УДК 517.98

БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ АНАЛИЗ И ПРОБЛЕМА ВИКСТЕДА[1]

А. Е. Гутман, А. Г. Кусраев

Цель настоящего миникурса, состоящего из четырех лекций, — эскизное изложение основ булевозначного анализа и его применения к одной проблеме из теории линейных операторов в векторных решетках.

Ключевые слова: пространство Канторовича, проблема Викстеда, функциональное уравнение Коши, расширение поля, булевозначное моделирование, спуски и подъемы, булевозначные числа.

Введение

В течении последнего полувека все больше внимания уделяется синтетическим стандартным и нестандартным методам, характеризующимся комбинированием разных идей и технических средств из анализа, алгебры и математической логики. Одним из основных направлений, возникших на этом пути, является *булевозначный анализ* — исследование математических объектов посредством сравнительного анализа их представлений в двух различных теоретико-множественных моделях. Цель настоящего миникурса — продемонстрировать применение булевозначного анализа на примере одной проблемы из теории операторов в векторных решетках.

В первой лекции представлен необходимый минимум сведений о вещественных и комплексных *пространствах Канторовича* и порядково ограниченных операторах в них, а затем дается формулировка проблемы Викстеда: *описать расширенные пространства Канторовича, в которых все линейные операторы, перестановочные с порядковыми проекторами, являются порядково ограниченными.*

Во второй лекции показано, как строить нерегулярные решения функционального *уравнения Коши* с помощью *базиса Гамеля.* Затем

[1] Курс лекций подготовлен в Северо-Кавказском центре математических исследований ВНЦ РАН при поддержке Минобрнауки России, соглашения № 075-02-2021-1844, № 075-02-2022-896, № 075-02-2023-914. Работа А. Е. Гутмана выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

приводятся нужные сведения из теории расширения полей; основное внимание уделено продолжению *автоморфизмов* и *дифференцирований* полей, причем в этих вопросах роль базиса Гамеля играет *базис трансцендентности.*

Третья лекция посвящена эскизному изложению булевозначных моделей теории множеств. В ней сформулированы основные *принципы переноса, перемешивания и максимума.* Далее, представлены основные технические средства булевозначного анализа — операции *канонического вложения*, *спуска* и *подъема*, а также результаты их последовательного применения, иногда называемые *правилами сокращения стрелок* или *правилами Эшера.*

В четвертой лекции показывается, что проблема Викстеда — всего лишь новая форма вопроса о регулярности всех решений функционального уравнения Коши при некотором дополнительном условии однородности. Это обстоятельство связано с *теоремой Гордона*, утверждающей, что интерпретация поля действительных (комплексных чисел) в булевозначной модели представляет собой расширенное вещественное (комплексное) пространство Канторовича. Из этих фактов вытекают различные варианты решения проблемы Викстеда.

Необходимые сведения из теории векторных решеток содержатся в [1, 2], из булевозначного анализа — в [3, 4], из теории полей — в [5, 6]. Подробное изложение материала настоящего мини-курса можно найти в [7] и [4, гл. 4].

Лекция 1.
Пространства Канторовича. Проблема Викстеда

1. Пространство Канторовича. Здесь мы коротко рассмотрим порядково полные векторные решетки, именуемые также пространствами Канторовича. Необходимые сведения имеются в книгах [1, 2, 8].

1.1. Пусть $\mathbb{F}$ — линейно упорядоченное поле. *Упорядоченное векторное пространство* над $\mathbb{F}$ — пара $(E, \leqslant)$, где E — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а $\leqslant$ — *векторный порядок* в E, т. е. отношение порядка в E, согласованное со структурой векторного пространства. Последнее означает, что неравенства в E можно складывать и умножать на положительные элементы поля $\mathbb{F}$. Задание векторного порядка в векторном пространстве E над полем $\mathbb{F}$ равносильно также указанию множества — *положительного конуса* $E^+ \subset E$ со свойствами: $E^+ + E^+ \subset E^+$; $\lambda E^+ \subset E^+$ $(0 \leqslant \lambda \in \mathbb{F})$; $E^+ \cap E^+ = \{0\}$. При этом порядок $\leqslant$ и конус E^+ связаны соотношением

