\downarrow}$. Единственное продолжение $D \oplus 0$ оператора D, совпадающее с нулем на полосе $b\mathscr{C}{\downarrow}$, также будет ненулевым дифференцированием в $\mathscr{C}{\downarrow}$.

(7) $\to$ (2): Аналогичным образом, используя утверждение 8.6, для того же $b \in \mathbb{B}$ можно найти нетривиальный автоморфизм A^* в полосе $b^*\mathscr{C}{\downarrow}$. Если A — тождественное отображение в полосе $b\mathscr{C}{\downarrow}$, то $A^* \oplus A$ — нетривиальный автоморфизм в $\mathscr{C}{\downarrow}$. $\triangleright$

8.8. Следствие. *Для расширенного вещественного K-пространства G с фиксированной структурой f-алгебры равносильны утверждения:*

(1) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathscr{R} = \mathbb{R}^{\wedge}$, *где* $\mathbb{B} = \mathbb{P}(G)$;

(2) *булева алгебра* $\mathbb{B} := \mathbb{P}(G)$ *σ-дистрибутивна;*

(3) *K-пространство* $\mathbb{B}(\mathbb{R}) := \mathscr{R}{\downarrow}$ *локально одномерно;*

(4) *в K-пространстве* $\mathbb{B}(\mathbb{R}) := \mathscr{R}{\downarrow}$ *все нерасширяющие линейные операторы порядково ограничены;*

(5) *в f-алгебре G нет нетривиальных дифференцирований;*

(6) *в комплексной f-алгебре $G_{\mathbb{C}}$ нет нетривиальных нерасширяющих автоморфизмов.*

8.9. Рассмотрим теперь вопрос о том, когда в пространстве измеримых функций существуют нетривиальные дифференцирования и автоморфизмы. Говорят, что пространство с мерой (Ω, Σ, μ) *обладает свойством прямой суммы*, если Σ содержит семейство $(\Omega_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно непересекающихся множеств конечной меры такое, что для каждого измеримого подмножества $A \in \Sigma$ конечной меры существуют счетное множество индексов $\Theta \subset \Xi$ и множество нулевой меры $A_0 \in \mathscr{N}$ такие, что

$$A = A_0 \cup \left(\bigcup_{\xi \in \Theta} (A \cap \Omega_\xi) \right).$$

Ненулевое дифференцирование, а также отличный от тождественного отображения автоморфизм принято называть нетривиальным. Дифференцирование (автоморфизм) S в расширенном K-пространстве L назовем *существенно нетривиальным*, если для любого порядкового проектора $\pi \in \mathbb{P}(L)$ из $\pi S = 0$ (соответственно $\pi S = \pi I_L$) следует $\pi = 0$.

8.10. Теорема. *Пусть* (Ω, Σ, μ) — *пространство с безатомной мерой, обладающее свойством прямой суммы. Тогда справедливы утверждения:*

(1) *в* $L^0_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ *имеется существенно нетривиальное дифференцирование;*

(2) *в* $L^0_{\mathbb{C}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ *имеется существенно нетривиальное дифференцирование;*

(3) *в* $L^0_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ *имеется единственный нерасширяющий автоморфизм — тождественное отображение;*

(4) *в* $L^0_{\mathbb{C}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ *имеется существенно нетривиальный нерасширяющий автоморфизм.*

$\lhd$ Доказательство следует из теоремы 8.7 и из того факта, что булева алгебра измеримых множеств по модулю пренебрежимых множеств σ-дистрибутивна в том и только в том случае, когда она атомна и, следовательно, изоморфна булевой алгебре всех подмножеств некоторого непустого множества (см. [7, 5.3.4]). $\rhd$

8.11. Исторический комментарий. В связи с обстоятельствами, отмеченными в 2.10, в ходе изучения проблемы Викстеда сложилось убеждение, что равенство $\mathbb{R}^{\wedge} = \mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ связано с дискретностью K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$ или, что то же, с дискретностью булевой алгебры $\mathbb{B}$.

В 1995 г. А. Е. Гутман в работе [23] установил, что существует непрерывное (безатомное) локально одномерное K-пространство (см. также [24, 25]). В этой же работе он получил описание баз расширенных локально одномерных K-пространств: ими оказались в точности σ-дистрибутивные полные булевы алгебры. Эти результаты дают полное решение проблемы Викстеда.

В 2004 г. в работе А. Г. Кусраева [26] был предложен булевозначный подход к изучению нерасширяющих операторов. При этом были обнаружены новые взаимосвязи. Так, например, построение нерегулярного нерасширяющего оператора можно провести внутри подходящего булевозначного универсума с помощью базиса Гамеля поля вещественных чисел, рассматриваемого как векторное пространство над некоторым его подполем (см. [3, 8]). Разумеется, некоторые важные свойства K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$ связаны со строением поля вещественных чисел $\mathscr{R}$, рассматриваемого как векторное пространство над $\mathbb{R}^\wedge$. В частности, используя базис Гамеля, можно построить разрывную $\mathbb{R}^\wedge$-линейную функцию в $\mathscr{R}$, которая и дает нерегулярный линейный нерасширяющий оператор в $\mathscr{R}{\downarrow}$.

Развивая булевозначный подход, в [22] проведены аналогичные построения, но с привлечением *базиса трансцендентности* вместо базиса Гамеля, и получены новые характеризации K-пространств с σ-дистрибутивной базой в терминах более узкого класса нерасширяющих линейных операторов.

Литература

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—N. Y.: Acad. Press, 1985.—xvi+367 p.
2. *Schaefer H. H.* Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—xi+376 p.
3. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.—525 с.
4. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—(Trends in Science: The South of Russia. A Math. Monogr. 6).
5. *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы.—М.: Наука, 1965.—300 с.
6. *Зарисский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра.—М.: ИЛ, 1963.—373 с.
7. *Gutman A. E., Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* The Wickstead problem // Sib. Electronic Math. Reports.—2008.—Vol. 5.—P. 293–333.
8. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
9. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Операторы, сохраняющие дизъюнктность, их непрерывность и мультипликативное представление // Линейные операторы и их приложения: Межвуз. сб. науч. тр.—Л.: ЛГПИ, 1981.—С. 3–34.
10. *McPolin P. T. N., Wickstead A.W.* The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices // Math. Proc. Cambridge Phylos. Soc.—1985.—Vol. 97, № 3.—P. 481–487.
11. *Wickstead A. W.* Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces // Compositio Math.—1977.—Vol. 35, № 3.—P. 225–238.
12. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Операторы, сохраняющие дизъюнктность // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 248, № 5.—С. 1033–1036.
13. *Abramovich Yu. A., Wickstead A. W.* The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II // Quart. J. Math. Oxford Ser. 2.—1993.—Vol. 44.—P. 257–270.
14. *Ацел Я., Домбр Ж.* Функциональные уравнения с несколькими переменными.—М.: Физматлит, 2003.—432 с.
15. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра.—М.: Наука, 1976.—648 с.
16. *Bell J. L.* Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—N. Y. etc.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 p.

17. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика.—М.: Наука, 1987.—320 с.
18. *Шёнфильд Дж. Р.* Математическая логика.—М.: Наука, 1975. —520 с.
19. *Takeuti G.* Boolean valued analysis // Applications of Sheaves: Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Durham, July 9–21, 1977 / Eds. M. P. Fourman, C. J. Mulvey and D. S. Scott.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—pp. 714–731.—(Lect. Notes Math. Vol. 753).
20. *Гордон Е. И.* Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 237, № 4.—С. 773–775.
21. *Сикорский Р.* Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—375 с.
22. *Кусраев А. Г.* Автоморфизмы и дифференцирования в расширенной комплексной алгебре // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 1.—С. 97–107.
23. *Gutman A. E.* Locally one-dimensional K-spaces and σ-distributive Boolean algebras // Sib. Adv. Math.—1995.—Vol. 5, № 2.—P. 99–121.
24. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.
25. *Gutman A. E.* Disjointness preserving operators // Vector Lattices and Integral Operators / Ed. S. S. Kutateladze.—Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1996.—P. 361–454.
26. *Кусраев А. Г.* О нерасширяющих операторах // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, № 3.—С. 48–58.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4;
Новосибирский государственный университет
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1
E-mail: `gutman@math.nsc.ru`

Кусраев Анатолий Георгиевич
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1;
Южный математический институт ВНЦ РАН
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: `kusraev@smath.ru`

BOOLEAN VALUED ANALYSIS AND THE WICKSTEAD PROBLEM

A. E. Gutman, A. G. Kusraev

The purpose of this mini-course, consisting of four lectures, is to sketch Boolean valued analysis and its application to one problem from the theory of linear operators in vector lattices.

Key words: Kantorovich space, Wickstead problem, Cauchy functional equation, field extension, Boolean valued model, descent and ascent, Boolean valued reals.

УДК 517.968.2

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. К. Дурдиев

Курс лекций «Элементы теории интегральных уравнений» содержит основные понятия и теоремы теории интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра, интегральных уравнений со слабыми особенностями, с симметричными, полярными ядрами. А также в нем излагаются понятия дробного интегрирования и дифференцирования, собственных чисел и собственных функций интегрального оператора Фредгольма.

Ключевые слова: интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра, уравнение Абеля, дробное интегрирование и дифференцирование, резольвента, преобразование Лапласа, симметричное ядро, полярное ядро, собственное значение, собственная функция.

Лекция 1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра

1.1. Основные понятия и определения. *Интегральным уравнением* называется всякое уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла (более подробно в [1]). Интегральные уравнения вида

$$\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = f(x) \tag{1.1}$$

и

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds + f(x) \tag{1.2}$$

называются *линейными интегральными уравнениями Фредгольма 1-го и 2-го рода* соответственно. Здесь $y(x)$ — искомая функция, λ — числовой параметр, $K(x,s)$ и $f(x)$ — известные функции, заданные в квадрате $[a,b]\times[a,b]$ и на отрезке $[a,b]$ соответственно. Функция $K(x,s)$ называется *ядром* интегрального уравнения, а $f(x)$ —

свободным членом этого уравнения. Если $f(x) = 0$, уравнение называется *однородным*, иначе оно называется *неоднородным интегральным уравнением.*

Для уравнении Фредгольма 1-го и 2-го рода пределы интегрирования могут быть как конечными, так и бесконечными. Переменные удовлетворяют неравенству $a \leqslant s$, $x \leqslant b$, а ядро и свободный член должны быть непрерывными, либо $K(x, s)$ удовлетворять условиям

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2\, dx\, ds < +\infty, \quad \int_a^b |f(x)|^2\, dx < +\infty.$$

Ядра, удовлетворяющие последнему условию, называют *фредгольмовыми.*

Интегральные уравнения вида

$$\int_a^x K(x,s)y(s)\, ds = f(x) \tag{1.3}$$

и

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)\, ds + f(x) \tag{1.4}$$

называются *линейными интегральными уравнениями Вольтерра 1-го и 2-го рода* соответственно. Ядро интегрального уравнения Вольтерра определяется в треугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant x$. $y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, — неизвестная функция, $K(x,t)$ — ядро интегрального уравнения, $f(x)$ — некоторая известная функция, которая называется *свободным членом.* Функции $y(x)$ и $f(x)$ обычно считают непрерывными либо квадратично интегрируемыми на $[a, b]$. Ядро интегрального уравнения полагают непрерывным в квадрате $S = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant s \leqslant b\}$, либо удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,s)\, dx\, ds = B^2 < \infty,$$

где B — постоянная, т. е. квадратично интегрируемым в этом квадрате и $K\,(x, s) \equiv 0$ при $s < x$.

В принципе, уравнения Вольтерра можно рассматривать как частный случай уравнений Фредгольма, если переопределить ядро:

$$\mathbb{K}(x,s)=\begin{cases}K(x,s), & a\leqslant s\leqslant x,\\ 0, & x<s\leqslant b.\end{cases}$$

Однако, некоторые свойства уравнений Вольтерра не могут быть применены к уравнениям Фредгольма.

Ядро $K\left(x,s\right)$ интегрального уравнения (1.2) называется *вырожденным*, если оно может быть представлено в виде

$$K(x,s)=\sum_{k=1}^{n}p_k\left(x\right)q_k(s). \tag{1.5}$$

Ядро интегрального уравнения $K\left(x,s\right)$ называется *разностным*, если оно зависит от разности аргументов: $K\left(x,s\right)=K\left(x-s\right)$.

Рассматривают также полярные ядра

$$K\left(x,s\right)=\frac{L\left(x,s\right)}{\left(x-s\right)^{\beta}}\,ds+M\left(x,t\right),\quad 0<\beta<1,$$

и логарифмические ядра

$$K\left(x,s\right)=L\left(x,s\right)\ln\left(x-s\right)\ +M\left(x,s\right),$$

где $L\left(x,s\right)\left(L\left(x,x\right)\neq 0\ \right)$ и $M\left(x,s\right)$ непрерывны в S. Уравнения, содержащие такие ядра, называются *уравнениями со слабой особенностью.*

1.2. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра [2]**.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n(x)y=\varphi(x), \tag{1.6}$$

причем будем предполагать, что в точке $x=0$ функции $a_i(x)$ не имеют особенностей. Сделаем подстановку

$$\frac{d^ny}{dx^n}=u(x).$$

Тогда будем иметь:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int\limits_0^x u(x)\,dx + C_1,\\
\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int\limits_0^x u(x)\,dx^2 + C_1x + C_2,\\
\ldots\\
y = \int\limits_0^x u(x)\,dx^n + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n,
\end{array}\right\} \tag{1.7}$$

где $\int_0^x u(x)\,dx^n$ обозначает n-кратный интеграл от функции $u(x)$. Подставив формулы (1.7) в уравнение (1.6), преобразуем его в

$$\begin{gathered}
u(x) + a_1(x)\int\limits_0^x u(x)\,dx + \ldots + a_n(x)\int\limits_0^x u(x)\,dx^n =\\
= \varphi(x) + \sum_{i=1}^n C_i\alpha_i(x),
\end{gathered} \tag{1.8}$$

где

$$\alpha_i(x) = a_i(x) + \frac{x}{1}a_{i+1}(x) + \ldots + \frac{x^{n-i}}{(n-i)!}a_n(x).$$

Если теперь положим

$$\varphi(x) + \sum_{i=1}^n C_i\alpha_i(x) = f(x)$$

и применим известную формулу

$$\int\limits_0^x u(t)\,dt^n = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)\,dt,$$

то уравнение (1.6) примет вид

$$u(x) + \int\limits_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-t) + \ldots + a_n(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]u(t)\,dt = f(x),$$

что представляет собой интегральное уравнение типа Вольтерра 2-го рода.

Для того чтобы правая часть уравнения (1.8) имела определенное значение, необходимо, чтобы имели определенные значения все коэффициенты C_i. Тогда, обратно, решение уравнения Вольтерра (1.8) будет эквивалентно решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения (1.6). Единственность решения уравнения Вольтерра следует из того, что задача Коши допускает в точках, не имеющих особенностей, одно и только одно решение.

1.3. Метод последовательных приближений.

1.3.1. Метод последовательных приближений для интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Если в уравнении Фредгольма (1.2) числовой параметр λ удовлетворяет условию

$$|\lambda| < \frac{1}{B},$$

где

$$B^2 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,s)|^2 \, dx \, ds, \quad \int\limits_a^b |K(x,s)|^2 \, ds \leqslant C, \quad C = \mathrm{const}, \quad (1.9)$$

то уравнение (1.2) имеет единственное решение.

Для интегрального уравнения (1.2) построим последовательность приближений:

$$y_0(x) = f(x),$$

$$y_1(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,s) f(s) \, ds,$$

$$y_2(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,s) y_1(s) \, ds =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,s) f(s) \, ds + \lambda^2 \int\limits_a^b K(x,t) \, dt \int\limits_a^b K(t,s) f(s) \, ds =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,s) f(s) \, ds + \lambda^2 \int\limits_a^b f(s) \, ds \int\limits_a^b K(x,t) K(t,s) \, dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,s) f(s) \, ds + \lambda^2 \int\limits_a^b K_2(x,s) f(s) \, ds.$$

Аналогично

$$y_3(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) f(s)\,ds +$$

$$+ \lambda^2 \int_a^b K_2(x,s) f(s)\,ds + \lambda^3 \int_a^b K_3(x,s) f(s)\,ds,$$

$$K_3(x,s) = \int_a^b K(x,t) K_2(t,s)\,dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{a}$$

$$y_n(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k \int_a^b K_k(x,s) f(s)\,ds,$$

где

$$\begin{cases} K_1(x,s) = K(x,s), \\ K_k(x,s) = \int\limits_a^b K(x,t) K_{k-1}(t,s)\,dt. \end{cases} \tag{b}$$

Функция $K_k(x,s)$ называется k-ым итерированным ядром по отношению к данному ядру.

Итерированные ядра удовлетворяют следующему соотношению:

$$K_m(x,s) = \int_a^b K_r(x,t) K_{m-r}(t,s)\,dt. \tag{c}$$

Допустим, что последовательные приближения (a) сходятся. Перейдем к пределу в (a) при $n \to \infty$:

$$y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k \int_a^b K_k(x,s) f(s)\,ds. \tag{d}$$

Получим решение (d) уравнения (1.2) в виде ряда. Докажем, что этот ряд является сходящимся. Пусть

$$\int_a^b |K_k(x,s)|^2\,ds \leqslant C_k$$

следует из (1.9). Имеем

$$K_k(x,s)=\int\limits_a^b K(x,t)\,K_{k-1}(t,s)\,dt.$$

По неравенству Буняковского — Шварца (неравенство Гёльдера для интегралов)

$$|K_k(x,s)|^2\leqslant\int\limits_a^b |K_{k-1}(x,t)|^2\,dt\int\limits_a^b |K(t,s)|^2\,dt.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по s:

$$\int\limits_a^b |K_k(x,s)|^2\,ds\leqslant\int\limits_a^b |K_{k-1}(x,t)|^2\,dt\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(t,s)|^2\,dt\,ds.$$

Отсюда для верхних интегралов выполняются соотношения

$$\begin{gathered}C_k\leqslant B^2C_{k-1},\\ C_{k-1}\leqslant B^2C_{k-2},\\ C_{k-2}\leqslant B^2C_{k-3},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ C_k\leqslant B^{2(k-1)}C_1,\end{gathered}$$

где $k=1,2,3,\ldots$ В (d) общий член ряда оценивается следующим образом:

$$|U_k|=\left|\lambda^k\int\limits_a^b K_k(x,s)\,f(s)\;ds\right|\leqslant\frac{|\lambda|^k\sqrt{\int\limits_a^b |K_k(x,s)|^2\,ds}}{\sqrt{\int\limits_a^b |f(s)|^2\,ds}},$$

т. е.

$$|U_k|\leqslant D\sqrt{C_1}B^{k-1}|\lambda|^k,\quad D=\sqrt{\int\limits_a^b |f(s)|^2\,ds}.$$

Рассмотрим мажорантный геометрический ряд

$$D\sqrt{C_1}\,|\lambda|\sum_{k}^{\infty}\{B\,|\lambda|\}^{k-1}.$$

Он сходится, если $B\,|\lambda|<1$, т. е. при $|\lambda|<\frac{1}{B}$. Значит, ряд в формуле (d) равномерна и абсолютно сходится при

$$|\lambda|<\frac{1}{B}.$$

Формула (d) определяет единственное решение уравнения (1.2).

Пример 1.1. Решить методом последовательных приближений интегральное уравнение

$$y\,(x)=\sin\pi x+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 y\,(s)\;ds.$$

Решение. В этом уравнении $\lambda=\frac{1}{2}$, а $K\,(x,t)=1$. Поэтому

$$B^2=\int\limits_0^1\int\limits_0^1|K\,(x,s)|^2\,dx\,ds=1$$

и условие $|\lambda|<\frac{1}{B}$ выполнено. В качестве нулевого приближения возьмем $y_0=\sin\pi x$ и построим следующие приближения:

$$y_1\,(x)=\sin\pi x+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 y_0\,(s)\;ds\;=$$

$$=\;\sin\pi x+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sin\pi s\,ds=\sin\pi x+\frac{1}{\pi},$$

$$y_2\,(x)=\sin\pi x+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 y_1\,(s)\;ds=$$

$$=\;\sin\pi x+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\sin\pi s+\frac{1}{\pi}\right)\,ds=\sin\pi x+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2\pi},$$

$$y_3\,(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y_2\,(s)\,ds\ =$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\sin \pi s + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\right) ds = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi}.$$

Вычислив несколько первых членов последовательности $\{y_n(x)\}$, замечаем, что n-ое приближение может быть записано в следующем виде:

$$y_n\,(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2\pi} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}\pi} = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}.$$

Точное решение находим как предел:

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = \sin \pi x + \frac{2}{\pi},$$

где

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

1.3.2. Применение метода последовательных приближений для решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода. Необходимо отметить, что метод последовательных приближений отличен от метода последовательных подстановок. При методе последовательных приближений мы выбираем какую-либо произвольную вещественную функцию $u_0(x)$, непрерывную в $[a, b]$. Подставляя в правую часть уравнения

$$u(x) = f(x) + \lambda\int\limits_a^b K(x,t)u(t)\,dt \tag{1.10}$$

вместо $u(t)$ функцию $u_0(t)$, получаем

$$u_1(x) = f(x) + \lambda\int\limits_a^b K(x,t)u_0(t)\,dt. \tag{1.11}$$

Определенная таким образом функция $u_1(x)$ также вещественна и непрерывна в $[a, b]$. Продолжая идти этим путем, получим последовательность функций

$$u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots,$$

которые будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{gathered} u_2(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t) u_1(t)\, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t) u_{n-1}(t)\, dt, \\ u_{n-1}(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t) u_{n-2}(t)\, dt. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Из этих уравнений находим:

$$\begin{gathered} u_n(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t) f(t)\, dt + \\ + \lambda^2 \int\limits_a^b K(x,t) \int\limits_a^b K(t,t_1) f(t_1)\, dt_1\, dt + \ldots + \\ + \lambda^{n-1} \int\limits_a^b K(x,t) \int\limits_a^b K(t,t_1) \ldots \\ \ldots \int\limits_a^b K(t_{n-3}, t_{n-2}) f(t_{n-2})\, dt_{n-2} \ldots dt_1\, dt + R_n(x), \end{gathered} \tag{1.13}$$

где

$$R_n(x) = \lambda^n \int\limits_a^b K(x,t) \int\limits_a^b K(t,t_1) \ldots \int\limits_a^b K(t_{n-2}, t_{n-1})\, dt_{n-1} \ldots dt_1\, dt.$$

Функция $u_0(x)$ вещественна и непрерывна в $[a, b]$, значит ее абсолютная величина достигает в $[a, b]$ некоторого максимального значения U. Тогда

$$|R_n(x)| \leqslant |\lambda^n| \, U M^n (b-a)^n.$$

Если $|\lambda| \, M(b-a) < 1$, то

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0.$$

Таким образом, с увеличением n функции $u_n(x)$ приближаются к предельной функции, равной сумме ряда, получающегося в правой части равенства (1.13) при неограниченном увеличении n. Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} u_n\,(x) \equiv u(x).$$

В этом процессе последовательного приближения каждая новая функция $u_n(x)$ зависит от выбора начальной функции $u_0(x)$. Однако, предельная функция $u(x)$ от выбора $u_0\,(x)$ не зависит.

Теперь можем дать новое доказательство единственности решения. Предположим, что имеется другое решение $v(\mathrm{x})$. Выберем тогда за $u_0(x)$ функцию $v(\mathrm{x})$, т. е. положим $u_0(x) \equiv v(\mathrm{x})$. Тогда, очевидно, каждая функция $u_n(x)$ будет тождественно совпадать с $v_n(\mathrm{x})$, следовательно, и предел этих функций будет тождественно равно $v(\mathrm{x})$. Но мы только что видели, что предел не зависит от выбора начальной функции $u_0(x)$. Поэтому

$$v(\mathrm{x}) \equiv u(\mathrm{x}).$$

Эти рассуждения можно без всяких затруднений распространить на уравнение Вольтерра.

Пример 1.2. Решить интегральное уравнение

$$y\,(x) = 1 - \int\limits_0^x (x-s)\, y\,(s)\; ds$$

методом последовательных приблежений.

Решение. В качестве нулевого приближения выберем $y_0(x) = 1$. Тогда

$$y_1(x) = 1 - \int\limits_0^x (x-s)\, ds = 1 - \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 - \int\limits_0^x (x-s)\left(1 - \frac{s^2}{2}\right) ds = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

На n-ом шаге получим

$$y_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!},$$

откуда

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = \cos x.$$

1.4. Теоремы существования и единственности. Пусть дано интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt. \tag{1.14}$$

Будем считать, что выполняются следующие требования:

1) функция $f(x)$ является непрерывной на отрезке $[a,b]$;

2) ядро $K(x,t)$ является непрерывной и вещественной функцией в квадрате R, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$;

3) λ — постоянное число.

Подставляя в правую часть уравнения (1.14) вместо функции $y(x)$ ее значение, доставляемое этим же уравнением, находим:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t) \left[f(t) + \lambda \int\limits_a^b K(t,t_1)\, y(t_1)\, dt_1 \right] dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\, f(t)\, dt + \lambda^2 \int\limits_a^b K(x,t) \int\limits_a^b K(t,t_1) y(t_1)\, dt_1\, dt.$$

Снова подставляя сюда вместо $y(t_1)$ его значение из уравнения (1.14), получаем:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t) f(t)\, dt +$$

$$+ \lambda^2 \int\limits_a^b K(x,t) \int\limits_a^b K(t,t_1) \left[f(t_1) + \lambda \int\limits_a^b K(t_1,t_2) y(t_2)\, dt_2 \right] dt_1\, dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t) f(t)\, dt + \lambda^2 \int\limits_a^b K(x,t) \int\limits_a^b K(t,t_1) f(t_1)\, dt_1\, dt +$$

$$+ \lambda^3 \int\limits_a^b K(x,t) \int\limits_a^b K(t,t_1) \int\limits_a^b K(t_1,t_2) y(t_2)\, dt_2\, dt_1\, dt.$$

После n-ой подстановки будем иметь:

$$\begin{gathered} y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t) f(t)\, dt + \\ + \lambda^2 \int\limits_a^b K(x,t) \int\limits_a^b K(t,t_1) f(t_1)\, dt_1\, dt + \\ + \lambda^n \int\limits_a^b K(x,t) \int\limits_a^b K(t,t_1) \int\limits_a^b K(t_1,t_2) \ldots \\ \cdots \int\limits_a^b K(t_{n-2},t_{n-1}) f(t_{n-1})\, dt_{n-1} \ldots dt_1\, dt + R_{n+1}(x), \end{gathered} \tag{1.15}$$

где

$$R_{n+1}(x) = \lambda^{n+1} \int\limits_a^b K(x,t) \int\limits_a^b K(t,t_1) \ldots$$

$$\cdots \int\limits_a^b K(t_{n-1},t_n) y(t_n)\, dt_n \ldots dt_1\, dt.$$

Это приводит нас к рассмотрению следующего бесконечного ряда:

$$f\,(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t) f(t)\,dt + \\ + \lambda^2 \int\limits_a^b K(x,t) \int\limits_a^b K(t,t_1) f(t_1)\,dt_1\,dt \;+ \ldots \qquad (1.16)$$

По предположениям 1) и 2) (с. 61) каждый член этого ряда является функцией от x, непрерывной в интервале $[a,b]$. Значит, если ряд равномерно сходится в $[a,b]$, то он сам представляет в этом интервале некоторую непрерывную функцию.

Так как $K(x,t)$ и $f(x)$ непрерывны соответственно в R и $[a,b]$, то $|K|$ принимает в R некоторое максимальное значение M, а $|f(x)|$ принимает в $[a,b]$ некоторое максимальное значение N:

$$|K(x,t)| \leqslant M \quad \text{в} \quad R, \quad |f(x)| \leqslant N \quad \text{в} \quad [a,b]\,.$$

Рассмотрим

$$S_n\,(x) = \lambda^n \int\limits_a^b K(x,t) \int\limits_a^b K(t,t_1) \ldots \\ \cdots \int\limits_a^b K(t_{n-2},t_{n-1}) f(t_{n-1})\,dt_{n-1} \ldots dt_1\,dt.$$

Согласно написанным выше неравенствам имеем

$$|S_n\,(x)| \leqslant |\lambda^n|\, N M^n (b-a)^n.$$

Ряд с таким общим членом сходится, лишь если

$$|\lambda| < \frac{1}{M\,(b-a)}.$$

Если уравнение (1.14) имеет непрерывное решение, то последнее должно удовлетворять формуле (1.15). Но так как $y(x)$ непрерывно в $[a, b]$, то его абсолютное значение имеет в этом интервале некоторый максимум U. Тогда

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \left|\lambda^{n+1}\right| U M^{n+1}(b-a)^{n+1}.$$

Если теперь будет выполняться неравенство

$$|\lambda| M(b-a) < 1,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

Таким образом, мы видим, что функция $y(x)$, удовлетворяющая формуле (1.15) при любом n, разлагается в ряд (1.16).

Можно убедиться путем непосредственной подстановки, что функция $y(x)$, представляющая сумму ряда (1.16), удовлетворяет уравнению (1.14). К этому же результату приводит и такой путь: обозначим сумму ряда (1.16) через $y(x)$, помножим обе части полученного равенства на $\lambda K(x,t)$ и проинтегрируем ряд почленно. Тогда будем иметь:

$$\lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt =$$

$$= \lambda \int_a^b K(x,t) \left[f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t_1) f(t_1) + \ldots \right] dt =$$

$$= \lambda \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt +$$

$$+ \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1) f(t_1)\, dt_1\, dt + \cdots = y(x) - f(x).$$

Итак, получили следующую теорему.

Теорема 1.1. *Если*

а) $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt$, a, b — *постоянные*,

б) $K(x,t) \neq 0$ *вещественна и непрерывна в прямоугольнике* R, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$, в) *функция* $f(x) \neq 0$ *вещественна и непрерывна в интервале* $[a, b]$,

г) λ — *постоянное число и* $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$,

то уравнение (1.14) *имеет одно и только одно решение в* $[a, b]$, *выражающееся абсолютно и равномерно сходящимся рядом* (1.16).

1.5. Теорема существования и единственности решения для интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Пусть дано уравнение

$$y\,(x) = \lambda \int\limits_a^x K(x,t)y(t)\,ds + f(x). \tag{1.17}$$

Подставляя последовательно вместо $y\,(t)$ его значение из уравнения (1.17), получаем:

$$\begin{gathered} y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^x K(x,t)f(t)\,dt + \\ + \lambda^2 \int\limits_a^x K(x,t) \int\limits_a^t K(t,t_1)f(t_1)\,dt_1\,dt + \dots + \\ + \lambda^n \int\limits_a^x K(x,t) \int\limits_a^t K(t,t_1) \int\limits_a^{t_1} K(t_1,t_2)\dots \\ \dots \int\limits_a^{t_{n-2}} K\left(t_{n-2},t_{n-1}\right) f\left(t_{n-1}\right)\,dt_{n-1}\dots dt_1\,dt + R_{n+1}(x), \end{gathered} \tag{1.18}$$

где

$$R_{n+1}(x) = \lambda^{n+1} \int\limits_a^x K(x,t) \int\limits_a^t K(t,t_1)\dots$$
$$\dots \int\limits_a^{t_{n-1}} K(t_{n-1},t_n)y(t_n)\,dt_n\dots dt_1\,dt.$$

Рассмотрим бесконечный ряд

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^x K(x,t) f(t)\,dt + \\ + \lambda^2 \int\limits_a^x K(x,t) \int\limits_a^t K(t,t_1) f(t_1)\,dt_1\,dt + \ldots \quad (1.19)$$

Общий член этого ряда имеет вид

$$V_n(x) = \lambda^n \int\limits_a^x K\,(x,t) \int\limits_a^t K(t,t_1) \ldots \\ \ldots \int\limits_a^{t_{n-2}} K(t_{n-2}, t_{n-1}) f(t_{n-1})\,dt_{n-1} \ldots dt_1\,dt.$$

Так как $|K(x,t)| \leqslant M$ и $|f(x)| \leqslant N$, то

$$|V_n(x)| \leqslant \frac{|\lambda^n| N M^n (x-a)^n}{n!} \leqslant |\lambda^n| \, \frac{M^n (b-a)^n}{n!},$$

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Ряд с положительным общим членом $|\lambda^n| \frac{M^n (b-a)^n}{n!}$ сходится при всех значениях чисел λ, N, M, $b-a$. Поэтому ряд (1.19) сходится абсолютно и равномерно.

Если уравнение (1.17) имеет непрерывное решение, то оно должно выражаться рядом (1.18). Так как при непрерывности функции $y\,(x)$ в $[a,b]$ ее абсолютное значение достигает в этом интервале некоторого максимума U, то

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \left|\lambda^{n+1}\right| U M^{n+1} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \left|\lambda^{n+1}\right| U \frac{[M\,(x-a)]^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$a \leqslant x \leqslant b,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

Итак, мы видим, что функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению (1.18), представляет собой сумму ряда (1.19). Можно, как и выше, показать, что обратно, функция $y(x)$, равная сумме (1.18), удовлетворяет уравнению (1.17). Таким образом, мы имеем следующую теорему.

Теорема 1.2. *Если*

а) $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) f(t)\,dt$, *$a$ — постоянная,*

б) $K\,(x,t) \neq 0$ *вещественна и непрерывна в прямоугольнике R, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$, и $|K(x,t)| \leqslant M$,*

в) *функция $f\,(x) \neq 0$ вещественна и непрерывна в интервале* $[a, b]$,

г) λ — *постоянное число,*

то уравнение (1.18) *имеет одно и только одно непрерывное решение $y\,(x)$, которое выражается абсолютно и равномерно сходящимся рядом* (1.19).

Лекция 2. Интегральные уравнения Абеля первого и второго родов

2.1. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода. Интегральное уравнение вида

$$\int_a^x K(x,s) y(s)\,ds = f(x) \tag{2.1}$$

называется *линейным интегральным уравнениям Вольтерра* 1-*го рода*.

Предположим, что функция $K(x,s)$ непрерывна на $R = [a,b] \times [a,b]$, имеет непрерывную частную производную $K_x(x,s)$, непрерывна на R и $K(x,x) \neq 0$ для любого $x \in [a,b]$. Из (2.1) следует, что функция $f(x)$ должна удовлетворять условию разрешимости уравнения (2.1):

$$f(a) = 0. \tag{2.2}$$

Дифференцируя обе части уравнения (2.1) и используя известную формулу из анализа о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра

$$F'(y) = f\left(\beta(y), y\right) \beta'(y) - f\left(\alpha(y), y\right) \alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx,$$

имеем

$$K(x,x)y(x)+\int\limits_a^x K_x(x,s)y(s)\,ds=f'(x),$$

откуда приходим к уравнению Вольтерра второго рода:

$$y(x)+\int\limits_a^x \frac{K_x(x,s)}{K(x,x)}\,y(s)\,ds=\frac{f'(x)}{K(x,x)}. \qquad (2.3)$$

В силу условия (2.2) уравнения (2.1) и (2.3) равносильны в том смысле, что если они разрешимы, то любое решение $y(x)$ уравнения (2.1) является решением уравнения (2.3) и обратно: любое решение $y(x)$ уравнения (2.3) есть решение уравнения (2.1).

2.2. Решение интегральных уравнений Абеля первого и второго родов. Понятие дробного интегрирования и дифференцирования.

Определение 2.1. Интегральное уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt=f(x), \quad x>a,\ 0<\alpha<1, \qquad (2.4)$$

называется *интегральным уравнением Абеля первого рода*, где

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt, \quad \alpha\in C, \quad \mathrm{Re}(\alpha)>0.$$

Справочный материал. *Гамма-функция* — математическая функция, обычно обозначается $\Gamma(z)$. Была введена Леонардом Эйлером. Если вещественная часть комплексного числа α положительна, то гамма-функция определяется через абсолютно сходящийся интеграл

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt, \quad \alpha\in C, \quad \mathrm{Re}(\alpha)>0. \qquad (2.5)$$

Бета-функцией (B-функцией, бета-функцией Эйлера или интегралом Эйлера I рода) называется следующая специальная функция от двух переменных:

$$B(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \tag{2.6}$$

определенная при $\operatorname{Re}x>0$, $\operatorname{Re}y>0$.

Определение 2.2. Интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt=f(x),\quad x>0,\ \alpha>0,\ \lambda\in C,$$

называется *интегральным уравнением Абеля второго рода.*

Дадим формальное решение уравнения (2.4). Предположим, что оно разрешимо, т. е. существует отличное от нуля решение $\varphi(x)\neq 0$ уравнения (2.4). Заменим x на t, t на τ, умножим обе части полученного выражения на $(x-t)^{-\alpha}$ и проинтегрируем от a до x:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x (x-t)^{-\alpha}\,dt\int\limits_\tau^t (t-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)\,d\tau=\int\limits_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt. \tag{2.7}$$

Осуществляя замену переменной $t=\tau+s(x-\tau)$ и используя известные формулы для бета- и гамма-функций, вычислим внутренний интеграл в левой части:

$$\int\limits_\tau^t (x-t)^{-\alpha}(t-\tau)^{\alpha-1}\,dt=\int\limits_0^1(1-s)^{-\alpha}s^{\alpha-1}\,ds=$$

$$=B(\alpha,1-\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

Подставляя полученное выражение в (2.7), находим

$$\Gamma(1-\alpha)\int\limits_a^x\varphi(\tau)\,d\tau=\int\limits_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt$$

или

$$\int\limits_a^x\varphi(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt. \tag{2.8}$$

Отсюда получаем решение уравнения (2.7):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} \, dt. \tag{2.9}$$

Таким образом, мы показали, что если уравнение (2.4) имеет решение $\varphi(x)$, то оно дается формулой (2.9).

Обоснуем это решение в классе абсолютно интегрируемых функций $\varphi(x) \in L[a,b]$. Для этого нам понадобится класс $AC[a,b]$ абсолютно непрерывных функций $[a,b]$.

Определение 2.3. Функция $g(x)$ называется *абсолютно непрерывной* на $[a,b]$, если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков $[a_k, b_k] \subset [a,b]$, $k = 1, \ldots, m$, такой, что

$$\sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k) < \delta,$$

справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} |g(b_k) - g(a_k)| < \varepsilon.$$

Известно, что класс $AC[a,b]$ абсолютно непрерывных функций $g(x)$ на $[a,b]$ совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций:

$$g(x) \in AC[a,b] \quad \Rightarrow \quad g(x) = \int_a^x \psi(t)\, dt + c, \quad \int_a^b |\psi(t)|\, dt < \infty, \tag{2.10}$$

где c — произвольная постоянная. Из (2.10) вытекает, что абсолютно непрерывная функция $g(x)$ имеет почти всюду суммируемую производную $g'(x) = \psi(x)$. Поэтому $g(x)$ представима в виде:

$$g(x) \in AC[a,b] \quad \Rightarrow \quad g(x) = \int_a^x g'(t)\, dt + g(a). \tag{2.11}$$

Теорема 2.1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, *функция* $f(x)$ *задана на* $[a, b]$ *и*

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt. \qquad (2.12)$$

Для того чтобы уравнение Абеля (2.4) *было разрешимо в* $L[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f_{1-\alpha}(x) \in AC[a, b], \quad f_{1-\alpha}(a) = 0. \qquad (2.13)$$

При выполнении этих условий уравнение (2.4) *имеет единственное решение, определяемое формулой* (2.9).

$\lhd$ Доказательство. Пусть уравнение (2.4) разрешимо в $L[a, b]$. Тогда, как мы показали ранее, справедливо равенство (2.8). Отсюда, в силу (2.10), следуют условия (2.13), что доказывает необходимость.

Для доказательства достаточности заметим, что так как $f_{1-\alpha}(x) \in AC[a, b]$, то $f'_{1-\alpha}(x) \in L[a, b]$. Поэтому функция, представимая формулой (2.9), существует почти всюду и принадлежит $L[a, b]$. Покажем, что она действительно дает решение уравнения (2.4). Для этого подставим (2.9) в левую часть (2.4) и результат обозначим через $g(x)$:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f'_{1-\alpha}(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt = g(x). \qquad (2.14)$$

Покажем, что почти всюду $g(x) = f(x)$, что и докажет теорему. Равенство (2.14) есть уравнение (2.4) относительно $f'_{1-\alpha}(t)$. Оно заведомо разрешимо в силу (2.9):

$$f'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt = g(x), \qquad (2.15)$$

т. е. $f'_{1-\alpha}(x) = g'_{1-\alpha}(x)$. Функции $f'_{1-\alpha}$(x) и $g'_{1-\alpha}(x)$ абсолютно непрерывны: первая по предположению, вторая в силу равенства (2.8) с $g(x)$ в правой части. Поэтому

$$f_{1-\alpha}(x) - g_{1-\alpha}(x) = c \quad (\forall\, x \in [a, b]). \qquad (2.16)$$

По предположению $f'_{1-\alpha}(a) = 0$, а $g'_{1-\alpha}(a) = 0$, потому что уравнение (2.14) разрешимо. Поэтому $c = 0$ и (2.13) принимает вид

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{[f(t) - g(t)]\,dt}{(x-t)^\alpha} = 0. \tag{2.17}$$

Это равенство есть уравнение (2.4). В силу единственности решения $f(t) - g(t) = 0$. Теорема доказана. $\triangleright$

Достаточные условия разрешимости уравнения Абеля в $L[a,\ b]$ дает следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если* $f(x) \in AC[a,b]$, *то уравнение Абеля* (2.4) *с* $0 < \alpha < 1$ *разрешимо в* $L[a,b]$, *при этом его решение* (2.9) *можно представить в виде*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int\limits_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt \right]. \tag{2.18}$$

Доказательство основано на подстановке равенства вида (2.11)

$$f(t) = \int\limits_a^t f'(\tau)\,d\tau + f(a) \tag{2.19}$$

в формулу (2.9).

Известно, что решение интегрального уравнения (2.4) с любым $\alpha > 0$ представимо в виде

$$\varphi(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}}\,dt, \tag{2.20}$$

где $n = [\alpha] + 1$, при некоторых дополнительных предположениях на функцию $f(x)$.

В частности, если $\alpha = m \in N$, то уравнение (2.4) принимает вид

$$\frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t)\,dt = f(x), \tag{2.21}$$

и его единственное решение дается формулой

$$\varphi(x) = f^{(n)}(x). \tag{2.22}$$

Определение 2.4. Выражение

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt, \quad \alpha > 0, \tag{2.23}$$

называется *дробным интегралом Римана — Лиувилля порядка* α, а

$$(\Delta_{a+}^{\alpha} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}}\, dt, \quad \alpha > 0, \quad n = [\alpha]+1, \tag{2.24}$$

дробной производной Римана — Лиувилля порядка α.

Из формул (2.4) и (2.20) вытыкает, что левая часть уравнения Абеля (2.4) является дробным интегралом, а решение (2.20) — дробной производной.

Замечание. Дробное интегрирование есть операция, обобщающая операцию n-кратного интегрирования с переменным верхним пределом:

$$\int\limits_a^x dt_1 \int\limits_a^{t_1} \ldots \int\limits_a^{t_{n-1}} \varphi(t_n)\, dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t)\, dt, \quad n \in N. \tag{2.25}$$

Лекция 3. Итерированные ядра

3.1. Резольвента. Построение резольвенты с помощью итерированных ядер. Решение уравнений с помощью резольвенты. Если в методе последовательных приближений выбирать $y_0(x) = f(x)$, то для n-го приближения можно получить формулу

$$\begin{aligned} y_n(x) &= f(x) + \sum_{m=0}^{n} \lambda^{m+1} \int\limits_a^b K_m(x,t) f(t)\, dt = \\ &= f(x) + \lambda \int\limits_a^b \sum_{m=0}^{n} \lambda^m K_m(x,t) f(t)\, dt, \end{aligned} \tag{3.1}$$

в которой итерированные ядра $K_m(x,t)$ определяются с помощью соотношений

$$K_0(x,t) \equiv K(x,t), \quad K_m(x,t) = \int\limits_a^b K(x,s)K_{m-1}(s,t)\,ds. \tag{3.2}$$

При $n \to \infty$ под знаком интеграла получаем ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_m(x,t). \tag{3.3}$$

Для некоторых значений λ этот ряд сходится к функции $R(x,t,\lambda)$, которая называется ***резольвентой ядра*** $K(x,t)$. В этом случае решение интегрального уравнения может быть найдено по формуле

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R(x,t,\lambda)f(t)\,dt. \tag{3.4}$$

Понятие резольвенты, как функции, с помощью которой решение интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)y(s)\,ds + f(x)$$

может быть найдено с помощью формулы (3.4), имеет смысл для любых значений λ, при которых уравнение имеет единственное решение.

Пример 3.1. Решить методом итерированных ядер интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^1 \frac{x}{1+t^2}\,y(t)\,dt + 1 + x^2.$$

Решение. Найдем последовательность итерированных ядер:

$$K_0(x,t) = K(x,t) = \frac{x}{1+t^2},$$

$$K_1(x,t) = \int\limits_0^1 K(x,s)K(s,t)\,ds = \int\limits_0^1 \frac{x}{1+s^2}\frac{s}{1+t^2}\,ds = \frac{\ln 2}{2}\frac{x}{1+t^2},$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 K(x,s)K_1(s,t)\,ds =$$

$$= \frac{\ln 2}{2}\int_0^1 \frac{x}{1+s^2}\frac{s}{1+t^2}\,ds = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2 \frac{x}{1+t^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_m(x,t) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^m \frac{x}{1+t^2}.$$

Находим резольвенту:

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_m(x,t) = \frac{x}{1+t^2}\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^m = \frac{x}{1+t^2}\frac{2}{2-\lambda\ln 2}.$$

Радиус сходомости этого ядра $|\lambda| < \frac{2}{\ln 2} \approx 2.885$ для данного уравнения

$$B^2 = \int_0^1\int_0^1 |K(x,t)|^2\,dx\,dt = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{(1+t^2)^2}\,dx\,dt = \frac{\pi+2}{24}, \quad \frac{1}{B} \approx 2.161.$$

$$y(x) = 1 + x^2 + \frac{2}{2-\lambda\ln 2}\int_0^1 \frac{x}{1+t^2}(1+t^2)\,dt = 1 + x^2 + \frac{4x}{2-\lambda\ln 2}.$$

Прямой постановкой можно легко убедиться, что это решение удовлетворяет уравнению не только для значений λ, лежащих в области сходимости ряда, но и при любых значениях $\lambda \neq \frac{2}{\ln 2}$ (больше примеров можно посмотреть в [3]).

3.2. Решение интегральных уравнений Вольтерра с разностным ядром на основе преобразования Лапласа.

Определение 3.1. *Преобразованием Лапласа* функции $\varphi(t)$, заданной на $\mathbb{R}_+$, называется интеграл вида

$$\varphi^*(z) = (L\varphi)(z) = \Phi(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\varphi(t)\,dt, \quad z \in C, \tag{3.5}$$

где $\varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная при $t \geqslant 0$, это означает, что она либо непрерывна, либо в каждом конечном интервале имеет лишь конечное число точек разрыва 1-го рода;

2) $\varphi(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

3) при $t \to \infty$ функция $\varphi(t)$ растет не быстрее некоторой показательной функции (имеет ограниченную степень роста), т. е. существует такое положительное число М и такое неотрицательное число s, что для всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство:

$$|\varphi(t)| \leqslant Me^{st}, \quad M > 0,\, s \geqslant 0.$$

Точная нижняя грань $s_0 \geqslant 0$ тех значений $s \geqslant 0$, для которых выполняется неравенство, называется *показателем роста функции* $\varphi(t)$.

Приведем некоторые свойства преобразования Лапласа.

1. Если интеграл (3.5) сходится в точке $z_0 \in C$, то он сходится во всех точках $z \in C$, для которых $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0)$.

Для интеграла Лапласа (3.5) существуют три возможности:

а) интеграл всюду расходится;

б) интеграл всюду сходится;

в) существует такое число σ_c, что при $\mathrm{Re}(z) > \sigma_c$ интеграл (3.5) сходится, а при $\mathrm{Re}(z) < \sigma_c$ расходится.

Определение 3.2. Прямая $\mathrm{Re}(z) = \sigma_c$ на комплексной плоскости называется *осью сходимости*, а число σ_c *абсциссой сходимости* интеграла (3.5).

2. Если интеграл (3.5) сходится абсолютно в точке $z_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, то он сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\mathrm{Re}(z) > \sigma_0$.

3. Если $\sigma_c<\infty$, то интеграл (3.5) является аналитической функцией переменной z во всех точках полуплоскости $\mathrm{Re}(z) > \sigma_c$ и

$$\frac{d^k\varphi^*(z)}{dz^k} = \int\limits_0^\infty (-t)^k e^{-zt}\varphi(t)\,dt, \quad z \in C. \tag{3.6}$$

4. **Теорема 3.1.** *Если интеграл* (3.5) *имеет абсциссу сходимости* $\sigma_c < \infty$, *то имеет место формула обращения*

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zt}\varphi^*(z)\,dz, \tag{3.7}$$

в которой интеграл берется по любой прямой $\mathrm{Re}(z) = \sigma > \sigma_c$.

Определение 3.3. Интеграл (3.7) называется *обратным преобразованием Лапласа* и обозначается:

$$(L^{-1}g)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zt}g(z)\,dz. \tag{3.8}$$

5. Определение 3.4. *Сверткой Лапласа двух функций* $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ называется интеграл

$$\varphi(x) \equiv (\varphi_1 * \varphi_2)(x) = \int\limits_0^x \varphi(x-t)\varphi_2(t)\,dt. \tag{3.9}$$

Теорема 3.2 (о свертке [1])**.** *Если интегралы*

$$\varphi_1^*(z) = \int\limits_0^\infty \varphi_1(t)e^{-zt}dt, \quad \varphi_2^*(z) = \int\limits_0^\infty \varphi_2(t)e^{-zt}dt \tag{3.10}$$

сходятся абсолютно при $\mathrm{Re}(z) > \sigma_0$, *то интеграл*

$$\varphi^*(z) = \varphi_1^*(z)\varphi_2^*(z) \tag{3.11}$$

является преобразованием Лапласа свертки (3.9), *и при этом интеграл*

$$\varphi^*(z) = \int\limits_0^\infty \varphi(t)e^{-zt}dt \tag{3.12}$$

также абсолютно сходится при $\mathrm{Re}(z) > \sigma_0$.

Формулу (3.11) удобно переписать в виде

$$(L\,[\varphi_1 * \varphi_2])(x) = (L\varphi_1)(x)(L\varphi_2)(x) \tag{3.13}$$

или

$$\Phi(x) = \Phi_1(x)\Phi_2(x).$$

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра с разностным ядром

$$\varphi(x) = f(x) + \int\limits_0^x k(x-t)\varphi(t)\,dt, \quad x > 0. \tag{3.14}$$

Предположим, что функции $f(x)$ и $k(x)$ непрерывны на $R_+ = (0, \infty)$, стремятся к нулю при $x \to +\infty$ и имеют оценки

$$|f(x)| \leqslant Ae^{-ax}, \quad |k(x)| \leqslant Be^{-bx}, \tag{3.15}$$

где $A > 0$, $B > 0$, а постоянные $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Пусть m и M — верхние границы значений $|f(x)|$ и $|k(x)|$ при $x \geqslant 0$:

$$m = \sup_{x \geqslant 0} |f(x)|, \quad M = \sup_{x \geqslant 0} |k(x)|. \tag{3.16}$$

Применяя к уравнению (3.14) метод последовательных приближений, получим для $\varphi(x)$ при $x \geqslant 0$ оценку

$$|\varphi(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} m\frac{(Mx)^n}{n!} = me^{-Mx}.$$

Отсюда следует, что к функциям $\varphi(x)$, $f(x)$ и $k(x)$ применимо преобразование Лапласа (3.5) при $\sigma > \max\{a, b, M\}$. Применяя к обеим частям (3.14) преобразование Лапласа и используя формулу свертки (3.13) и обозначения

$$\Phi(z) = (L\varphi)(z), \quad F(z) = (Lf)(z), \quad K(z) = (Lk)(z), \tag{3.17}$$

имеем

$$\Phi(z) = F(z) + K(z)\Phi(z), \tag{3.18}$$

откуда

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{1 - K(z)}. \tag{3.19}$$

Выше мы видели, что функция $\Phi(z)$ должна быть аналитичной в полуплоскости $\mathrm{Re}(z) > M$. Отсюда, в силу полной независимости $K(z)$ и $F(z)$, вытекает, что знаменатель дроби в (3.19) не должен иметь корней внутри упомянутой полуплоскости. Применяя теорему 3.1, получаем в силу (3.7) выражение для $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Phi(z)e^{zx}\, dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{F(z)}{1 - K(z)}\, e^{zx}\, dx. \tag{3.20}$$

Таким образом, решение $\varphi(x)$ уравнения (3.14) дается формулой (3.20). Приведем другую формулу для этого решения. Для этого сначала покажем, что для уравнения (3.14) все повторные ядра зависят от разности $(x-t)$. Имеем

$$K_1(x,t)=K(x,t), \quad K_n(x,t)=\int\limits_a^b K_{n-1}(x,\tau)K(\tau,t)\,d\tau,$$

$$K_1(x,t)=K(x-t),$$

$$K_2(x,t)=\int\limits_t^x K_1(x,\tau)K_1(\tau,t)\,d\tau=\int\limits_t^x K(x-\tau)K(\tau-t)\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^{x-t} K(x-t-s)K(s)\,ds=K_2(x-t).$$

Аналогично доказательство и для других повторных ядер:

$$K_n(x,t)=K_n(x-t), \quad n=1,2,3,4,\ldots \tag{3.21}$$

Тогда согласно формуле

$$R(x;t;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}K_{n+1}(x,t)\lambda^n$$

при $\lambda=1$ резольвента $R(x,t;\lambda)$ уравнения (3.14) будет зависеть только от разности $x-t$. Введем обозначение:

$$R(x,t;1)=r(x-t). \tag{3.22}$$

Следовательно, на основании формулы

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^x R(x,t,\lambda)f(t)\,dt$$

решение уравнения (3.14) можно записать в виде:

$$\varphi(x)=f(x)+\int\limits_0^x r(x-t)f(t)\,dt. \tag{3.23}$$

Применяя к обеим частям этого равенства преобразование Лапласа, учитывая обозначения (3.17) и

$$R(z) = (Lr)(z), \tag{3.24}$$

а также используя формулу свертки (3.13), получим

$$\varPhi(z) = F(z) + R(z)F(z). \tag{3.25}$$

Согласно (3.19) выразим $R(z)$:

$$R(z) = \frac{\varPhi(z) - F(z)}{f(z)} = \frac{1}{F(z)}\left[\frac{F(z)}{1-K(z)} - F(z)\right] = \frac{K(z)}{1-K(z)}, \tag{3.26}$$

т. е.

$$R(z) = \frac{K(z)}{1-K(z)}. \tag{3.27}$$

Обращение формулы (3.27) на основании формулы обращения (3.7) дает нам резольвенту $r(x)$:

$$r(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{K(z)}{1-K(z)} e^{zx}\,dx. \tag{3.28}$$

Подставляя это выражение в (3.23), получим решение уравнения (3.14).

Указанный метод решения уравнения (3.14) применим и к системам уравнений Вольтерра с разностными ядрами

$$\varphi_j(x) = f_j(x) + \sum_{i=0}^{m}\int\limits_0^x k_{ij}(x-t)\varphi_i(t)\,dt, \quad j = 1,\ldots,m. \tag{3.29}$$

Применяя к обеим частям (3.29) преобразование Лапласа имеем

$$\Phi_j(z) = F_j(z) + \sum_{i=0}^{m} K_{ij}(z)\Phi_i(z), \quad j = 1,\ldots,m, \tag{3.30}$$

где

$$\Phi_j(z) = (L\varphi_j)(z), \quad F_j(z) = (Lf_i)(z), \quad K_{ij}(z) = (Lk_{ij})(z). \tag{3.31}$$

Решая систему уравнений первой степени (3.30), определим $\Phi_j(z)$ и тогда решение исходной системы (3.29) получится по формуле

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi_j(z)e^{xz}\,dz, \quad j=1,\ldots,m. \tag{3.32}$$

Пример 3.2. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt, \quad x>0,\ \lambda>0. \tag{3.33}$$

Оно является уравнением вида (3.14) с $k(x)=\lambda x$. В данном случае

$$K(z) = \lambda\int\limits_0^\infty e^{-zx}x\,dx = \frac{\lambda}{z^2}, \tag{3.34}$$

причем вещественная часть z считается положительной. Формула (3.27) дает

$$R(z) = \frac{\lambda}{z^2-\lambda}, \tag{3.35}$$

и в силу (3.28) резольвента $r(x)$ определяется равенством

$$r(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\lambda e^{xz}}{z^2-\lambda}\,dz, \quad x>0, \tag{3.36}$$

где σ — любое достаточно большое положительное число.

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру плоскости $z = \sigma + i\tau$, состоящему из отрезка прямой $\sigma=\sigma_0$, где $\sigma_0 > \sqrt{\lambda}$, и полуокружности, лежащей слева от этой прямой и имеющей центр в точке пересечения этой прямой с вещественной осью. Вводя в интеграле (3.36) вместо z новую переменную интегрирования z_1 по формуле $z-\sigma_0 = iz_1$, получим на плоскости переменной z_1 контур интегрирования, состоящий из отрезка вещественной оси и полуокружности с центром в начале координат (см. рис. 1). Пользуясь леммой Жордана и тем, что $x>0$, убедимся, что интеграл по полуокружности будет стремиться к нулю при стремлении ее радиуса к бесконечности. Отсюда непосредственно следует, что величина интеграла (3.36) при $\sigma > \sqrt{\lambda}$ равна сумме вычетов подынтегральной функции в точках $z_1 = \sqrt{\lambda}$ и $z_1 = -\sqrt{\lambda}$, что дает

$$r(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right).$$

Следовательно, решение уравнения (3.33) в силу (3.23) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\int\limits_0^x \left[e^{\sqrt{\lambda}(x-t)} - e^{-\sqrt{\lambda}(t-x)}\right] f(t)\,dt.$$

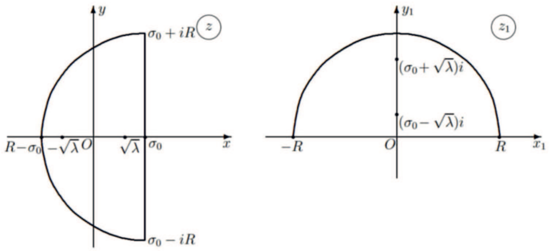

Рис. 1

Пример 3.3. Метод преобразования Лапласа может быть применен к интегральному уравнению, если входящий в него интеграл имеет вид свертки двух функций:

$$\int\limits_0^x f(x-t)g(t)\,dt \risingdotseq F(p)G(p),$$

т. е. когда ядро является функцией разности двух переменных:

$$\varphi(x) = f(x) + \int\limits_0^x K(x-s)\varphi(s)\,ds.$$

Например, дано такое уравнение:

$$\varphi(x) = \sin x + 2\int\limits_0^x \cos(x-s)\varphi(s)\,ds.$$

Применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения:

$$\varphi(x) \risingdotseq \mathbf{F}(p), \quad \mathbf{F}(p) = \frac{1}{1+p^2} + \frac{2p}{1+p^2}\mathbf{F}(p) = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим

$$\varphi(x) = \mathrm{res}_{p=1}\frac{1}{(p-1)^2}e^{px} = (e^{px})'_p\big|_{p=1} = xe^x.$$

Лекция 4. Интегральные уравнения Фредгольма с вырожденными ядрами

Определение 4.1. Ядро $K(x,t)$ называется *вырожденным*, если оно представимо в виде конечной суммы произведений функций только от x на функции только от t:

$$K(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \rho_j(x)\sigma_j(t). \tag{4.1}$$

Функции $\rho_j(x)$ и $\sigma_j(t)$ можно считать линейно независимыми. Если бы некоторое $\rho_j(x)$ выражалось через остальные $\rho_j(x)$, то могли бы подставить выражение $\rho_j(x)$ в (4.1). При этом число слагаемых уменьшилось.

Рассмотрим уравнение Фредгольма с таким ядром и союзное с ним уравнение:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt, \tag{4.2}$$

$$\psi(x) = g(x) + \lambda\int\limits_a^b K(x,t)\psi(t)\,dt. \tag{4.3}$$

С учетом (4.2) эти уравнения принимают вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \rho_j(x) \int_a^b \sigma_j(t)\varphi(t)\,dt, \tag{4.4}$$

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(x) \int_a^b \rho_j(t)\psi(t)\,dt \tag{4.5}$$

или

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j \rho_j(x), \tag{4.6}$$

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} y_j \sigma_j(x), \tag{4.7}$$

где x_j и y_j — некоторые числа, определяемые равенствами

$$x_j = \int_a^b \sigma_j(t)\varphi(t)\,dt, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.8}$$

$$y_j = \int_a^b \rho_j(t)\psi(t)\,dt, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.9}$$

Таким образом, всякое решение уравнений (4.4) и (4.5) должно иметь вид (4.6) и (4.7) соответственно, и все сводится к нахождению не функций $\rho_j(x)$ и $\sigma_j(t)$, а чисел x_j и y_j.

Подставляя выражения (4.6) и (4.7) в уравнения (4.4) и (4.5) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях $\rho_j(x)$ и $\sigma_j(t)$, получим для определения x_j и y_j две системы уравнений

$$x_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = f_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.10}$$

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = g_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.11}$$

где

$$a_{ij} = \int\limits_a^b \rho_j(t)\sigma_i(t)\,dt, \quad f_i = \int\limits_a^b f(t)\sigma_i(t)\,dt,$$
$$g_i = \int\limits_a^b g(t)\sigma_i(t)\,dt. \tag{4.12}$$

Определители систем (4.10) и (4.11) отличаются лишь заменой строк столбцами.

Если, например, определитель системы (4.10) отличен от нуля, то при любых f_i и g_i получим определенные значения для x_i. Подставляя их в (4.6), найдем $\varphi(x)$. Однородным уравнениям

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt, \tag{4.13}$$

$$\psi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\psi(t)\,dt \tag{4.14}$$

будут соответствовать однородные системы

$$x_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.15}$$

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.16}$$

Приравнивая определитель одной из этих систем (все равно какой) к нулю, получим алгебраическое уравнение для определения характеристических значений. Если $\lambda = \lambda_0$ — какой-либо корень этого уравнения, то система (4.15) имеет решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, отличное от нулевого.

Подставляя это решение в формулу

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j\rho_j(x), \tag{4.17}$$

получим собственную функцию.

Пример 4.1. Пусть

$$K(x,t) = \cos(x+t) = \cos x \cos x - \sin x \sin t, \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi. \tag{4.18}$$

В данном случае в (4.1) $n = 2$,

$$\rho_1(x) = \cos x, \quad \sigma_1(t) = \cos t, \quad \rho_2(x) = \sin x, \quad \sigma_2(t) = \sin t. \tag{4.19}$$

Вычисляя a_{ij}, получим

$$a_{11} = \int\limits_0^\pi \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \\ a_{22} = -\int\limits_0^\pi \sin^2 x\,dx = -\frac{\pi}{2}. \tag{4.20}$$

Система (4.10) принимает вид

$$\left(1 - \frac{\lambda\pi}{2}\right) x_1 = f_1, \quad \left(1 + \frac{\lambda\pi}{2}\right) x_2 = f_2, \tag{4.21}$$

$$f_1 = \int\limits_0^\pi \cos t f(t)\,dt, \quad f_2 = \int\limits_0^\pi \sin t f(t)\,dt. \tag{4.22}$$

Имеются два характеристических значения $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$ и $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$, а соответствующие нормированные собственные функции даются формулами

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x, \quad \varphi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x. \tag{4.23}$$

Если $\lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}$, то интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^\pi \cos(x+t)\varphi(t)\,dt \tag{4.24}$$

имеет единственное решение вида (4.6):

$$\varphi = f(x) + \lambda \frac{f_1}{1 - \lambda\frac{\pi}{2}} \cos x + \lambda \frac{f_2}{1 - \lambda\frac{\pi}{2}} \sin x. \tag{4.25}$$

Если $\lambda = \frac{2}{\pi}$, то для разрешимости уравнения (4.24) необходимо и достаточно выполнение условия разрешимости

$$f_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_0^\pi \cos t f(t)\, dt = 0. \tag{4.26}$$

При выполнении этого условия решение уравнения (4.24) имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + c_1 \cos x + \frac{f_2}{\pi} \sin x, \tag{4.27}$$

где c_1 — произвольная постоянная. При этом соответствующее (4.24) однородное уравнение

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(x+t)\varphi(t)\, dt \tag{4.28}$$

имеет линейно независимое решение $\varphi(x) = \cos x$.

Если $\lambda = -\frac{2}{\pi}$, то для разрешимости уравнени (4.24) необходимо и достаточно выполнение условия

$$f_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_0^\pi \sin x f(x)\, dt = 0. \tag{4.29}$$

При выполнении этого условия решение уравнения (4.24) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{f_1}{\pi} \cos x + c_2 \sin x, \tag{4.30}$$

где c_2 — произвольная постоянная. При этом соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x) = -\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(x+t)\varphi(t)\, dt \tag{4.31}$$

имеет линейно независимое решение $\varphi(x) = \sin x$.

4.1. Собственные значения и собственные функции. Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$y(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,t)y(t)\, dt = 0. \tag{4.32}$$

Отметим, что уравнение (4.32) всегда имеет очевидное решение $y(x) \equiv 0$, которое называется нулевым (тривиальным) решением. Значения числового параметра λ, при которых это уравнение имеет ненулевые решения $y(x) \neq 0$, называются *характеристическими числами* (величина $\mu = \frac{1}{\lambda}$) уравнения (4.32) или ядра $K(x,t)$. Каждое ненулевое решение этого уравнения называется *собственной функцией*, соответствующей характеристическому числу λ (собственному значению μ). Подчеркнем, что число $\lambda = 0$ не является характеристическим числом, так как при $\lambda = 0$ из уравнения (4.32) следует, что $y(x) \equiv 0$. Если ядро $K(x,t)$ однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода (4.32) является вырожденным, то задача о нахождении собственных значений и собственных функций интегрального уравнения сводится к поиску собственных значений некоторой матрицы. Всякое решение однородного интегрального уравнения (4.32) имеет вид

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k p_k(x), \tag{4.33}$$

где неизвестные числа c_k являются решением однородной системы уравнений

$$c_k - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ki} c_i = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4.34}$$

Система (4.34) может быть записана в матричной форме

$$(I - \lambda A)C = 0(A_\mu I)C = 0, \tag{4.35}$$

где $\lambda, \mu \neq 0$; $\mu = \frac{1}{\lambda}$; $I = (\delta_{ij})_n^n$ — единичная матрица порядка n; $A = (a_{ij})_n^n$ — квадратная матрица порядка n; C — матрица-столбец, состоящая из чисел c_i, $i = 1, \ldots, n$; 0 — нулевая матрица-столбец. Таким образом, собственные значения однородного интегрального уравнения (4.32) совпадают с отличными от нуля собственными значениями матрицы A и могут быть найдены из характеристического уравнения

$$\det(A - \mu I) = 0. \tag{4.36}$$

Отметим, что если исходное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода является неоднородным

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) y(t)\, dt = f(x)$$

и имеет вырожденное ядро $K(x,t)$, то его решение можно свести к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ki} c_i = b_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

которая может быть записана в матричной форме

$$(I - \lambda A)C = B, \tag{4.37}$$

где B — матрица-столбец, состоящая из чисел b_i, $i = 1, \dots, n$.

Пример 4.2. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \left(\cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t\right) y(t)\, dt = 0.$$

Решение. Ядро

$$K(x,t) = \cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t$$

является вырожденным. Здесь

$$p_1(x) = \cos^2 x, \quad q_1(t) = \cos 2t, \quad p_2(x) = \cos 3x, \quad q_2(t) = \cos^3 t.$$

По формулам

$$a_{ki} = \int_a^b p_i(t) q_k(t)\, dt, \quad b_k = \int_a^b q_k(t) f(t)\, dt \tag{4.38}$$

найдем элементы матрицы A:

$$a_{11} = -\int_0^{\pi} p_1(t) q_1(t)\, dt = \int_0^{\pi} \cos^2 t \cos 2t\, dt = \frac{\pi}{4},$$

$$a_{12} = \int_0^{\pi} p_2(t) q_1(t)\, dt = \int_0^{\pi} \cos 3t \cos 2t\, dt = 0,$$

$$a_{21} = \int_0^\pi p_1(t)q_2(t)\,dt = \int_0^\pi \cos^2 t \cos^3 t\,dt = 0,$$

$$a_{22} = -\int_0^\pi p_2(t)q_2(t)\,dt = \int_0^\pi \cos 3t \cos^3 t\,dt = \frac{\pi}{8}.$$

Характеристическое уравнение (4.36) для нахождения собственных значений имеет вид

$$\det(A_\mu I) = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{4}-\mu & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{8} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $(\frac{\pi}{4}-\mu)(\frac{\pi}{8}-\mu) = 0$.

Получаем собственные значения $\mu_1 = \frac{\pi}{4}$, $\mu_2 = \frac{\pi}{8}$ (соответственно характеристические числа $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}, \lambda = \frac{8}{\pi}$).

1. При $\mu_1 = \frac{\pi}{4}$ система уравнений (4.35) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0,$$

откуда $c_2 = 0$, c_1 произвольно. Собственная функция, соответствующая собственному значению $\mu_1 = \frac{\pi}{4}$, находится по формуле (4.33). Именно,

$$y(x) = \lambda_1 c_1 p_1(x) + \lambda_1 c_2 p_2(x) = \lambda_1 c_1 \cos^2 x = \\ = \frac{4}{\pi} c_1 \cos^2 x = C_1 \cos^2 x, \quad C_1 \neq 0.$$

2. При $\mu_2 = \frac{\pi}{8}$ система уравнений (4.35) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{8} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0,$$

откуда $c_1 = 0$, c_2 произвольно. Собственная функция, соответствуюшая собственному значению $\mu_2 = \frac{\pi}{8}$, находится по формуле (4.33). Именно,

$$y(x) = \lambda_2 c_1 p_1(x) + \lambda_2 c_2 p_2(x) = \lambda_2 c_2 \cos 3x = \\ = \frac{8}{\pi} c_2 \cos 3x = C_2 \cos 3x, \quad C_2 \neq 0.$$

Пример 4.3. При различных значениях параметра λ исследовать решения интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t) y(t)\, dt + 1.$$

Решение. Данное интегральное уравнение Фредгольма является неоднородным. Запишем его в следующем виде:

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} (\cos x \cdot \cos t - \sin x \cdot \sin t) y(t)\, dt + 1.$$

Ядро $K(x,t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t$ является вырожденным. Здесь $p_1(x) = \cos x$, $q_1(t) = \cos t$, $p_2(x) = -\sin x$, $q_2(t) = \sin t$. По формулам (4.38) найдем элементы матрицы $\mathbf{A}$ и матрицы-столбца $\mathbf{B}$:

$$a_{11} = \int_0^{\pi} p_1(t) q_1(t)\, dt = \int_0^{\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{\pi}{2},$$

$$a_{12} = \int_0^{\pi} p_2(t) q_1(t)\, dt = -\int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos t\, dt = -\int_0^{\pi} \sin t\, d(\sin t) = 0,$$

$$a_{21} = \int_0^{\pi} p_1(t) q_2(t)\, dt = \int_0^{\pi} \cos t \cdot \sin t\, dt = 0,$$

$$a_{22} = \int_0^{\pi} p_2(t) q_2(t)\, dt = -\int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = -\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = -\frac{\pi}{2},$$

$$b_1 = \int_0^{\pi} q_1(t) f(t)\, dt = \int_0^{\pi} \cos t \cdot 1 \cdot\, dt = \int_0^{\pi} \cos t\, dt = 0,$$

$$b_2 = \int_0^{\pi} q_2(t) f(t)\, dt = \int_0^{\pi} \sin t \cdot 1 \cdot\, dt = \int_0^{\pi} \sin t\, dt = 2.$$

Характеристическое уравнение для определения характеристических чисел вытекает из (4.35) и имеет вид

$$\det(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1+\lambda\frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $\left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Получаем характеристические числа $\lambda_1 = -\frac{2}{\pi}$, $\lambda_2 = \frac{2}{\pi}$. Система уравнений (4.37) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1+\lambda\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. При $\lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}$ система уравнений имеет единственное решение

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{2}{1+\lambda\frac{\pi}{2}}.$$

В этом случае решение исходного интегрального уравнения согласно формуле

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k p_k(x) + f(x),$$

имеет вид

$$y(x) = \lambda c_1 p_1(x) + \lambda c_2 p_2(x) + f(x) =$$
$$= -\frac{2\lambda}{1+\lambda\frac{\pi}{2}} \sin x + 1 = 1 - \frac{4\lambda}{2+\lambda\pi} \sin x.$$

2. При $\lambda = \frac{2}{\pi}$ решения системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

образуют пары (c_1, c_2), где c_1 произвольно, $c_2 = 1$. Соответственно, решения интегрального уравнения имеют вид

$$y(x) = \lambda c_1 p_1(x) + \lambda c_2 p_2(x) + f(x) =$$
$$= \frac{2}{\pi} c_1 \cos x - \frac{2}{\pi} \cdot 1 \cdot \sin x + 1 = C \cos x - \frac{2}{\pi} \sin x + 1.$$

3. При $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ система уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

решений не имеет. Значит, при данном λ не имеет решений и исходное интегральное уравнение.

Отметим, что однородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода может вообще не иметь характеристических чисел и собственных функций, или не иметь действительных характеристических чисел и собственных функций.

Пример 4.4. Показать, что интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}\cdot t - \sqrt{t}\cdot x\right) y(t)\,dt$$

не имеет действительных характеристических чисел и собственных функций.

Решение. Ядро $K(x,t) = \sqrt{x}\cdot t - \sqrt{t}\cdot x$ является вырожденным. Здесь $p_1(x) = \sqrt{x}$, $q_1(t) = t$, $p_2(x) = -x$, $q_2(t) = \sqrt{t}$. По формулам (4.38) найдем элементы матрицы $\mathbf{A}$:

$$a_{11} = \int\limits_0^1 p_1(t)q_1(t)\,dt = \int\limits_0^1 t\sqrt{t}\,dt = \int\limits_0^1 t^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{2}{5},$$

$$a_{12} = \int\limits_0^1 p_2(t)q_1(t)\,dt = -\int\limits_0^1 t^2\,dt = -\frac{1}{3},$$

$$a_{21} = \int\limits_0^1 p_1(t)q_2(t)\,dt = \int\limits_0^1 t\,dt = \frac{1}{2},$$

$$a_{22} = \int\limits_0^1 p_2(t)q_2(t)\,dt = -\int\limits_0^1 t\sqrt{t}\,dt = -\int\limits_0^1 t^{\frac{3}{2}}\,dt = -\frac{2}{5}.$$

Характеристическое уравнение для определения характеристических чисел вытекает из (4.35) и имеет вид

$$\det(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\cdot\frac{2}{5} & -\frac{1}{3}\lambda \\ \frac{1}{2}\lambda & 1+\lambda\cdot\frac{2}{5} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right)\left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right) + \frac{1}{6}\lambda^2 = 1 + \frac{\lambda^2}{150}.$$

При действительных λ выполнено соотношение

$$\det(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A}) \neq 0,$$

поэтому при всех действительных λ исходное интегральное уравнение имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. Итак, данное уравнение не имеет действительных характеристических чисел и собственных функций.

Пример 4.5. Показать, что интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^1 \sin \pi x \cos \pi t y(t)\, dt$$

не имеет характеристических чисел и собственных функций.

Решение. Запишем исходное уравнение в виде

$$y(x) = \lambda \sin \pi x \int_0^1 \cos \pi t y(t)\, dt, \tag{4.39}$$

и обозначим

$$C = \int_0^1 \cos \pi t y(t)\, dt.$$

Тогда $y(x) = C\lambda \sin \pi x$. Подставив полученное выражение для $y(x)$ в обе части уравнения (4.39), получим

$$C\lambda \sin \pi x = C\lambda^2 \sin \pi x \int_0^1 \cos \pi t \sin \pi t\, dt.$$

Но

$$\int_0^1 \cos \pi t \sin \pi t\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos z \sin z\, dz = 0,$$

поэтому $C\lambda \sin \pi x = 0$, откуда $C = 0$, и значит $y(x) \equiv 0$. Таким образом, исходное интегральное уравнение не имеет характеристических чисел и собственных функций.

4.2. Интегральные уравнения с симметричным ядром. Теория линейных интегральных уравнений с симметричным и действительным ядром была впервые построена Д. Гильбертом (D. Hilbert, 1904) привлечением теории симметричных квадратичных форм с помощью перехода от конечного числа переменных к бесконечному. Затем Э. Шмидт (E. Schmidt, 1907) предложил более элементарный метод обоснования результатов Д. Гильберта. Поэтому теорию интегральных уравнений с симметричном ядром часто называють также теорией Гильберта — Шмидта. Значительное ослабление ограничений, налагаемых в этой теории на заданные и искомые элементы уравнения, было достигнуто Т. Карлеманом (T. Carleman).

Пусть имеется интегральное уравнение 2-го рода с действительным симметричным ядром:

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds = f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{4.40}$$

При построении теории интегральных уравнений с симметричном ядром достаточно предполагать, что симметричное ядро измеримо на квадрате $[a,b] \times [a,b]$

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,s)|^2\,dx\,ds < \infty, \tag{4.41}$$

а свободный член f и искомая функция j — интегрируемые с квадратом функции на отрезке $[a,b]$ (интегралы понимаются в смысле Лебега).

Разработка теории интегральных уравнений с симметричным ядром начинается с изучения ряда общих свойств собственных чисел и собственных функций однородного симметричного интегрального уравнения:

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds = 0, \quad x \in [a,b]. \tag{4.42}$$

А именно, доказывается, что: уравнение (4.42) обладает по крайней мере одним собственным числом (когда почти всюду не равно нулю); собственные функции, принадлежащие различным собственным числам, ортогональны; собственные числа действительны; ввиду действительности ядра без ограничения общности можно предполагать, что собственные функции действительны; на любом конечном сегменте значений параметра λ может находиться лишь конечное множество собственных чисел.

Множество всех собственных чисел уравнения (4.42) называется *спектром* этого уравнения. *Спектр* — непустое конечное или счетное множество чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$; каждому числу m_n спектра соответствует конечное множество линейно независимых собственных функций. Собственные числа и собственные функции можно расположить в виде последовательностей:

$$\left.\begin{array}{lllll} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_m & \ldots \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_m & \ldots \end{array}\right\} \tag{4.43}$$

так, что абсолютные величины собственных чисел не убывают: $|\lambda_k| \leqslant |\lambda_{k+1}|$; каждое собственное число повторяется столько раз, сколько собственных функций ему соответствует. Поэтому каждому числу m_k в (4.43) соответствует лишь одна собственная функция. Можно считать, что система функций j_k ортонормирована. Последовательности (4.43) называются *системой собственных чисел и собственных функций симметричного ядра* K или уравнения (4.42). Нахождение этой системы равносильно полному решению однородного симметричного интегрального уравнения (4.42).

Сформулируем теорему, которая определяет вид решения интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t) y(t)\, dt + f(x) \tag{4.44}$$

с симметричным ядром, когда известны собственные значения и собственные функции ядра.