$$x \leqslant y \leftrightarrow y - x \in E^+ \quad (x, y \in E).$$

Упорядоченное векторное пространство, являющееся решеткой, называют *векторной решеткой*[2]. Для элементов x, y векторной решетки E приняты обозначения: $x \vee y := \sup\{x, y\}$, $x \wedge y := \inf\{x, y\}$, $|x| := \sup\{x, -x\}$, $x^+ := \sup\{x, 0\}$, $x^- := (-x)^+$.

Пространством Канторовича или, короче, *K-пространством* называют такую векторную решетку, в которой всякое непустое порядково ограниченное множество имеет точные границы. Порядковая ограниченность множества означает, что оно содержится в каком-нибудь порядковом интервале $[a, b] := \{x \in E : a \leqslant x \leqslant b\}$ $(a, b \in E,\ a \leqslant b)$.

1.2. Элементы $x, y \in E$ называют *дизъюнктными* и пишут $x \perp y$, если $|x| \wedge |y| = 0$. *Компонентой* (или *полосой*) векторной решетки E называют множество вида $M^\perp := \{x \in E : (\forall\, y \in M)\ x \perp y\}$, где $M \subset E$. Совокупность всех полос E, упорядоченная по включению, является полной булевой алгеброй $\mathbb{B}(E)$, в которой булевы операции выглядят так:

$$L \wedge K = L \cap K, \quad L \vee K = (L \cup K)^{\perp\perp},$$
$$L^* = L^\perp \quad (L, K \in \mathbb{B}(E)).$$

Алгебра $\mathbb{B}(E)$ носит название *базы* E.

Элемент $\mathbb{1} \in E$ называют (*слабой порядковой*) *единицей*, если в E нет ненулевых элементов, дизъюнктных $\mathbb{1}$, т. е. если $\{\mathbb{1}\}^\perp = \{0\}$ или, что то же самое $\{\mathbb{1}\}^{\perp\perp} = E$. Элемент $e \in E$ называют *единичным* относительно $\mathbb{1}$ или *осколком единицы* $\mathbb{1}$, если $e \wedge (\mathbb{1} - e) = 0$. Множество $\mathscr{E}(E) := \mathscr{E}(\mathbb{1})$ всех единичных элементов снабжают индуцированным из E порядком. Упорядоченное множество $\mathscr{E}(E)$ является булевой алгеброй, в которой булево дополнение имеет вид $e^* := \mathbb{1} - e$ $(e \in \mathscr{E}(\mathbb{1}))$.

[2]В западной литературе векторные решетки также принято называть *пространствами Рисса* в честь венгерского математика Фридеша Рисса (Riesz Frigyes; 1880–1957), одного из основателей функционального анализа.

1.3. Для каждой полосы K в K-пространстве E имеет место разложение в прямую сумму $E = K \oplus K^{\perp}$. Тем самым однозначно определен оператор проектирования $[K]$ на подпространство K параллельно $K^{\perp}$, называемый *порядковым проектором* (или просто проектором, если контекст исключает путаницу). При этом выполняются неравенства $0 \leqslant [K]x \leqslant x$ для всех $0 \leqslant x \in E$. Наоборот, если линейный проектор π в E удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \pi x \leqslant x$ $(0 \leqslant x \in E)$, то $K := \pi(E)$ является компонентой, причем $\pi = [K]$. В множестве всех порядковых проекторов $\mathbb{P}(E)$ вводят порядок, полагая $\rho \leqslant \pi$ в том и только том случае, когда $\operatorname{im}\rho \subset \operatorname{im}\pi$. Полезно иметь в виду равносильное определение $\rho \leqslant \pi \leftrightarrow \rho\pi = \pi\rho = \rho$. Упорядоченное множество $\mathbb{P}(E)$ является полной булевой алгеброй, в которой булевы операции имеют вид:

$$\pi \wedge \rho = \pi\rho = \rho\pi, \quad \pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi\rho,$$
$$\pi^* = I_E - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathbb{P}(E)).$$

1.4. Теорема. *Пусть E — произвольное K-пространство. Отображение $K \mapsto [K]$ есть изоморфизм булевых алгебр $\mathbb{B}(E)$ и $\mathbb{P}(E)$. Если же в E имеется порядковая единица, то отображения $\pi \mapsto \pi\mathbb{1}$ из $\mathbb{P}(E)$ в $\mathscr{E}(E)$ и $e \mapsto \{e\}^{\perp\perp}$ из $\mathscr{E}(E)$ в $\mathbb{B}(E)$ также являются изоморфизмами булевых алгебр.*

1.5. Пусть E и F — векторные решетки. Линейный оператор $T : E \to F$ называют *положительным* и пишут $T \geqslant 0$, если $Tx \geqslant 0$ для каждого $0 \leqslant x \in E$, и *регулярным*, если $T = T_1 - T_2$ для некоторых положительных операторов $T_1, T_2 : E \to F$. Говорят, что оператор T *порядково ограничен* (или *o-ограничен*), если $T(M)$ — порядково ограниченное множество в F для любого порядково ограниченного $M \subset E$. Если F — это K-пространство, то классы регулярных и порядково ограниченных операторов совпадают. Более того, справедливо следующее утверждение.

1.6. Теорема Рисса — Канторовича. *Если E — векторная решетка и F — произвольное K-пространство, то пространство $L^{\sim}(E,F)$ всех регулярных операторов из E в F само является K-пространством.* (*Порядок в $L^{\sim}(E,F)$ вводится формулой: $S \geqslant T \leftrightarrow S - T \geqslant 0$.*)

1.7. Напомним, что *комплексной векторной решеткой* принято называть комплексификацию $E_{\mathbb{C}} := E \oplus iE$ вещественной векторной решетки E при условии, что существует модуль $|z|$ каждого элемента $z \in E_{\mathbb{C}}$, определяемый формулой

$$|z| := \sup_{0 \leqslant \theta < 2\pi} |(\cos\theta)x + (\sin\theta)y| \quad (z := x + iy \in E_{\mathbb{C}}).$$

В случае K-пространства последнее условие выполняется автоматически. Дизъюнктность элементов $z := x + iy$ и $z' := x' + iy'$ из $E_{\mathbb{C}}$ вводится, как обычно, формулой $z \perp z' \leftrightarrow |z| \wedge |z'| = 0$ и равносильна соотношению $\{x, y\} \perp \{x', y'\}$. Полоса J в $E_{\mathbb{C}}$ определяется как комплексификация $J = J_0 \oplus iJ_0$ полосы J_0 в E. Как и в вещественном случае, всякая полоса в $E_{\mathbb{C}}$ допускает представление в виде $\{z \in E_{\mathbb{C}} : (\forall\, v \in V)\, z \perp v\}$, где V — подмножество $E_{\mathbb{C}}$.

1.8. Рассмотрим вещественные векторные решетки E и F. Пространство $\mathbb{C}$-линейных операторов $L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$ изоморфно комплексификации вещественного пространства $\mathbb{R}$-линейных операторов $L(E, F)$. Оператор $T \in L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$ допускает и притом единственное представление в виде $T = T_1 + iT_2$, где $T_1, T_2 \in L(E, F)$, и произвольный оператор $S \in L(E, F)$ отождествляется со своим каноническим продолжением $\widetilde{S} \in L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$, определяемым формулой $\widetilde{S}z := Sx + iSy$, $z = x + iy$. В частности, если E и F рассматривать как вещественные подпространства $E_{\mathbb{C}}$ и $F_{\mathbb{C}}$ соответственно, то пространство $L(E, F)$ можно мыслить как вещественное подпространство $L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$.