Теорема 4.1. *Пусть ядро $K(x,t)$ вещественно, непрерывно или слабополярно, симметрично.*

Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ — собственные функции ядра, приведенные к ортонормированному виду, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — соответствующие собственные значения. Тогда:

а) *Если λ не совпадает ни с одним собственным значением, то решение уравнения (4.44) существует, единственно и определяется выражением*

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_i \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} y_i(x), \tag{4.45}$$

где суммирование производится по всем собственным функциям ядра, и

$$f_i = \int_a^b f(x) y_i(x)\, dx, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{4.46}$$

Решение может быть представлено и с помощью резольвенты

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) f(t)\, dt, \tag{4.47}$$

где

$$R(x, t, \lambda) = \sum_i \frac{y_i(x) y_i(t)}{\lambda_i - \lambda} \tag{4.48}$$

— резольвента ядра $K(x,t)$.

б) *Если $\lambda = \lambda_n$, где λ_n — некоторое собственное значение ядра $K(x,t)$, и функция $f(x)$ ортогональна всем собственным функциям $y_{n_1}, \ldots, y_{n_p}$, соответствующим собственному значению λ_n ранга p, то решение уравнения существует, не является единственным и представимо в виде*

$$y(x) = f(x) + \lambda_n \sum_{i, i \neq n_1, \ldots, n_p} \frac{f_i y_i(x)}{\lambda_i - \lambda_n} + \sum_{i = n_1, \ldots, n_p} C_i y_i(x), \tag{4.49}$$

где C_i — произвольные коэффициенты.

в) *Если $\lambda = \lambda_n$, а $f(x)$ не ортогональна хотя бы одной собственной функции, соответствующей λ_n, то решение не существует.*

Замечание. Если собственные функции $y_i(x)$ не приведены к нормированному виду (т. е. условия $\int_a^b y_i^2(x)\, dx = 1$, $i = 1, 2, \ldots$, могут быть не выполнены), то коэффициенты f_i в (4.45) и (4.49) и резольвента $R(x,t,\lambda)$ в (4.47) определяются по следующим формулам:

$$\begin{gathered} f_i = \frac{1}{\|y_i\|^2}\int\limits_a^b f(x)y_i(x)\,dx, \\ R(x,t,\lambda) = \sum_i \frac{1}{\|y_i\|^2}\frac{y_i(x)y_i(t)}{\lambda_i-\lambda}, \end{gathered} \tag{4.50}$$

где $\|y_i\|^2 = \int_a^b y_i^2(x)\,dx$, $i = 1, 2, \ldots$

Формулы (4.45) и (4.49) называют *формулами Шмидта.*

Пример 4.6. Решить уравнение

$$y(x) - \lambda\int\limits_0^1 xty(t)\,dt = 2x.$$

Решение. Ядро уравнения $K(x,t) = xt$ является симметричным. Найдем его собственные значения и функции, рассматривая однородное уравнение

$$y(x) = \lambda\int\limits_0^1 xty(t)\,dt.$$

Пусть $C = \lambda\int_0^1 ty(t)\,dt$, тогда $y(x) = Cx$, и для нахождения собственных значений составляем уравнение

$$C = \lambda\int\limits_0^1 t\cdot Ct\,dt \quad\Leftrightarrow\quad C = \lambda C\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 = 3.$$

Соответствующая собственная функция $y_1(x) = Cx$. Выберем C таким, чтобы

$$\int\limits_0^1 y_1^2(x)\,dx = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{3}C^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad C = \sqrt{3}.$$

Следовательно, ядро $K(x,t) = xt$ имеет одно собственное значение $\lambda_1 = 3$, которому соответствует собственная функция

$y_1(x) = \sqrt{3}x$. Найдем для правой части уравнения $f(x) = 2x$ коэффициент f_1:

$$f_1 = \int_0^1 f(x)y_1(x)\,dx = \int_0^1 2x \cdot \sqrt{3}x\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Согласно теореме заданное уравнение:

1) при $\lambda \neq 3$ имеет единственное решение, определяемое по формуле Шмидта (4.45),

$$y(x) = 2x + \lambda \cdot \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}x}{3-\lambda} = 2x + \frac{2x\lambda}{3-\lambda}.$$

В частности, для $\lambda = 1$ решением уравнения будет функция $y(x) = 3x$.

2) при $\lambda = 3$ не имеет решений, так как $f_1 \neq 0$ (т. е. функция $f(x)$ не ортогональна собственной функции $y_1(x)$).

Пример 4.7. Решить уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(x+t)y(t)\,dt + \cos 3x.$$

Решение. Найдем собственные значения и собственные функции ядра $K(x,t) = \cos(x+t)$, которое является симметричным и вырожденным. Так как

$$K(x,t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t,$$

то ненулевое решение соответствующего однородного уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(x+t)y(t)\,dt$$

будем искать в виде

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{4.51}$$

Система для нахождения C_1 и C_2 имеет вид:

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \frac{\pi}{2}\lambda\right) = 0, \\ C_2\left(1 + \frac{\pi}{2}\lambda\right) = 0. \end{cases} \tag{4.52}$$

Очевидно, система (4.52) имеет ненулевое решение, если $\lambda = \pm\frac{2}{\pi}$. Получаем:

1) Если $\lambda = \frac{2}{\pi}$, то $C_2 = 0$ и C_1 — любая постоянная, отличная от 0. Собственному значению $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$ соответствует собственная функция $y_1(x) = \cos x$.

2) Если $\lambda = -\frac{2}{\pi}$, то $C_1 = 0$ и C_2 — любая постоянная, отличная от 0. Собственному значению $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$ соответствует собственная функция $y_2(x) = \sin x$.

Для построения решения заданного уравнения с помощью формул Шмидта, учитывая замечание к теореме, найдем:

$$\|y_1\|^2 = \int\limits_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad \|y_2\|^2 = \int\limits_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2};$$

$$f_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos 3x \cos x\,dx = 0, \quad f_2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos 3x \cos x\,dx = 0.$$

Тогда, согласно теореме:

1) для любых $\lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}$ заданное уравнение имеет единственное решение $y(x) = \cos 3x$;

2) для $\lambda = \frac{2}{\pi}$ уравнение имеет бесконечное множество решений $y(x) = \cos 3x + C\cos x$, где C — любая постоянная;

3) для $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ уравнение имеет бесконечное множество решений $y(x) = \cos 3x + C\sin x$, где C — любая постоянная.

4.3. Интегральные уравнения с полярным ядром. Примеры.

Определение 4.2. Ядро $K(x,t)$ вида

$$K(x,t) = \frac{L(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}, \tag{4.53}$$

где функция $L(x,t)$ непрерывна в $k_0 = [a,b]\times[a,b]$, $a < \alpha < 1$, называется *полярным* или *слабо полярным ядром*. Отметим, что непрерывная функция $L(x,t)$ ограничена в k_0:

$$|L(x,t)| \leqslant A \quad (\forall\,(x,t) \in k_0),$$

и поэтому для полярного ядра верна оценка

$$|K(x,t)| \leqslant \frac{A}{|x-t|^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{4.54}$$

Рассмотрим интегральное уравнение с полярным ядром (4.53):

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b \frac{L(x,t)}{|x-t|^\alpha}\,\varphi(t)\,dt, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{4.55}$$

где $f(x)$ — заданная, а $\varphi(x)$ — искомая функция на $[a,b]$.

Оказывается, для интегральных уравнений (4.55) верны теоремы Фредгольма.

Теорема 4.2 (Первая теорема Фредгольма). *Если λ не есть характеристическое значение, то интегральное уравнение (4.55) при любой правой части $f(x)$ имеет единственное решение.*

Теорема 4.3 (Вторая теорема Фредгольма). *Если λ есть характеристическое значение, то однородное интегральное уравнение*

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b \frac{L(x,t)}{|x-t|^\alpha}\varphi(t)\,dt \tag{4.56}$$

и смежное уравнение

$$\psi(x) = \lambda \int\limits_a^b \frac{L(t,x)}{|t-x|^\alpha}\psi(t)\,dt \tag{4.57}$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений, т. е. ранг совпадающих характеристических значений уравнений (4.56) и (4.57) конечен.

Теорема 4.4 (Третья теорема Фредгольма). *Если λ — характеристическое значение, то для разрешимости неоднородного уравнения (4.55) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_a^b f(x)\psi_j(x)\,dx = 0, \quad j = 1,\ldots,m, \tag{4.58}$$

где $\psi_1(x),\ldots,\psi_m(x)$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения (4.57). Если условия (4.58) выполнены, то интегральное уравнение (4.55) имеет бесконечное множество решений: общее решение уравнения (4.55) есть сумма частного решения неоднородного уравнения (4.55) и общего решения соответствующего однородного уравнения (4.56).

Идея доказательства теорем 4.2–4.4 основана на исследовании повторных ядер, рассмотрении непрерывного ядра

$$K_\gamma(x,t) = \begin{Bmatrix} K(x,t), & |x-t| > \gamma, \\ \frac{L(x,t)}{|x-t|^\alpha}, & |x-t| < \gamma,\ 0 < \gamma \leqslant \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \end{Bmatrix}$$

и доказательстве теорем 4.2–4.4 для интегральных уравнений

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K_\gamma(x,t)\varphi(t)\,dt,$$

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K_\gamma(x,t)\varphi(t)\,dt,$$

$$\psi(x) = \lambda \int\limits_a^b K_\gamma(x,t)\psi(t)\,dt,$$

из которых теоремы 4.2–4.4 получаются предельным переходом при $\gamma \to 0$ к уравнениям (4.55), (4.56) и (4.57).

Определение 4.3. Интегральные уравнения с полярными ядрами называют *интегральными уравнениями типа Фредгольма.*

Рассмотрим вопрос построения резольвенты для полярного ядра.

Ранее для непрерывного ядра $K(x,t)$ на k_0 резольвента определялась формулой

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,t)\lambda^n, \tag{4.59}$$

где

$$K_1(x,t) = K(x,t), \quad K_{n+1}(x,t) = \int\limits_a^b K_n(x,\tau)K(\tau,t)\,d\tau, \quad n = 1,2,\ldots,$$

при условии

$$|\lambda| < \frac{1}{p} = \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt \right)^{-\frac{1}{2}},$$

и было показано, что $R(x,t;\lambda)$ может быть распространено на значения $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathscr{D}(\lambda) \neq 0$, соотношением

$$R(x,t;\lambda) = \frac{\mathscr{D}(x,t;\lambda)}{\mathscr{D}(\lambda)}, \tag{4.60}$$

где

$$\mathscr{D}(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n,$$

$$d_n = \int\limits_a^b \dots \int\limits_a^b K \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n \\ t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} dt_1\, dt_2 \dots dt_n,$$

$$\mathscr{D}(x,t;\lambda) = K(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!}\, d_n(x,t),$$

$$d_n(x,t) = \int\limits_a^b \dots \int\limits_a^b K \begin{pmatrix} x, t_1, \dots, t_n \\ t, t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} dt_1\, dt_2 \dots dt_n.$$

При этом $\mathscr{D}(\lambda)$ может быть выражено в терминах следов A_n:

$$A_1 = \int\limits_a^b K(t,t)\, dt, \quad A_n = \int\limits_a^b K_n(t,t)\, dt, \quad n = 2, 3, \dots, \tag{4.61}$$

формулой

$$\mathscr{D}(\lambda) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\lambda^n}{n} \right],$$

и тогда

$$\mathscr{D}(x,t;\lambda) = \big[K(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \dots \big]\, \mathscr{D}(\lambda). \tag{4.62}$$

В нашем случае полярного ядра $K(t,t)$ не имеет смысла, и мы не имеем первого следа A_1 ядра $K(x,t)$.

Идея построения резольвенты для полярного ядра состоит в сведении к непрерывному ядру с помощью повторных ядер. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть*

$$(K_1u)(x) = \int\limits_a^b \frac{L_1(x,t)}{|x-t|^\alpha} u(t)\,dt, \quad (K_2v)(x) = \int\limits_a^b \frac{L_2(x,t)}{|x-t|^\beta} v(t)\,dt,$$

где функции $L_1(x,t)$ *и* $L_2(x,t)$ *непрерывны в* k_0, $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$. *Тогда произведение* K_1K_2 *операторов* K_1 *и* K_2 *есть оператор*

$$(Mv)(x) = \int\limits_a^b M(x,t)v(t)\,dt, \quad M(x,t) = \int\limits_a^b \frac{L_2(x,\tau)L_1(\tau,t)}{|x-\tau|^\beta|\tau-t|^\alpha}\,d\tau,$$

и при этом

$$M(x,t) = \frac{L_3(x,t)}{|x-t|^{\alpha+\beta-1}}, \quad \textit{если} \quad \alpha+\beta>1,$$

$$M(x,t) = L_4(x,t), \quad \textit{если} \quad \alpha+\beta<1,$$

где $L_3(x,t)$ *и* $L_4(x,t)$ *— непрерывные функции в* k_0.

Рассмотрим интегральное уравнение (4.55) с $0<\alpha<\frac{1}{2}$. Тогда все повторные ядра, начиная со второго

$$K_2(x,t) = \int\limits_a^b K(x,\tau)K(\tau,t)\,d\tau = \int\limits_a^b \frac{L(x,\tau)}{|x-\tau|^\alpha}\,\frac{L(\tau,t)}{|\tau-t|^\alpha}\,d\tau,$$

по лемме (4.53) непрерывны, и поэтому существуют следы

$$A_m = \int\limits_a^b K_m(t,t)\,dt, \quad m=2,3,\ldots \tag{4.63}$$

Умножим числитель и знаменатель дроби в (4.60) на $e^{A_1\lambda}$

$$\mathscr{D}(x,t;\lambda)e^{A_1\lambda} = \mathscr{D}_2(x,t;\lambda), \quad \mathscr{D}(\lambda)e^{A_1\lambda} = \mathscr{D}_2(\lambda).$$

Тогда можем написать тождество, аналогичное (4.62):

$$\mathscr{D}_2(x,t;\lambda) = \left[K(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2K_3(x,t) + \ldots\right]\mathscr{D}_2(\lambda). \tag{4.64}$$

Оно получается формально из (4.62), если выразить $\mathscr{D}(\lambda)$ через следы и в (4.64) положить $A_1=0$.

Тогда дробь
$$R_2(x,t;\lambda) = \frac{\mathscr{D}_2(x,t;\lambda)}{\mathscr{D}_2(\lambda)} \tag{4.65}$$
дает аналитическое продолжение выражения, стоящего в квадратных скобках формулы (4.64) на всю плоскость λ.

В рассматриваемом случае $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ можно показать, что
$$\mathscr{D}_2(\lambda) = \exp\left[-\sum_{k=2}^{\infty} A_k \frac{\lambda^k}{k}\right]$$
есть целая функция, и что решение уравнения (4.55) можно представить в виде
$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R_2(x,t;\lambda) f(t)\, dt, \tag{4.66}$$
при этом нули $\mathscr{D}_2(\lambda)$ есть полюсы $R_2(x,t;\lambda)$. Отметим еще, что все члены в $\mathscr{D}(\lambda)$ и $\mathscr{D}(x,t;\lambda)$, содержащие A_1, получаются только из элементов главной диагонали определителей, входящих в формулы для d_n и $d_n(x,t)$, и что можно получить $\mathscr{D}_2(\lambda)$ и $\mathscr{D}_2(x,t;\lambda)$ по упомянутым выше формулам, полагая $K(x,x) \equiv 0$.

Пусть теперь $\alpha > 0$ любое. Тогда по лемме (4.53) для повторного ядра $K_2(x,t)$ порядок особенности будет $2\alpha - 1$, для ядра $K_3(x,t)-$ $(2\alpha - 1) + (\alpha - 1) = 3\alpha - 2$, для повторного ядра $K_m(x,t) - m\alpha - (m-1)$. Пусть $m-$ такое, что $(m-1)\alpha - (m-2) < 0$, а $m\alpha - (m-1) > 0$. Тогда при $n \geqslant m$ повторные ядра $K_n(x,t)$ непрерывны, и резольвенту можно представить в виде
$$R_{m+1}(x,t;\lambda) = \frac{\mathscr{D}_{m+1}(x,t;\lambda)}{\mathscr{D}_{m+1}(\lambda)}, \tag{4.67}$$
где
$$\mathscr{D}_{m+1}(\lambda) = \exp\left[-\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \frac{\lambda^n}{n}\right], \tag{4.68}$$
т. е. $\mathscr{D}_{m+1}$ получается из $\mathscr{D}_\lambda$ при $A_1 = A_2 = \ldots = A_m = 0$, а
$$\mathscr{D}_{m+1}(x,t;\lambda) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,t)\lambda^n\right] \mathscr{D}_{m+1}(\lambda). \tag{4.69}$$

Тогда единственное решение уравнения (4.55) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_{m+1}(x, t; \lambda) f(t)\, dt. \tag{4.70}$$

Аналогичные результаты можно получить для интегрального уравнения с полярным ядром в n-мерном пространстве

$$\varphi(x) = f(M) + \lambda \int_B \frac{L(M, N)}{r^\alpha} \varphi(N)\, d\omega_N, \tag{4.71}$$

где $r = d(M, N)$ — расстояние между точками $M, N \in B$, $0 < \alpha < n$. Доказательство основано на аналоге леммы (4.53) для $\mathbb{R}^n$.

Лемма 4.2. *Пусть*

$$(K_1 u)(M) = \int_B \frac{L_1(M, N)}{r_1^\alpha} u(N)\, d\omega_N,$$

$$(K_2 v)(M) = \int_B \frac{L_2(M, N)}{r_2^\beta} v(N)\, d\omega_N,$$

где функции $L_1(M, N)$ *и* $L_2(M, N)$ *непрерывны в* $\overline{B}$, *а* $0 < \alpha < n$, $0 < \beta < n$.

Тогда произведение $K_1 K_2$ *операторов* K_1 *и* K_2 *есть оператор*

$$(K_1 K_2 v)(M) = \int_B P(M, N) v(N)\, d\omega_N,$$

$$P(M, N) = \int_B \frac{L_1(M, Q)}{r_1^\alpha} \frac{L_2(Q, N)}{r_2^\beta}\, d\omega_N,$$

и

$$P(M, N) = \frac{L_3(M, N)}{r^{\alpha+\beta-n}} \quad \textit{при} \quad \alpha + \beta > n,$$

$$P(M, N) = L_4(M, N) \quad \textit{при} \quad \alpha + \beta < n,$$

где $L_3(M, N)$ *и* $L_4(M, N)$ — *непрерывные функции в* B.

Литература

1. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, Т. 4, ч. 1.—М.: Наука, 1974.—336 с.
2. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960.—300 с.
3. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями, 2016.—192 с.

Дурдиев Дурдимурод Каландарович
Бухарское отделение института Математики АН РУз,
УЗБЕКИСТАН, 200117, Бухара, ул. М. Икбола, 11;
Бухарский государственный университет,
УЗБЕКИСТАН, 200117, Бухара, ул. М. Икбола, 11
E-mail: d.durdiev@mathinst.uz, durdimurod@inbox.ru

ELEMENTS OF THE THEORY OF INTEGRAL EQUATIONS

D. K. Durdiev

The course of lectures “Elements of the theory of integral equations” contains the basic concepts and theorems of the theory of Fredholm and Volterra integral equations, integral equations with weak singularities, with symmetric, polar kernels. And also it sets out the concept of fractional integration and differentiation, eigenvalues and eigenfunctions of the Fredholm integral operator.

Key words: Fredholm and Volterra integral equations, Abel equation, fractional integration and differentiation, resolvent, Laplace transform, symmetric kernel, polar kernel, eigenvalue, eigenfunction.

УДК 517.928

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Б. Левенштам

В настоящем курсе изложен ряд начальных понятий теории асимптотических методов, которую также называют теорией возмущений, разобраны некоторые приемы построения асимптотических разложений интегралов, зависящих от асимптотического параметра (в частности, метод Лапласа и метод стационарной фазы), а также рассмотрены обыкновенные дифференциальные уравнения, зависящие от асимптотического параметра, и показано, как строить асимптотические разложения их решений в случае регулярно возмущенных задач.

Ключевые слова: теория возмущений, асимптотические методы, метод Лапласа, метод стационарной фазы, асимптотическое интегрирование регулярно возмущенных задач.

Введение

Дифференциальные уравнения к нам пришли от Ньютона. Огромное значение этого его изобретения связано с тем, что дифференциальные уравнения служат математическими моделями многих процессов естествознания. На начальном этапе развития теории дифференциальных уравнений основные усилия математиков были нацелены на поиски их точных решений. Однако позже выяснилось, что нахождение формул точных решений, выраженных через данные исходного уравнения, возможно лишь в исключительно редких случаях, поэтому все более актуальным становился вопрос о приближенных методах решения дифференциальных уравнений. Приближенные методы подразделяются на два класса: численные и асимптотические. Здесь речь пойдет об асимптотических методах. В данном миникурсе лекций изложен ряд начальных понятий теории асимтотических методов, которую также называют теорией возмущений, разобраны некоторые приемы построения асимптотических разложений интегралов, зависящих от асимптотического параметра, а также рассмотрены обыкновенные дифференциальные уравнения, зависящие от асимптотического параметра, и показано, как строить асимптотические разложения их решений.

При написании этого пособия мы использовали книги [1–5] и др.

Лекция 1. Основные понятия и некоторые примеры

В первой лекции будут изложены важные начальные понятия теории возмущений (асимптотических методов) и приведены некоторые примеры асимптотических задач.

1.1. Асимптотические последовательности. Вначале мы поговорим о теории возмущений. Математики постоянно стремятся расширить круг задач, которые они могут решить (хотя бы приближенно)[1] и исследовать, а потому пытаются расширить набор методов эффективного приближенного решения и исследования различных задач. Одно из важнейших математических направлений, в котором представлены методы такого рода, носит название: теория возмущений или асимптотические методы. Основная идея теории возмущений состоит в следующем: если мы знаем как решается и/или исследуется некоторая задача — назовем ее невозмущенной, то естественно попытаться разработать методы эффективного приближенного[2] решения и/или исследования в каком-то смысле близких — возмущенных задач. Продемонстрируем эту идею на простейших примерах.

Пример 1.1. Первый пример относится к системам линейных алгебраических уравнений (СЛУ). Рассмотрим СЛУ

$$Ax = b \tag{1.1}$$

с вещественной квадратной матрицей A порядка n и вектором $b \in \mathbb{R}^n$. Если $|A| \neq 0$, то СЛУ (1.1) однозначно разрешима ($x = A^{-1}b$), и ее решение эффективно вычисляется, скажем, методом Гаусса. Рассмотрим теперь множество близких систем вида

$$(A + \varepsilon B)y = b, \tag{1.2}$$

[1] Найти точное решение задачи (скажем, алгебраического или дифференциального уравнения) удается, как известно, в исключительно редких случаях.

[2] Приближенные методы решения задач — прежде всего, здесь мы имеем ввиду дифференциальные уравнения — делятся на два класса: численные и асимптотические. В данной работе речь идет об асимптотических методах.

где B — вещественная квадратная матрица порядка n, а ε — малый вещественный параметр ($|\varepsilon| \ll 1$). Каждая система (1.2) — возмущенная по отношению к невозмущенной системе (1.1). Из однозначной разрешимости СЛУ (1.1) (что эквивалентно обратимости матрицы A) следует однозначная разрешимость СЛУ (1.2), причем ее решение вещественно и имеет вид:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (A^{-1}B)^k A^{-1} b. \tag{1.3}$$

Отсюда легко следует, что векторы (частичные суммы сходящегося ряда (1.3))

$$y^n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k (A^{-1}B)^k A^{-1} b, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1.4}$$

являются приближенными решениями задачи (1.2). Тем самым равенства (1.3), (1.4) описывают простейшую процедуру (метод) эффективного приближенного решения возмущенной задачи (1.2).

Пример 1.2. В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$x^5 + \varepsilon x^4 - 1 = 0, \quad |\varepsilon| \ll 1. \tag{1.5}$$

Это возмущенная задача. Полагая в (1.5) $\varepsilon = 0$ придем к невозмущенной задаче

$$y^5 - 1 = 0. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) имеет корень $y_0 = 1$[3]. Попытаемся найти близкий к 1 корень x_ε уравнения (1.5). Положим

$$x_\varepsilon = 1 + a_1\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.7}$$

Подставив (1.7) в (1.5), получим

$$\bigl(1 + a_1\varepsilon + O(\varepsilon^2)\bigr)^5 + \varepsilon\bigl(1 + a_1\varepsilon + O(\varepsilon^2)\bigr)^4 - 1 = 0. \tag{1.8}$$

раскрывая в (1.8) скобки, группируя слагаемые и приравнивая в полученном равенстве коэффициенты при одинаковых степенях ε, найдем:

$$\varepsilon^0\colon 1 - 1 = 0, \quad \varepsilon^1\colon 5a_1 + 1 = 0,$$

[3]Все рассуждения в этом примере справедливы для любого из пяти корней (1.17).

т. е. $a_1 = -\frac{1}{5}$. Отсюда согласно (1.7)

$$x_\varepsilon \approx 1 - \frac{1}{5}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.9}$$

Итак, используя метод (1.7), мы приближенно решили возмущенную задачу (1.5). Формулу (1.9), полученную формально, нетрудно обосновать.

Результат второго примера справедлив и в следующей более общей ситуации. Рассмотрим возмущенное уравнение произвольного порядка n

$$x^n + P_1(\varepsilon)x^{n-1} + \ldots + P_n(\varepsilon) = 0, \quad |\varepsilon| \ll 1, \tag{1.10}$$

где $P_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — произвольные полиномы от ε, а также невозмущенное уравнение

$$y^n + P_1(0)y^{n-1} + \ldots + P_n(0) = 0. \tag{1.11}$$

Пусть y_0 — простой корень уравнения (1.11). Тогда уравнение (1.10) в некоторой окрестности y_0 имеет единственное решение x_ε, причем для любого $k \in \mathbb{N}$

$$x_\varepsilon = y_0 + \varepsilon y_1 + \ldots + \varepsilon^k y_k + O(\varepsilon^{k+1}), \quad \varepsilon \to 0,$$

где коэффициенты $y_1, \ldots, y_k$ эффективно находятся.

Определим теперь понятие теории возмущений, которое относится к математическим задачам любой природы.

Теория возмущений представляет собой набор аналитических (не численных) методов приближенного решения и качественного исследования задач — их называют возмущенными — близких в определенном смысле к некоторым эффективно решаемым (аналитически или численно) и уже исследованным невозмущенным задачам. При этом решается вопрос о близости решений возмущенной и невозмущенной задач.

Указанные методы теории возмущений часто называют асимптотическими, а исследование или решение возмущенной задачи с помощью асимптотических методов — асимптотическим анализом. Решение дифференциального уравнения с помощью асимптотических методов называют асимптотическим интегрированием этого уравнения. Одним из признаков возмущенной задачи является наличие в ней малого параметра ε, как в системе (1.2) или уравнениях (1.5), (1.10), тогда невозмущенная задача часто получается из возмущенной при $\varepsilon = 0$ (см. (1.1), (1.6), (1.11)).

Мы начали параграф с двух тривиальных примеров, которые решаются с помощью простейших методов теории возмущений. Отметим теперь некоторые классические задачи и методы теории возмущений.

Пример 1.3 (Задача трех тел). Опишем эту задачу для тел: Луна, Земля, Солнце. Задача состоит в приближенном вычислении орбиты Земли при вращении ее вокруг Солнца с учетом воздействия (притяжения) на Землю Луны. В ней роль малого параметра обычно играет отношение масс Луны и Земли.

Пример 1.4 (Метод Крылова — Боголюбова). Так называют известный метод асимптотического интегрирования уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

($\omega = \mathrm{const}$, f — гладкая функция, ε — малый параметр), описывающего нелинейные колебания системы с одной степенью свободы.

Пример 1.5 (Метод усреднения). Это известный метод асимптотического интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром ε в так называемой стандартной форме (по терминалогии одного из создателей этого метода — Н. Н. Боголюбова):

$$\frac{dx_s}{dt} = \varepsilon f_s(t, x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Отметим, что эти задачи содержательны лишь тогда, когда рассматриваются на больших временных участках: $t = O\big(\varepsilon^{-1}\big)$, $\varepsilon \to 0$ (так они и рассматриваются в соответствующих теоремах). При этом невозмущенные задачи получаются из возмущенных не в результате формальной замены $\varepsilon = 0$, а более сложным образом.

Пример 1.6 (Теория возмущений в квантовой механике). Эта теория формулируется как задача на собственные значения для линейного самосопряженного оператора вида

$$H = H_0 + \varepsilon H_1.$$

Здесь ε — малый параметр и известно решение задачи на собственные значения для невозмущенного оператора H_0, т. е. известна полная система его собственных функций $\varphi_n^{(0)}$ и соответствующих им собственных значений $\lambda_n^{(0)}$, $n = 1, 2, \ldots$ Возмущенная задача состоит в нахождении собственных значений и собственных функций оператора H.

Выше мы изложили понятие теории возмущений, опирающееся на понятия возмущенной задачи и асимптотических методов, в довольно общем виде. Однако часто соответствующие понятия теории возмущений, возмущенной задачи и асимптотических методов излагаются в более конкретной форме. Именно, возмущенной задачей называют любую задачу, зависящую от параметра ε (скалярного или векторного), который находится в некоторой малой окрестности фиксированного значения $\varepsilon = \varepsilon_0$. Теорией возмущений называют набор аналитических методов, позволяющих находить объекты (например, функции или вектор–функции), аппроксимирующие решение возмущенной задачи с точностью до $o\big(|\varepsilon - \varepsilon_0|^k\big)$, $\varepsilon \to \varepsilon_0$, при конкретном или произвольном неотрицательном показателе k. При этом к методам теории возмущений относят также методы качественного исследования (например, исследование устойчивости решений) указанных возмущенных задач. Отметим, что при конечном значении ε_0 замена $\mu = \varepsilon - \varepsilon_0$ позволяет от зависящей от ε возмущенной задачи перейти к задаче с малым параметром μ. Если же $\varepsilon_0 = \infty$ — пусть для простоты параметр ε скалярный, — то возмущенная задача зависит от большого параметра. Отметим еще, что невозмущенные задачи нередко называют вырожденными.

Поговорим теперь об очень важной в анализе O, o-символике. В асимптотическом анализе широко используются символы O, o и $\sim$, введенные Бахманом и Ландау. Дадим определения этих символов и приведем некоторые правила работы с ними.

Пусть A — какое-либо множество числовой прямой или комплексной плоскости, a — некоторая предельная точка этого множества, которая может ему и не принадлежать, и, в частности, может быть $a = \infty$. Далее часто под A можно понимать так называемую проколотую окрестность точки a, т. е. некоторую окрестность этой точки, из которой сама точка a исключена (говорят еще: «окрестность с выколотой точкой a»).

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — функции, определенные на A и принимающие вещественные или комплексные значения.

Формула

$$\varphi = O(\psi), \quad x \to a \tag{1.12}$$

означает, что существуют такие окрестность U точки a и константа c, что при всех $x \in U \cap A$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x)| \leqslant c|\psi(x)|. \tag{1.13}$$

При выполнении соотношения (1.13) для $x \in U$ вместо (1.12) пишут

$$\varphi = O(\psi), \quad x \in U.$$

Формула

$$\varphi = o(\psi), \quad x \to a \tag{1.14}$$

означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U_ε точки a, что при всех $x \in U_\varepsilon \cap A$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x)| \leqslant \varepsilon|\psi(x)|. \tag{1.15}$$

Легко видеть, что в том случае, когда для некоторой окрестности U_0 точки a

$$\psi(x) \neq 0, \quad x \in U_0 \cap A, \tag{1.16}$$

соотношение (1.12) эквивалентно условию ограниченности функции $\left|\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right|$ при $x \to a$, а соотношение (1.15) — условию

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

Если при условии (1.15) справедливо предельное равенство

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1, \tag{1.17}$$

то говорят, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ эквивалентны при $x \to a$ и пишут

$$\varphi \sim \psi, \quad x \to a. \tag{1.18}$$

Заметим, что соотношения (1.14) и (1.15) взаимно исключают друг друга. Каждое из них является частным случаем соотношения (1.12), причем более тонким, нежели (1.12).

Соотношения (1.12), (1.14) и (1.18) называют соотношениями порядка. Они наиболее часто используются в тех случаях, когда функции φ и ψ являются бесконечно малыми или бесконечно большими при $x \to a$. При выполнении соотношения (1.14) в первом случае говорят, что $\varphi(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\psi(x)$, а во втором — что $\psi(x)$ есть бесконечно большая более высокого порядка, чем $\varphi(x)$. Соотношения порядка (1.12), (1.14), (1.18) называют также асимптотическими равенствами или асимптотическими формулами, а иногда — асимптотическими оценками.

Приведем несколько примеров соотношений порядка в случае вещественных функций ($\varepsilon, x \in R$) ($a = 0$, $a = \infty$):

$$\sin\varepsilon = O(\varepsilon), \quad \sin\varepsilon = o(1), \quad \operatorname{th}\varepsilon = O(\varepsilon), \quad \operatorname{ctg}\varepsilon = o(\varepsilon^{-3/2}), \quad \varepsilon \to 0,$$

$$\cos x = o(x), \quad 1 - e^{1/x} \sim -\frac{1}{x}, \quad x \to \infty.$$

Обозначения $o(\psi)$ и $O(\psi)$ часто используют для обозначения классов функций ψ со свойствами (1.12) и (1.14) соответственно, или же для обозначения произвольных функций из этих классов. Например, асимптотическая формула

$$o(\psi) = O(\psi), \quad x \to a \tag{1.19}$$

означает, что любая функция φ из класса $o(\psi)$ (т. е. выполнено (1.14)) принадлежит и классу $O(\psi)$ (т. е. выполнено (1.13)). Асимптотическая формула

$$o(\psi) + o(\psi) = o(\psi), \quad x \to a,$$

означает, что сумма $\varphi_1 + \varphi_2$ функций φ_1 и φ_2 из класса $o(\psi)$ принадлежит тому же классу.

Теперь речь пойдет собственно об асимптотических последовательностях. Пусть A, x, a имеют тот же смысл, что и в п. 2.3. Последовательность заданных на множестве A функций φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, называют асимптотической, или калибровочной последовательностью при $x \to a$ в A, если $\varphi_{n+1} = o(\varphi_n)$ при $x \to a$, $n = 1, 2, \ldots$

В дальнейшем, для простоты, будем считать, что каждая функция φ_n асимптотической последовательности при всех $x \in A$ из некоторой окрестности u_0 точки a, исключая саму эту точку, отлична от нуля. Таким образом, в дальнейшем, последовательность φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, является асимптотической тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Приведем несколько примеров асимптотических последовательностей, ограничившись рассмотрением вещественных функций:

$$\{(x-a)^n\},\ x \to a; \quad \{x^{-n}\},\ x \to \infty;$$

$$\{x^{-\lambda_n}\},\ x \to \infty \quad \text{и} \quad \{x^n e^{-\lambda_n}\},\ x \to \infty,$$

где $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ для всех натуральных n, $\{(\ln\varepsilon)^{-n}\}$, $\varepsilon \to 0$; $\{(\sin\varepsilon)^n\}$, $\varepsilon \to 0$; $\{(\operatorname{ctg}\varepsilon)^{-n}\}$, $\varepsilon \to 0$.

Здесь и ниже через $\{\varphi_n\}$ мы обозначаем последовательность функций φ_n, $n = 1, 2, \ldots$

Если мы имеем асимптотическую последовательность, то с помощью свойств o, O-символов, можем получать новые асимптотические последовательности. Приведем некоторые простые результаты такого рода.

Теорема 1.1. *Справедливы следующие свойства:*

1) *Если $\{\varphi_n\}$ — асимптотическая последовательность при $x \to a$ в A, то любая ее подпоследовательность также является таковой.*

2) *Если $\{\varphi_n\}$ — асимптотическая последовательность при $x \to a$ в A и $\alpha > 0$, то $\{|\varphi_n|^\alpha\}$ также является асимптотической последовательностью при $x \to a$ в A.*

3) *Если $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ — асимптотические последовательности при $x \to a$ в A, то и $\{\varphi_n\psi_n\}$ — асимптотическая последовательность при $x \to a$ в A.*

4) *Пусть $\{\varphi_n\}$ — асимптотическая последовательность при $x \to a$ в A, и $\alpha_{n,i}$, $n = 1, 2, \ldots, k \in \mathbb{N}$ — положительные числа такие, что будет выполняться неравенство $\alpha_{n+1,i} \leqslant \alpha_{n,i}$; и пусть $\psi_n = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{n,i}|\varphi_{n+i}|$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда последовательность $\{\psi_n\}$ является асимптотической при $x \to a$ в A.*

Две асимптотические последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ называются эквивалентными при $x \to a$, если $\varphi_n = O(\psi_n)$, $\psi_n = O(\varphi_n)$, $x \to a$.

Если одна из эквивалентных последовательностей асимптотическая, то и другая — асимптотическая. Это свойство вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$\psi_{n+1} = O(\varphi_{n+1}) = O\left(o(\varphi_n)\right) = O\left(o\left(O(\psi_n)\right)\right) = o(\psi_n), \quad x \to a.$$

Если для асимптотической последовательности $\{\varphi_n\}$ соотношение $\varphi_{n+1} = o(\varphi_n)$, $x \to a$ выполнено равномерно по n, то $\{\varphi_n\}$ называют асимптотической последовательностью, равномерной по n.

Если φ_n зависят от параметров и соотношение $\varphi_{n+1} = o(\varphi_n)$, $x \to a$ выполнено равномерно по параметрам, то $\{\varphi_n\}$ называют асимптотической последовательностью, равномерной по параметрам.

1.2. Асимптотические разложения. Понятия регулярных и сингулярных возмущений. Пусть $\{\varphi_n\}$ — асимптотическая последовательность при $x \to a$ в A, а $f(x)$ — функция, заданная в A. Формальный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{1.20}$$

где a_n — числа, называется асимптотическим разложением функции $f(x)$ по асимптотической последовательности $\{\varphi_n\}$ при $x \to a$, если для любого натурального N

$$f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x) = o(\varphi_N), \quad x \to a. \tag{1.21}$$

В этом случае пишут

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad x \to a, \tag{1.22}$$

и говорят, что для функции $f(x)$ имеет место асимптотическое разложение (1.22). Константы a_n называются коэффициентами асимптотического разложения.

Формальный ряд (1.20) при выполнении условий (1.21) называют асимптотическим рядом, асимптотическим разложением и асимптотикой функции $f(x)$.

Асимптотический ряд может сходиться (в обычном смысле), а может и расходиться. Приведем два соответствующих примера.

Пример 1.7. Рассмотрим асимптотическое разложение

$$(1+\varepsilon)^{-1} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n, \quad \varepsilon \to 0.$$

Тот факт, что здесь мы имеем асимптотическое разложение, следует из формулы остаточного члена ряда Тейлора, а при положительных ε также из теоремы об остатке ряда Лейбница. Данный асимптотический ряд, очевидно, сходится при $|\varepsilon| < 1$.

Пример 1.8. Рассмотрим интеграл

$$f(x) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt, \quad 0 < x < 1.$$

Многократно интегрируя по частям, получим

$$f(x) = 1 - x\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+xt)^2}\,dt = 1 - x + 2x^2\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+xt)^3}\,dt = \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n n!\,x^n + (-1)^{N+1}(N+1)!\,x^{N+1}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+xt)^{N+2}}\,dt.$$

Легко видеть, что последний интеграл есть $O(1)$ при $x \to 0$, так что

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!\,x^n, \quad x \to 0. \tag{1.23}$$

При этом ряд (1.23), очевидно,расходится при всех ненулевых x. Пусть функция $f(x)$ зависит от каких-либо параметров и при всех значениях этих параметров справедливо асимптотическое разложение (1.22). Если при этом соотношение порядка (1.21) является равномерным по параметрам, то и разложение (1.22) называют равномерным по этим параметрам.