Оператор $T = T_1 + iT_2$ называют положительным, если $T_1 \geqslant 0$ и $T_2 = 0$. Если $E_{\mathbb{C}} = J \oplus J^{\perp}$ для некоторого идеала $J \subset E_{\mathbb{C}}$, то существует проектор $P : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ с ядром $J^{\perp}$ и образом J. Ограничение P на E будет порядковым проектором в E и, в частности, P — положительный оператор.

1.9. Исторический комментарий. Порядково (дедекиндово) полные векторные решетки, т. е. K-пространства, выделил и начал изучать Л. В. Канторович[3]. В первой основополагающей работе на эту тему он писал: *«В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного обще-*

[3] Леонид Витальевич Канторович (1912–1986) — советский математик и экономист, действительный член Академии Наук СССР, лауреат премии по экономике памяти Альфреда Нобеля 1975 года, один из основателей теории операторов в векторных решетках.

го класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы». Здесь Л. В. Канторович сформулировал важную методологическую установку — *эвристический принцип переноса*, согласно которому элементы K-пространства суть обобщенные числа. Глубина и универсальность принципа Канторовича получили полное разъяснение только в рамках булевозначного анализа (см. [3, 4]).

2. Проблема Викстеда. В этом разделе введем класс нерасширяющих операторов и приведем формулировку проблемы Викстеда.

2.1. Пусть E — произвольное K-пространство. Для линейного оператора $T : E \to E$ равносильны следующие условия:

(1) $Te \in \{e\}^{\perp\perp}$ $(e \in E)$;

(2) $e \perp f \ \to \ Te \perp f$ $(e, f \in E)$;

(3) $T(K) \subset K$ $(K \in \mathbb{B}(E))$;

(4) $\pi \circ T = T \circ \pi$ $\ (\pi \in \mathbb{P}(E))$.

2.2. Говорят, что оператор T *сохраняет полосы* или является *нерасширяющим*, если имеет место одно (а тогда и любое) из указанных условий (1)–(4). Скажем, что оператор $T := T_1 + iT_2 : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ сохраняет полосы, если таковыми являются вещественные линейные операторы T_1 и T_2. Нетрудно показать, что если E — K-пространство, то оператор T сохраняет полосы в том и только в том случае, когда $\pi T = T\pi$ для всех $\pi \in \mathbb{P}(E)$.

2.3. Пространство Канторовича E называют *расширенным*, если в нем любое непустое множество попарно дизъюнктных положительных элементов имеет супремум.

В расширенном K-пространстве существует порядковая единица. Более того, если в расширенном K-пространстве E фиксировать порядковую единицу $\mathbb{1}$, то в E можно, и притом единственным способом, определить структуру коммутативного кольца так, что выполнены условия:

(1) для положительного $a \in E$ оператор умножения $x \mapsto ax$ положителен и сохраняет полосы;

(2) $\mathbb{1}$ служит кольцевой единицей.

Если векторная решетка E является одновременно кольцом (алгеброй) и выполнено условие (1), то E принято называть *f-кольцом* (*f-алгеброй*). Таким образом, в расширенном K-пространстве выбор порядковой единицы однозначно определяет структуру f-алгебры.

Комплексную f-алгебру $E_{\mathbb{C}}$ определим как комплексификацию вещественной f-алгебры E при условии, что существует модуль любого элемента, см. 1.7. Умножение в E естественно продолжается до умножения в $E_{\mathbb{C}}$ по формуле $(x+iy)(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+x'y)$. При этом $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ $(z_1, z_2 \in E_{\mathbb{C}})$.

2.4. Перечислим важнейшие примеры расширенных K-пространств. В 2.4 (1)–(3) отношение порядка вводится поточечно, т. е. $f \leqslant g$ означает, что $f(t) \leqslant g(t)$ для всех t из общей области определения f и g.

(1) Расширенным K-пространством является пространство $L^0(\Omega, \Sigma, \mu) := L^0_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ классов эквивалентности почти всюду конечных измеримых функций на Ω, где (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, причем μ σ-конечна (или, более общо, обладает свойством прямой суммы, см. [8, 1.1.8]). Комплексификация этого пространства $L^0_{\mathbb{C}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ — комплексное расширенное K-пространство, состоящее из классов эквивалентности почти всюду определенных комплексных измеримых функций на Ω. База K-пространства $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ изоморфна булевой фактор-алгебре $\Sigma/\mu^{-1}(0)$ — булевой алгебре измеримых множеств по модулю множеств нулевой меры. Порядковый проектор в $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ представляет собой оператор умножения на характеристическую функцию измеримого множества.

(2) Пространство $C_\infty(Q)$ непрерывных функций, определенных на экстремально несвязном компакте Q, со значениями в расширенной числовой прямой и принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотном множестве [8, 1.4.2]. Комплексификация этого пространства $C_\infty(Q, \mathbb{C})$ состоит из классов эквивалентности непрерывных комплекснозначных функций, определенных на открытых плотных подмножествах Q; эквивалентными считаются функции, совпадающие на пересечении своих областей определения. База этого K-пространства изоморфна булевой алгебре открыто-замкнутых подмножеств компакта Q. Порядковый проектор в $C_\infty(Q)$ — оператор умножения на характеристическую функцию открыто-замкнутого множества.

(3) Пространство $\mathrm{Bor}(Q)$ классов эквивалентности борелевских функций, определенных на топологическом пространстве Q. Две функции *эквивалентны*, если они совпадают на дополнении к множеству первой категории. База K-пространства $\mathrm{Bor}(Q)$ изоморфна булевой алгебре борелевских подмножеств Q по модулю множеств первой категории. Комплексификация $\mathrm{Bor}(Q, \mathbb{C})$ пространства $\mathrm{Bor}(Q)$ состоит из классов эквивалентности комплекснозначных борелевских функций, определенных на Q.

(4) Пространство $\overline{\mathfrak{A}}$ самосопряженных (не обязательно ограниченных) операторов в гильбертовом пространстве, присоединенных к коммутативной алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$. База K-пространства $\overline{\mathfrak{A}}$ изоморфна булевой алгебре всех ортогональных проекторов, входящих в $\mathfrak{A}$.

2.5. Проблема Викстеда. *Описать расширенные K-пространства, в которых все линейные нерасширяющие операторы порядково ограничены.*

2.6. В связи с проблемой Викстеда возникло следующее понятие. Рассмотрим расширенное K-пространство G с единицей $\mathbb{1}$. Множество $\mathscr{E} \subset G$ называют *локально линейно независимым*, если для любых попарно различных элементов $e_1, \dots, e_n \in \mathscr{E}$, ненулевых чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и порядкового проектора π в G равенство $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \pi e_k = 0$ влечет $\pi e_k = 0$ при $k := 1, \dots, n$. Максимальное локально линейно независимое множество в G называют *локальным базисом Гамеля G*.

Одноточечное множество $\{\mathbb{1}\}$ локально линейно независимо. Из леммы Куратовского — Цорна следует, что в каждом расширенном K-пространстве существует локальный базис Гамеля. Кроме того, локально линейно независимое множество $\mathscr{E} \subset G$ будет локальным базисом Гамеля для G, если и только если для каждого $x \in G$ найдется разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathbb{B}(G)$ такое, что для любого индекса $\xi \in \Xi$ существуют конечные множества элементов $e_1, \dots, e_n \in \mathscr{E}$ и чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, для которых $\pi_\xi x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \pi_\xi e_k$.

2.7. Элемент $e \in G_+$ именуют *локально постоянным относительно $f \in G_+$*, если $e = \sup_{\xi\in\Xi} \lambda_\xi \pi_\xi f$ для некоторого числового семейства $(\lambda_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и семейства $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов.

Для произвольного расширенного K-пространства G равносильны следующие утверждения:

(1) *все элементы G_+ являются локально постоянными относительно $\mathbb{1}$;*

(2) *все элементы G_+ являются локально постоянными относительно произвольной порядковой единицы $e \in G$;*

(3) $\{\mathbb{1}\}$ — *локальный базис Гамеля для G;*

(4) *каждый локальный базис Гамеля для G состоит из попарно дизъюнктных элементов.*

2.8. Расширенное K-пространство G называют *локально одномерным*, если G удовлетворяет любому из эквивалентных условий 2.7 (1)–(4).