Теорема 1.2. *Если $\{\varphi_n\}$ — асимптотическая последовательность при $x \to a$ в A и для функции $f(x)$, заданной в A имеет место асимптотическое разложение* (1.22), *то коэффициенты этого разложения определяются формулой*

$$a_N = \lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x) - \sum\limits_{n=1}^{N-1} a_n\varphi_n(x)}{\varphi_N(x)}\right\}, \quad N = 1, 2, \ldots \tag{1.24}$$

$\lhd$ Соотношение (1.22) означает справедливость (1.21). Следовательно, имеет место равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - \sum\limits_{n=1}^{N-1} a_n\varphi_n(x) - a_N\varphi_N(x)}{\varphi_N(x)} = 0, \tag{1.25}$$

из которого вытекает (1.24). $\rhd$

Выше мы установили, что для заданной асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, $x \to a$, асимптотическое разложение (1.22) данной функции $f(x)$ однозначно определено. С другой стороны, одна и та же функция $f(x)$ может разлагаться в асимптотические ряды по различным асимптотическим последовательностям. При этом данные последовательности могут не быть эквивалентными.

Например, справедливы асимптотические разложения

$$(1+x)^{-1} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \to 0,$$

$$(1+x)^{-1} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (1-x) x^{2n}, \quad x \to 0,$$

$$(1+x)^{-1} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2 - x + 1) x^{3n}, \quad x \to 0.$$

Здесь функция $f(x) = (1+x)^{-1}$ разложена по трем асимптотическим последовательностям: $\{x^n\}$, $\{(x-1)x^{2n}\}$ и $\{(x^2-x+1)x^{3n}\}$, которые не являются эквивалентными. Эти три асимптотических ряда сходятся при $|x| < 1$. Иногда же бывает и так, что некоторые асимптотические разложения функции сходятся, а некоторые — расходятся. Отметим еще один аспект во взаимоотношении функций и их асимптотических разложений.

Асимптотический ряд (даже сходящийся!) свою сумму (функцию) определяет, вообще говоря, неоднозначно. Например, функции

$$(1+x)^{-1}, \quad \frac{1+e^{-2x}}{1+x}, \quad \frac{1}{1-e^{-\sqrt{x}}+x}$$

при $x \to \infty$ имеют одно и то же асимптотическое разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{-n}.$$

Задачи теории возмущений разбивают на два класса — регулярно возмущенные и сингулярно возмущенные задачи. К регулярно возмущенным задачам относят те задачи, для которых решения возмущенной и невозмущенной задач асимптотически близки. Последнее означает, что норма разности этих решений сколь угодно мала при достаточно малых ε. Сингулярно возмущенными называют задачи, которые не являются регулярно возмущенными. Приведенные понятия можно элементарно проиллюстрировать на квадратном уравнении, коэффициенты которого зависят от малого параметра ε. С помощью известной формулы, выраждающей корни квадратного уравнения через дискриминант, устанавливается, что в тех случаях, когда коэффициент при x или свободный член мал при малых ε (например, равен ε), а старший коэффициент от ε не зависит, то уравнение представляет собой регулярно возмущенную задачу; если же наоборот — старший коэффициент мал (например, равен ε), то имеем сингулярно возмущенную задачу. Только что введенные понятия можно проиллюстрировать и на дифференциальных уравнениях. В Лекции 3 мы подробно рассмотрим класс регулярно возмущенных задач Коши, имеющих вид (3.1)–(3.2) (см. ниже). Если же левую часть (производную) домножить на ε, то полученная задача Коши будет, вообще говоря, сингулярно возмущенной. Действительно, теперь при $\varepsilon = 0$ уравнение уже не будет дифференциальным, а потому его решение не обязано удовлетворять начальному условию (3.2). Значит об асимптотической близости решений возмущенной и невозмущенной задач даже в начальный момент времени говорить не приходится.

Пример 1.9. Рассмотрим простешую задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x, \quad x(0) = 1,$$

где ε — малый параметр. Положив в ней $\varepsilon = 0$, получим невозмущенную задачу

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad x(0) = 1.$$

Выписав решения этих задач, мы видим, что их разность стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ равномерно относительно t. Так что данная задача Коши регулярно возмущенная.

Пример 1.10. Рассмотрим теперь задачу Коши

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = x, \quad x(0) = 1,$$

где ε — малый параметр. Положив в ней $\varepsilon = 0$, получим невозмущенную задачу

$$x = 0.$$

Разность решений возмущенной и невозмущенной задач не является асимптотически малой величиной — она при всех t не менее единицы. Значит рассматриваемая в этом примере задача Коши является сингулярно возмущенной.

Лекция 2. Асимптотические разложения интегралов

В данной лекции мы рассмотрим некоторые приемы построения асимптотик интегралов, зависящих от параметров. Этот вопрос важен уже потому, что решения дифференциальных уравнений (см. Лекцию 3) очень часто не представляются в виде известных функций, но могут быть выражены посредством интегралов от последних. Мы будем рассматривать интегралы, подинтегральные функции в которых зависят от малого или большого параметра, и познакомимся со следующими методами построения их асимптотик: метод разложения подинтегральной функции, метод интегрирования по частям, метод Лапласа и метод стационарной фазы.

2.1. Разложение подинтегральной функции. Этот метод продемонстрируем на примере.

Пример 2.1. Рассмотрим интеграл

$$I(\varepsilon) = \int\limits_0^1 \cos \varepsilon x^2 \, dx \tag{2.1}$$

при малых положительных ε. Требуется построить его асимптотику при $\varepsilon \to 0$.

Разложим подинтегральную функцию в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon x^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2 x^4}{2!} + \frac{\varepsilon^4 x^8}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\varepsilon x^2)^{2n}}{(2n)!} \equiv \\ \equiv \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n (\varepsilon x^2)^{2n}}{(2n)!} + R_N(x,\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь символом $R_N(x,\varepsilon)$ обозначим остаточный член в формуле (2.2). Сходимость ряда (2.2) исследуем с помощью формулы Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\text{-ый член}}{n\text{-ый член}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}(\varepsilon x^2)^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(-1)^n(\varepsilon x^2)^{2n}} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{-(\varepsilon x^2)^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд (2.2) сходится при любых значениях εx^2, причем разложение равномерно относительно $\varepsilon x^2 \leqslant M_0 = \text{const} > 0$.

Поскольку в формуле (2.1) $|x| \leqslant 1$, а ε мало, то

$$|R_N(x,\varepsilon)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(\varepsilon x^2)^{2n}}{(2n)!} \leqslant \varepsilon^{2N+2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(2n)!} = O(\varepsilon^{2N+2}), \quad \varepsilon \to 0,$$

равномерно по $|x| \leqslant 1$. Здесь мы учли, что последний ряд равномерно сходится по признаку Даламбера. Подставляя правую часть (2.2) в интеграл (2.1) и почленно интегрируя, получим

$$I(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n \varepsilon^{2n}}{(2n)!(4n+1)} + O(\varepsilon^{2N+2}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Из последнего асимптотического равенства следует справедливость асимптотического разложения интеграла $I(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε:

$$I(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon^{2n}}{(2n)!(4n+1)}, \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.3}$$

В силу предыдущих рассуждений ряд (2.3) сходится не только асимптотически, но и в обычном смысле, так что знак «$\sim$» в формуле (2.3) можно заменить на знак «$=$».

2.2. Интегрирование по частям. Этот метод также проиллюстрируем на примерах.

Пример 2.2. Построим асимптотику интеграла

$$I(\omega) = \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt, \tag{2.4}$$

при больших значениях параметра ω.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям, которая, как известно, основана на равенстве

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Здесь u и v — функции, зависящие от $t \in [t_1, t_2]$, то интегрируя это равенство и используя формулу Ньютона — Лейбница, получим формулу интегрирования по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2} u\,dv = uv\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} v\,du.$$

В равенстве (2.4) положим

$$u = \frac{1}{t}, \quad dv = e^{-t}\,dt.$$

Тогда $du = -\frac{1}{t^2}\,dt$, $v = -e^{-t}$. Используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = -\frac{e^{-t}}{t}\Big|_{\omega}^{\infty} - \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = \frac{e^{-\omega}}{\omega} - \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.$$

Процесс интегрирования по частям продолжим в том же духе:

$$u = \frac{1}{t^2}, \quad dv = e^{-t}dt.$$

Тогда

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = -\frac{e^{-t}}{t^2}\Big|_{\omega}^{\infty} - 2\int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3}\,dt,$$

так что

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = \frac{e^{-\omega}}{\omega^2} - 2\int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3}\,dt. \tag{2.5}$$

Подстановка выражения (2.5) в равенство (2.8) приводит к равенству

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \frac{e^{-\omega}}{\omega} - \frac{e^{-\omega}}{\omega^2} + 2\int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3}\,dt.$$

Продолжая интегрировать по частям и выбирая на каждом шаге $e^{-t}dt = dv$, придем к формуле

$$\begin{aligned}\int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \frac{e^{-\omega}}{\omega} - \frac{e^{-\omega}}{\omega^2} + \frac{2!e^{-\omega}}{\omega^3} - \frac{3!e^{-\omega}}{\omega^4} + \ldots +\\ + (-1)^{N+1}\frac{(N-1)!e^{-\omega}}{\omega^N} + (-1)^{N+2}N!\int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}}\,dt.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Поскольку $t \geqslant \omega$, то $\frac{1}{t^{n+1}} \leqslant \frac{1}{\omega^{n+1}}$, а поскольку

$$\int\limits_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}}\,dt \leqslant \frac{1}{\omega^{N+1}} \int\limits_{\omega}^{\infty} e^{-t}dt = \frac{e^{-\omega}}{\omega^{N+1}} = o(\omega^{-N}e^{-\omega}), \quad \omega \to \infty. \quad (2.7)$$

Из (2.6)–(2.7) следует асимптотическое разложение интеграла $I(\omega)$ по асимптотической последовательности $\{\omega^{-n}e^{-\omega}\}_{n=1}^{\infty}$:

$$I(\omega) \sim e^{-\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\omega^n}. \quad (2.8)$$

Отметим, что ряд (2.8) расходится, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - \text{ый член}}{(n+1) - \text{ый член}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\omega} = -\infty.$$

Однако из формул (2.6)–(2.8) следует, что при фиксированном N остаточный член в разложении (2.6) можно сделать сколь угодно малым за счет выбора достаточно большого ω. Это обстоятельство является важнейшей характерной особенностью асимптотических рядов.

Можно проверить, что если взять $u = e^{-t}$, $dv = \frac{dt}{t^2}$ и аналогичным образом действовать дальше, то асимптотику интеграла $I(\omega)$ при $\omega \to \infty$ получить не удастся.

Пример 2.3. Рассмотрим теперь интеграл

$$I(\omega) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-t}}{\omega + 2t}\,dt$$

при больших значениях ω. Методом интегрирования по частям построим его асимптотику при $\omega \to \infty$.

Нетурдно убедиться, что подстановка $u = e^{-t}$, $v = (\omega + 2t)^{-1}$ не приведет к цели. Поэтому положим

$$u = (\omega + 2t)^{-1}, \quad dv = e^{-t}\,dt, \quad (2.9)$$

откуда найдем

$$du = -2(\omega + 2t)^{-2}dt, \quad v = -e^{-t}. \quad (2.10)$$

В силу соотношения (2.9),(2.10) по формуле интегрирования по частям находим

$$I(\omega) = -2(\omega+2t)^{-1}e^{-t}\Big|_0^\infty - 2\int\limits_0^\infty (\omega+2t)^{-2}e^{-t}\,dt = \\ = \frac{2}{\omega} - 2\int\limits_0^\infty (\omega+2t)^{-2}e^{-t}\,dt. \tag{2.11}$$

Применим к последнему интегралу формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = (\omega+2t)^{-2}, \quad dv = e^{-t}dt,$$

откуда

$$du = -4(\omega+2t)^{-3}dt, \quad v = -e^{-t}.$$

$$\int\limits_0^\infty (\omega+2t)^{-2}e^{-t}dt = -(\omega+2t)^{-2}e^{-t}\Big|_0^\infty - 4\int\limits_0^\infty (\omega+2t)^{-3}e^{-t}\,dt. \tag{2.12}$$

Из равенств (2.11), (2.12) находим

$$I(\omega) = \frac{2}{\omega} - \frac{2}{\omega^2} + 8\int\limits_0^\infty (\omega+2t)^{-3}e^{-t}\,dt.$$

Повторяя процесс интегрирования по частям n раз, придем к разложению

$$I(\omega) = \frac{2}{\omega} - \frac{2}{\omega^2} + \frac{2^2 2!}{\omega^3} - \frac{2^3 3!}{\omega^4} + \ldots + \\ + \frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}(n-1)!}{\omega^n} + (-1)^n 2^n n! \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{(\omega+2t)^{n+1}}\,dt. \tag{2.13}$$

Для оценки остаточного члена в равенстве (2.13) воспользуемся следующим справедливым при всех положительных ω и t неравенством:

$$(\omega+2t)^{-n-1} < \omega^{-n-1}.$$

Из чего следует оценка

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{(\omega+2t)^{n+1}}\,dt < \omega^{-n-1}.$$

Таким образом

$$I(\omega) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}(n-1)!}{\omega^n} + o(\omega^{-N}), \quad \omega \to \infty.$$

Следовательно, имеет место асимптотика:

$$I(\omega) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}(n-1)!}{\omega^n}, \quad \omega \to \infty. \tag{2.14}$$

Заметим, что ряд (2.14), как и в предыдущем примере расходится,но при фиксированном N остаточный член становится сколь угодно малым при достаточно больших ω.

2.3. Метод Лапласа. В этом параграфе будем рассматривать интеграл

$$F(\lambda) = \int_a^b \phi(t)e^{\lambda h(t)}\,dt, \quad -\infty < a < b < \infty, \tag{2.15}$$

где функции $\phi(t)$ и $h(t)$ сколь угодно гладкие на отрезке $t \in [a,b]$, а параметр $\lambda \to \infty$. При этом функция $h(t)$ предполагается вещественной, а функция $\phi(t)$ может быть и комплексной. Интеграл (2.15) называют интегралом Лапласа.

Отметим, что интеграл $F(\lambda)$ зависит от параметра λ нерегулярным образом, т. е. точка $\lambda = \infty$ является для него существенно особой точкой. Последнее означает, что функция $F(\lambda)$ не разлагается в ряд по степеням λ^{-1} при $\lambda \to \infty$.

Нас будет интересовать вопрос об асимптотике интеграла Лапласа (2.15). Известно, что она зависит от поведения функции $h(t)$, а точнее от того, в какой точке $c \in [a,b]$ достигается ее максимум: на конце отрезка $[a,b]$ или в его внутренней точке. Грубо говоря, в первом случае $F(\lambda) \sim \lambda^{-1}e^{\lambda h(c)}$, а во втором $F(\lambda) \sim \lambda^{-\frac{1}{2}}e^{\lambda h(c)}$, $\lambda \to \infty$.

Сейчас мы докажем теорему об асимптотике $F(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ в том случае, когда максимум показателя $h(t)$ достигается на границе.

Теорема 2.1. *Пусть функция $h(t)$ удовлетворяет следующим условиям: точка a является единственной точкой максимума $h(t)$ и $h'(a) < 0$. Тогда справедлива асимптотика:*

$$F(\lambda) \sim -e^{\lambda h(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \frac{\phi_{k-1}(a)}{h'(a)}, \quad \lambda \to \infty, \tag{2.16}$$

где

$$\phi_0(t) = \phi(t), \quad \phi_{k+1}(t) = \frac{-d}{dt}\left(\frac{\phi_k(t)}{h'(t)}\right).$$

$\lhd$ Пусть σ и γ столь малые положительные числа, что при $t \in [a, a+\sigma]$ $h'(t) < 0$, а при $t \in [a+\sigma, b]$ $h(t) < h(a) - \gamma$. Положим

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda), \tag{2.17}$$

где

$$F_1(\lambda) = \int\limits_a^{a+\sigma} \phi(t) e^{\lambda h(t)}\, dt, \quad F_2(\lambda) = \int\limits_{a+\sigma}^{b} \phi(t) e^{\lambda h(t)}\, dt.$$

Тогда при некоторой постоянной $M > 0$

$$|F_2(\lambda)| \leqslant M e^{\lambda h(a)} e^{-\gamma\lambda}. \tag{2.18}$$

Асимптотику интеграла $F_1(\lambda)$ построим методом интегрирования по частям:

$$F_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int\limits_a^{a+\sigma} \frac{\phi(t)}{h'(t)}\, d(e^{\lambda h(t)}) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \frac{\phi(t)}{h'(t)}\, e^{\lambda h(t)} \Big|_a^{a+\sigma} - \frac{1}{\lambda} \int\limits_a^{a+\sigma} \frac{d}{dt}\left(\frac{\phi(t)}{h'(t)}\right) e^{\lambda h(t)}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \frac{\phi(a)}{h'(a)}\, e^{\lambda h(t)} + \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_a^{a+\sigma} \frac{\phi_1(t)}{h'(t)}\, d(e^{\lambda h(t)}) + O\left(e^{\lambda h(t)}\right) e^{-\gamma\lambda},$$

где

$$\phi_1(t) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\phi(t)}{h'(t)}\right).$$

Используя метод интегрирования по частям и далее, придем к соотношению:

$$\begin{gathered} F_1(\lambda) = -e^{\lambda h(a)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^k} \frac{\phi_{k-1}(a)}{h'(a)} + \\ + \frac{1}{\lambda^n} \int\limits_a^{a+\sigma} \phi_n(t) e^{\lambda h(t)}\, dt + O\Big(e^{\lambda h(a)}\Big) e^{-\gamma\lambda}, \end{gathered} \tag{2.19}$$

где $\phi_k(t)$ — функции определенные при формулировке теоремы 2.1. Из соотношения (2.17)–(2.19) вытекает (2.16). $\triangleright$

Замечание 2.1. Тот случай, когда единственной точкой максимума функции $u(t)$ является $t = b$, исследуется аналогично.

Пример 2.4. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int\limits_0^1 e^{-\lambda t} \cos^5 t \, dt, \tag{2.20}$$

зависящий от большого параметра λ. Требуется построить три первых члена асимптотики $F(\lambda)$ по степеням λ^{-1} при $\lambda \to \infty$.

Интеграл (2.20) является интегралом Лапласа, для которого имеет место теорема 2.1. Однако при построении его асимптотики мы не будем опираться на эту теорему, а построим асимптотику $F(\lambda)$ непосредственно, методом интегрирования по частям.

В (2.20) положим

$$u = \cos^5 t, \quad dv = e^{-\lambda t} \, dt,$$

так что

$$du = -5\cos^4 t \sin t, \quad v = -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

Согласно методу интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \cos^5 t \Big|_0^1 - \frac{5}{\lambda} \int\limits_0^1 e^{-\lambda t} \cos^4 t \sin t \, dt = \\ &= -\frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \cos^5 1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{5}{\lambda} \int\limits_0^1 e^{-\lambda t} \cos^4 t \sin t \, dt \equiv \\ &\equiv -\frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \cos^5 1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{5}{\lambda} J(\lambda). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Интеграл $J(\lambda)$ опять интегрируем по частям, полагая

$$u = \cos^4 t \sin t, \quad dv = e^{-\lambda t},$$

так что

$$du = -4\cos^3 t \sin^2 t + \cos^5 t, \quad v = -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

Тогда

$$J(\lambda) = -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\cos^4 t \sin t\Big|_0^1 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 e^{-\lambda t}\left(\cos^5 t - 4\cos^3 t\sin^2 t\right)\,dt =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 e^{-\lambda t}\left(\cos^5 t - 4\cos^3 t\sin^2 t\right)\,dt.$$

Подставляя в (2.21) найденное выражение $J(\lambda)$, получим

$$F(\lambda) = -\frac{e^{\lambda}}{\lambda}\cos^5 1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{5e^{-\lambda}}{\lambda^2} - \frac{5}{\lambda^2}\int\limits_0^1 e^{-\lambda t}(\cos^5 t - 4\cos^3 t\sin^2 t)\,dt.$$

Последний интеграл опять находим методом интегрирования по частям, полагая

$$u = \cos^5 t - 4\cos^3 t\sin^2 t = \cos^5 t - \sin^2 2t\cos t,$$

$$dv = e^{-\lambda t}\,dt,$$

так что

$$du = -5\cos^4 t\sin t - 2\sin 4t\cos t + \sin^2 2t\sin t,$$

$$v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}.$$

Легко видеть, что в результате мы придем к асимптотическому равенству

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{5}{\lambda^3} + O(\lambda^{-4}), \quad \lambda\to\infty.$$

Здесь учтено, что функция $e^{-\lambda}$ является бесконечно малой относительно λ^{-n} при любом натуральном n, когда $\lambda\to\infty$.

2.4. Метод стационарной фазы. В этом параграфе мы продолжим рассматривать интегралы, зависящие от большого параметра нерегулярным образом. Эти интегралы, как и в предыдущем параграфе, имеют вид (2.15), но теперь, в отличие от п. 2.3, функция $h(t)$ принимает не вещественные значения, а чисто мнимые, т. е. $h(t) = iS(t)$, где $S(t)$ — вещественнозначная бесконечно гладкая функция. Так что будем строить асимптотики интегралов

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b \phi(t) e^{i\lambda S(t)}\, dt, \quad \lambda \to \infty. \tag{2.22}$$

Напомним, что в предыдущем параграфе характер асимптотики зависел от положения на $[a, b]$ точки t, в которой достигается максимум функции $h(t)$. Теперь ситуация иная: асимптотика связана с отсутствием или наличием стационарных точек, т. е. точек в которых $S'(t) = 0, t \in [a, b]$. В первом случае $F(\lambda)$ стремится к нулю как λ^{-1}, а во втором — как $\lambda^{-\frac{1}{2}}$. Мы сформулируем и докажем теорему для первого случая.

Теорема 2.2. *Пусть в формуле* (2.21) $S'(t) \neq 0$, $t \in [a, b]$. *Тогда справедлива асимптотика вида*

$$F(\lambda) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \left[A_k e^{i\lambda S(A)} + B_k e^{i\lambda S(b)} \right], \quad \lambda \to \infty, \tag{2.23}$$

где коэффициенты A_k являются линейными комбинациями значений функции $\phi(t)$ и ее производных до порядка $k - 1$ в точке a, а коэффициенты B_k — линейные комбинации значений функций $\phi(t)$ и ее производных до порядка $k - 1$, вычисленных в точек b.

$\triangleleft$ Используем метод интегрирования по частям:

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b \frac{\phi(t)}{i\lambda S'(t)}\, d\big(e^{i\lambda S(t)}\big) = \frac{\phi(t) e^{i\lambda S(t)}}{i\lambda S'(t)}\bigg|_a^b - \int\limits_a^b \left(\frac{\phi(t)}{i\lambda S'(t)} \right)' e^{i\lambda S(t)}\, dt =$$

$$= \frac{\phi(b)}{i\lambda S'(b)} e^{i\lambda S(b)} - \frac{\phi(a)}{i\lambda S'(a)}\, e^{i\lambda S(a)} + \frac{1}{i\lambda} \int\limits_a^b \phi_1(t)\, e^{i\lambda S(t)}\, dt,$$

где

$$\phi_1(t) = \left(\frac{-\phi(t)}{S'(t)} \right)'.$$

Последний интеграл имеет ту же структуру, что и $F(\lambda)$ (см. (2.22)); здесь только вместо $\phi(t)$ выступает $\phi_1(t)$. Интегрируя его по частям, а затем последовательно применяя эту же процедуру к вновь возникающим интегралам, приходим к представлению

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\phi_{k-1}(b)}{(i\lambda)^k S'(b)} e^{i\lambda S(b)} - \frac{\phi_{k-1}(a)}{(i\lambda)^k S'(a)} e^{i\lambda S(a)} \right] + R_n(\lambda), \quad (2.24)$$

где

$$R_n(\lambda) = \frac{1}{(i\lambda)^n} \int_a^b \phi_{n+1}(t) e^{i\lambda S(t)}\, dt,$$

$$\phi_0(t) = \phi(t), \quad \phi_{k+1} = \left(-\frac{\phi_k(t)}{S'(t)} \right)'.$$

Из вышесказанного следует оценка:

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{1}{\lambda^n} \left| \int_a^b \phi_{n+1}(t) e^{i\lambda S(t)}\, dt \right| \leqslant \frac{M_n}{\lambda^{n+1}}, \quad M_n = \mathrm{const} > 0. \quad (2.25)$$

Из соотношений (2.24), (2.25) вытекает асимптотическое разложение (2.23). $\triangleright$

Лекция 3. Дифференциальные уравнения с малым параметром

В этой лекции собраны некоторые известные результаты для обыкновенных дифференциальнхм уравнений с малым параметром, нацеленные на дальнейшее развитие теории регулярных возмущений для таких уравнений.

3.1. Регулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Сформулируем классическую теорему о существовании, единственности и непрерывной зависимости от параметра решения системы m дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производных. Такие системы называют нормальными системами дифференциальных уравнений. Параметр для простоты будем считать скалярным.

Теорема 3.1. *Пусть правая часть нормальной системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \varepsilon), \quad (3.1)$$

где x и f — m-мерные вектор-функции, ε — числовой параметр, удовлетворяет следующим условиям:

1) *Вектор-функция $f(x,t,\varepsilon)$ определена и непрерывна на замкнутом множестве*

$$\Pi \equiv \left\{|t-t_0| \leqslant a,\ \|x-x^0\| \leqslant b,\ |\varepsilon| \leqslant d\right\},$$

где a, b, d — фиксированные положительные числа, а t_0 и x^0 — заданные число и вектор ($x^0 \in \mathbb{R}^m$) и пусть при всех $(t,x,\varepsilon) \in \Pi$ справедлива оценка $\|f(x,t,\varepsilon)\| \leqslant M$, где $M > 0$ — некоторая постоянная.

2) *$f(x,t,\varepsilon)$ удовлетворяет в Π равномерному условию Липшица по x*

$$\|f(x_2,t,\varepsilon) - f(x_1,t,\varepsilon)\| \leqslant L\|x_2 - x_1\|,$$

где постоянная $L > 0$ не зависит от x, t, ε. Тогда задача Коши для системы (3.1) с начальным условием

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0, \tag{3.2}$$

имеет на сегменте $|t-t_0| \leqslant h = \min(a, b/M)$ единственное решение $x(t,\varepsilon)$, которое непрерывно по совокупности переменных t, ε при $|t-t_0| \leqslant h$, $|\varepsilon| \leqslant d$. При этом $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|x(t,\varepsilon) - x(t,0)\| = 0$ равномерно-мерно относительно $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Из этой теоремы следует, что задача (3.1), (3.2) является регулярно возмущенной.

В следующей теореме речь идет о возможности дифференцировать решение $x(t,\varepsilon)$ задачи (3.1), (3.2) по параметру ε.

Теорема 3.2. *Пусть данные задачи (3.1), (3.2) удовлетворяют условиям теоремы 3.1 и, кроме того, вектор-функция $f(x,t,\varepsilon)$ на множестве Π обладает непрерывными производными по x и по ε. Тогда решения $x(t,\varepsilon)$ задачи (3.1), (3.2) определенное и непрерывное по теореме 3.1 на множестве $D \equiv \{|t-t_0| \leqslant h, |\varepsilon| < d\}$, имеет непрерывную в D производную $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon)$, которая является решением задачи*

$$\dot y = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)y + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{3.3}$$

$$y(t_0,\varepsilon) = 0. \tag{3.4}$$

Линейное (векторное) уравнение (3.3) называют уравнением в вариациях; оно получается формальным дифференцированием уравнения (3.1) по ε. Соответствующее начальное условие (3.4) также можно рассматривать как результат формального дифференцирования по ε начального условия (3.2).

Пример 3.1. Найти производную по параметру ε при $\varepsilon = 0$ решения $\varphi(t,\varepsilon)$ задачи Коши

$$\dot{x} + x^2 - 2\varepsilon t^{-1} = 0, \quad x(1,\varepsilon) = 1$$

в некоторой окрестности точки $t = 1$.

Решение. По теореме 3.2 $y(t,\varepsilon) = \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}(t,\varepsilon)$ — решение уравнения в вариациях

$$\dot{y} + 2\varphi(t,\varepsilon)y - 2t^{-1} = 0$$

с начальным условием $y(1,\varepsilon) = 0$.

Следовательно, искомая функция $\psi(t) = y(t,0)$ является решением задачи Коши

$$\dot{y} + 2\varphi(t,0)y - 2t^{-1} = 0, \quad y(1) = 0.$$

Поскольку $\varphi(t,0)$ — решение задачи

$$\dot{x} + x^2 = 0, \quad x(1) = 1,$$

то $\varphi(t,0) = t^{-1}$. Значит функция $\psi(t)$ является решением задачи

$$\dot{y} - 2t^{-1}(y-1) = 0, \quad y(1) = 0,$$

так что $\psi(t) = 1 - t^{-2}$.

В теореме 3.2 речь идет о первой производной решения задачи Коши (3.1), (3.2) по параметру. Следующая теорема посвящена дифференцированию этого решения по параметру любого порядка.

Теорема 3.3. *Пусть правая часть $f(x,t,\varepsilon)$ системы (3.1) удовлетворяет условию теоремы 3.1 и, кроме того, на множестве Π существуют всевозможные ее непрерывные производные (включая и смешанные) по координатам x и ε до порядка $m \geqslant 1$. Тогда существуют непрерывные в D производные $\frac{\partial^k x}{\partial\varepsilon^k}(t,\varepsilon)$, $k \leqslant m$, где $x(t,\varepsilon)$ — решение задачи (3.1), (3.2).*

3.2. Асимптотическое интегрирование ОДУ. Перейдем к вопросу о построении асимптотики решения $x(t,\varepsilon)$ задачи Коши (3.1), (3.2). Будем считать, что вектор-функция $f(x,t,\varepsilon)$ имеет на множестве Π непрерывные (по совокупности x, t, ε) производные по x и ε

сколь угодно высокого порядка. Асимптотику будем искать в виде формального ряда по степеням ε:

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots + \varepsilon^k x_k(t) + \ldots \tag{3.5}$$

Для нахождения его коэффициентов $x_i(t)$ правую часть (3.5) подставим в (3.1), предварительно разложив вектор–функцию f в ряд Тейлора по совокупности первой и третьей переменных с центом в точке $(x_0(t), t, 0)$:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots + \varepsilon^k x_k(t) + \ldots) = \\ = f(x_0(t), t, 0) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(t), t, 0)\, x_1 + f_1(t)\, \varepsilon + \ldots + \\ + \varepsilon^k \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0(t), t, 0) x_k + f_k(t)\right) + \ldots\end{gathered} \tag{3.6}$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial x}$ — матрица Якоби по переменным x, элементы которой вычислены в точке $(x_0(t), t, 0)$, $f_1(t)$ — производная $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}$, вычисленная в той же точке, а вектор–функции $f_k(t)$ выражаются через вектор-функции $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Разложение (3.5) подставим также в равенство (3.2). Получим

$$x_0(t_0) + \varepsilon x_1(t_0) + \ldots + \varepsilon^k x_k(t_0) + \ldots = x^0. \tag{3.7}$$

Приравнивая в равенствах (3.1), (3.2) коэффициенты при одинаковых степенях ε, придем к рекурентной последовательности задач:

$$\frac{dx_0}{dt} = f(x_0, t, 0), \quad x_0(t_0) = x^0, \tag{3.8}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t, 0) x_1 + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x_0, t, 0), \quad x_1(0) = 0, \ldots \tag{3.9}$$

Отметим, что в этой цепочке задач единственной нелинейной задачей является задача (3.8) которая совпадает с вырожденной задачей.

Замечание 3.1. Пусть в (3.1) вектор-функции x и f — скалярные. Тогда результат формальной подстановки (3.5) в (3.1) с последующим разложением f в ряд Тейлора с центром $(x_0, t, 0)$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &f(x_0,t,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t,0)(\varepsilon x_1+\ldots)+\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x_0,t,0)\varepsilon+\ldots+\\ &\quad+\frac{1}{n!}\left((\varepsilon x_1+\ldots)\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)^n f(x_0,t,0)+\ldots \end{aligned} \tag{3.10}$$

Теоретическую часть лекций закончим следующей известной теоремой.

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.3 *и решение вырожденной задачи* (3.8) *определено на временном участке* $J: |t-t_0|\leqslant a$. *Тогда решение задачи* (3.1), (3.2) *при* $t\in J$ *разлагается по формуле Тейлора по степеням* ε *до порядка* ε^m *включительно:*

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\ldots+\varepsilon^m x_m(t)+o(\varepsilon^m),\quad \varepsilon\to 0, \tag{3.11}$$

где вектор-функции $x_0(t)$, $x_1(t)$ *и т. д. являются решениями задач* (3.8), (3.9) *и т. д. соответственно.*

Из этой теоремы следует, что ряд (3.5), построенный указанным выше способом, является асимптотикой решения задачи (3.1), (3.2).

Пример 3.2. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon x+2,\quad x(0)=0,$$

где ε — малый параметр. Построить несколько членов асимптотики решения по степеням ε.

Асимптотику будем строить в виде ряда (3.5):

$$x(t)\sim x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots$$

Подставим этот ряд в наши уравнение и начальное условие и приравняем коэффициенты в полученном равенстве при одинаковых степенях ε. Получим цепочку задач:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^0: \frac{dx_0}{dt}=2,\quad x_0(0)=0,\\ &\varepsilon^1: \frac{dx_1}{dt}=-x_0,\quad x_1(0)=0,\\ &\varepsilon^2: \frac{dx_2}{dt}=-x_1,\quad x_2(0)=0,\\ &\ldots \end{aligned}$$

Отсюда последовательно находим:

$$x_0(t) = 2t, \quad x_1(t) = t^2, \quad x_2(t) = \frac{t^3}{3}, \quad \ldots$$

Таким образом асимптотика решения рассматриваемой задачи имеет вид

$$x(t) \sim 2t - \varepsilon t^2 + \varepsilon \frac{t^3}{3} + \ldots$$

Пример 3.3. Получить справедливую на отрезке $[0, T]$ асимптотическую формулу с остаточным членом $O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$, для решения $x(t, \varepsilon)$ задачи Коши для уравнения Риккати

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t) + \varepsilon c(t)x^3, \quad t \in [0, T], \quad x(0) = 0, \tag{3.12}$$

где a, b, c — непрерывные функции на $[0, T]$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.5):

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots \tag{3.13}$$

Подставляя (3.13) в равенства (3.12) и приравнивая в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях ε, придем к следующим задачам для x_0 и x_1:

$$\frac{dx_0}{dt} = a(t)x_0 + b(t), \quad x_0(0) = 0, \tag{3.14}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = a(t)x_1 + c(t)x_0^3, \quad x_1(0) = 0. \tag{3.15}$$

Решение задачи (3.14) вычисляется по формуле

$$x_0(t) = \int\limits_0^t b(\tau) e^{\int\limits_\tau^t a(s)\,ds}\, d\tau, \quad t \in [0, T], \tag{3.16}$$

а решение задачи (3.15) — по аналогичной формуле

$$x_1(t) = \int\limits_0^t (\tau) \left[\int\limits_0^\tau b(s) e^{\int\limits_s^\tau a(s)\,ds}\, ds \right]^3 e^{\int\limits_\tau^t a(s)\,ds}\, d\tau, \quad t \in [0, T]. \tag{3.17}$$

В результате получим

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2), \quad t \in [0,T], \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.18}$$

где $x_0(t)$ и $x_1(t)$ заданы формулами (3.16) и (3.17) соответственно.

Ранее мы для простоты считали, что параметр входит только в дифференциальные уравнения. Описанная выше теория легко переносится и на тот случай, когда он регулярным образом входит и в начальные данные. Под регулярностью понимается дифференцируемость достаточно высокого порядка начальных данных по ε.

Пример 3.4. Найти асимптотическую формулу с остаточным членом $O(\varepsilon^3)$, $\varepsilon \to 0$, решения задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} - 2\varepsilon t^2, \quad t \in [1,T], \quad x(1) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8} \tag{3.19}$$

в некоторой окрестности точки $t = 1$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.5):

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots \tag{3.20}$$

Разложение (3.20) подставим в равенства (3.19) и приравняем в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях ε, вплоть до второй степени. Получим

$$x_0' + \varepsilon x_1' + \varepsilon^2 x_2' + \ldots = \frac{t}{x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2' + \ldots} - 2\varepsilon t^2,$$

$$x_0(1) + \varepsilon x_1(1) + \varepsilon^2 x_2(1) + \ldots = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Тогда

при ε^0: $x_0' = \frac{t}{x_0}$, $x_0(1) = 1$,

при ε^1: $x_1' = -\frac{tx_1}{x_0^2} - 2t^2$, $x_1(1) = -\frac{1}{2}$,

при ε^2: $x_2' = -\frac{tx_2}{x_0^2} + \frac{tx_1^2}{x_0^3}$, $x_2(1) = \frac{1}{8}$.

Отсюда находим

$$x_0 = t, \quad x_1 = -\frac{t^3}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{12t} + \frac{t^5}{24}.$$

Таким образом,

$$x(t,\varepsilon) = t - \varepsilon\frac{t^3}{2} + \varepsilon^2\left(\frac{1}{12t} + \frac{t^3}{24}\right) + O(\varepsilon^3).$$

Замечание 3.2. В данной лекции мы рассмотрели широкий класс регулярно возмущенных задач. Существует также известный класс сингулярно возмущенных задач, в системы ОДУ которых входят уравнения с малым сомножителем (параметром) при старшей производной. Такие задачи глубоко изучены известными математиками А. Н. Тихоновым и А. Б. Васильевой. В этом кратком курсе мы не можем говорить о них подробно. Отметим лишь, что при построении асимптотик их решений используются асимптотические ряды двух видов: один из них (регулярный) имеет ту же структуру, что и в случае регулярно возмущенных задач, а второй (его называют «пограничным рядом»), являясь также рядом по степеням ε, имеет коэффициенты, которые тоже зависят от ε, причем специальным образом.

И последнее. В теории дифференциальных уравненимй рассматриваются два вида асимптотик решений — асимптотики по параметру (только о таких мы здесь и говорили) и асимптотики по независимой переменной. Например, в задаче на положительной полуоси изучается асимптотика решения при больших значениях независимой переменной.

Упражнения к Лекции 3

В задачах 1–3 найти производную от решения данного дифференциального уравнения в некоторой окрестности точки $t = 1$ по параметру ε при $\varepsilon = 0$:

1. $x' = \varepsilon t + \frac{1}{2x}, \quad x(1) = 1 - 2\varepsilon.$

2. $x' = x - t + \varepsilon t e^{2x}, \quad x(1) = 2\varepsilon.$

3. $\ddot{x} = x \sin \dot{x} + \sin x^2, \quad x(0) = \varepsilon, \ \dot{x}(0) = \varepsilon^2.$

В задачах 4–5 найти разложение решения в некоторой окрестности точки $t = 1$ по степеням параметра ε до ε^2 включительно:

3. $x' = 5\varepsilon t + \frac{1}{2x}, \quad x(1) = 1 - \varepsilon.$

4. $\ddot{x} = 2x - 2x^3, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = \varepsilon.$

Литература

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.—М.: Наука, 1973.
2. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения.—М.: Наука, Физматлит, 1980.—230 с.
3. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: УРСС, 2004.
4. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений.—М.: Мир, 1984.
5. *Ильин А. М., Данилин А. Р.* Асимптотические методы в анализе.—М.: Физматлит, 2009.—248 с.

Левенштам Валерий Борисович
Южный федеральный университет,
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: `vlevenshtam@yandex.ru`

ASYMPTOTIC METHODS IN THE THEORY OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. B. Levenshtam

This cours presents a number of initial concepts of the theory of asymptotic methods, which is also called perturbation theory, analyzes some techniques for constructing asymptotic expansions of integrals depending on the asymptotic parameter (in particular, the Laplace method and the stationary phase method), and also considers ordinary differential equations depending on the asymptotic parameter, and shows, how to construct asymptotic expansions of their solutions in the case of regularly perturbed problems.