2.9. Теорема. *Пусть G — расширенное K-пространство. Следующие утверждения эквиваленты:*

(1) *G локально одномерно;*

(2) *всякий нерасширяющий линейный оператор $T : G \to G$ порядково ограничен.*

$\lhd$ Этот результат установлен в [9, теорема 2.1] и [10, теорема 3.2]. $\rhd$

2.10. Исторический комментарий. Вопрос о том, всякий ли нерасширяющий (= коммутирующий с порядковыми проекторами) линейный оператор в расширенном пространстве Канторовича автоматически порядково ограничен, был поставлен в работе Э. В. Викстеда[4] [11] 1977 года. В 1978 году Ю. А. Абрамович[5], А. И. Векслер[6] и А. В. Колдунов[7] [12] анонсировали первый пример неограниченного нерасширяющего линейного оператора. Кроме того, выяснилось, что ответ на вопрос Викстеда зависит от пространства, в котором действуют операторы. В работах упомянутых трех авторов [9, 12] и П. Макполина[8] и А. В. Викстеда [10] были найдены классы векторных решеток, в которых нерасширяющий линейный оператор автоматически порядково ограничен. В этих же работах [9, 10] было установлено, что вопрос Викстеда имеет положительный ответ тогда и только тогда, когда рассматриваемое K-пространство локально одномерно. Тем самым, обсуждаемая задача свелась к характеризации локально одномерных K-пространств.

[4]Энтони Викстед (Anthony William Wickstead; 1947) — профессор Королевского университета Белфаста, специалист в области теории операторов в банаховых решетках.

[5]Юрий Александрович Абрамович (1945–2003) — советский/американский математик, известен работами в области векторных и банаховых решеток, один из основателей журнала «Positivity».

[6]Александр Ильич Векслер (1933–2011) — советский и российский математик, специалист в области упорядоченных пространств и операторов в них.

[7]Андрей Витальевич Колдунов (1948–2021) — советский и российский математик, специалист в области упорядоченных пространств и операторов в них.

[8]Питер Макполин (Peter McPolin) — ученик Э. Викстеда, опубликовал 7 математических работ, затем переключился на литературно-критические и педагогические исследования.

В 1980-х годах была выдвинута гипотеза о том, что для K-пространства свойства локальной одномерности и дискретности равносильны. Ошибочные доказательства справедливости этой гипотезы и ее отрицания были опубликованы соответственно в [10] и [12]. В 1993 г. А. В. Викстед [13] зафиксировал вопрос о справедливости этой гипотезы как открытый.

Лекция 2.
Функциональное уравнение Коши.
Расширения полей

3. Функциональное уравнение Коши. В этом параграфе коротко рассмотрим хорошо известный объект классического математического анализа, вынесенный в название. В дальнейшем (см. § 7) мы обнаружим, что нерасширяющие операторы в пространствах Канторовича — решения функционального уравнения Коши в новом обличии, а проблема Викстеда равнозначна вопросу о регулярности всех решений этого уравнения при дополнительном условии типа однородности.

3.1. Символом $\mathbb{F}$ будем обозначать числовое поле, совпадающее с $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Функциональное уравнение Коши с неизвестной функцией $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ имеет вид

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{F}).$$

Нетрудно видеть, что решение этого уравнения автоматически оказывается $\mathbb{Q}$-однородным, т. е. удовлетворяет еще одному функциональному уравнению:

$$f(qx) = qf(x) \quad (q \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{F}).$$

В дальнейшем нас интересует более общая ситуация. А именно, будем рассматривать систему функциональных уравнений

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & (x, y \in \mathbb{F}), \\ f(px) = pf(x) & (p \in \mathbb{P},\ x \in \mathbb{F}), \end{cases} \tag{L}$$

где $\mathbb{P}$ — подполе поля $\mathbb{F}$. Обозначим символом $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ поле $\mathbb{F}$, рассматриваемое как векторное пространство над полем $\mathbb{P}$. Как видно, решения системы (L) суть $\mathbb{P}$-линейные функции из $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ в $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$.