Key words: perturbation theory, asymptotic methods, Laplace method, stationary phase method, asymptotic integration of regularly perturbed problems.

УДК 517.984.64

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ОПЕРАТОРОВ

Г. Г. Магарил-Ильяев

В лекциях излагаются начала теории оптимального восстановления значений линейных функционалов и операторов на классах множеств, элементы которых известны приближенно. Особое внимание уделяется восстановлению линейных функционалов, где теория существенно опирается на методы выпуклого анализа. Приводятся различные примеры, связанные, в основном, с задачами классической теории приближений. Лекции рассчитаны на широкий круг читателей.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, оптимальный метод, экстремальная задача, выпуклая двойственность.

Лекция 1. Обсуждение возможных подходов к постановке задачи оптимального восстановления. Краткий исторический экскурс

На практике часто возникают задачи, связанные с восстановлением какой-либо характеристики объекта по информации (часто не полной и/или не точной) о других характеристиках этого объекта. К примеру, рассматривается задача о восстановлении функции или ее производной в точке, или интеграла от нее по информации о наборе ее значений в других точках, либо по приближенно заданному преобразованию Фурье, или требуется восстановить решение дифференциального уравнения по неточно известным начальным данным и так далее. Применяются различные подходы к решению подобного класса задач. Здесь мы следуем подходу, который предполагает наличие некоторой априорной информации об объекте, характеристики которого подлежат восстановлению. Это дает возможность поставить задачу о нахождении наилучшего метода восстановления данной характеристики среди всех возможных методов. Такой подход к задаче восстановления идеологически восходит к работам А. Н. Колмогорова 30-х гг. XX века, посвященным нахождению наилучших средств приближения для различных классов функций. Математическая теория, в которой рассматриваются задачи восстановления, основывающиеся на этом подходе, плодотворно развивается, начиная с 60-х гг. XX века.

Начнем с рассмотрения простого примера, показывающего, что постановка задачи оптимального восстановления вполне естественна. Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы точки $t_1 < \ldots < t_n$, и в этих точках известны значения некоторой непрерывной функции $x(\cdot)$, т. е. известны числа $x(t_1),\ldots,x(t_n)$. Как по этим числам восстановить значение функции $x(\cdot)$ в точке $\tau \in [a,b]$, $\tau \neq t_i$, $i = 1,\ldots,n$? Достаточно традиционная рекомендация состоит в том, что нужно провести через точки $x(t_1),\ldots,x(t_n)$ интерполяционный полином Лагранжа (напомним, что это полином степени $n-1$ вида $p(t) = \sum_{i=1}^{n} l_i(t)x(t_i)$, где l_i — полином степени $n-1$, принимающий значение 1 в точке t_i и нулевые значения в остальных точках t_j, $j \neq i$) и в качестве значения функции $x(\cdot)$ в точке τ взять $p(\tau)$.

Такая рекомендация предполагает, что функция $x(\cdot)$ ведет себя достаточно «хорошо», не может резко меняться. Если никакой априорной информации о функции нет, то задача, очевидно, бессмысленна, поскольку ясно, что существуют функции, принимающие в точках $t_1 < \ldots < t_n$ те же значения, что и $x(\cdot)$, а в точке τ — любое наперед заданное значение.

Будем теперь предполагать, что функция $x(\cdot)$ принадлежит некоторому множеству (классу) W в пространстве $C([a,b])$ непрерывных функций на $[a,b]$. Например, пусть W — это класс функций $x(\cdot)$, у которых первая производная $\dot{x}(\cdot)$ кусочно непрерывна и $|\dot{x}(t)| \leqslant 1$ в точках непрерывности $\dot{x}(\cdot)$. Тогда задача становится более осмысленной — значение функции $x(\cdot)$ в точке τ может находиться только в пределах синего отрезка (см. рис. 1.1).

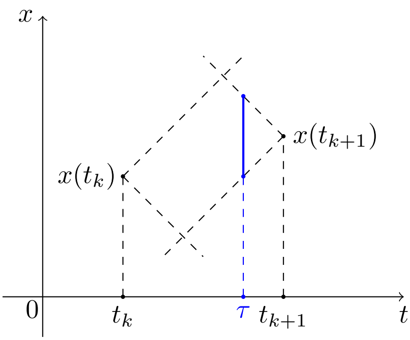

Рис. 1.1.

Итак, считаем, что функция $x(\cdot)$ принадлежит некоторому классу W, и о каждой функции $x(\cdot) \in W$ мы располагаем еще индивидуальной информацией, заключающейся в том, что нам известны значения $x(\cdot)$ в точках $t_1 < \ldots < t_n$. Пусть $I\colon C([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, действующий по правилу $Ix(\cdot) = (x(t_1), \ldots, x(t_n))$. Тогда индивидуальная информация о функциях из W состоит в том, что нам известны значения этого оператора на W. Оператор I будем называть информационным оператором.

Заметим, что рекомендацию по поводу использования интерполяционного полинома Лагранжа можно интерпретировать так. Возьмите линейную функцию на $\mathbb{R}^n$ вида $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n l_i(\tau)\xi_i$ и вместо ξ_i подставьте $x(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Мы пойдем дальше: возьмем произвольную функцию $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ на $\mathbb{R}^n$, подставим $x(t_i)$ вместо ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, и будем считать, что это и есть оценка $x(\tau)$ для любой функции $x(\cdot) \in W$. Каждой такой функции (методу восстановления) сопоставим число — погрешность этого метода, а затем поставим вопрос о нахождении среди всех таких методов того, у которого погрешность минимальна.

Точная постановка такова. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Сопоставим данной функции (методу восстановления) следующую величину:

$$e(\tau, W, I, \varphi) = \sup_{x(\cdot) \in W} \bigl| x(\tau) - \varphi(x(t_1), \ldots, x(t_n)) \bigr|,$$

которую назовем погрешностью метода φ. Ясно, что это «наихудший» результат из всех, которые можно получить, используя данный метод восстановления.

Нас интересует величина

$$E(\tau, W, I) = \inf_{\varphi} e(\tau, W, I, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всем отображениям $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, и те методы $\widehat{\varphi}$, на которых эта нижняя грань достигается, т. е.

$$E(\tau, W, I) = e(\tau, W, I, \widehat{\varphi}).$$

Такие методы естественно назвать оптимальными.

Скажем несколько слов об истории вопроса такой постановки. В 1965 г. в кандидатской диссертации С. А. Смоляка [1] была поставлена следующая задача. Пусть X — линейное пространство,

W — класс элементов в X и l_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, — линейные функционалы на X. Предполагается, что элементы множества W известны приближенно, а именно, о каждом $x \in W$ известен набор чисел $l_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. значения на W информационного оператора $I\colon X \to \mathbb{R}^n$, действующего по правилу $Ix = (l_1(x), \ldots, l_n(x))$. Имея эту информацию, мы хотим восстанавливать значения линейного функционала l_0 на W.

Дальше идут те же определения, что и выше. Каждому методу $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сопоставляется его погрешность

$$e(l_0, W, I, \varphi) = \sup_{x \in W} \bigl| l_0(x) - \varphi(l_1(x), \ldots, l_n(x)) \bigr|,$$

определяется величина

$$E(l_0, W, I) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} e(l_0, W, I, \varphi),$$

и ставится вопрос о ее вычислении и нахождении тех методов $\widehat{\varphi}$, на которых нижняя грань достигается.

Отметим, что рассмотренный выше пример частный случай этой постановки, где $X = C([a,b])$, $l_0\colon x(\cdot) \to x(\tau)$ и $l_i\colon x(\cdot) \to x(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

С. А. Смоляк доказал следующий результата (напомним, что множество $A \subset X$ выпукло, если из того, что $x, y \in A$ следует, что $(1-\alpha)x + \alpha y \in A$ для любого $\alpha \in (0,1)$, и что это множество центрально-симметричного, если $A = -A$).

Лемма 1.1 (Смоляка). *Если в задаче Смоляка множество W выпукло и центрально симметрично, то среди оптимальных методов есть линейный.*

Задача С. А. Смоляка и его лемма послужили началом развития теории оптимального восстановления линейных функционалов и операторов на множествах, элементы которых известно приближенно. Эта теория развивалась и обобщалась в различных направлениях. Значительное внимание уделялось задачам восстановления, в которых начальная информация об элементах W задана неточно (например, в приведенной постановке числа $l_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, известны приближенно) и, быть может, бесконечномерна. Для таких задач находились условия существования линейного оптимального метода, т. е. справедливость для них аналога леммы Смоляка.

Окончательный результат — критерий существования линейного оптимального метода восстановления для достаточно общей постановки задачи оптимального восстановления линейного функционала — получен в работе [2]. Помимо этого, развивались некоторые теоретические аспекты теории восстановления линейных операторов, было решено значительное количество конкретных задач, связанных с нахождением оптимальных методов восстановления (см., например, обзоры [3–5], монографию [6], статьи [7–12]). Подход к нахождению оптимальных методов восстановления линейных функционалов по неточным исходным данным с позиций теории экстремальных задач впервые был предложен в работе [13].

Лекция 2. Постановка общей задачи оптимального восстановления. Начальные сведения из выпуклого анализа

В приведенных в конце лекции 1 обзорах и статьях была поставлена общая задача восстановления, а именно, задача об оптимальном восстановлении значений линейного оператора на классе элементов по неточной и неполной информации о самих элементах. Ее постановка такова.

Пусть X — линейное пространство, Y и Z — нормированные пространства, $\Lambda\colon X \to Z$ и $I\colon X \to Y$ — линейные операторы, W — некоторое непустое множество (класс) элементов из X и $\delta \geqslant 0$. Рассматривается задача о восстановлении значений оператора Λ на множестве W по следующей информации об элементах этого множества: о любом элементе $x \in W$ нам известен элемент $y \in Y$ такой, что $\|Ix - y\|_Y \leqslant \delta$ (если $\delta > 0$, то мы говорим об информации, заданной неточно, а если $\delta = 0$, то известен элемент Ix, и мы говорим об информации, заданной точно). Под методами восстановления понимаются произвольные отображения $\varphi\colon Y \to Z$.

Следующая диаграмма иллюстрирует действия введенных отображений.

$$\begin{tikzcd} W \subset X \arrow[rr, "\Lambda"] \arrow[dr, "I"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 2.1.

Погрешностью метода φ называется величина

$$e(\Lambda, W, I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W,\, y \in Y, \\ \|Ix - y\|_Y \leqslant \delta}} \big\|\Lambda x - \varphi(y)\big\|_Z .$$

Если $\delta = 0$, то эта погрешность, очевидно, принимает такой вид:

$$e(\Lambda, W, I, 0, \varphi) = \sup_{x \in W} \big\|\Lambda x - \varphi(Ix)\big\|_Z .$$

Нас интересуют величина

$$E(\Lambda, W, I, \delta) = \inf_{\varphi} e(\Lambda, W, I, \delta, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всем отображениям (методам) $\varphi\colon Y \to Z$, которая называется *погрешностью оптимального восстановления*, и те методы $\widehat{\varphi}$, на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E(\Lambda, W, I, \delta) = e(\Lambda, W, I, \delta, \widehat{\varphi}).$$

Такие методы будем называть *оптимальными методами* восстановления (значений оператора Λ на W по данной информации).

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|\Lambda x\|_Z \to \max, \quad \|Ix\|_Y \leqslant \delta, \quad x \in W, \tag{2.1}$$

заключающуюся в нахождении тех допустимых (т. е. удовлетворяющих ограничениям задачи) элементов $\widehat{x}$, на которых максимизируемый функционал достигает своего максимального значения. Обозначим через $S(\Lambda, W, I, \delta)$ *значением* задачи (2.1), т. е. точную верхнюю грань максимизируемого функционала на допустимых элементах.

Предложение 2.1. *Если множество W центрально симметрично, то*

$$E(\Lambda, W, I, \delta) \geqslant S(\Lambda, W, I, \delta). \tag{2.2}$$

$\lhd$ Пусть x_0 — допустимый элемент в (2.1), тогда элемент $-x_0$ также допустим, и мы имеем для любого метода $\varphi\colon Y \to Z$

$$\begin{aligned} 2\|\Lambda x_0\|_Z = \|\Lambda x_0 - \varphi(0) - (\Lambda(-x_0) - \varphi(0))\|_Z \leqslant \|\Lambda x_0 - \varphi(0)\|_Z + \\ + \|\Lambda(-x_0) - \varphi(0)\|_Z \leqslant 2 \sup_{x \in W,\, \|Ix\|_Y \leqslant \delta} \|\Lambda x - \varphi(0)\|_Z \leqslant \\ \leqslant 2 \sup_{\substack{x \in W,\, y \in Y, \\ \|Ix - y\|_Y \leqslant \delta}} \|\Lambda x - \varphi(y)\|_Z = 2e(\Lambda, W, I, \delta, \varphi). \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым x в задаче (2.1), получаем, что

$$S(\Lambda, W, I, \delta) \leqslant e(\Lambda, W, I, \delta, \varphi).$$

Теперь, переходя справа к нижней грани по всем методам φ, приходим к неравенству (2.2). $\triangleright$

Задача (2.1), значение которой дает оценку снизу для погрешности оптимального восстановления, внешне вполне обозрима. Как будет видно из дальнейшего, для многих частных случаев можно найти ее решение, используя стандартные методы теории экстремума. Поэтому важен вопрос о взаимоотношении задачи (2.1) и исходной задачи оптимального восстановления. Когда неравенство (2.2) превращается в равенство? Что можно сказать в этом случае о существовании оптимальных методов восстановления?

Если оператор Λ — линейный функционал ($Z = \mathbb{R}$), а W — выпуклое множество, то задача (2.1) является выпуклой. Исследование таких задач представляет собой одну из основных частей выпуклого анализа — раздела математики, где изучают выпуклые множества, выпуклые функции и выпуклые экстремальные задачи (см. [14]). Важнейшим явлением, сопутствующим выпуклости, является феномен двойственности, о котором сейчас и будет рассказано.

Пусть X — вещественное векторное пространство. Напомним, что непустое множество $A \subset X$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками x и y оно содержит отрезок $[x, y] = \{z \in X : z = (1-\alpha)x + \alpha y, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$, соединяющий точки x и y.

Пустое множество выпукло по определению.

Следующие свойства выпуклых множеств непосредственно следуют из определений.

Если $\{A_i\}_{i \in \mathscr{J}}$ — произвольное семейство выпуклых подмножеств X, то $\bigcap_{i \in \mathscr{J}} A_i$ — выпуклое множество.

Если $\{A_i\}_{i=1}^n$ — конечное семейство выпуклых подмножеств X, то их алгебраическая сумма $A_1 + \ldots + A_n := \{x \in X : x = x_1 + \ldots + x_n, x_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\}$ — выпуклое множество.

Если A — выпуклое подмножество X и $\lambda \in \mathbb{R}$, то множество $\lambda A := \{\lambda x : x \in A\}$ выпукло.

Пусть теперь X — нормированное пространство и X^* — его сопряженное. Значение линейного функционала $x^* \in X^*$ на элементе X обозначаем $\langle x^*, x \rangle$.

Пусть $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$. Множество $H = H(x^*, \gamma) = \{x \in X : \langle x^*, x\rangle = \gamma\}$ называется *гиперплоскостью*. Гиперплоскость порождает два полупространства $H_+(x^*, \gamma) = \{x \in X : \langle x^*, x\rangle \leqslant \gamma\}$ и $H_-(x^*, \gamma) = \{x \in X : \langle x^*, x\rangle \geqslant \gamma\}$.

Ясно, что гиперплоскости и полупространства — выпуклые замкнутые множества.

Пусть A и B — непустые подмножества X. Говорят, что эти множества *отделимы*, если существует такая гиперплоскость, что A и B принадлежат различным полупространствам, порожденным этой гиперплоскостью.

Данное геометрическое определение отделимости равносильно, очевидно, следующему аналитическому: множества A и B отделимы, если существует такой ненулевой элемент $x^* \in X^*$, что

$$\sup_{a\in A}\langle x^*, a\rangle \leqslant \inf_{b\in B}\langle x^*, b\rangle.$$

Если неравенство строгое, то говорят, что множества A и B *строго отделимы*.

Нам понадобится одна теорема отделимости, которую обычно называют *второй теоремой отделимости*.

Теорема 2.1 (вторая теорема отделимости). *Пусть A — непустое выпуклое замкнутое подмножество X и $b \notin A$. Тогда множество A и точка b строго отделимы.*

В основе выпуклой двойственности лежит то обстоятельство, что выпуклость можно определить двояко: непосредственно (как сделано выше) и используя двойственное (сопряженное) пространство. Это можно оформить различными способами. Например, в виде следующего утверждения.

Предложение 2.2. *Множество $A \subset X$ выпукло и замкнуто тогда и только тогда, когда оно есть пересечение всех полупространств его содержащих.*

$\lhd$ Пусть A — замкнутое выпуклое подмножество X и пусть A_1 есть пересечение всех полупространств, содержащих A. Ясно, что множество A_1 выпукло замкнуто и $A \subset A_1$. Покажем, что $A = A_1$. Если это не так, то найдется элемент $x_0 \in A_1 \setminus A$. По теореме отделимости существует ненулевой функционал $x^* \in X^*$ такой, что

$$\langle x^*, x_0\rangle < \inf_{x\in A}\langle x^*, x\rangle.$$

Отсюда следует, что $A \subset H_-(x^*, \gamma)$, где $\gamma = \inf_{x \in A} \langle x^*, x \rangle$. Поскольку $x_0 \in A_1$, то этот элемент должен также принадлежать $H_-(x^*, \gamma)$ согласно определению A_1. Но это противоречит полученному неравенству. Следовательно, $A = A_1$.

Если $A = A_1$, то A выпукло и замкнуто как пересечение выпуклых замкнутых множеств. $\triangleright$

Лекция 3. Вопросы двойственности выпуклых множеств, функций и экстремальных задач

В конце предыдущей лекции было доказано предложение 2.2. Наиболее интересен и полезен аналог этого утверждения для выпуклых функций. Напомним некоторые определения.

Пусть $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — расширенная прямая, т. е. прямая, пополненная символами $+\infty$, продолжающими естественное отношение порядка: $a \leqslant +\infty$, $a \in \mathbb{R}$. Кроме того, предполагается, что $a + \infty = +\infty$ для всех $a \in \mathbb{R}$, $a(+\infty) = +\infty$, если $a > 0$ и $+\infty + \infty = +\infty$.

С каждой функцией $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ свяжем два множества

$$\operatorname{dom} f = \bigl\{x \in X : f(x) < +\infty\bigr\}$$

и

$$\operatorname{epi} f = \bigl\{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : \alpha \geqslant f(x), x \in \operatorname{dom} f\bigr\},$$

которые называются соответственно *эффективным множеством* и *надграфиком* (или *эпиграфом*) функции f.

Функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *выпуклой*, если ее надграфик — выпуклое множество в $X \times \mathbb{R}$.

Вот примеры выпуклых функций на прямой: $x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \geqslant 0$; $x \mapsto e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $x \mapsto |x|^p$, $p \geqslant 1$; $x \mapsto -\ln x$, если $x > 0$ и $+\infty$, если $x \leqslant 0$; $x \mapsto x \log_2 x + (1-x)\log_2(1-x)$, если $0 < x < 1$ и $+\infty$ в остальных случаях.

Легко проверить, что функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ выпукла тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x_2 \in X$ и любых $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ справедливо неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

которое называется *неравенством Иенссена*.

Функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *замкнутой*, если $\operatorname{epi} f$ — замкнутое множество в $X \times \mathbb{R}$.

Легко проверить, что сумма конечного числа выпуклых функций — выпуклая функция и что, если f_i, $i \in \mathscr{I}$, — произвольное семейство выпуклых функций, то функция $f(x) = \sup_{i\in\mathscr{I}} f_i(x)$ выпукла (это равносильно равенству $\operatorname{epi} f = \bigcap_{i\in\mathscr{I}} \operatorname{epi} f_i$, которое легко проверяется и из которого следует, что если f_i — замкнутые функции, то f — замкнутая функция).

Пусть $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — замкнутая выпуклая функция, т. е. $\operatorname{epi} f$ — выпуклое замкнутое множество в $X \times \mathbb{R}$. Согласно предложению 2.2 это множество есть пересечение всех полупространств, его содержащих. Но гиперплоскости, определяющие эти полупространства суть графики аффинных функций $x \mapsto \langle x^*, x\rangle + \alpha$ (см. рис. 3.1), не превосходящих функцию f.

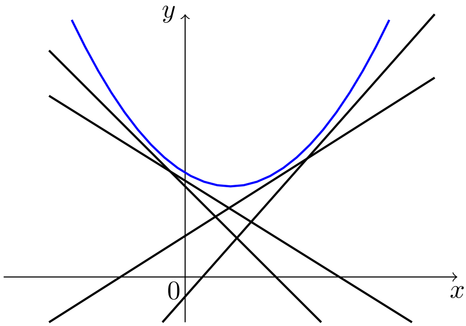

Рис. 3.1.

Как видно из рис. 3.1 (подробного доказательства приводить не будем), это означает, что функция f есть поточечная верхняя грань таких аффинных функций.

Придадим теперь этому утверждению аналитическую форму. Для этого введем некоторые понятия.

Пусть $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Функция $f^*\colon X^* \to \overline{\mathbb{R}}$, определенная равенством

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}(\langle x^*, x\rangle - f(x)),$$

называется *сопряженной функцией* к f или *преобразованием Лежандра — Юнга — Фенхеля*, а функция $f^{**}\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, определенная

по правилу
$$f^{**}(x) = \sup_{x \in X^*} (\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)),$$

называется *второй сопряженной функцией к* f.

Ясно, что функции f^* и f^{**} выпуклы и замкнуты, как верхние грани аффинных функций. Из определений легко следует, что всегда

$$f^{**}(x) \leqslant f(x), \quad \forall\, x \in X.$$

Действительно, $f^*(x^*) = \sup_{x\in X}(\langle x^*, x\rangle - f(x)) \geqslant \langle x^*, x\rangle - f(x)$ для любого $x \in X$. Следовательно, $f(x) \geqslant \langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)$ для всех $x \in X$ и $x^* \in X^*$. Но тогда $f^{**}(x) = \sup_{x\in X^*}(\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)) \leqslant f(x)$.

Теорема 3.1 (Фенхеля — Моро). *Функция* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *выпукла и замкнута тогда и только тогда, когда* $f^{**} = f$.

$\lhd$ Если $f^{**} = f$, то функция f выпукла и замкнута, так как таковой является f^{**}. Пусть f выпукла и замкнута. Если $f(x) \equiv +\infty$, то, очевидно, $f^{**}(x) \equiv +\infty$. Пусть $f \not\equiv +\infty$. Согласно предыдущему существует такая аффинная функция $x \mapsto \langle x^*, x\rangle - \alpha$, что $\langle x^*, x\rangle - \alpha \leqslant f(x)$ для всех $x \in X$ или, равносильно, $\alpha \geqslant \sup_{x\in X}(\langle x^*, x\rangle - f(x)) = f^*(x^*)$. Так как f — верхняя грань таких функций, то для всех $x \in X$
$$f(x) = \sup_{\substack{x^* \in X^*,\, \alpha\in\mathbb{R},\\ \alpha \geqslant f^*(x^*)}} (\langle x^*, x\rangle - \alpha). \tag{3.1}$$

Поскольку функция f не равна тождественно $+\infty$, то в (3.1) вместо α можно взять $f^*(x^*)$. Следовательно, $f(x) = \sup_{x^*\in X^*}(\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)) = f^{**}(x)$ для всех $x \in X$. $\rhd$

Двойственность экстремальных задач. Применим теорему Фенхеля — Моро к построению двойственных задач. Пусть $f_0\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ и C — непустое подмножество X. Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \to \min, \quad x \in C.$$

Определим так называемую *индикаторную функцию* δ множества C по правилу: $\delta C(x) = 0$, если $x \in C$, и $\delta C(x) = +\infty$, если $x \notin C$, и положим $f(x) = f_0(x) + \delta C(x)$, $x \in X$. Тогда выписанная задача, очевидно, равносильна следующей задаче:

$$f(x) \to \min, \quad x \in X. \tag{3.2}$$

Включим ее в серию «подобных» ей задач (или, как говорят, «возмутим» данную задачу). Пусть Y — другое нормированное пространство и функция $F\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ такова, что $F(x,0) = f(x)$ для всех $x \in X$. Каждому $y \in Y$ сопоставим задачу

$$F(x,y) \to \min, \quad x \in X. \tag{3.3}$$

Семейство таких задач называется ***возмущением задачи*** (3.2), а функция $S\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$, сопоставляющая $y \in Y$ значение задачи (3.3), называется ***S-функцией*** данного семейства. Ясно, $S(0)$ — значение исходной задачи (3.2).

Как уже было отмечено, $S^{**}(0) \leqslant S(0)$, а если S-функция выпукла и замкнута (отметим, что несложная проверка показывает, что S-функция выпукла, если функция F выпукла), то по теореме Фенхеля — Моро $S^{**}(0) = S(0)$. Выпишем задачу, значением которой является величина $S^{**}(0)$. По определению $S^{**}(0) = \sup_{y^* \in Y^*}(-S^*(y^*))$. Далее

$$\begin{aligned} S^*(y^*) &= \sup_{y \in Y}(\langle y^*, y\rangle - \inf_{x \in X} F(x,y)) = \\ &= \sup_{x \in X,\, y \in Y}(\langle 0, x\rangle + \langle y^*, y\rangle - F(x,y)). \end{aligned}$$

Справа стоит сопряженная функция к F в точке $(0, y^*)$. Таким образом, задача, значение которой равно $S^{**}(0)$ имеет вид

$$-F^*(0,y^*) \to \max, \quad y^* \in Y^*. \tag{3.4}$$

Задача (3.4) называется ***двойственной задачей к*** (3.2) (относительно заданного возмущения), и значение ее не больше значения задачи (3.2).

Если исходная задача (3.2) на максимум, то двойственной к ней задачей естественно считать задачу

$$F^*(0,y^*) \to \min, \quad y^* \in Y^*.$$

Здесь значение двойственной задачи, как легко понять, не меньше значения исходной задачи.

Лекция 4. Двойственные задачи к задаче линейного программирования и к задаче оптимального восстановления линейного функционала

Найдем двойственные к задаче линейного программирования и задаче оптимального восстановления линейного функционала.

4.1. Задача линейного программирования. Отметим сначала, что элементы пространства $\mathbb{R}^n$ мы рассматриваем как вектор-столбцы. Пространство $(\mathbb{R}^n)^*$ — сопряженное к $\mathbb{R}^n$ — можно отождествить с самим $\mathbb{R}^n$, где элементы суть вектор-строки. Если функционал (вектор-строка) $a^* = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^n)^*$, а $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ (T — знак транспонирования), то значение a^* на x — это $\langle a^*, x\rangle = \sum_{i=1}^n a_i x_i$.

Пусть $c^* \in (\mathbb{R}^n)^*$, A — матрица размера $m \times n$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\langle c^*, x\rangle \to \min, \quad Ax \geqslant b, \quad x \geqslant 0.^1 \tag{4.1}$$

В терминах общей постановки из предыдущей лекции, здесь $f(x) = \langle c^*, x\rangle$, когда $Ax \geqslant b$, $x \geqslant 0$ и $f(x) = +\infty$ в противном случае.

Выпишем двойственную задачу к (4.1) относительно возмущения

$$\langle c^*, x\rangle \to \min, \quad Ax \geqslant b + y, \quad x \geqslant 0,$$

где $y \in \mathbb{R}^m$ (т. е. $F(x, y) = \langle c^*, x\rangle$, когда $Ax \geqslant b + y$, $x \geqslant 0$ и $F(x, y) = +\infty$ в противном случае). Имеем

$$F^*(0, y^*) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, y\in\mathbb{R}^m} (\langle y^*, y\rangle - F(x, y))$$

Если $F(x, y) = +\infty$, то $-F(x, y) = -\infty$, и этот случай нам не интересен, поскольку нас интересует верхняя грань по $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$. Таким образом,

$$F^*(0, y^*) = \sup_{\substack{Ax\geqslant b+y,\\ x\geqslant 0,\, y\in\mathbb{R}^m}} (\langle y^*, y\rangle - \langle c^*, x\rangle).$$

Если хотя бы одна компонента вектора y^* отрицательна, то можно взять вектор y, удовлетворяющий неравенству $Ax \geqslant b + y$ и такой, что у него соответствующая компонента также отрицательна

[1] Неравенства понимаются покоординатно.

и сколь угодно большая по модулю. Следовательно, в этом случае $F^*(0, y^*) = +\infty$. Если $y^* \geqslant 0$, то надо подставить $Ax - b$ вместо y и тогда мы имеем

$$F^*(0, y^*) = \begin{cases} \sup\limits_{x \geqslant 0}(\langle y^*, Ax - b\rangle - \langle c^*, x\rangle), & \text{если} \;\; y^* \geqslant 0; \\ +\infty, & \text{если не так.} \end{cases}$$

Далее

$$\sup_{x \geqslant 0}(\langle y^* A - c^*, x\rangle - \langle y^*, b\rangle) = \begin{cases} -\langle y^*, b\rangle, & \text{если} \;\; y^* A - c^* \leqslant 0; \\ +\infty, & \text{если не так.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$F^*(0, y^*) = \begin{cases} -\langle y^*, b\rangle, & \text{если} \;\; y^* A \leqslant c^*, \; y^* \geqslant 0; \\ +\infty, & \text{если не так,} \end{cases}$$

и следовательно, двойственная задача, обозначая $\lambda = y^*$, имеет вид

$$\langle \lambda, b\rangle \to \max, \quad \lambda A \leqslant c^*, \quad \lambda \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Это, очевидно, снова задача линейного программирования.

4.2. Двойственная к задаче оптимального восстановления линейного функционала. Задача (2.1) из второй лекции в случае, когда $\Lambda = x^*$ — линейный функционал на X (и тем самым $Z = \mathbb{R}$) и множество W центрально симметрично, имеет вид

$$\langle x^*, x\rangle \to \max, \quad \|Ix\|_Y \leqslant \delta, \quad x \in W. \tag{4.3}$$

Найдем двойственную к этой задаче относительно возмущения

$$\langle x^*, x\rangle \to \max, \quad \|Ix - y\|_Y \leqslant \delta, \quad x \in W.$$

В соответствии с общей постановкой здесь $f(x) = \langle x^*, x\rangle$, если $\|Ix\|_Y \leqslant \delta$, $x \in W$, и $f(x) = +\infty$ в противном случае, а $F(x, y) = \langle x^*, x\rangle$, если $\|Ix - y\|_Y \leqslant \delta$, $x \in W$, и $F(x, y) = +\infty$ в противном случае.

Так как здесь задача на максимум, то двойственная задача имеет вид

$$F^*(0, y^*) \to \min, \quad y^* \in Y^*.$$

По определению (учитывая, что множество $\{(x,y) \in X \times Y : x \in W,\ \|Ix-y\|_Y \leqslant \delta\}$ центрально симметрично)

$$F^*(0,y^*) = \sup_{x\in X,\, y\in Y} (\langle y^*, y\rangle - F(x,y)) =$$

$$= \sup_{\substack{x\in W,\, y\in Y,\\ \|Ix-y\|_Y\leqslant\delta}} (\langle y^*, y\rangle - \langle x^*, x\rangle) = \sup_{\substack{x\in W,\, y\in Y,\\ \|Ix-y\|_Y\leqslant\delta}} |\langle x^*, x\rangle - \langle y^*, y\rangle|,$$

т. е. двойственная задача такова:

$$\sup_{\substack{x\in W,\, y\in Y,\\ \|Ix-y\|_Y\leqslant\delta}} \big|\langle x^*, x\rangle - \langle y^*, y\rangle\big| \to \min, \quad y^* \in Y^*. \tag{4.4}$$

Значение этой задачи есть погрешность оптимального восстановления функционала x^* на классе W по информации I, но не по всем методам $\varphi\colon Y \to \mathbb{R}$, а только по линейным. Поскольку задача (4.3) на максимум, то ее значение не меньше значения задачи (4.4), и мы получили аналог неравенства (2.2) для данного случая.

Можно показать, что задача (4.3) является двойственной к задаче (4.4) относительно некоторого возмущения, так что задачи (4.3) и (4.4) двойственны друг к другу.

Для того, чтобы описать как связаны между собой решение задачи (2.1) и оптимальный метод в соответствующей задаче восстановления линейного функционала, нам понадобятся некоторые дополнительные сведения из выпуклого анализа.

4.3. Выпуклые задачи. Введем понятие субдифференциала для функций на нормированном пространстве X, которое является аналогом производной для выпуклых функций. Пусть выпуклая функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ конечна в точке $\widehat{x}$. *Субдифференциалом* функции f в точке $\widehat{x}$ называется множество (возможно пустое)

$$\partial f(\widehat{x}) = \big\{x^* \in X^* : f(x) - f(\widehat{x}) \geqslant \langle x^*, x - \widehat{x}\rangle,\ \forall\, x \in X\big\}.$$

Следующее предложение показывает, что субдифференциал достаточно естественное обобщение понятия производной на выпуклые функции.

Предложение 4.1. *Пусть выпуклая функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ дифференцируема в точке $\widehat{x}$. Тогда $\partial f(\widehat{x}) = \{f'(\widehat{x})\}$.*

$\lhd$ Пусть $x \in X$. Для любого $0 < \alpha < 1$ имеем по неравенству Иенссена: $f((1-\alpha)\widehat{x} + \alpha x) \leqslant (1-\alpha)f(\widehat{x}) + \alpha f(x)$, откуда

$$\frac{f(\widehat{x} + \alpha(x - \widehat{x})) - f(\widehat{x})}{\alpha} \leqslant f(x) - f(\widehat{x}).$$

В силу дифференцируемости f в точке $\widehat{x}$

$$\frac{f(\widehat{x} + \alpha(x - \widehat{x})) - f(\widehat{x})}{\alpha} = \frac{f(\widehat{x}) + \alpha\langle f'(\widehat{x}), x - \widehat{x}\rangle + o(\alpha) - f(\widehat{x})}{\alpha}.$$

Переходя здесь к пределу при $\alpha \to 0$ и учитывая предыдущее неравенство, получаем, что $\langle f'(\widehat{x}), x - \widehat{x}\rangle \leqslant f(x) - f(\widehat{x})$, т. е. $f'(\widehat{x}) \in \partial f(\widehat{x})$.

Обратно, если $x^* \in \partial f(\widehat{x})$, то для любого $x \in X$ и любого $t > 0$ имеем $f(\widehat{x} + tx) - f(\widehat{x}) \geqslant t\langle x^*, x\rangle$. Следовательно,

$$\frac{f(\widehat{x} + tx) - f(\widehat{x})}{t} \geqslant \langle x^*, x\rangle,$$

и аналогично предыдущему, отсюда следует, что $\langle f'(\widehat{x}), x\rangle \geqslant \langle x^*, x\rangle$ для любого x и значит, $x^* = f'(\widehat{x})$. $\rhd$

Приведем два примера вычисления субдифференциалов функций, которые нам понадобятся ниже. Первый пример — это норма в X, т. е. функция $x \mapsto \|x\|_X$. Нетрудно проверить, что

$$\partial\|0\|_X = BX^* = \bigl\{x^* \in X^* : \|x^*\|_{X^*} \leqslant 1\bigr\}$$

и если $x \neq 0$, то

$$\partial\|x\|_X = \bigl\{x^* \in X^* : \|x^*\|_{X^*} = 1,\ \langle x^*, x\rangle = \|x\|_X\bigr\}.$$

Второй пример — это индикаторная функция δ подпространства $L \subset X$, т. е. напомним, $\delta L(x) = 0$, если $x \in L$ и $\delta L(x) = +\infty$, если $x \neq L$. В этом случае, если $\widehat{x} \in L$, то

$$\partial\delta L(\widehat{x}) = L^{\perp},$$

где $L^{\perp} = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = 0, \forall\, x \in L\}$ — аннулятор L. Действительно, по определению

$$\partial\delta L(\widehat{x}) = \bigl\{x^* \in X^* : \delta L(x) - \delta L(\widehat{x}) \geqslant \langle x^*, x - \widehat{x}\rangle,\ \forall\, x \in X\bigr\}.$$

Для $x \in L$ имеем $\langle x^*, x - \widehat{x}\rangle \leqslant 0$. Пусть $x = 2\widehat{x}$, тогда $\langle x^*, \widehat{x}\rangle \leqslant 0$, и тем самым $\langle x^*, x\rangle \leqslant \langle x^*, \widehat{x}\rangle \leqslant 0$ для любого $x \in L$. Взяв $-x$, получим противоположное неравенство и значит, $\partial\delta L(\widehat{x}) \subset L^{\perp}$. Обратно, пусть $x^* \in L^{\perp}$. Если $x \notin L$, то неравенство $\delta L(x) - \delta L(\widehat{x}) \geqslant \langle x^*, x - \widehat{x}\rangle$ очевидным образом выполняется. Если $x \in L$, то $\delta L(x) - \delta L(\widehat{x}) = 0 = \langle x^*, x - \widehat{x}\rangle$ (так как $x - \widehat{x} \in L$) и тем самым $L^{\perp} \subset \partial\delta L(\widehat{x})$.

Лекция 5. Теорема Каруша — Куна — Таккера в субдифференциальной форме и существование оптимальных методов

Перейдем теперь к рассмотрению вопросов, связанных с необходимыми и достаточными условиями минимума для выпуклых задач. Пусть X — вещественное нормированное пространство и $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая функция. Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{5.1}$$

которая называется *выпуклой задачей без ограничений*.

Отметим, что в этой задаче нет смысла говорить о локальных минимумах, поскольку любой локальный минимум является и глобальным. Действительно, пусть $\widehat{x}$ — локальный минимум, т. е. существует такая окрестность U точки $\widehat{x}$, что $f(\widehat{x}) \leqslant f(x)$ для всех $x \in U$. Пусть теперь x — произвольная точка из X. Для достаточно малых $0 < \alpha \leqslant 1$ точки $(1-\alpha)\widehat{x}+\alpha x = \widehat{x}+\alpha(x-\widehat{x})$, очевидно, принадлежат U и поэтому (по неравенству Иенссена) $f(\widehat{x}) \leqslant f((1-\alpha)\widehat{x}+\alpha x) \leqslant (1-\alpha)f(\widehat{x})+\alpha f(x)$, откуда следует, что $f(\widehat{x}) \leqslant f(x)$.

Теорема 5.1 (Ферма для выпуклых функций)**.** *Точка $\widehat{x}$ является минимумом в задаче* (5.1) *тогда и только тогда, когда* $0 \in \partial f(\widehat{x})$.

$\lhd$ Если $\widehat{x}$ — минимум в (5.1), то $f(x)-f(\widehat{x}) \geqslant 0 = \langle 0, x\rangle$ для любого $x \in X$, т. е. $0 \in \partial f(\widehat{x})$. Если $0 \in \partial f(\widehat{x})$, то $f(x)-f(\widehat{x}) \geqslant \langle 0, x\rangle = 0$, т. е. $f(x) \geqslant f(\widehat{x})$ для любого $x \in X$. $\rhd$

Рассмотрим теперь выпуклые задачи с ограничениями. Пусть $f_i\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — выпуклые функции и A — непустое выпуклое подмножество X. Задача

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad x \in A, \tag{5.2}$$

называется *выпуклой задачей* с ограничениями или *задачей выпуклого программирования*.

Теорема 5.2 (Каруша — Куна — Таккера в субдифференциальной форме)**.** *Пусть $\widehat{x}$ — решение задачи* (5.2). *Если функции f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, непрерывны в точке $\widehat{x}$, то найдутся числа $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$, такие, что $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$, $\lambda_i f_i(\widehat{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, и функционал $x_0^* \in \partial\delta A(\widehat{x})$, для которых справедливо включение*

$$0 \in \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \partial f_i(\widehat{x}) + x_0^*.$$

Пусть в задаче (5.2) функции принимают только конечные значения. Сопоставим этой задаче *функцию Лагранжа*, определенную формулой

$$\mathscr{L}(x,\lambda)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(x),$$

где $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ — набор множителей Лагранжа.

Необходимые условия минимума в следующей теореме Каруша — Куна — Таккера (в традиционной форме) являются непосредственным следствием только что сформулированной теоремы.

Теорема 5.3 (Каруша — Куна — Таккера)**.**

1) *Необходимость. Пусть* $\widehat{x}$ *— решение задачи* (5.2). *Если функции* f_i, $i=0,1,\ldots,m$, *непрерывны в точке* $\widehat{x}$, *то найдется ненулевой набор множители Лагранжа* $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ *такой, что*

(*a*) $\min\limits_{x\in A}\mathscr{L}(x,\lambda)=\mathscr{L}(\widehat{x},\lambda)$;

(*b*) $\lambda_i\geqslant 0$, $i=0,1,\ldots,m$;

(*c*) $\lambda_i f_i(\widehat{x})=0$, $i=1,\ldots,m$.

Если существует такая точка $\overline{x}\in A$, *что* $f_i(\overline{x})<0$, $1\leqslant i\leqslant m$, *то* $\lambda_0\neq 0$ (*условие Слейтера*).

2) *Достаточность. Если существует допустимая в* (5.2) *точка* $\widehat{x}$ *и набор множителей Лагранжа* $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ *с* $\lambda_0>0$, *удовлетворяющие условиям* (*a*), (*b*) *и* (*c*), *то* $\widehat{x}$ *— решение задачи* (5.2).

Условие (*c*) называют *условием дополняющей нежесткости.*

Следует сказать, что эта теорема верна и тогда, когда X — вещественное векторное пространство, $f_i\colon X\to\mathbb{R}$, $i=0,1,\ldots,m$, — выпуклые функции и A — непустое выпуклое подмножество X.

Тех сведений из выпуклого анализа, которые были приведены выше, уже достаточно, чтобы исследовать различные конкретные ситуации. Мы начинаем с классических задач теории приближений.

Экстремальные задачи классической теории приближений и оптимальное восстановление. Сначала докажем одно общее утверждение.

Пусть X — нормированное пространство, L — подпространство в X, X^* — сопряженное пространство к X, $x^*\in X^*$ и $\delta>0$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\langle x^*,x\rangle\to\max,\quad \|x\|_X\leqslant\delta,\quad x\in L. \tag{5.3}$$

Эта задача имеет вид задачи (2.1), в которой $Z = \mathbb{R}$, $\Lambda = x^*$, $Y = X$, I — оператор вложения L в X и $W = L$. Таким образом, если поставить задачу оптимального восстановления значений линейного функционала x^* на подпространстве L по следующей информации: элементы $x \in L$ известны с точностью до δ в метрике X, т. е. о каждом $x \in L$ известен элемент $y \in X$ такой, что $\|x - y\|_X \leqslant \delta$, то мы получаем (согласно (2.2)), что величина $E(x^*, L, I, \delta)$ — погрешность оптимального восстановления — не меньше величины $S(x^*, L, I, \delta)$ — значения задачи (5.3).

Естественно считать, что L не принадлежит ядру функционала x^*, так как в противном случае задача не представляет интереса. Если это не так, то функционал принимает и ненулевые значения. Тогда, если у задачи (5.3) есть решение, то оно, очевидно, ненулевое.

Справедливо следующее

Предложение 5.1. *Если $\widehat{x}$ — решение задачи* (5.3), *то найдется линейный функционал $x_1^* \in \partial\|\widehat{x}\|_X$ такой, что линейный метод $\widehat{\varphi}\colon X \to \mathbb{R}$, действующий по правилу*

$$\widehat{\varphi}(y) = \frac{\langle x^*, \widehat{x}\rangle}{\|\widehat{x}\|_X}\,\langle x_1^*, y\rangle,$$

является оптимальным.

Метод $\widehat{\varphi}$ точен на L, т. е. $\widehat{\varphi}(x) = \langle x^*, x\rangle$ для любого $x \in L$.

$\lhd$ Сформулированные теоремы о необходимых условиях касались выпуклых задач на минимум. Чтобы формально этому соответствовать, сопоставим задаче (5.3) следующую задачу:

$$-\langle x^*, x\rangle \to \min, \quad \|x\|_X \leqslant \delta, \quad x \in L. \tag{5.4}$$

Ясно, что это выпуклая задача и что, если $\widehat{x}$ — решение задачи (5.3), то $\widehat{x}$ — решение и задачи (5.4).

Согласно теореме Каруша — Куна — Таккера в субдифференциальной форме, примененной к задаче (5.4), найдутся $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 0, 1$, $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ и $x_0^* \in \partial\delta L(\widehat{x})$ такие, что (субдифференциал линейного линейной функции $x \mapsto \langle x^*, x\rangle$ есть x^*)

$$0 \in -\lambda_0 x^* + \lambda_1\partial\|\widehat{x}\|_X + x_0^*, \tag{5.5}$$

т. е. найдется такой функционал $x_1^* \in \partial\|\widehat{x}\|_X$, что

$$0 = -\lambda_0\langle x^*, x\rangle + \lambda_1\langle x_1^*, x\rangle + \langle x_0^*, x\rangle, \quad \forall\, x \in X. \tag{5.6}$$

Покажем, что $\lambda_0 \neq 0$. Предположим, что $\lambda_0 = 0$. Подставляя $x = \widehat{x}$ в (5.5) и учитывая, что $\langle x_0^*, \widehat{x}\rangle = 0$, поскольку $\widehat{x} \in L$, а $\partial\delta L(\widehat{x}) = L^{\perp}$, и что $\langle x^*, \widehat{x}\rangle = \|\widehat{x}\|_X$ в силу вида субдифференциала нормы, приходим к противоречию: $0 = \|\widehat{x}\|_X \neq 0$.

Деля тождество (5.6) на λ_0 и обозначая $\lambda = \lambda_1/\lambda_0$ и $\widetilde{x}^* = \lambda_0^{-1}x_0^*$, получим, что

$$\langle x^*, x\rangle = \lambda\langle x_1^*, x\rangle + \langle \widetilde{x}^*, x\rangle, \quad \forall\, x \in X,$$

или

$$\langle x^*, x\rangle = \lambda\langle x_1^*, x\rangle, \quad \forall\, x \in L. \tag{5.7}$$

Подставляя сюда $x = \widehat{x}$, получаем, что $\lambda = \langle x^*, \widehat{x}\rangle/\|\widehat{x}\|_X$.

Покажем, что линейный функционал $\widehat{\varphi}$: $y \to \lambda\langle x_1^*, y\rangle$ является оптимальным методом. Оценим его погрешность. Для любых $x \in L$ и $y \in X$ таких, что $\|x - y\|_X \leqslant \delta$ имеем, используя соотношение (5.7) и то, что $\|x_1^*\|_{X^*} = 1$

$$\begin{gathered}\big|\langle x^*, x\rangle - \widehat{\varphi}(y)\big| = \big|\langle x^*, x\rangle - \lambda\langle x_1^*, y\rangle\big| = \\ = \big|\langle x^*, x\rangle - \lambda\langle x_1^*, x\rangle + \lambda\langle x_1^*, x-y\rangle\big| = \lambda\big|\langle x_1^*, x-y\rangle\big| \leqslant \lambda\big\|x-y\big\|_X \leqslant \lambda\delta.\end{gathered}$$

Переходя слева к верхней грани по всем указанным x и y, получим, что

$$e(x^*, L, I, \delta, \widehat{\varphi}) \leqslant \lambda\delta. \tag{5.8}$$

Далее, так как $\lambda_1(\|\widehat{x}\|_X - \delta) = 0$ (согласно теореме), то отсюда и (5.7) следует, что

$$\langle x^*, \widehat{x}\rangle = \lambda\langle x_1^*, \widehat{x}\rangle = \lambda\|\widehat{x}\|_X = \lambda_0^{-1}\big(\lambda_1(\|\widehat{x}\|_X - \delta) + \lambda_1\delta\big) = \lambda\delta,$$

т. е. $\lambda\delta$ — значение задачи (5.3). Тогда, в силу неравенства (2.2), справедлива оценка

$$E(x^*, L, I, \delta) \geqslant \lambda\delta.$$

Из этого неравенства и (5.8) получаем, что

$$\lambda\delta \leqslant E(x^*, L, I, \delta) \leqslant e(x^*, L, I, \delta, \widehat{\varphi}) \leqslant \lambda\delta,$$

и тем самым $\widehat{\varphi}$ — оптимальный метод.

Точность метода $\widehat{\varphi}$ сразу следует из соотношения (5.7). $\triangleright$

Лекция 6. Оптимальное восстановление и задачи классической теории приближений

После доказательства общего результата (предложение 5.1), перейдем непосредственно к классическим задачам теории приближений.

6.1. Задача П. Л. Чебышева об экстраполяции. В 1881 г. Чебышев поставил следующую задачу. Среди всех полиномов степени не выше n, которые на отрезке $[-1,1]$ не превосходят по модулю δ, найти тот, чье значение в точке $\tau > 1$ максимально. Если обозначить через $\mathscr{P}_n$ множество полиномов степени не выше n, то формальная формулировка этой задачи, очевидно, такова

$$x(\tau) \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{C([-1,1]} \leqslant \delta, \quad x(\cdot) \in \mathscr{P}_n. \tag{6.1}$$

Данная задача имеет вид задачи (5.3). Соответствующая задача оптимального восстановления состоит в том, что надо восстановить значения линейного функционала $x(\cdot) \mapsto x(\tau)$ на подпространстве $\mathscr{P}_n$ по следующей информации: полиномы $x(\cdot) \in \mathscr{P}_n$ известны с точностью до δ в метрике $C([-1,1])$, т. е. о каждом $x(\cdot) \in \mathscr{P}_n$ известна функция $y(\cdot) \in C([-1,1])$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([-1,1])} \leqslant \delta$.

Решением этой задачи является полином $\delta T_n(\cdot)$, где $T_n(\cdot)$ — полином Чебышева степени n. Напомним, что этот полином для всех $t \in \mathbb{R}$ имеет вид $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$, $T_1(t) = t$, $T_2(t) = 2t^2 - 1$, $T_3(t) = 4t^3 - 3t$ и т. д. На отрезке $[-1,1]$ полином Чебышева принимает поочередно свои максимальные (равные 1) и минимальные (равные -1) значения в $(n+1)$-й точке, включая точки -1 и 1. Эти точки называют точками *альтернанса* полинома Чебышева.

Согласно предложению 5.1 в задаче оптимального восстановления, соответствующей задаче (6.1), существует линейный оптимальный метод $\widehat{\varphi}$, который определяется функционалом из субдифференциала нормы в $C([-1,1])$ в точке $\delta T_n(\cdot)$. Сопряженное к $C([-1,1])$ можно отождествить с пространством регулярных борелевских мер на $[-1,1]$. В соответствии с описанием субдифференциала нормы в $C([-1,1])$ (см. [14]), мера должна быть сосредоточена в точках альтернанса $\delta T_n(\cdot)$. Тогда в силу точности метода $\widehat{\varphi}$ справедливо равенство

$$\widehat{\varphi}(x(\cdot)) = x(\tau) = \lambda \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i x(\tau_i), \quad \forall\, x(\cdot) \in \mathscr{P}_n,$$

где $\lambda = \delta T_n(\tau)/\delta = T_n(\tau)$ и τ_i, $i = 1,\ldots,n+1$, — точки альтернанса $T_n(\cdot)$. Подставляя в это равенство полиномы n-го порядка $l_1(\cdot),\ldots,l_{n+1}$ такие, что $l_i(\tau_i) = 1$ и $l_i(\tau_j) = 0$, $j \neq i$, получаем равенства $\lambda\mu_i = l_i(\tau)$, $i = 1,\ldots,n+1$, и значит, оптимальный метод действует по правилу

$$\widehat{\varphi}(y(\cdot)) = \sum_{i=1}^{n+1} l_i(\tau)y(\tau_i).$$

Это означает, что надо взять значения функции $y(\cdot)$ (которую мы наблюдаем вместо полинома) в точках τ_i, $i = 1,\ldots,n+1$, провести через них интерполяционный полином Лагранжа и взять значение этого полинома в точке τ. Это и будет наилучший метод восстановления функционала $x(\cdot) \mapsto x(\tau)$ на пространстве $\mathscr{P}_n$ по указанной приближенной информации.

Отметим, что оптимальный метод использует не всю информацию, т. е. не всю функцию $y(\cdot)$, а только ее значения в $(n+1)$-й точке.

6.2. Неравенство С. Н. Бернштейна для тригонометрических полиномов. Обозначим через $\mathbb{T}$ отрезок $[-\pi,\pi]$ с индентифицированными концами, а через $\mathscr{T}_n$ — пространство тригонометрических полиномов степени не выше n. В 1912 году С. Н. Бернштейн доказал следующее точное неравенство:

$$\|\dot{x}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leqslant n\|x(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})},$$

справедливое для всех $x(\cdot) \in \mathscr{T}_n$. Равенство достигается на функции $\sin nt$.

В силу инвариантности нормы относительно сдвига, вопрос о нахождении точной константы в этом неравенстве равносилен нахождению значения следующей экстремальной задачи:

$$\dot{x}(0) \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leqslant \delta, \quad x(\cdot) \in \mathscr{T}_n. \tag{6.2}$$

Вместо δ можно поставить любую положительную константу, но мы взяли δ для связи с задачей оптимального восстановления. Эта задача состоит в том, что требуется восстановить значения линейного функционала $x(\cdot) \mapsto \dot{x}(0)$ на подпространстве $\mathscr{T}_n$ по следующей информации: полиномы $x(\cdot) \in \mathscr{T}_n$ известны с точностью до δ в метрике $C(\mathbb{T})$, т. е. о каждом $x(\cdot) \in \mathscr{T}_n$ известна функция $y(\cdot) \in C(\mathbb{T})$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leqslant \delta$. Рассуждая как и в предыдущем примере, получаем, что оптимальный метод восстановления имеет вид

$$\widehat{\varphi}(y(\cdot)) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{2\sin^2 \frac{\tau_i}{2}}\, y(\tau_i), \quad \tau_i = \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i = 1, \ldots, 2n.$$

И снова, используется не вся функция $y(\cdot)$, а лишь ее значения в $2n$ точках.

6.3. Неравенства Ландау — Колмогорова. Под такими неравенствами понимают неравенства вида

$$\big\|x^{(k)}(\cdot)\big\|_{L_q(T)} \leqslant K \big\|x(\cdot)\big\|^{\alpha}_{L_p(T)} \big\|x^{(n)}(\cdot)\big\|^{\beta}_{L_r(T)}, \tag{6.3}$$

где $0 \leqslant k < n$ — целые, $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, $\alpha, \beta \geqslant 0$ и $T = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$, справедливые для всех функций $x(\cdot) \in L_p(T)$, у которых $(n-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна на T и $x^{(n)}(\cdot) \in L_r(T)$. Это пространство функций обозначим через $\mathscr{W}^n_{p,r}(T)$.

При фиксированном T неравенство (6.3) зависит от пяти параметров k, n, p, q, r (числа α и β определяются ими однозначно). Первое точное (т. е. с наименьшей возможной константой K) неравенство подобного вида для случая, когда $T = \mathbb{R}_+$, $k = 1$, $n = 2$ и $p = q = r = \infty$ было доказано Эдмундом Ландау в 1913 г. В 1938 г. А. Н. Колмогоров доказал точное неравенство для любых $1 \leqslant k < n$ и $p = q = r = \infty$. До сих пор этот результат является одним из самых ярких в этой тематике.

Нахождение точной константы в неравенстве (6.3) равносильно нахождению значения следующей экстремальной задачи:

$$\big\|x^{(k)}(\cdot)\big\|_{L_q(T)} \to \max, \quad \big\|x(\cdot)\big\|_{L_p(T)} \leqslant \delta, \quad \big\|x^{(n)}(\cdot)\big\|_{L_r(T)} \leqslant 1.$$

Здесь также вместо δ и 1 можно поставить любые положительные числа.

Если $q = \infty$, то нахождение значения этой задачи равносильно нахождению значения такой задачи

$$x^{(k)}(0) \to \max, \quad \big\|x(\cdot)\big\|_{L_p(T)} \leqslant \delta, \quad \big\|x^{(n)}(\cdot)\big\|_{L_r(T)} \leqslant 1, \tag{6.4}$$

которая имеет вид задачи (2.1), где $X = \mathscr{W}^n_{p,r}(T)$, Λ — линейный функционал $x(\cdot) \mapsto x^{(k)}(0)$, I — оператор вложения $\mathscr{W}^n_{p,r}(T)$ в $L_p(T)$ и

$$W = W^n_{p,r}(T) = \Big\{x \in \mathscr{W}^n_{p,r}(T) : \big\|x^{(n)}(\cdot)\big\|_{L_r(T)} \leqslant 1\Big\}.$$

Таким образом, соответствующая задача восстановления состоит в том, чтобы восстановить значения функционала $x(\cdot) \mapsto x^{(k)}(0)$ на классе W по следующей информации: известны значения функций из W с точностью до δ в метрике $L_p(T)$, т. е. о каждой функции $x(\cdot) \in W$ известна функция $y(\cdot) \in L_p(T)$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(T)} \leqslant \delta$.

Лекция 7. Оптимальное восстановление и неравенства для производных Ландау — Колмогорова

Если известно решение задачи (6.4) из предыдущей лекции, то в соответствующей задаче оптимального восстановления существует линейный оптимальный метод, и соображения здесь аналогичны тем, что использовались при доказательстве предложения 5.1 из лекции 5. Не будем здесь доказывать соответствующего общего результата, а проиллюстрируем это на примере, когда в задаче (6.4) $T = \mathbb{R}_+$, $n = 1$, $k = 0$ и $p = r = 2$, т. е. рассматриваем задачу

$$x(0) \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant \delta, \quad \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant 1,$$

которую можно записать так:

$$x(0) \to \max, \quad \int\limits_{\mathbb{R}_+} x^2(t)\,dt \leqslant \delta^2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(t)\,dt \leqslant 1, \tag{7.1}$$

где $x(\cdot) \in \mathscr{W}^1_{2,2}(\mathbb{R}_+)$.

Найдем решение этой задачи, используя достаточные условия минимума в стандартной теореме Каруша — Куна — Таккера (см. лекцию 5). Для этого сопоставим задаче (7.1) задачу

$$-x(0) \to \min, \quad \int\limits_{\mathbb{R}_+} x^2(t)\,dt \leqslant \delta^2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(t)\,dt \leqslant 1. \tag{7.2}$$

Очевидно, что решение этой задачи является решением и задачи (7.1). Запишем функцию Лагранжа задачи (7.2), считая, что $\lambda_0 = 1$ (мы можем рассуждать эвристически, не обосновывая каждый шаг, поскольку цель — удовлетворить достаточным условиям, т. е. предъявить допустимую функции и нужные множители

Лагранжа):

$$\mathscr{L}(x(\cdot),\lambda_1,\lambda_2)=-x(0)+\lambda_1\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+}x^2(t)\,dt-\delta^2\Bigg)+\lambda_2\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+}\dot x^2(t)\,dt-1\Bigg).$$

Это гладкая функция, и если в некоторой точке $\widehat{x}(\cdot)$ она достигает минимума, то в этой точке ее производная равна нулю, т. е. для всех $x(\cdot)\in\mathscr{W}^1_{2,2}(\mathbb{R}_+)$ справедливо равенство

$$-x(0)+2\lambda_1\int\limits_{\mathbb{R}_+}\widehat{x}(t)x(t)\,dt+2\lambda_2\int\limits_{\mathbb{R}_+}\dot{\widehat{x}}(t)\dot x(t)\,dt=0. \tag{7.3}$$

Интегрируя по частям во втором интеграле (считая, что функции стремятся к нулю на бесконечности), получаем, что необходимо

$$\lambda_2\ddot{\widehat{x}}(t)-\lambda_1\widehat{x}(t)=0,\quad 2\lambda_2\dot{\widehat{x}}(0)=-1. \tag{7.4}$$

Отсюда ясно, что $\lambda_i>0$, $i=1,2$. Общее решение уравнения есть сумма двух экспонент. Коэффициент при экспоненте с положительной степенью должен быть нулевым, и тем самым

$$\widehat{x}(t)=ce^{-\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}\,t}.$$

Используя второе соотношение в (7.4) и условия дополняющей нежесткости

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+}x^2(t)\,dt=\delta^2,\qquad\int\limits_{\mathbb{R}_+}\dot x^2(t)\,dt=1, \tag{7.5}$$

находим, что $c=1/(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2})$, $\lambda_1=1/(2\delta\sqrt{2\delta})$ и $\lambda_2=\sqrt{\delta}/(2\sqrt{2})$ и значит,

$$\widehat{x}(t)=\sqrt{2\delta}\,e^{-t/\delta}.$$

Итак, функция $\widehat{x}(\cdot)$ допустима в задаче (7.2), так как она удовлетворяет соотношениям (7.5). Эта функция с набором $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$, где $\lambda_0=1$, а λ_1 и λ_2 только что найдены, удовлетворяют соотношениям (a), (b) и (c) теоремы Каруша — Куна — Таккера. Действительно, соотношения (b) и (c) выполняются очевидны образом. Функция Лагранжа выпукла по $x(\cdot)$ и ее производная в точке $\widehat{x}(\cdot)$ обращается в ноль. Следовательно, эта точка является глобальным минимумом функции Лагранжа, т. е. выполнено условие (a).

Таким образом, в силу достаточных условий в теореме Каруша — Куна — Таккера, $\widehat{x}(\cdot)$ — решение задачи (7.2), а значит и задачи (7.1), и тем самым ее значение равно $\widehat{x}(0) = \sqrt{2\delta}$. Тогда согласно оценке (2.2)

$$E(x(0), W_2^1(\mathbb{T}), I, \delta) \geqslant \sqrt{2\delta}. \tag{7.6}$$

Подставляя в (7.3) найденные $\widehat{x}(\cdot)$, λ_1 и λ_2, получим, что для всех $x(\cdot) \in \mathscr{W}_{2,2}^1(\mathbb{R}_+)$ выполняется равенство

$$x(0) = \frac{1}{\delta}\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta}\, x(t)\, dt - \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta}\, \dot{x}(t)\, dt, \tag{7.7}$$

справедливость которого можно проверить и непосредственно.

Опираясь на это равенство и рассуждая аналогично тому как это было сделано при доказательстве предложения 5.1 (см. лекцию 5), нетрудно показать, что линейный метод $\widehat{\varphi}\colon L_2(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}$, действующий по правилу

$$\widehat{\varphi}(y(\cdot)) = \frac{1}{\delta}\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta}\, y(t)\, dt,$$

является оптимальным. Тем не менее, проведем здесь эти рассуждения.

Оценим погрешность метода $\widehat{\varphi}$. Пусть $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ и $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ такое, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant \delta$. Тогда, в силу (7.7), имеем

$$\begin{gathered} x(0) - \widehat{\varphi}(y) = x(0) - \frac{1}{\delta}\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta}\, y(t)\, dt = \\ = x(0) - \frac{1}{\delta}\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta}\, x(t)\, dt + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta}\, (x(t) - y(t))\, dt = \\ = -\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta}\, \dot{x}(t)\, dt + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta}\, (x(t) - y(t))\, dt. \end{gathered}$$

Оценивая интегралы справа по неравенству Коши — Буняковского, получим, что

$$\bigl|x(0) - \widehat{\varphi}(y)\bigr| \leqslant \sqrt{\frac{\delta}{2}}\, \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{\delta}{2}}\, \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant \sqrt{2\delta}$$

и значит, $e(x(0), W_2^1(\mathbb{T}), I, \delta, \widehat{\varphi}) \leqslant \sqrt{2\delta}$. Отсюда и из оценки (7.6) следует, что

$$\sqrt{2\delta} \leqslant E(x(0), W_2^1(\mathbb{T}), I, \delta) \leqslant e(x(0), W_2^1(\mathbb{T}), I, \delta, \widehat{\varphi}) \leqslant \sqrt{2\delta},$$

т. е. $\widehat{\varphi}$ — оптимальный метод.

До сих пор рассматривались задачи восстановления линейных функционалов. Теперь мы займемся задачами восстановления линейных операторов. Начнем с задач восстановления периодических функций по конечному набору их коэффициентов Фурье.

Сначала сделаем несколько предварительных замечаний. Обозначим через $\mathscr{W}_2^1(\mathbb{T})$ (напомним, $\mathbb{T}$ обозначает отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами) совокупность абсолютно непрерывных 2π-периодических функций, производные которых принадлежит $L_2(\mathbb{T})$. Пусть $x(\cdot) \in \mathscr{W}_2^1(\mathbb{T})$. Тогда, как хорошо известно, эта функция в каждой точке t единственным образом разлагается в ряд Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

который сходится к ней равномерно. Коэффициенты Фурье a_k и b_k вычисляются по формулам

$$a_k = a_k(x(\cdot)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos kt\,dt, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k = b_k(x(\cdot)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin kt\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Восстановление в среднеквадратической метрике по точным значениям коэффициентов Фурье. Определим следующий класс функций:

$$W_2^1(\mathbb{T}) = \bigl\{x(\cdot) \in \mathscr{W}_2^1(\mathbb{T}) : \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1\bigr\}.$$

Пусть n_1 и n_2 — натуральные числа. Допустим, что о каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ нам известны ее коэффициенты Фурье

$a_k = a_k(x(\cdot))$, $k = 0, 1, \ldots, n_1$, и $b_k = b_k(x(\cdot))$, $k = 1, \ldots, n_2$. Мы хотим по этой информации восстановить функции из класса $W_2^1(\mathbb{T})$.

В терминах общей постановки здесь $X = \mathscr{W}_2^1(\mathbb{T})$, $Z = L_2(\mathbb{T})$, Λ — оператор вложения $\mathscr{W}_2^1(\mathbb{T})$ в $L_2(\mathbb{T})$, информационный оператор $I = I_{n_1,n_2}\colon \mathscr{W}_2^1(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}^{n_1+n_2+1}$, $I_{n_1,n_2}x(\cdot) = (a_0, a_1, \ldots, a_{n_1}, b_1, \ldots, b_{n_2})$ и $\delta = 0$.

В данной задаче погрешность оптимального восстановления обозначим так: $E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{n_1,n_2})$.

Теорема 7.1. *Пусть $n_0 = \min(n_1, n_2)$. Тогда*

$$E\big(W_2^1(\mathbb{T}), I_{n_1,n_2}\big) = \frac{1}{n_0+1}.$$

Метод

$$\widehat{\varphi}(I_{n_1,n_2}x(\cdot))(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n_0}(a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad t \in \mathbb{T},$$

где $a_k = a_k(x(\cdot))$, $k = 0, 1, \ldots, n_0$ и $b_k = b_k(x(\cdot))$, $k = 1, \ldots, n_0$, является оптимальным.

Отметим, что хотя коэффициенты Фурье функции известны точно, оптимальный метод использует не все коэффициенты Фурье, а только с номерами до n_0 (а их может быть очень мало).

Лекция 8. Оптимальное восстановление периодических функций и решений дифференциальных уравнений

Доказательство теоремы, сформулированной в конце предыдущей лекции, достаточно просто, и поэтому приведем его здесь.

$\lhd$ Согласно оценке (2.2) из первой лекции погрешность оптимального восстановления не меньше значения следующей задачи:

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \to \max, \quad I_{n_1,n_2}x(\cdot) = 0, \quad \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1 \tag{8.1}$$

на пространстве $\mathscr{W}_2^1(\mathbb{T})$. Покажем, что значение $S(W_2^1(\mathbb{T}), I_{n_1,n_2})$ этой задачи не меньше $1/(n_0+1)$.

Действительно, пусть $n_0 = n_1$. Рассмотрим функцию $x_0(t) = \cos(n_0+1)t/(n_0+1)$. Тогда ясно, что $I_{n_1,n_2}x_0(\cdot) = 0$. Элементарный подсчет показывает, что $\|\dot{x}_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = 1$ и $\|x_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = 1/(n_0+1)$.

Если $n_0 = n_1$, то беря функцию $x_0(t) = \sin(n_0+1)t/(n_0+1)$, приходим к тем же выводам. Таким образом, функция x_0 допустима в задаче (8.1) и, следовательно, $S(W_2^1(\mathbb{T}), I_{n_1,n_2}) \geqslant 1/(n_0+1)$. Отсюда вместе с оценкой (2.2) получаем, что

$$E\bigl(W_2^1(\mathbb{T}), I_{n_1,n_2}\bigr) \geqslant \frac{1}{n_0+1}. \tag{8.2}$$

Оценим погрешность метода $\widehat{\varphi}$ из формулировки теоремы. Предварительно отметим, что если $x(\cdot) \in \mathscr{W}_2^1(\mathbb{T})$, то для этой функции и ее производной справедливы соответственно равенства Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2(t)\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\bigl(a_k^2+b_k^2\bigr)$$

и

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \dot{x}^2(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\bigl(a_k^2+b_k^2\bigr).$$

Пусть $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$. Используя равенство Парсеваля для $x(\cdot)$, элементарные оценки и равенство Парсеваля для $\dot{x}(\cdot)$, будем иметь

$$\bigl\|x(\cdot) - \varphi(I_{n_1,n_2}x(\cdot))(\cdot)\bigr\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\bigl(a_k^2+b_k^2\bigr) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n_0+1)^2}\sum_{k=n_0+1}^{\infty} k^2\bigl(a_k^2+b_k^2\bigr) \leqslant \frac{1}{(n_0+1)^2}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\bigl(a_k^2+b_k^2\bigr) =$$

$$= \frac{1}{(n_0+1)^2}\bigl\|\dot{x}(\cdot)\bigr\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant \frac{1}{(n_0+1)^2}.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей этого неравенства и переходя слева к верхней грани по всем $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$, получаем оценку

$$e\bigl(W_2^1(\mathbb{T}), I_{n_1,n_2}, \widehat{\varphi}\bigr) \leqslant \frac{1}{n_0+1}.$$

Отсюда и (8.2) следует, что

$$\frac{1}{n_0+1} \leqslant E\bigl(W_2^1(\mathbb{T}), I_{n_1,n_2}\bigr) \leqslant e\bigl(W_2^1(\mathbb{T}), I_{n_1,n_2}, \widehat{\varphi}\bigr) \leqslant \frac{1}{n_0+1},$$

т. е. $\widehat{\varphi}$ — оптимальный метод и $E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{n_1,n_2}) = 1/(n_0+1)$. $\triangleright$

8.1. Восстановление в среднеквадратической метрике по неточным значениям коэффициентов Фурье. Рассмотрим теперь задачу восстановления функции $x(\cdot)$ на том же классе $W_2^1(\mathbb{T})$, но в ситуации, когда вместо точных значений ее коэффициентов Фурье $a_k = a_k(x(\cdot))$, $k = 0, 1, \ldots, n_1$ и $b_k = b_k(x(\cdot))$, $k = 1, \ldots, n_2$, известны лишь их приближенные значения, т. е. известны числа $\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_{n_1}$ и $\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_{n_2}$ такие, что

$$|a_k - \widetilde{a}_k| \leqslant \delta,\ k = 0, 1, \ldots, n_1, \quad |b_k - \widetilde{b}_k| \leqslant \delta,\ k = 1, \ldots, n_2,$$

где $\delta > 0$.

Погрешность оптимального восстановления в этой задаче обозначаем так $E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{n_1,n_2}, \delta)$.

Для каждого $\delta > 0$ положим

$$p(\delta) = \max\bigl\{p \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 p(p+1)(2p+1) < 3\bigr\}.$$

Теорема 8.1. *Пусть* $p_0 = p_0(\delta, n_1, n_2) = \min(p(\delta), n_1, n_2)$. *Тогда*

$$E\bigl(W_2^1(\mathbb{T}), I_{n_1,n_2}, \delta\bigr) = \frac{1}{p_0+1}\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{6}\,(p_0+1)(8p_0^2 + 13p_0 + 3)}\,.$$

Метод

$$\widehat{\varphi}(\widetilde{a}_0, \ldots, \widetilde{a}_{n_1}, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_{n_2})(t) = \\ = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{p_0}\left(1 - \left(\frac{k}{p_0+1}\right)^2\right)\bigl(\widetilde{a}_k \cos kt + \widetilde{b}_k \sin kt\bigr), \quad t \in \mathbb{T},$$

является оптимальным.

Заметим, что оптимальный метод использует далеко не всю имеющуюся информацию о коэффициентах Фурье, а ту, которую использует, фильтрует («сглаживает»). Это соответствует тому, что происходит на практике: высокие частоты отбрасывают, а низкие сглаживают.

Перейдем теперь к задаче оптимального восстановления решения дифференциального уравнения по неточным начальным данным.

8.2. Восстановление решения уравнения теплопроводности в данный момент времени по неточным его измерениям в другие моменты времени. Распространение тепла на прямой $\mathbb{R}$ описывается, как хорошо известно, уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где $u(\cdot,\cdot)$ — функция на $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ с заданным начальным распределением температуры

$$u(0,\cdot) = u_0(\cdot).$$

Мы предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Единственным решением выписанного уравнения является интеграл Пуассона

$$u(t,x) = u(t,x;u_0(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\, u_0(\xi)\, d\xi, \tag{8.3}$$

и при этом $u(t,\cdot) \to u_0(\cdot)$ при $t \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Ставится следующая задача. Пусть в моменты времени $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ приближенно известны распределения температур $u(t_1,\cdot),\ldots,u(t_n,\cdot)$. Точнее говоря, известны функции $y_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\big\|u(t_i,\cdot) - y_i(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_i, \quad i = 1,\ldots,n,$$

где $\delta_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$. Мы хотим каждому такому набору функций сопоставить функцию из $L_2(\mathbb{R})$, которая бы наилучшим образом аппроксимировала истинное распределение температуры на $\mathbb{R}$ в фиксированный момент времени t.

Формально эта задача не попадает под общую постановку задачи оптимального восстановления, сформулированную в первой лекции, но которую легко обобщить, чтобы покрывался и этот случай. Мы не стали этого делать, чтобы не загромождать изложение. Непосредственно здесь поставим соответствующую задачу оптимального восстановления.

Каждому методу φ из $(L_2(\mathbb{R}))^n = L_2(\mathbb{R}) \times \ldots \times L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$ сопоставляем его погрешность по формуле

$$e\big(t,\overline{\delta},\varphi\big) = \sup_{\substack{u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\, \overline{y}(\cdot)\in (L_2(\mathbb{R}))^n,\\ \|u(t_i,\cdot)-y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant \delta_i,\, i=1,\ldots,n}} \big\|u(t,\cdot) - \varphi(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot),\ldots,y_n(\cdot))$ и $\overline{\delta} = (\delta_1,\ldots,\delta_n)$.

Как и раньше, нас интересует погрешность оптимального восстановления, которая имеет вид

$$E(t,\overline{\delta}\,) = \inf_{\varphi\colon\, (L_2(\mathbb{R}))^n \to L_2(\mathbb{R})} e(t,\overline{\delta},\varphi),$$

и оптимальные методы, т. е. методы, на которых нижняя грань достигается.

Перед формулировкой теоремы сделаем некоторые построения. Напомним, что если A — некоторое подмножество линейного пространства X, то $\operatorname{co} A$ обозначает выпуклую оболочку A, т. е. наименьшее выпуклое множество, содержащее A. Преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ обозначаем через F.

На двумерной плоскости (t,x) рассмотрим множество (см. рис. 8.1)

$$M = \operatorname{co}\big\{(t_j, \ln(1/\delta_j)),\ 1 \leqslant j \leqslant n\big\} + \big\{(t,0) \mid t \geqslant 0\big\}.$$

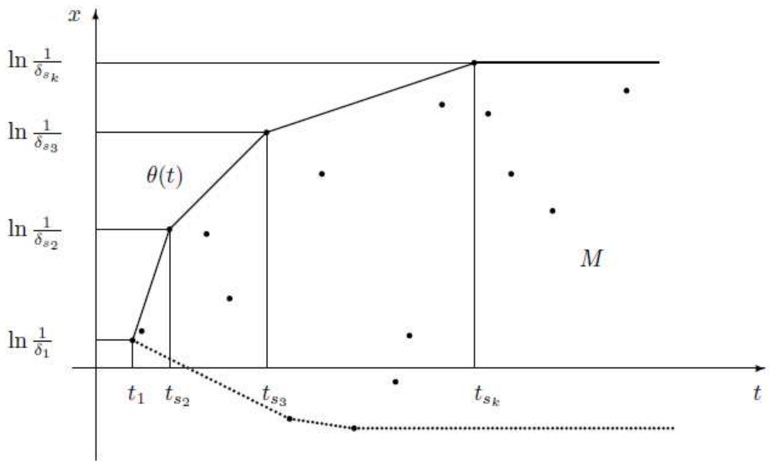

Рис. 8.1.

Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0,\infty)$ равенством: $\theta(t) = \max\{x \,|\, (t,x) \in M\}$, причем $\theta(t) = -\infty$, если $(t,x) \notin M$ для всех x. Ясно, что на $[t_1,\infty)$ функция $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная. Обозначим через $t_{s_1} < \ldots < t_{s_k}$ ее точки излома (считая t_1 также точкой излома, т. е. $t_{s_1} = t_1$), которые, очевидно, являются подмножеством точек $\{t_1,\ldots,t_n\}$.

Для $t \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, мы полагаем

$$\lambda_{s_j}(t) = \frac{t_{s_{j+1}} - t}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{\frac{-2(t - t_{s_j})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}},$$

$$\lambda_{s_{j+1}}(t) = \frac{t - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{\frac{2(t_{s_{j+1}} - t)}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}}.$$

Легко видеть, что это положительные числа и $\lambda_{s_j}(t) < 1$.

Определим также следующее множество:

$$B_j(t) = \left\{ \xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leqslant \sqrt{-\frac{\ln \lambda_{s_j}(t)}{2(t - t_{s_j})}} \right\}.$$

Теорема 8.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *Для любого* $t \geqslant 0$

$$E(t, \overline{\delta}\,) = e^{-\theta(t)}.$$

2) *Если* $t \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, *то множество измеримых функций* $\omega(\cdot)$ *на* $\mathbb{R}$ *таких, что*

$$\begin{cases} \dfrac{\left| e^{-(t - t_{s_j})a(\xi)} - \omega(\xi) e^{-(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})a(\xi)} \right|^2}{\lambda_{s_j}(t)} + \dfrac{|\omega(\xi)|^2}{\lambda_{s_{j+1}}(t)} \leqslant 1, & \xi \in B_j(t), \\ 0, & \xi \neq B_j(t) \end{cases}$$

непусто и для каждой такой функции $\omega(\cdot)$ *метод* $\widehat{\varphi}_\omega$, *определенный по формуле*

$$\widehat{\varphi}_\omega(y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot))(\cdot) = (K_j * y_{s_j})(\cdot) + (K_{j+1} * y_{s_{j+1}})(\cdot),$$

где $F[K_j](\xi) = e^{-(t - t_{s_j})a(\xi)} - \omega(\xi) e^{-(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})a(\xi)}$ *и* $F[K_{j+1}](\xi) = \omega(\xi)$ *для п. в.* $\xi \in \mathbb{R}^d$, *является оптимальным.*

3) *Если* $t = t_{s_j}$, *тогда метод* $\widehat{\varphi}$, *определенный формулой* $\widehat{\varphi}(y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot))(\cdot) = y_{s_j}(\cdot)$, *является оптимальным.*

4) *Если* $t > t_{s_k}$, *то метод* $\widehat{\varphi}$, *определенный формулой* $\widehat{\varphi}(y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot))(\cdot) = (K * y_{s_k})(\cdot)$, *где* $F[K](\xi) = e^{-(t - t_{s_k})a(\xi)}$ *для п. в.* $\xi \in \mathbb{R}^d$, *является оптимальным.*

Сделаем несколько замечаний по поводу сформулированной теоремы.

1. Если $t_1 > 0$ и $0 \leqslant t_1 < t$, то $\theta(t) = -\infty$ и, следовательно, $E(t) = +\infty$; т. е. прошлое нельзя восстановить по неточному настоящему. В этом случае любой метод можно рассматривать как оптимальный.

2. Формулы для оптимальных методов определены корректно. Действительно, функции $\omega(\cdot)$, очевидно, ограничены, и так как они равны нулю вне некоторого шара, то они принадлежат $L_2(\mathbb{R})$.

3. Оптимальные методы линейны, сглаживают наблюдения и используют информацию о не более, чем двух измерениях.

4. Если $t = t_i$ и t_i не точка излома функции $\theta(\cdot)$, то оптимальный метод позволяет это измерение уточнить.

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: дис. … канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1965.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки.—1991.—Т. 50, № 6.—С. 85–93.
3. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A Survey of Optimal Recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory / Eds. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin.—P. 1–54.—N. Y.: Plenum Press, 1977.
4. *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal Estimation of Linear Operators in Hilbert Spaces from Inaccurate Data // SIAM J. Numer. Anal.—1979.—Vol. 16.—P. 87–105. DOI: 10.1137/0716007.
5. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery.—Berlin: Springer–Verlag, 1985.—P. 21–93.—(Lect. Notes Math. Vol. 1129).
6. *Traub J. F., Woźniakowski H.* A General Theory of Optimal Algorithms.–N. Y.: Acad. Press, 1980.
7. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил.—2003.—Т. 37, № 3.—С. 51–64. DOI: 10.4213/faa157.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб.—2009.—Vol. 200, № 5.—P. 37–54. DOI: 10.4213/sm7301.
9. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил.—2010.—Т. 44, № 3.—С. 76–79. DOI: 10.4213/faa2999.
10. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди — Литтлвуда — Полиа и восстановление производных по неточной информации // Докл. АН.—2011.—Т. 438, № 3.—С. 300–302.

11. *Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О.* Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру // Мат. сб.—2012.—Т. 203, № 4.—С. 119–130. DOI: 10.4213/sm7903.
12. *Magaril-Il'yaev G. G., Sivkova E. O.* Optimal Recovery of Semi-Group Operators from Inaccurate Data // Eurasian Math. J.—2019.—T. 10, № 4.—P. 75–84. DOI: 10.32523/2077-9879-2019-10-4-75-84.
13. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа // Мат. сб.—1997.—Т. 188, № 12.—С 73–106. DOI: 10.4213/sm274.
14. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения, изд. 5-е, доп.—М.: УРСС, 2020.

Магарил-Ильяев Георгий Георгиевич
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
РОССИЯ, 119991, Москва, Ленинские горы, 1
E-mail: `magaril@mech.math.msu.su`, `georgii.magaril@math.msu.ru`

OPTIMAL RECOVERY OF LINEAR FUNCTIONALS AND OPERATORS

G. G. Magaril-Il'yaev

The lectures present the beginnings of the theory of optimal recovery of the values of linear functionals and operators on classes of sets whose elements are known approximately. Particular attention is paid to the recovery of linear functionals, where the theory relies heavily on the methods of convex analysis. Various examples are given, mainly related to problems of classical approximation theory. The lectures are intended for a wide range of readers.

Key words: optimal recovery, optimal method, extremal problem, convex duality.

УДК 517.958

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ[1]

Ж. Д. Тотиева

В цикле лекций представлены некоторые методы решения начально-краевых задач для квазилинейной гиперболической системы Сен-Венана. Данные задачи учитывают боковую приточность (объем притекающей жидкости на единицу длины русла), что является важным фактором при моделировании таких катастрофических явлений как паводковые потоки. Рассмотрены эффективные численные алгоритмы для построенных математических моделей. Кроме того, представлены и изучены модели образования волны прорыва в гидротехнических сооружениях при обвально-оползневых явлениях.

Ключевые слова: теория «мелкой» воды, боковая приточность, паводковые потоки, волны прорыва, конвективно-диффузионная модель.

Лекция 1. Линеаризованные постановки задач теории «мелкой» воды

Идея применения дифференциальных уравнений непосредственно для решения задач о гравитационных волнах в естественных водоемах совсем не является новой. Теоретические основы гидравлического моделирования были заложены в XIX веке. Действительно, она восходит еще к работе Массау 1889 года, в которой были предприняты первые попытки решения уравнений неустановившегося течения воды в водоемах. *Неустановившемся, или нестационарным*, движением жидкости называется движение, переменное по времени. При этом движении вектор скорости (v), глубина потока жидкости (H) являются функциями не только координат точки, но и времени.

Впервые уравнения движения воды в руслах рек были выведены французским ученым Сен-Венаном в 1871 г. С тех пор идеей Массау руководствовались многие другие авторы (большей частью, не зная о работе Массау), например, Прейсверк, Карман, Томас и Стокер. Период 30–40 гг. XX века характеризовался широким применением

[1]Курс лекций подготовлен в Северо-Кавказском центре математических исследований ВНЦ РАН при поддержке Минобрнауки России, соглашения № 075-02-2021-1844, № 075-02-2022-896, № 075-02-2023-914.

физических моделей для решения инженерных задач гидравлики открытых потоков. Первоначально предназначенные для качественного анализа изучаемых явлений, в дальнейшем модели стали применяться в качестве основ для принятия проектных решений. В 1938 г. фундаментальное исследование неустановившихся движений в открытых руслах было выполнено академиком АН СССР С. А. Христиановичем. В работе детально изучены математические вопросы применения метода характеристик и возможности его обобщения. Чуть позже были выполнены новые исследования системы уравнений Сен-Венана по адаптации численных решений [1]. Стимулом для крупных исследований по неустановившемуся движению послужила проблема затопления земель из-за наводнения реки Миссури в конце 40-х гг. годов.

В 60-70-е гг. над методами расчета неустановившихся течений в системах открытых русел активно работают ученые Института гидродинамики СО АН СССР под руководством академика О. Ф. Васильева [2, 3]. Одновременно проводились работы и аналитического характера по построению приближенных решений уравнений Сен-Венана (МИСИ, ВНИИГ имени Веденеева, Груз НИИЭГС и др). Получены различные результаты, касающиеся образования гравитационных вон в горных водоемах в случае оползней, обвалов и поступлений потоков лавинного характера.

Далее в 80–90-х годах была проведена большая работа в развитии численных методов гидродинамики учеными Института вычислительных технологий СО РАН под руководством академика Ю. И. Шокина и др. [4–6].

Что касается современного состояния проблемы образования гравитационных волн, то сейчас можно говорить именно о качественном развитии численных методов математического моделирования природных и антропогенных катастроф, основанном на использовании современных вычислительных машин. Здесь можно отметить, например, работы лаборатории математического моделирования волн цунами Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН [7, 8].

Данный материал знакомит читателя с некоторыми методами (как аналитическими, так и численными) решения начально-краевых задач для уравнений Сен-Венана. Материал не претендует на полноту, а лишь представляет некоторые эффективно решаемые постановки задач, интересные с точки зрения приложений.

1.1. Аналитические методы решения некоторых начально-краевых задач для системы уравнений Сен-Венана.

1.1.1 Решение линеаризованных начально-краевых задач для уравнений Сен-Венана. Ввиду большого числа используемых гидравлических характеристик и расчетных формул, приведем их перечень непосредственно перед постановкой задач: x — пространственная переменная (продольная координата); t — временная переменная; $\omega(x,t)$ — площадь поперечного сечения («живое» сечение) водотока, русла реки; $v(x,t)$ — скорость течения жидкости; $H(x,t)$ — глубина водотока; $i = \text{const}$ — уклон дна русла; g — ускорение свободного падения; $Q(x,t) = \nu\omega$ — расход (объем жидкости, протекающий за единицу времени через поперечное сечение русла); $K(x,t)$ — модуль расхода, причем при установившемся течении $Q = K\nu^6 i$; $R(x,t) = \frac{\omega}{\chi}$ — гидравлический радиус, $\chi = B + 2H$ — смоченный периметр, $B(x,t)$ — ширина водотока; $q(x,t)$ — путевой приток или интенсивность боковой приточности водотока (может быть обусловлена снеготаянием и дождевыми осадками), иными словами, объем жидкости, притекающий на единицу длины водотока (русла реки).

Система уравнений Сен-Венана имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{\omega}\right) = g\omega\left(i - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{Q^2}{K^2}\right). \end{cases} \tag{1.1}$$

В данной системе искомыми величинами являются расход Q, глубина H и площадь живого сечения ω. Предположим, что естественное русло потока жидкости будет прямоугольным, т. е. $\omega = BH$, где $B = \text{const}$ — известная ширина потока по свободной поверхности. Это предположение уменьшает количество неизвестных. Этому же способствует применение некоторых гидравлических формул, а именно, модуль расхода, например, выражается формулой

$$K = \omega C\sqrt{R},$$

где $= \frac{1}{n}R^{\frac{1}{6}}$ — коэффициент Шези (по формуле Маннинга), n — коэффициент шероховатости дна, заданный в специальных таблицах. Также предполагаем, что русло широкое, т. е. $H >> B$. Исходя из этого предположения, справедлива цепочка равенств

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{BH}{B+2H} = H\frac{1}{1+2\frac{H}{B}} \approx H.$$

Тогда,

$$K = \frac{1}{n}\,\omega H^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{n}\,BH^{\frac{5}{3}}.$$

Таким образом, вышеизложенные выкладки позволили сузить множество неизвестных функций до двух, описывающих изменение расхода жидкости и глубины.

Интенсивность боковой приточности является известной и задается формулой

$$q(x,t) = \begin{cases} q_0, & 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant L, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Постановка задачи. В области определить функции расхода и глубины водотока системы (1.1) с учетом (1.2), если начальные и внешние граничные условия ставятся следующим образом:

$$\begin{aligned} Q(x,0) &= Q_0(x), \quad H(x,0) = H_0(x), \\ Q(0,t) &= Q_1(t), \quad H(0,t) = H_1(t), \\ Q\big|_{x=\infty} &< \infty, \quad H\big|_{x=\infty} < \infty, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $Q_0(x), H_0(x)$, $Q_1(t), H_1(t)$ — заданные функции.

Цель задачи — получить аналитическое решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), применяя метод линеаризации. Предполагаем, что первоначально имело место установившееся и равномерное движение воды в рассматриваемом русле при расходе воды $Q_0 = \mathrm{const}$ и глубине воды $H_0 = \mathrm{const}$. Тогда рассмотрим малые отклонения от средних значений

$$Q = Q_0 + \widetilde{Q}(x,t), \quad H = H_0 + \widetilde{H}(x,t), \tag{1.4}$$

где $\widetilde{H}(x,t)$, $\widetilde{Q}(x,t)$ — величины, квадратами которых можно пренебречь.

Подставляя выражения (1.4) в (1.1), получим отдельные члены уравнений, содержащие $\widetilde{H}\widetilde{Q}$, $\widetilde{H}^2$, $\widetilde{Q}^2$. Пренебрегая этими членами ввиду их малости, выводим систему линейных дифференциальных уравнений относительно $\widetilde{Q}, \widetilde{H}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial t} + a\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial x} + b\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x} = c\widetilde{H} - l\widetilde{Q}, \\ B\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial t} + \frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x} = q, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$a = BgH_0 - \frac{Q_0^2}{BH_0^2}, \quad b = 2\frac{Q_0}{BH_0},$$
$$c = \frac{10}{3}g\frac{n^2}{BH_0^{\frac{10}{3}}}, \quad l = 2gQ_0\frac{n^2}{BH_0^{\frac{7}{3}}}.$$

Начальные и граничные условия для (1.5) тогда с учетом (1.3), (1.4) выглядят следующим образом:

$$\widetilde{Q}(x,t)\big|_{t=0} = 0 \quad \text{и} \quad \widetilde{H}(x,t)\big|_{t=0} = 0, \tag{1.6}$$

$$\widetilde{Q}(x,t)\big|_{x=0} = 0 \quad \text{или} \quad \widetilde{H}(x,t)\big|_{x=0} = 0, \tag{1.7}$$

$$\widetilde{Q}(x,t)\big|_{x=\infty} < \infty, \quad \widetilde{H}(x,t)\big|_{x=\infty} < \infty. \tag{1.8}$$

Применим преобразование Лапласа к задаче (1.5)–(1.8):

$$\overline{Q}_p(x) := \int\limits_0^\infty \widetilde{Q}(x,t)e^{-pt}\,dt, \quad \overline{H}_p(x) := \int\limits_0^\infty \widetilde{H}(x,t)e^{-pt}\,dt,$$

$$q_1 := \int\limits_0^\infty q(x,t)e^{-pt}\,dt = q_0\frac{1-e^{-pT}}{p}.$$

где p — комплексное число, $\operatorname{Re} p > 0$. В последующих выкладках будет использовано следующее свойство преобразования Лапласа:

$$p\overline{Q}_p(x) := \int\limits_0^\infty \frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial t}(x,t)e^{-pt}\,dt.$$

В результате преобразования Лапласа система (1.5) принимает вид:

$$\begin{cases} p\overline{Q}_p + a\frac{d\overline{H}_p}{dx} + b\frac{d\overline{Q}_p}{dx} = c\overline{H}_p - l\overline{Q}_p, \\ pB\overline{H}_p + \frac{d\overline{Q}_p}{dx} = q_1. \end{cases} \tag{1.9}$$

Условия (1.6)–(1.7) преобразуются к виду:

$$\overline{Q}_p(0) = 0 \quad \text{и} \quad \overline{H}_p(0) = 0, \tag{1.10}$$

$$\overline{Q}_p(x)\big|_{x=\infty} < \infty \quad \text{и} \quad \overline{H}_p(x)\big|_{x=\infty} < \infty. \tag{1.11}$$

Система (1.9) может быть приведена к линейному неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка относительно (в дальнейшем индекс p будет опущен):

$$-\frac{1}{Bp}a\frac{d^2\overline{Q}}{dx^2} + \left(b + \frac{c}{pB}\right)\frac{d\overline{Q}_p}{dx} + (p+)\,\overline{Q}_p = \frac{c}{pB}q_1 \tag{1.12}$$

с общим решением

$$\overline{Q} =: \overline{Q}_1(x) = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + \frac{cq_1}{pB(p+l)}, \tag{1.13}$$

где k_1, k_2 — корни соответствующего характеристического уравнения, причем $\operatorname{Re}k_1 > 0$, $\operatorname{Re}k_2 < 0$ (предлагаем проверить это читателю).

Рассмотрим область $\Lambda = \{(x,t):\ x > L,\ t > T\}$. В этой области во втором уравнении (уравнении неразрывности) системы (1.5) правая часть будет равна нулю, так как по условию в области $\Lambda q = 0$. Следовательно, уравнение (1.12) становится однородным, и общее решение будет иметь вид:

$$\overline{Q} =: \overline{Q}_2(x) = C_3e^{k_1x} + C_4e^{k_2x}. \tag{1.14}$$

Для нахождения неизвестных C_1, C_2, C_3, C_4 воспользуемся граничными условиями (1.15) и условиями склейки (1.16) при $x = L$:

$$\begin{gathered}\overline{Q}_2\Big|_{x=\infty} = 0 \quad\Rightarrow\quad C_3 = 0, \quad \text{так как} \quad \operatorname{Re}k_1 > 0,\ \operatorname{Re}k_2 < 0,\\ \overline{Q}_1\Big|_{x=0} = 0 \quad\Rightarrow\quad C_1 + C_2 + \frac{cq_1}{pB(p+l)} = 0,\end{gathered} \tag{1.15}$$

$$\begin{gathered}\overline{Q}_1\Big|_{x=L} = \overline{Q}_2\Big|_{x=L} \quad\Rightarrow\quad C_1e^{k_1L} + C_2e^{k_2L} + F_p = C_4e^{k_2L},\\ \frac{\partial\overline{Q}_1}{\partial x}\bigg|_{x=L} = \frac{\partial\overline{Q}_2}{\partial x}\bigg|_{x=L} \quad\Rightarrow\quad k_1C_1e^{k_1L} + k_2C_2e^{k_2L} = k_2C_4e^{k_2L}.\end{gathered} \tag{1.16}$$

В этих равенствах F_p обозначает частное решение линейного неоднородного уравнения (1.12):

$$F_p = \frac{10gn^2Q_0^2q_1}{3pB^2H_0^{\frac{10}{3}}\left(p + 2g\frac{n^2}{BH_0^{\frac{7}{3}}}Q_0\right)}.$$

Уравнения (1.15)–(1.16) образуют систему алгебраических уравнений относительно трех неизвестных. Решая ее, находим:

$$C_1 = \frac{k_2 e^{-k_1 L}}{k_1 - k_2} F_p, \quad C_2 = \frac{F_p \left(k_1 - k_2 + k_2 e^{-k_1 L}\right)}{k_2 - k_1},$$

$$C_4 = \left(-1 + \frac{k_2 e^{-k_1 L}}{k_2 - k_1} - \frac{k_1 e^{-k_2 L}}{k_2 - k_1}\right) F_p.$$

Подставляя эти выражения для констант соответственно в (1.13) и (1.14) и, учитывая, что $C_3 = 0$, выводим:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_1 &= \left[\frac{k_2}{k_1 - k_2} e^{-k_1 L} e^{-k_1 x} + \left(\frac{k_2}{k_1 - k_2} e^{-k_1 L} - 1\right) e^{k_2 x} + 1\right] F_p, \\ \overline{Q}_2 &= \left(-1 + \frac{k_2}{k_2 - k_1} e^{-k_1 L} - \frac{k_1}{k_2 - k_1} e^{-k_2 L}\right) e^{k_2 x} F_p. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Таким образом, для $\overline{Q}$ получаем:

$$\overline{Q} = \begin{cases} \overline{Q}_1, & 0 \leqslant x \leqslant L, \\ \overline{Q}_2, & x \geqslant L. \end{cases}$$

Теперь, чтобы получить искомый расход, необходимо применить обратное преобразование Лапласа (используя специальные таблицы): $\widetilde{Q}(x,t) = \int_{y-i\infty}^{y+i\infty} \overline{Q}(x) e^{pt}\, dp$:

$$\widetilde{Q} = \begin{cases} Q_1(x,t), & 0 \leqslant x \leqslant L, \\ Q_2(x,t), & x \geqslant L, \end{cases} \tag{1.18}$$

где

$$Q_1(x,t) = P(x,t) + P_1(x,t) - P_2(x,t) + Y(t), \tag{1.19}$$

$$Q_2(x,t) = P_1(x,t) - P_2(x,t) + P_3(x,t). \tag{1.20}$$

Функции, входящие в правую часть (1.19)–(1.20), являются обратными преобразованиями Лапласа от соответствующих слагаемых в выражениях (1.17). Пользуясь таблицами обратного преобразования, можем вывести внешний вид этих функций:

$$P(x,t) = e^{\mu_1(x-L)} \int\limits_0^t \left(\frac{\lambda_2}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-\tau)} - \frac{\mu_2}{\beta} \left(e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-\tau)} - 1 \right) \right) \times$$

$$\times \int\limits_0^\tau \delta\left(s - \lambda_1(L-x)\right) Y_1(\tau - s)\, ds\, d\tau,$$

где

$$\mu_{1,2} = \mu \pm \frac{\frac{b}{2\sqrt{a}}}{BgH_0 - \frac{Q_0^2}{BH_0^2}}, \quad \mu = \frac{\frac{5}{3} g \frac{n^2}{BH_0^{\frac{10}{3}}} Q_0^2}{BgH_0 - \frac{Q_0^2}{BH_0^2}},$$

$$\lambda_{1,2} = \lambda \pm \frac{\sqrt{a}}{BgH_0 - \frac{Q_0^2}{BH_0^2}}, \quad \lambda = \frac{\frac{Q_0}{H_0}}{BgH_0 - \frac{Q_0^2}{BH_0^2}},$$

т. е. $k_1 = \lambda_1 p + \mu_1$, $k_2 = \lambda_2 p + \mu_2$,

$$k_2 - k_1 = -\frac{2\sqrt{a}}{BgH_0 - \frac{Q_0^2}{BH_0^2}} \left(p + \frac{b}{2a} \right) = -(\alpha p + \beta),$$

здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака; $Y_1(t)$ — обратное преобразование Лапласа от $\frac{F_p}{p}$:

$$Y_1(t) = -\frac{A}{\gamma}\left(e^{-\gamma t} - 1\right) + \frac{A}{\gamma} \int\limits_0^t \delta(\tau - T)\left(e^{-\gamma t} - 1\right)\, d\tau,$$

$$A = \frac{10 g n^2 Q_0^2 q_0}{3B62H_0^{\frac{10}{3}}}, \quad \gamma = \frac{2gn^3 Q_0}{BH_0^{\frac{7}{3}}},$$

$$P_1(x,t) = -e^{\mu_2 x - \mu_1 L} \int\limits_0^t \left(\frac{\lambda_2}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-\tau)} - \frac{\mu_2}{\beta} \left(e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-\tau)} - 1 \right) \right) \times$$

$$\times \int\limits_0^t \delta(s - \lambda_1 L + \lambda_2 x) Y_1(\tau - s)\, ds\, d\tau,$$

$$P_2(x,t) = e^{\mu_2 x} \int\limits_0^t \delta(\tau + \lambda_2 x) Y(t-\tau)\, d\tau,$$

где $Y(t)$ — обратное преобразование Лапласа от F_p:

$$Y(t) = -\frac{A}{\gamma^2}\left(e^{-\gamma t} - 1 + \gamma t\right) - \frac{A}{\gamma^2}\int\limits_0^t \delta(\tau - T)\left(e^{-\gamma t} - 1 + \gamma(t-\tau)\right)\, d\tau,$$

и, наконец,

$$P_3(x,t) = e^{\mu_2(x-L)} \int\limits_0^t \left(\frac{\lambda_1}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-\tau)} - \frac{\mu_1}{\beta}\left(e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-\tau)} - 1\right)\right) \times$$

$$\times \int\limits_0^t \delta(s - \lambda_2(L-x)) Y_1(\tau - s)\, ds\, d\tau.$$

Как мы видим, компоненты для формулы расхода (1.18) получаются довольно громоздкими. В следующих разделах мы рассмотрим упрощенный вариант системы (1.5).

1.2 Упрощенная линеаризованная начально-краевая задача, связанная с паводковыми потоками. *Непризматическим* называется русло, у которого форма дна в плане меняется по длине. Такие русла могут быть расширяющимися или сужающимися. В противном случае русло называется *призматическим.*

Возьмем непризматическое трапецеидальное русло (более приближенное к естественному), т. е. ширина потока по свободной поверхности:

$$B = B_0 + (m_1 + m_2)\frac{H}{2},$$

здесь $B_0 = \mathrm{const}$ — ширина по дну, $m_1 = \operatorname{ctg}\phi_1$ и $m_2 = \operatorname{ctg}\phi_2$ — коэффициенты откосов, где ϕ_1, ϕ_2 — углы, образуемые откосами русла.

Боковую приточность выразим формулой

$$q(x,t) = \bar{q}_0 e^{-s_1 x} e^{-s_2 t},$$

где s_1, s_2, $\bar{q}_0$ — заданные положительные постоянные. Причем значения этих постоянных выбираются таким образом, чтобы объем всего притока был такой же, как и в случае задания боковой приточности разрывной функцией (3). Если обозначить через W объем притока, то, очевидно, что

$$W = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty q(x,t)\,dt = \frac{\bar{q}_0}{s_1 s_2}.$$

С другой стороны, из (1.2) следует равенство $W = q_0 TL$. Следовательно, $\bar{q}_0 = \frac{W s_1 s_2}{LT}$. Так как в представлении (1.2) при $x \to \infty$ и $t \to \infty$ боковая приточность равна нулю, то константы s_1 и s_2 подбираются из равенств: $e^{-s_1 L} = e^{-10}$ и $e^{-s_2 T} = e^{-10}$, отсюда $s_1 = \frac{10}{L}$, $s_2 = \frac{10}{T}$. Таким образом, получаем $q_0 = W\frac{100}{LT}$.

При сделанных предположениях линеаризованная система (1.5) перепишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x} + a_3 \widetilde{Q} - a_4 \widetilde{H} = 0, \\ \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t} + b_1 \frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x} = b_1 q(x,t), \end{cases}$$

где

$$a_1 = g\omega_0 - (B_0 + (m_1 + m_2)H_0)\frac{Q_0^2}{\omega_0^2},$$

$$a_2 = 2\frac{Q_0}{\omega_0}, \quad a_3 = 2g\omega_0\frac{Q_0}{K_0^2},$$

$$a_4 = 2g\omega_0\frac{Q_0^2}{K_0^3}\frac{1}{n}\left(\frac{5}{3}B_0 H_0^{\frac{2}{3}} + \frac{m_1+m_2}{2}H_0^{\frac{5}{3}}\right), \quad b_1 = \frac{1}{B}.$$

Появившиеся в коэффициентах величины ω_0, K_0 не что иное, как средние величины, характеризующие площадь живого сечения и модуль расхода:

$$\omega_0 = \left(B_0 + (m_1 + m_2)\frac{H_0}{2}\right)H_0,$$

$$K_0 = \omega_0\left(\frac{\omega_0}{b_0 + \left(\sqrt{1+m_1^2} + \sqrt{1+m_2^2}\right)H_0}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Слагаемые $a_3\widetilde{Q} - a_4\widetilde{H}$ представляют собой возмущение силы трения. Если пренебречь этими слагаемыми, то решение системы значительно упрощается. Начально-краевая задача для упрощенной линеаризованной системы будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t} + b_1 \frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x} = b_1 q(x,t), \end{cases} \tag{1.21}$$

$$\widetilde{Q}(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad \widetilde{H}(x,t)\big|_{t=0} = 0,$$

$$\widetilde{Q}(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad \widetilde{H}(x,t)\big|_{t=0} = 0, \tag{1.22}$$

$$\widetilde{Q}(x,t)\big|_{x=\infty} < \infty, \quad \widetilde{H}(x,t)\big|_{x=\infty} < \infty.$$

Применяя преобразование Лапласа к (1.21)–(1.22), получим:

$$\begin{cases} p\overline{Q}_p + a_1 \frac{d\overline{H}_p}{dx} + a_2 \frac{d\overline{Q}_p}{dx} = 0, \\ p\overline{H}_p + b_1 \frac{d\overline{Q}_p}{dx} = b_1 \frac{\bar{q}_0}{p+s_2} e^{-s_1 x}, \end{cases} \tag{1.23}$$

$$\overline{Q}_p(0) = 0, \quad \overline{H}_p(0) = 0, \tag{1.24}$$

$$\overline{Q}_p(x)\big|_{x=\infty} < \infty, \quad \overline{H}_p(x)\big|_{x=\infty} < \infty. \tag{1.25}$$

Для решения (1.23)–(1.25) выразим $\overline{H}_p$ из второго уравнения (1.23) и подставим получившееся выражение в первое уравнение. В результате получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $\overline{Q}_p$:

$$\frac{d^2\overline{Q}}{dx^2} - \frac{a_2 p}{a_1 b_1} \frac{d\overline{Q}_p}{dx} - \frac{p^2}{a_1 b_1} \overline{Q}_p = -\frac{s_1}{p+s_2} \bar{q}_0 e^{-s_1 x}$$

с общим решением

$$\overline{Q}_p = \widetilde{C}_1 e^{k_1 x} + \widetilde{C}_2 e^{k_2 x} + \widetilde{A} e^{-s_1 x},$$

где k_1, k_2 — корни характеристического уравнения

$$k^2 - \frac{a_2 p}{a_1 b_1} k - \frac{p^2}{a_1 b_1} = 0,$$

причем

$$a_1 b_1 = \frac{g\omega_0}{B} - \frac{Q_0^2}{\omega_0^2} = c_0^2 - v_0^2, \quad \operatorname{Re} k_1 > 0, \quad \operatorname{Re} k_2 < 0,$$
$$k_2 = -\gamma p, \quad \gamma = -\frac{1}{c_0 + v_0}.$$

Здесь c_0 — скорость Лагранжа длинной волны на «мелкой» воде, v_0 — средняя скорость потока.

Учитывая условия (1.24), (1.25) для $\overline{Q}_p(x)$, имеем:

$$\overline{Q}_p(x) = \widetilde{C}_2 e^{-\gamma p x} + \widetilde{A} e^{-s_1 x}, \quad \widetilde{C}_2 = -\widetilde{A}. \tag{1.26}$$

Для коэффициента $\widetilde{A}$ находим:

$$\widetilde{A} = \frac{s_1 \bar{q}_0 a_1 b_1}{(p + s_2)(p - p_1)(p - p_2)}, \quad p_{1,2} = (v_0 \pm c_0) s_1.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к (1.26), окончательно выводим для расхода ($t \geqslant 0$):

$$\begin{gathered} \widetilde{Q}(x,t) = s_1 \bar{q}_0 a_1 b_1 \left(A e^{-(s_1 x + s_2 t)} + B e^{-s_1 x + p_1 t} + C e^{-s_1 x + p_2 t} \right), \\ t \leqslant -\gamma x, \end{gathered} \tag{1.27}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{Q}(x,t) = s_1 \bar{q}_0 a_1 b_1 \left[A \left(e^{-(s_1 x + s_2 t)} - e^{-s_2 (t + \gamma x)} \right) + \right. \\ \left. + C \left(e^{-s_1 x + p_2 t} - e^{p_2 (t + \gamma x)} \right) \right], \quad t \ -\gamma x. \end{gathered} \tag{1.28}$$

$$A = \frac{1}{(s_2 + p_1)(s_2 + p_2)}, \quad B = \frac{1}{(s_2 + p_1)(p_1 - p_2)},$$
$$C = \frac{1}{(s_2 + p_2)(p_1 - p_2)}.$$

Чтобы получить выражение для высоты $\widetilde{H}(x,t)$, воспользуемся вторым уравнением системы (1.21):

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t} = -b_1 \frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x} + b_1 q(x,t).$$

Рассмотрим два случая:
1) $0 \leqslant t \leqslant -\gamma x$ или $t \leqslant \frac{x}{c_0+v_0}$;
2) $t > \frac{x}{c_0+v_0}$.
В первом случае:

$$\widetilde{H}_1(x,t) = -b_1 \int\limits_0^t \frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x}\, d\tau + b_1 \int\limits_0^t q(x,\tau)\, d\tau.$$

Дифференцируя (1.27) по переменной x, а затем интегрируя в указанных пределах производную расхода по переменной x и функцию $q(x,t)$, получаем выражение для $\widetilde{H}_1(x,t)$:

$$\widetilde{H}_1(x,t) = a_1 b_1 s_1^2 \bar{q}_0 \Big[-\frac{A}{s_2}\left(e^{-s_1 x - s_2 t} - e^{-s_1 x}\right) + \\ + \frac{B}{p_1}\left(e^{-s_1 x + p_1 t} - e^{-s_1 x}\right) + \frac{C}{p_2}\left(e^{-s_1 x + p_2 t} - e^{-s_1 x}\right)\Big] \\ + b_1 \bar{q}_0 e^{-s_1 x}\left(1 - e^{-s_2 t}\right)\frac{1}{s_2}.$$

Во втором случае

$$\widetilde{H}_2(x,t) = -b_1 \int \frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x}\, d\tau + b_1 \int q(x,\tau)\, d\tau + \widehat{C},$$

где произвольная постоянная определяется из условия склейки при $t = \frac{x}{c_0+v_0}$:

$$\widetilde{H}_1(x,t)\Big|_{t=\frac{x}{c_0+v_0}} = \widetilde{H}_2(x,t)\Big|_{t=\frac{x}{c_0+v_0}}. \tag{1.29}$$

После интегрирования получаем:

$$\widetilde{H}_2(x,t) = a_1 b_1 s_1^2 \bar{q}_0 \left[-\frac{A}{s_2} e^{-s_1 x - s_2 t} + \frac{C}{p_2} e^{-s_1 x + p_2 t} \right] + \\ + a_1 b_1 s_1^2 \bar{q}_0 \left[-\frac{A}{c_0+v_0} e^{-s_2 (t - \frac{x}{c_0+v_0})} + \frac{C}{c_0+v_0} (e^{p_2 (t - \frac{x}{c_0+v_0})} \right] + \\ - \frac{b_1}{s_2} \bar{q}_0 e^{-s_1 x}(1 - e^{-s_2 t}) + \widehat{C}.$$

Тогда из (1.29) можно будет определить постоянную интегрирования и, таким образом, определить в явном виде формулы для расчета глубины.

Итак, окончательно,

$$\widetilde{H}(x,t) = \begin{cases} \widetilde{H}_1(x,t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{x}{c_0+v_0}, \\ \widetilde{H}_2(x,t), & t > \frac{x}{c_0+v_0}. \end{cases} \tag{1.30}$$

Полученное решение (1.27), (1.28), (1.30) упрощенной системы (1.21), (1.22) очень удобно для практических расчетов и для верификации численного решения исходной квазилинейной гиперболической системы.

Лекция 2. Численное моделирование паводковых волн

2.1. Гидродинамическая постановка задачи. Конвективно-диффузионная модель для движения паводковых потоков в случае одного русла. Запишем систему Сен-Венана в несколько ином виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{B}\frac{\partial v\omega}{\partial x} = \frac{q(x,t)}{B}, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} - i + \frac{Q^2}{K^2} = 0. \tag{2.2}$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$Q(x,0) = Q_0(x), \quad h(x,0) = h_0(t), \tag{2.3}$$

$$Q(0,t) = Q_1(t), \quad h(0,t) = h_1(t), \tag{2.4}$$

$$Q(L,t) = Q_2(t). \tag{2.5}$$

Два первых члена — это инерционный члены или уклон линии энергии, соответствующий ускорению. Эти слагаемые для различных условий течения имеют различную относительную значимость. Предположим, что за 3 часа скорость течения в реке изменяется от 1,0 до 2,0 м/сек (весьма большое изменение) и на расстоянии 10 км вследствие расширения потока скорость изменяется от 1,5 до 1,0 м/сек. Тогда два первых члена уравнения (2.2) будут равны соответственно

$$\frac{1}{9,81}\cdot\frac{1}{3600} \approx 1,0\cdot 10^{-5}, \quad \frac{1}{9,81}\cdot 1,5\cdot\frac{0,5}{10000} \approx 0,75\cdot 10^{-5}.$$

Уклон дна реки Терек между городами Владикавказ и Беслан имеет порядок 10^{-2}. Этот типичный пример указывает о возможности пренебрегать параметрами ускорения при исследовании волны прорыва вдали от разрушенного ограждающего водный поток сооружения.

Если в (2.2) опустить первые два члена, оно примет вид

$$\frac{\partial H}{\partial x} - i + \frac{Q^2}{K^2} = 0. \tag{2.6}$$

Полагая, что ширина русла реки $B = B(x, H)$ по длине потока изменяется незначительно и, дифференцируя уравнение неразрывности (2.1) по переменной x, а динамическое уравнение (2.2) по переменной t, получим

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} + \frac{1}{B}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} + \frac{2Q}{K^2}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2Q^2}{K^3}\frac{\partial K}{\partial t} = 0. \tag{2.8}$$

Далее, с учетом того, что $K = K(H(x,t))$,

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{dK}{dH}\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dK}{dH}\left(-\frac{1}{B}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{q}{B}\right). \tag{2.9}$$

Исключив $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t}$ из уравнений (2.7) и (2.8), с учетом (2.9) получаем после некоторых преобразований

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{KB}\frac{dK}{dH}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{K^2}{2QB}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{Q}{KB}\frac{dK}{dH}q = 0. \tag{2.10}$$

Интенсивность боковой приточности $q(x,t)$ предполагается заданной непрерывно-дифференцируемой функцией в области Ω и определяется в зависимости от метеорологических данных (интенсивности дождевых осадков или снеготаяния), а также с учетом величины водосборной площади реки.

Используя обозначения $U = \frac{Q}{KB}\frac{dK}{dH}$, $D = \frac{K^2}{2QB}$, начально-краевая задача для (2.10) перепишется:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + U\frac{\partial Q}{\partial x} - D\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - Uq + D\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{2.11}$$

$$Q(x,0) = Q_0(x), \tag{2.12}$$

$$Q(0,t) = Q_1(t), \tag{2.13}$$

$$Q(L,t) = Q_L(t). \tag{2.14}$$

Уравнение (2.11) представляет классическое дифференциальное уравнение конвективно-диффузионного процесса с учетом приточности. Скорость конвекции для расхода равняется $\frac{Q}{KB}\frac{dK}{dH}$, а коэффициент диффузии — $\frac{K^2}{2QB}$. Мощность источников равна $\frac{Q}{KB}\frac{dK}{dH}q - \frac{K^2}{2QB}\frac{\partial q}{\partial x}$. Если инерционные параметры действительно пренебрежимо малы, то уравнение (2.11) достаточно точно описывает процесс перемещения паводочной волны.

Приступим к решению (2.11)–(2.14) конечно-разностным методом. Рассмотрим дискретизацию пространства Ω. На плоскости (x,t) введем равномерную сетку $\mu = \{i\Delta x, k\Delta t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $k = 0, 1, 2, \ldots, K_1$, где $\Delta x = \frac{L_1}{N}$ и $\Delta t = \frac{T_1}{K_1}$ — шаги сетки по направлениям x и t соответственно. Вместо функции $Q(x,t)$ будем рассматривать сеточную функцию $Q_i^k = Q(i\Delta x, k\Delta t)$. Применим следующий четырехточечный шаблон:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\Delta t}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{Q_{i+1}^{k+1} - Q_{i-1}^{k+1}}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \approx \frac{Q_{i+1}^{k+1} - 2Q_i^{k+1} + Q_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}.$$

Начально-краевая задача в конечных разностях запишется так:

$$\begin{gathered}\frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\Delta t} + U_i^k \frac{Q_{i+1}^{k+1} - Q_{i-1}^{k+1}}{2\Delta x} - D_i^k \frac{Q_{i+1}^{k+1} - 2Q_i^{k+1} + Q_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} - \\ - U_i^k q_i^k + D_i^k \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^k = 0,\end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered}Q_0^{k+1} = Q_0((k+1)\Delta t), \quad Q_N^{k+1} = Q_L^{k+1}, \quad Q_i^0 = Q_0(i\Delta x), \\ i = 1, \ldots, N-1, \quad k = 0, \ldots, M-1.\end{gathered} \tag{2.16}$$

Перейдем к изучению свойств конечно-разностной схемы. Чтобы оценить порядок точности, надо сначала оценить погрешность аппроксимации и найти априорные оценки, выражающие устойчивость по входным данным. Докажем следующее утверждение (теорема об оценке решения начально-краевой задачи).

Теорема 2.1. *Построенная конечно-разностная схема* (2.15)–(2.16) *аппроксимирует исходную задачу* (2.11)–(2.14) *с порядком* $O(\Delta t + (\Delta x)^2)$ *и справедлива следующая оценка:*

$$\left\|Q^k\right\|_C \leqslant \left\|Q^0\right\|_C + \sum_{j=0}^{k-1} \Delta t \left\|\varphi^j\right\|_C + \max(|Q_0^k|, |Q_L^k|),$$

где $\left\|Q^k\right\|_C = \max_{0\leqslant i\leqslant N} |Q_i|$, $\varphi_i^k = -U_i^k q_i^k \Delta t + D_i^k \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_i^k \Delta t$.

$\lhd$ Запишем уравнение (2.11) и его конечно-разностный аналог (2.15) в операторном виде:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + LQ = F, \quad \frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\Delta t} + L_{\Delta x} Q = F_i^k.$$

Пусть $Q(x_i, t_k)$ — точное решение исходной задачи (2.11)–(2.14), $\widetilde{Q}_i^k$ — решение разностной задачи (2.15)–(2.16). Пусть

$$\widetilde{Q}_i^k = z + Q(x_i, t_k),$$

тогда для погрешности z получаем

$$\frac{z_i^{k+1} - z_i^k}{\Delta t} + L_{\Delta x} z = \psi$$

с однородными начальными и граничными условиями, где

$$\psi = L_{\Delta x} Q + F_i^k - \frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\Delta t}$$

есть погрешность аппроксимации схемы (2.15)–(2.16) на решении $Q(x,t)$ задачи (2.11)–(2.14) (или невязка схемы).

Проводя разложение в ряд Тейлора по степени Δt, Δx в окрестности (x_i, t_k) получим, что $\psi = O(\Delta t + (\Delta x)^2)$.

Перепишем уравнение в конечных разностях в виде:

$$a_i^k Q_{i-1}^{k+1} - c_i^k Q_i^{k+1} + b_i^k Q_{i+1}^{k+1} = -f_i^k,$$

где

$$a_i^k = -\left(U_i^k \frac{\Delta t}{2\Delta x} + D_i^k \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right), \quad c_i^k = -\left(1 + D_i^k \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}\right),$$

$$b_i^k = U_i^k \frac{\Delta t}{2\Delta x} - D_i^k \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2},$$

$$f_i^k = -U_i^k q_i^k \Delta t + D_i^k \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_i^k \Delta t - Q_i^k = \varphi_i^k - Q_i^k.$$

Зафиксируем k. Для любого фиксированного k_0 справедливы неравенства:

$$\left|a_i^{k_0}\right| > 0, \quad \left|b_i^{k_0}\right| > 0, \quad d_i^{k_0} = \left|c_i^{k_0}\right| - \left|a_i^{k_0}\right| - \left|b_i^{k_0}\right| = 1 > 0,$$
$$i = 1, \ldots, N-1.$$

Тогда в силу теоремы об оценке решения краевой задачи [9], получаем оценку:

$$\left\|Q^{j+1}\right\|_C \leqslant \left\|\frac{f_i^j}{d_i^j}\right\|_C + \max\left(\left|Q_0^{j+1}\right|, \left|Q_L^{j+1}\right|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left\|Q^j\right\|_C + \Delta t \left\|\varphi^j\right\|_C + \max\left(\left|Q_0^{j+1}\right|, \left|Q_L^{j+1}\right|\right).$$

Суммируя по $j = 0, 1, \ldots, k_0 - 1$, получаем

$$\left\|Q^{k_0}\right\|_C \leqslant \left\|Q^0\right\|_C + \Delta t \sum_{j=0}^{k_0-1} \left\|\varphi^j\right\|_C + \max\left(\left|Q_0^{k_0}\right|, \left|Q_L^{k_0}\right|\right).$$

В силу произвольности k_0 получаем данное неравенство для любого k. Тем самым утверждение доказано. Из доказанного утверждения следует абсолютная устойчивость схемы.

Для решения разностных уравнений применим метод линейной факторизации (метод прогонки). Следовательно, требуется вывести формулы для коэффициентов представления

$$Q_i^k = A_{i+1} Q_{i+1}^{k+1} + B_{i+1}.$$

Для этого подставим $Q_{i-1}^{k+1} = A_i Q_i^{k+1} + B_i$ в (2.15), получаем

$$-c_i^k Q_i^{k+1} + b_i^k Q_{i+1}^{k+1} + a_i^k A_i Q_i^{k+1} + a_i^k B_i = -f_i^k,$$

$$Q_i^{k+1} = \frac{b_i^k}{c_i^k - a_i^k A_i} Q_{i+1}^{k+1} + \frac{f_i^k + a_i^k B_i}{c_i^k - a_i^k A_i}.$$

Приравнивая к $Q_i^{k+1} = A_{i+1Q_{i+1}^{k+1}} + B_{i+1}$, имеем

$$A_{i+1} = \frac{b_i^k}{c_i^k - a_i^k A_i}, \tag{2.17}$$

$$B_{i+1} = \frac{f_i^k + a_i^k B_i}{c_i^k - a_i^k A_i}. \tag{2.18}$$

Выражения (2.17) и (2.18) представляют рекуррентные соотношения для прогоночных коэффициентов. Для определения A_1 и B_1 воспользуемся граничным условием и предположением о линейной факторизации

$$Q_0^{k+1} = A_1 Q_1^{k+1} + B_1,$$

тогда можно считать известными

$$A_1 = 0, B_1 = Q_1^{k+1}.$$

Значения расхода Q_i^{k+1}, $i = N-1, N-2, \dots 2$, определяются в результате выполнения обратного хода метода прогонки

$$Q_i^{k+1} = A_{i+1} Q_{i+1}^{k+1} + B_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 2.$$

Для вычисления значений глубины с первого взгляда кажется уместным использовать уравнение неразрывности. Однако на практике, применяя к уравнению

$$B\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = q$$

метод конечных разностей, сталкиваемся с существенной зависимостью сходимости метода от шагов по времени и по продольной координате. Здесь эффективнее использовать также неявный метод прогонки, где подобной зависимости не наблюдается. Пользуясь аналогичными рассуждениями и исключая расход воды и площадь живого сечения, система уравнений Сен-Венана (2.1), (2.2) приводится к следующей начально-краевой задаче относительно глубины потока:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + U\frac{\partial H}{\partial x} - D\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{1}{B}q(x,t) = 0,$$

$$H(x,0) = H_0(x),$$

$$H(0,t) = H_1(t),$$

$$H(L,t) = H_L(t).$$

Вводя равномерную сетку и применяя конечно-разностную схему относительно H, получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\Delta t} + U_i^k \frac{H_{i+1}^{k+1} - H_{i-1}^{k+1}}{2\Delta x} - \\ &- D_i^k \frac{H_{i+1}^{k+1} - 2H_i^{k+1} + H_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{B} q_i^k = 0, \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{gathered} H_0^{k+1} = H_0((k+1)\Delta t), \quad H_N^{k+1} = H_L^{k+1}, \quad H_i^0 = H_0(i\Delta x), \\ i = 1, \ldots, N-1, \quad k = 0, \ldots, M-1. \end{gathered} \tag{2.20}$$

Конечно-разностная схема (2.19)–(2.20) реализуется методом прогонки аналогично схеме (2.15)–(2.16). Практические расчеты показали эффективность и приемлемость данного алгоритма. Таким образом, представленный в параграфе метод позволяет экономично определять значения расхода и глубины гравитационных волн в естественных руслах при интенсивных притоках.

2.2. Математическое моделирование региональных паводковых потоков. Конвективно-диффузионная модель паводковых потоков для речной системы типа «дерево». Региональные паводковые потоки математически моделируются с помощью контактных начально-краевых задач для системы дифференциальных уравнений неустановившегося движения воды в речной системе типа «дерево», записанной для каждого отдельного русла

$$\frac{\partial Q_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_j^2}{\omega_j}\right) = g\omega_j\left(i_j - \frac{\partial H_j}{\partial x} - \frac{Q_j|Q_j|}{K_j^2}\right), \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial t} + \frac{\partial Q_j}{\partial x} = q_j(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant L_j,\ t > 0. \tag{2.22}$$

Слагаемое $\frac{Q_j|Q_j|}{K_j^2}$, записанное таким образом, позволяет учитывать изменение знака силы трения при изменении знака скорости, что возможно при большой обратной волне, $j = 1, 2, \ldots, N$ — порядковый номер русла.

Начальные и внешние граничные условия ставятся следующим образом:

$$Q_j(x,0) = Q_{j,0}(x), \quad H_j(x,0) = H_{j,0}(x), \tag{2.23}$$

$$Q_1(0,t) = Q_1(t), \quad H_1(0,t) = H_1(t), \quad Q_N(L,t) = Q_L(t), \tag{2.24}$$

где L — суммарный километраж русел рек.

При $x = L_j$

$$Q_{j-2} + Q_{j-1} = Q_j, \quad H_{j-2} = Q_{j-1} = H_j, \tag{2.25}$$

где H_j — отметка уровней в соответствующих руслах в местах слияния либо разветвления.

При применении конвективно-диффузионного подхода можно получить следующее дифференциальное уравнение параболического типа:

$$\frac{\partial Q_j}{\partial t} + U_j \frac{\partial Q_j}{\partial x} - D_j \frac{\partial^2 Q_j}{\partial x^2} - U_j q_j + D_j \frac{\partial q_j}{\partial x} = 0. \tag{2.26}$$

Система дифференциальных уравнений (2.26) для каждого русла с соответствующими начальными и граничными условиями (2.23)–(2.25) представляют собой упрощенную математическую модель паводкового потока. Эта модель позволяет сравнительно легко провести численные расчеты всего региона по какой-либо конечно-разностной схеме. В отличие от исходной постановки задачи (2.21)–(2.25) в упрощенной модели (2.23)–(2.26) не возникает никаких трудностей вычислительного характера.

Для дальнейших рассуждений рассмотрим речную систему, в которой $j = 1, 2, 3$, т. е. предполагаем, что третье русло образуется при слиянии первых двух.

Основная трудность здесь состоит в нахождении значений расхода и глубины в точке слияния. Для разрешения этой проблемы воспользуемся следующими уравнениями:

$$\overline{B}_j \frac{\partial H_j}{\partial t} + \frac{\partial Q_j}{\partial x} = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = -\frac{1}{\overline{B}_j} \frac{\partial Q_j}{\partial x},$$

где $\overline{B_j}$ — размеры по ширине зеркала воды в трех руслах соответственно. Боковой приточностью в точке в данном случае можно пренебречь.

Тогда в точке слияния будут выполняться равенства, вытекающие из условия (2.25):

$$\frac{1}{\overline{\overline{B}}_1}\frac{\partial Q_1}{\partial x}=\frac{1}{\overline{\overline{B}}_2}\frac{\partial Q_2}{\partial x},\quad \frac{1}{\overline{\overline{B}}_1}\frac{\partial Q_1}{\partial x}=-\frac{1}{\overline{\overline{B}}_3}\frac{\partial Q_3}{\partial x},\quad Q_1+Q_2=Q_3.$$

Обозначим через Q^{k+1}_{j,N_1} значение расхода для j-го русла ($j=1,2,3$) в $(k+1)$-ый момент времени в точке слияния (узел сетки в проекции на $x : x_j = N_j\Delta x$). Нам необходимо знать эти значения, так как для вычисления расхода и глубины потока каждого русла будет использоваться метод прогонки.

Нужные нам значения расхода можно определить из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} Q^{k+1}_{1,N_1}+Q^{k+1}_{2,N_2}=Q^{k+1}_{3,N_3},\\ \frac{1}{\overline{\overline{B}}_1}\frac{Q^{k+1}_{1,N_1}-Q^{k+1}_{1,N_1-1}}{\Delta x}=\frac{1}{\overline{\overline{B}}_2}\frac{Q^{k+1}_{2,N_2}-Q^{k+1}_{2,N_2-1}}{\Delta x},\\ \frac{1}{\overline{\overline{B}}_1}\frac{Q^{k+1}_{1,N_1}-Q^{k+1}_{1,N_1-1}}{\Delta x}=-\frac{1}{\overline{\overline{B}}_3}\frac{Q^{k+1}_{3,N_3}-Q^{k+1}_{3,N_3-1}}{\Delta x},\\ Q^{k+1}_{1,N_1-1}=A^1_{N_1}Q^{k+1}_{1,N_1}+B^1_{N_1},\\ Q^{k+1}_{2,N_2-1}=A^2_{N_2}Q^{k+1}_{2,N_2}+B^2_{N_2},\\ Q^{k+1}_{3,N_3-1}=A^3_{N_3}Q^{k+1}_{3,N_3}+B^3_{N_3}, \end{cases} \tag{2.27}$$

где $k=1,\ldots,M$.

В этой системе три последних равенства вытекают из применяемого метода прогонки. Коэффициенты $A^1_{N_1}$, $B^1_{N_1}$, $A^2_{N_2}$, $B^2_{N_2}$, $A^3_{N_3}$, $B^3_{N_3}$ легко считаются для каждого русла с помощью формул (2.17), (2.18), так как A^1_1, B^1_1, A^2_1, B^2_1, A^3_1, B^3_1 известны благодаря заданным начальным значениям расхода в концевых точках.

Система (2.27) решается методом Гаусса, после нахождения шести неизвестных значений расхода Q^{k+1}_{1,N_1}, Q^{k+1}_{2,N_2}, Q^{k+1}_{3,N_3}, Q^{k+1}_{1,N_1-1}, Q^{k+1}_{2,N_2-1}, Q^{k+1}_{3,N_3-1} нетрудно вычислить значения глубин в рассматриваемой точке слияния. Так, из уравнения (36) следует:

$$h^{k+1}_{j,N_j}=\left(q^k_{j,N_j}-\frac{Q^{k+1}_{j,N_j}-Q^{k+1}_{j,N_j-1}}{\Delta x}\right)\frac{\Delta t}{\overline{\overline{B}}_j}+h^k_{j,N_j},\quad j=1,2,3.$$

Лекция 3. Некоторые постановки задач, сводящиеся к уравнениям теории «мелкой воды»

Проектирование и строительство водохранилищ в горных и предгорных местностях ставит перед исследователями ряд задач, связанных с обеспечением безопасности жизнедеятельности населения. Обрушение значительных масс горной породы в заполненное водохранилище в результате обвально-оползневых явлений образует поверхностные гравитационные волны, приводящие к стихийным катастрофическим бедствиям в виде жертв и разрушений.

Исследователи, проектировщики и эксплутационные службы обязаны оценивать ожидаемое повышение уровня у плотины и объем перелитой воды через створ плотины, а также зону и степень затопления местности в нижнем бьефе в зависимости от геометрических, кинематических и динамических характеристик потенциально возможных обвально-оползневых масс, селевых и лавиноподобных потоков. Этим путем можно прогнозировать и предотвратить те последствия и ущерб, которые могут вызвать образование разрушительных волн. Настоящая глава посвящена математическому моделированию вышеописанных природных и техногенных проявлений.

3.1. Конвективно-диффузионная модель образования паводковых потоков в результате излива воды из водохранилища. Рассмотрим водохранилище, заполненной водой, с плотиной в верхнем бьефе. Предположим, что в силу разных причин техногенного характера произошло разрушение плотины и излив воды из водохранилища в русло реки (нижний бьеф). При этом образуется волна прорыва. Тогда в качестве верхнего граничного условия воспользуемся дифференциальным уравнением опорожнения водохранилища

$$\frac{dW^*}{dt} = -q^*(t),$$

где $W^* = W^*(h)$ — объем водохранилища, $h(t)$ — глубина водохранилища при невозмущенной поверхности, $B_0 = \mathrm{const}$ — ширина водохранилища в нижнем бьефе, $q^*(t)$ — расход воды через створ разрушенной плотины. Из теории гидравлики известно, что излив воды из водохранилища происходит по следующему закону:

$$\frac{dW}{dh}\frac{dh}{dt} = -m\sqrt{2g}h^{\frac{3}{2}}B_0, \quad m = 0.43.$$

Установим вид функций $W = W(h)$ и $\frac{dW}{dh}$. Для простоты рассмотрим призматическое водохранилище с уклоном дна i_0 и шириной в нижнем бьефе B_1:

$$W(h) = \frac{B_1}{2i_0}h^2, \quad \frac{dW}{dh} = \frac{B_1}{2i_0}2h = \frac{B_1 h}{i_0},$$

отсюда

$$\frac{B_1}{i_0}h\frac{dh}{dt} = -m\sqrt{2g}h^{\frac{3}{2}}B_0.$$

Интегрируя последнее выражение, получим

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{mi_0\sqrt{2g}B_0}{2B_1}t\right)^2, \tag{3.1}$$

где h_0 — глубина водохранилища в начальный момент времени. Из (3.1) можно вывести, что время полного опорожнения водохранилища определится по зависимости

$$T_0 = \frac{2B_1\sqrt{h_0}}{mi_0\sqrt{2g}B_0}.$$

Используя (3.1), легко выводится, что расход воды $Q(x,t)$ (x — продольная координата) через створ разрушенной плотины (створ $x = 0$) определится по зависимости

$$q^*(t) =: Q(0,t) = m\sqrt{2g}B_0\left(\sqrt{h_0} - \frac{mi_0\sqrt{2g}B_0}{2B_1}t\right)^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_0,$$
$$q^*(t) = 0, \quad t > T_0.$$

Поставим начально-краевую задачу для расхода при образовании волны прорыва ($0 \leqslant x \leqslant L$):

$$\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial t} + U_0\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x} - D_0\frac{\partial^2\widetilde{Q}}{\partial x^2} = 0, \tag{3.2}$$

$$\widetilde{Q}(x,0) = 0, \tag{3.3}$$

$$\widetilde{Q}(0,t) = q^*(t), \tag{3.4}$$

$$\widetilde{Q}(L,t) = 0. \tag{3.5}$$

Применим подстановку

$$\widetilde{Q}(x,t) = \widehat{Q}(x,t)e^{\frac{U_0}{2D_0}x},$$

в результате которой начально-краевая задача (3.2)–(3.5) относительно функции $\widehat{Q}(x,t)$ запишется в виде

$$\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2 \widehat{Q}}{\partial x^2} + \frac{U_0^2}{4D_0}\widehat{Q} = 0, \tag{3.6}$$

$$\widehat{Q}(x,0) = 0, \tag{3.7}$$

$$\widehat{Q}(0,t) = q^*(t), \tag{3.8}$$

$$\widehat{Q}(L,t) = 0. \tag{3.9}$$

В результате дальнейшей замены искомой функции по формуле

$$\overline{Q}(x,t) = \widehat{Q}(x,t) - q^*(t)\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

выражения (3.6)–(3.9) примут следующий вид:

$$\frac{\partial \overline{Q}}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2 \overline{Q}}{\partial x^2} + \frac{U_0^2}{4D_0}\overline{Q} = -\left(1 - \frac{x}{L}\right)\left(\frac{U_0^2}{4D_0}q^*(t) + {q^*}'(t)\right), \tag{3.10}$$

$$\overline{Q}(x,0) = q^*(0)\left(1 - \frac{x}{L}\right), \tag{3.11}$$

$$\overline{Q}(0,t) = 0, \tag{3.12}$$

$$\overline{Q}(L,t) = 0. \tag{3.13}$$

Представим неизвестную функцию $\overline{Q}(x,t)$ в виде тригонометрического ряда по синусам:

$$\overline{Q}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) \sin a_n x. \tag{3.14}$$

Как известно, функция $1 - \frac{x}{L}$ разлагается в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, L)$:

$$\begin{gathered} 1 - \frac{x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sin \frac{\pi n}{L} x, \\ \alpha_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin a_n x\, dx, \quad a_n = \frac{\pi n}{L}. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Легко заметить, что для ряда (3.14) граничные условия (3.12) и (3.13) автоматически удовлетворяются.

Подставим выражение (3.14) и (3.15) в соотношения (3.10)–(3.13), тогда имеем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\phi_n(t)$ (3.16) с начальным условием (3.17):

$$\frac{d\phi_n}{dt} + \left(D_0 a_n^2 + \frac{U_0^2}{4D_0}\right)\phi_n(t) = -\alpha_n \left(\frac{U_0^2}{4D_0} q^*(t) + {q^*}'(t)\right), \tag{3.16}$$

$$\phi_n(0) = -q^*(0)\alpha_n. \tag{3.17}$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.16) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} \phi_n(t) = e^{-\left(D_0 a_n + \frac{U_0^2}{4D_0}\right)t} \times \\ \times \left[C - \alpha_n \int\limits_0^t \left(\frac{U_0^2}{4D_0} q^*(\tau) + {q^*}'(\tau)\right) e^{\lambda_n^2 \tau}\, d\tau\right], \end{gathered} \tag{3.18}$$

где $\lambda_n = D_0 a_n^2 + \frac{U_0^2}{4D_0}$.

Постоянная интегрирования в равенстве (3.18) определяется из начального условия (3.17)

$$C = -q^*(0)\alpha_n, \quad q^*(0) = mB_0\sqrt{2gH_0}H_0.$$

$$\begin{gathered} \phi_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \times \\ \times \left[-\alpha_n q^*(0) - \alpha_n \int\limits_0^t \left(\frac{U_0^2}{4D_0} q^*(\tau) + {q^*}'(\tau)\right) e^{\lambda_n^2 \tau}\, d\tau\right]. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Таким образом, равенство (3.19) вместе с формулой (3.14) позволяет определить искомую функцию расхода и провести серию численных экспериментов, сделать анализ зависимости расхода от различных характеристик русла и граничных данных (предлагаем это сделать читателю).

3.2. Моделирование гравитационных волн, образующихся в результате обвально-оползневых явлений или вторжения потоков селевого либо лавинного характера в горных водохранилищах. Предположим, что в прямоугольной системе координат $xoyz$ часть пространства, ограниченная условиями

$0 \leqslant x \leqslant L$, $-\frac{B(x)}{2} \leqslant y \leqslant \frac{B(x)}{2}$, $-H_0(x) \leqslant z \leqslant 0$ и заполненная водой, представляет горное водохранилище непризматического очертания в плане и с переменной в продольном направлении глубиной $H_0(x)$. В створе $x = 0$ расположена плотина, $B(x)$ — представляет переменную ширину водохранилища.

Рассмотрим волновое движение воды, вызванное тем, что с берега $x = L$ в водохранилище вторгся обвально-оползневый массив или поток селевого либо лавинного характера. В линейном приближении теории мелкой воды волновое движение описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -g\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{3.20}$$

$$B\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(BH_0V\right) = 0, \tag{3.21}$$

где $V(x,t)$ — средняя по ширине каньона скорость движения воды, $B = B(x)$ — ширина каньона, $H_0(x)$ — глубина воды в водохранилище при невозмущенном состоянии, $H(x,t)$ — возмущение глубины в результате вторжения с берега $x = L$.

Введем функцию $\phi = \phi(x,t)$, подобную потенциалу скорости, следующим образом:

$$V = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad H = -\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t}. \tag{3.22}$$

Легко заметить, что дифференциальное уравнение (3.20) относительно функции $\phi(x,t)$ превращается в тождество, а уравнение (3.21) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - gH_0\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - g\left[\frac{dH_0}{dx} + H_0(x)\frac{1}{B(x)}\frac{dB}{dx}\right]\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \tag{3.23}$$

Начальные и граничные условия для рассматриваемой задачи запишутся следующим образом:

$$\phi(x,0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0) = 0, \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(L,t) = V(t), \tag{3.25}$$

где $V(t)$ — скорость вторжения.

Таким образом, модель представляет начально-краевую задачу (3.23)–(3.25) для дифференциальных уравнений теории «мелкой» воды в линейном приближении. В дифференциальном уравнении (3.23) коэффициенты представляют переменные величины и по этой причине его решение для произвольных функций $H_0(x)$ и $B(x)$ связано со значительными математическими трудностями (его можно решать численными методами, предлагаем сделать это читателю). Но, если представить очертания водохранилища математическими функциями, то вопрос аналитического решения решается эффективно.

К примеру, ширина водохранилища аппроксимируется экспоненциальной функцией вида

$$B(x) = B_0 e^{sx}. \tag{3.26}$$

Скорость вторжения представим в виде функции Хевисайда

$$V(t) = \begin{cases} V_0, & 0 < t < t_0, \\ 0, & t \geqslant t_0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Вместо независимой переменной x введем новую переменную ξ с помощью следующей подстановки (преобразование годографа):

$$\xi = \int \frac{dx}{\sqrt{gH_0(x)}}. \tag{3.28}$$

При такой подстановке начально-краевая задача (3.23)–(3.25) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial \xi^2} - \left[gH_0\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{qH_0}}\right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{g}{H_0}}\frac{dH_0}{dx} + \sqrt{gH_0}\frac{1}{B}\frac{dB}{dx}\right]\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \tag{3.29}$$

$$\phi(\xi, 0) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(\xi, 0) = 0, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\xi}(L_1, t) = \sqrt{gH_0(L)}V(t), \tag{3.31}$$

где L_1 — значение длины водохранилища в системе координат (ξ, t).

Далее, для упрощения в уравнении (3.29) коэффициент при производной первого порядка приравниваем к постоянной величине:

$$gH_0\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{qH_0}}\right)+\sqrt{\frac{g}{H_0}}\frac{dH_0}{dx}+\sqrt{gH_0}\frac{1}{B}\frac{dB}{dx}=:c_1. \qquad (3.32)$$

Интегрируя с учетом (3.26) дифференциальное уравнение (3.32), получим

$$H_0(x)=\left(\frac{C_1}{s\sqrt{g}}+C_2e^{-sx}\right)^2. \qquad (3.33)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 можно подобрать так, чтобы выполнялись следующие условия на границах водохранилищах:

$$H_0(x)\big|_{x=0}=H_0, \quad H_0(x)\big|_{x=L}=H_1.$$

В результате получим

$$H_0(x)=\left(\sqrt{H_0}-\frac{\sqrt{H_0}-\sqrt{H_1}}{1-e^{-sL}}+\frac{(\sqrt{H_0}-\sqrt{H_1})e^{-sx}}{1-e^{-sL}}\right)^2. \qquad (3.34)$$

Итак, при задании ширины и глубины водоема в виде функций, представленных в выражениях (3.26) и (3.34), коэффициенты дифференциального уравнения (3.29) становятся постоянными, и начально-краевая задача решается аналитически, а уравнение волновой поверхности получается в явном виде. При переходе к пределу при $s\to 0$ в выражениях (3.26) и (3.34) ширина водоема становится постоянной, а глубина — параболической функцией второго порядка

$$H_0(x)=\left(\sqrt{H_0}-\frac{\sqrt{H_0}-\sqrt{H_1}}{L}-\sqrt{H_0}\right)^2.$$

Итак, для (3.29) имеем

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}-c_1\frac{\partial\phi}{\partial x}=0, \qquad (3.35)$$

где

$$c_1=\sqrt{gH_0}s-\sqrt{g}s\frac{\sqrt{H_0}-\sqrt{H_1}}{1-e^{-sL}},$$

$$\xi(x) = -\frac{A}{\sqrt{g}s(\sqrt{H_0}A - 1)} \ln \left| \frac{\sqrt{H_0}Ae^{-sx}}{\sqrt{H_0}A - 1 + e^{-sx}} \right|,$$

$$A = \frac{1 - e^{-sL}}{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}}, \quad L_1 = \xi(L).$$

Применим к равенствам (3.30), (3.31), (3.35) подстановку

$$\phi(\xi, t) = \Phi(\xi, t) \exp\left(-c_1 \frac{\xi}{2}\right). \tag{3.36}$$

Начально-краевая задача для функции $\Phi(\xi, t)$ запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{c_1^2}{4}\Phi = 0, \tag{3.37}$$

$$\Phi\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{3.38}$$

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{c_1}{2}\Phi\right)\Big|_{\xi=0} = 0, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{c_1}{2}\Phi\right)\Big|_{\xi=L_1} = \sqrt{gH_1}V(t)e^{\frac{c_1}{2}L_1}. \end{gathered} \tag{3.39}$$

Далее, для упрощения граничных условий введем функцию $\Psi(\xi, t)$:

$$\Psi(\xi, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - c_1 \frac{\Phi}{2}. \tag{3.40}$$

Тогда из (3.37) имеем

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{c_1^2}{4}\Psi = 0. \tag{3.41}$$

Начальные и граничные условия (3.38) и (3.39) относительно функции Ψ запишутся следующим образом:

$$\Psi\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{3.42}$$

$$\Psi\Big|_{\xi=0} = 0, \quad \Psi\Big|_{\xi=L_1} = \sqrt{gH_1}e^{\frac{c_1}{2}L_1}V(t). \tag{3.43}$$

Применим подстановку для того, чтобы обнулить граничные условия (3.39):

$$\overline{\Psi}(\xi,t)=\Psi(\xi,t)-\sqrt{gH_1}e^{\frac{c_1}{2}L_1}V(t)\frac{\xi}{L_1}.$$

Начально-краевая задача (3.41)–(3.43) относительно функции $\overline{\Psi}(\xi,t)$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2\overline{\Psi}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\overline{\Psi}}{\partial\xi^2}+\frac{c_1^2}{4}\overline{\Psi}=-\sqrt{gH_1}e^{\frac{c_1}{2}L_1}\frac{\xi}{L_1}\left(V''(t)-\frac{c_1^2}{4}V(t)\right), \quad (3.44)$$

$$\overline{\Psi}\Big|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \quad (3.45)$$

$$\overline{\Psi}\Big|_{\xi=0}=0, \quad \overline{\Psi}\Big|_{\xi=L_1}=0. \quad (3.46)$$

Правую часть выражения (3.44) представим как $f(t)\xi$, где

$$f(t)=-\sqrt{gH_1}e^{\frac{c_1}{2}L_1}\frac{1}{L_1}\left(V''(t)-\frac{c_1^2}{4}V(t)\right).$$

Неизвестная функция $\overline{\Psi}(\xi,t)$ допускает представление в виде следующего тригонометрического ряда:

$$\overline{\Psi}(\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\Psi}_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{L_1}\xi\right). \quad (3.47)$$

Функцию ξ разложим в ряд Фурье по синусам в интервале $(0,L_1)$:

$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\left(\frac{\pi n}{L_1}\xi\right), \quad \alpha_n=\frac{2}{L_1}\int\limits_0^t\xi\sin\left(\frac{\pi n}{L_1}\xi\right)d\xi. \quad (3.48)$$

Легко заметить, что граничные условия (3.46) автоматически удовлетворяются. Для нахождения функции $\overline{\Psi}_n(t)$ подставим выражения (3.48) и (3.47) в (3.44) и (3.45). В результате получим:

$$\frac{d^2\overline{\Psi}_n}{dt^2}+\left(a_n^2+\frac{c_1^2}{4}\right)\overline{\Psi}_n=\alpha_nf(t), \quad (3.49)$$

$$\overline{\Psi}_n(0)=0, \quad \overline{\Psi}'_n(0)=0. \quad (3.50)$$

При этом принимается, что $V(0) = V'(0) = 0$. Решение дифференциального уравнения (3.49) с начальными условиями (3.50) имеет следующий вид:

$$\overline{\Psi}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \int\limits_0^t f(\tau)\sin(\gamma_n(t-\tau))\,d\tau\ \sin(a_n\xi) + \sqrt{gH_1}e^{\frac{c_1}{2}L_1}\frac{\xi}{L_1}V(t),$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{a_n^2 + \frac{c_1^2}{4}}, \quad a_n = \frac{n\pi}{L_1}.$$

При известной функции $\Psi(\xi, t)$ выражение (3.40) можно рассмотреть как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi(\xi, t)$. Его общее решение имеет следующий вид:

$$\Phi(\xi, t) = e^{\frac{c_1}{2}\xi}\left[c(t) + \int \Psi(\xi, t)e^{-\frac{c_1}{2}\xi}\,d\xi\right].$$

Функция $\phi(\xi, t)$ определяется из выражения (3.36):

$$\phi(\xi, t) = c(t) + \int \Psi(\xi, t)e^{-\frac{c_1}{2}\xi}\,d\xi.$$

Можно показать, что функция $c(t) = 0$. Тогда получим

$$\overline{\Psi}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \int\limits_0^t f(\tau)\sin(\gamma_n(t-\tau))\,d\tau \cdot \int e^{-\frac{c_1}{2}\xi}\sin(a_n\xi)\,d\xi,$$

$$\int e^{-\frac{c_1}{2}\xi}\sin(a_n\xi)\,d\xi = \frac{1}{\gamma_n^2}\left(-\frac{c_1}{2}\sin(a_n\xi) - a_n\cos(a_n\xi)\right)e^{-\frac{c_1}{2}\xi}.$$

Если скорость вторжения $V(t)$ представим в виде функции Хевисайда (3.27), то интеграл $\int_0^t f(\tau)\sin\gamma_n(t-\tau)\,d\tau$ упрощается, и в результате его вычисления получим

$$\int\limits_0^t f(\tau)\sin\gamma_n(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \begin{cases} \beta\left(\gamma_n V_0 + \left(\frac{c_1^2}{4} - \gamma_n^2\right)\frac{2V_0}{\gamma_n}\sin^2\left(\frac{\gamma_n t}{2}\right)\right), & 0 < t < t_0, \\ \beta\left(\frac{c_1^2}{4} - \gamma_n^2\right)\frac{2V_0}{\gamma_n}\sin\left(\frac{\gamma_n(2t-t_0)}{2}\right)\sin\left(\gamma_n\frac{t_0}{2}\right), & t \geqslant t_0, \end{cases}$$

где

$$\beta = -\frac{\sqrt{gH_1}e^{-\frac{c_1}{2}L_1}}{L_1}$$

и для $t \geqslant t_0$

$$\phi(\xi,t) = -\frac{2V_0\sqrt{gH_1}e^{-\frac{c_1}{2}(L_1-\xi)}}{L_1}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\gamma_n^3}\left(\frac{c_1^2}{4}-\gamma_n^2\right)\cos\left(\frac{\gamma_n(2t-t_0)}{2}\right)\sin\left(\gamma_n\frac{t_0}{2}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{c_1}{2}\sin(a_n\xi)+a_n\cos(a_n\xi)\right),$$

для $t \leqslant t_0$ соответственно получим:

$$\phi(\xi,t) = \frac{2V_0\sqrt{gH_1}e^{-\frac{c_1}{2}(L_1-\xi)}}{L_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\gamma_n^3}\left(\frac{c_1^2}{4}-\gamma_n^2\right)\times$$
$$\times\sin(\gamma_n t)\left(\frac{c_1}{2}\sin(a_n\xi)+a_n\cos(a_n\xi)\right).$$

Уравнение волновой поверхности определяется из равенств:

для $t \geqslant t_0$

$$H(\xi,t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t} \rightarrow$$

$$H(\xi,t) = -\frac{2V_0\sqrt{gH_1}e^{-\frac{c_1}{2}(L_1-\xi)}}{L_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\gamma_n^3}\left(\frac{c_1^2}{4}-\gamma_n^2\right)\times$$
$$\times\sin\left(\frac{\gamma_n(2t-t_0)}{2}\right)\sin\left(\gamma_n\frac{t_0}{2}\right)\left(\frac{c_1}{2}\sin(a_n\xi)+a_n\cos(a_n\xi)\right),$$

для $t \leqslant t_0$

$$H(\xi,t) = \frac{2V_0\sqrt{gH_1}e^{-\frac{c_1}{2}(L_1-\xi)}}{L_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\gamma_n^3}\left(\frac{c_1^2}{4}-\gamma_n^2\right)\times$$
$$\times\cos(\gamma_n t)\left(\frac{c_1}{2}\sin(a_n\xi)+a_n\cos(a_n\xi)\right).$$

Полученные функциональные ряды позволяет определить высоту волны, образующей в водохранилище в результате вторжения селевых потоков. Иследование сходимости функционального ряда для

$H(\xi, t)$ и численные расчеты (предлагаем провести читателю это самостоятельно) позволят выявить зависимость высоты волны от скорости вторжения, а также от различных геометрических характеристик водохранилища.

Литература

1. *Cunge J. A., Holly F. M., Verwey A.* Practical Aspects of Computational River Hydraulics.—Boston–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Progtam, 1980.
2. *Васильев О. Ф., Гладышев М. Т.* О расчете прерывных волн в открытых руслах // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа.—1966.—№ 6.—С. 184–189.
3. *Васильев О. Ф., Годунов С. К.* Численный метод расчета распространения длинных волн в открытых руслах и его приложение к задаче о паводках // Докл. АН СССР.—1963.—Т. 151, № 3.—С. 525–527.
4. *Барахнин В. Б.* Конечно-разностные схемы для численного решения задач теории мелкой воды с использованием адаптивных сеток // Вычислительные технологии: Сб. научн. тр.—Новосибирск: ИВТ СО РАН, 1995.—Т. 4, № 11.—С. 38–50.
5. *Остапенко В. В.* Численное моделирование волновых течений в Сарезском озере, вызванных катастрофическим обрушением берегового оползня // Вычислительные технологии.—Новосибирск, 1994.—Т. 3, № 8.—С. 106–111.
6. *Чугаев Р. Р.* Гидравлика.—Л.: Энергоиздат, 1982.—567 с.
7. *Lavrentiev M., Marchuk An., Oblaukhov K., Romanenko A.* Comparative testing of MOST and Mac-Cormack numerical schemes to calculate tsunami wave propagation // J. Phys.: Lavrentyev Readings on Mathematics, Mechanics and Physics (7–11 September 2020, Novosibirsk, Russia), 2020.—(Conf. Ser., Vol. 1666). DOI: 10.1088/1742-6596/1666/1/012028.
8. *Sassa S., Grilli S. T., Tappin D. R., Sassa K., Karnawati D., Gusiakov V. K., Løvholt F.* Understanding and Reducing the Disaster Risk of Landslide-induced Tsunamis: Outcome of the Panel Discussion and the World Tsunami Awareness Day Special Event of the Fifth World Landslide Forum // Progress in Landslide Research and Technology.—Springer Nature Switzerland AG, 2022.—Vol. 1, Iss. 1.—(Book Series of the International Consortium on Landslides). DOI: 10.1007/978-94-007-2162-3_36.
9. *Самарский А. А.* Введение в численные методы.—М.: Наука, 1982.—268 с.

Тотиева Жанна Дмитриевна
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН,
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1
E-mail: `jannatuaeva@inbox.ru`

QUASILINEAR HYPERBOLIC SYSTEMS AND RELATED PROBLEMS OF MATHEMATICAL MODELINGQUASILINEAR HYPERBOLIC SYSTEMS AND RELATED PROBLEMS OF MATHEMATICAL MODELING

Z. D. Totieva

The lectures present some methods for solving initial-boundary value problems for a quasilinear hyperbolic Saint-Venant system. These problems take into account the lateral inflow (volume of inflowing fluid per unit length of the channel), which is an important factor in modeling such catastrophic phenomena as flood flows. Efficient numerical algorithms for the constructed mathematical models are considered. In addition, models for the formation of a breakthrough wave in hydraulic structures during landslides are presented and studied.

Key words: shallow water theory, lateral inflow, flood flows, breakthrough waves, convective-diffusion model.

Вниманию авторов

Сборник «Математический форум (Итоги науки. Юг России)» издается Южным математическим институтом — филиалом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в сборник принимаются материалы региональных, российских и международных форумов (конференций, симпозиумов, семинаров, школ, воркшопов и т. д.), освещающие новейшие достижения современной математической науки. Статьи и материалы, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в другом издательстве, редколлегией не рассматриваются. При отборе материалов для сборника определяющим является высокий научный уровень. Поступившие в редакцию статьи и материалы проходят обязательное научное рецензирование.

Текст должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо предоставить на английском и русском языках.

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в конце текста статьи. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса и адреса электронной почты.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи необходимо направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в сборник статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взымается.

Авторские права на сборник в целом принадлежат Южному математическому институту — филиалу ВНЦ РАН, который обладает исключительным правом получать и распределять любые платежи, связанные с переуступкой авторских прав на сборник.

Адрес редакции: 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: `rio@smath.ru`
Зав. редакцией: Кибизова В. В.

Научное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРУМ. Т. 14

**Вводные лекции
по современной математике**

(Проект OTDE-Workshop)

Редактор серии:
А. Г. Кусраев

Редакторы тома:
А. Е. Гутман, А. Г. Кусраев,
Ж. Д. Тотиева

Компьютерная верстка: *И. С. Гаприндашвили*,
М. У. Вазагаева

Зав. редакцией: *В. В. Кибизова*

Подписано в печать 12.10.2023. Формат бумаги $60\times84^1/_{16}$.
Усл. п. л. 12,09. Тираж 200 экз. Заказ № 342.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

ISBN 978-5-904695-46-0

9 785904 695460