3.2. Теорема. *Пусть $\mathscr{E}$ — базис Гамеля векторного пространства $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$, а $\mathscr{F}(\mathscr{E},\mathbb{F})$ — пространство всех функций из $\mathscr{E}$ в $\mathbb{F}$. Множество всех решений системы (L) представляет собой векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, изоморфное $\mathscr{F}(\mathscr{E},\mathbb{F})$. Изоморфизм осуществляется сопоставлением решению f его ограничения $f|_{\mathscr{E}}$ на $\mathscr{E}$.*

$\lhd$ Множество всех решений системы (L) совпадает с множеством $L_{\mathbb{P}}(\mathbb{F})$ всех $\mathbb{P}$-линейных операторов, действующих в векторном пространстве $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$. Поэтому достаточно заметить, что векторные пространства $L_{\mathbb{P}}(\mathbb{F})$ и $\mathscr{F}(\mathscr{E},\mathbb{F})$ изоморфны.

Пусть $\mathscr{F}_0(\mathscr{E},\mathbb{P})$ — множество всех финитных функций, т. е. таких $\varphi : \mathscr{E} \to \mathbb{P}$, что множество $\{e \in \mathscr{E} : \varphi(e) \neq 0\}$ конечно. Тогда $\mathscr{F}_0(\mathscr{E},\mathbb{P})$ — векторное пространство над $\mathbb{P}$, изоморфное $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$. Изоморфизм устанавливается сопоставлением функции $\varphi \in \mathscr{F}_0(\mathscr{E},\mathbb{P})$ элемента $x_\varphi := \sum_{e\in\mathscr{E}} \varphi(e)e$. Для произвольной функции $\psi \in \mathscr{F}(\mathscr{E},\mathbb{F})$ положим

$$f_\psi(x_\varphi) := \sum_{e\in\mathscr{E}} \varphi(e)\psi(e) \quad (\varphi \in \mathscr{F}_0(\mathscr{E},\mathbb{P})).$$

Тем самым определяется изоморфизм между векторными пространствами $\mathscr{F}(\mathscr{E},\mathbb{F})$ и $L_{\mathbb{P}}(\mathbb{F})$. $\rhd$

3.3. Теорема. *Произвольное решение системы уравнений (L) либо $\mathbb{F}$-линейно, либо имеет график, всюду плотный в пространстве $\mathbb{F}^2 := \mathbb{F} \times \mathbb{F}$.*

$\lhd$ Если решение f системы (L) $\mathbb{F}$-линейно, то оно имеет представление $f(x) = cx$ $(x \in \mathbb{F})$, где $c := f(1)$. В противном случае найдутся ненулевые элементы $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$, для которых $f(x_1)/x_1 \neq f(x_2)/x_2$. Отсюда вытекает линейная независимость векторов $v_1 := (x_1, f(x_1))$ и $v_2 := (x_2, f(x_2))$ из $\mathbb{F}^2$ над полем $\mathbb{F}$. Действительно, если $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$, то $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ и $\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) = 0$, причем система из последних двух уравнений имеет лишь тривиальное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, так как ее определитель $x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1) \neq 0$ по предположению. Итак, всякую пару $(x, y) \in \mathbb{F}$ можно представить в виде $(x, y) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$. Так как $\mathbb{P}$ плотно в $\mathbb{F}$, в любой окрестности пары (x, y) можно найти вектор вида $p_1 v_1 + p_2 v_2$, где $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$. Тем самым множество $\{p_1 v_1 + p_2 v_2 : p_1, p_2 \in \mathbb{P}\}$ плотно в $\mathbb{F}^2$. В то же время это множество содержится в графике функции f, так как с учетом

$\mathbb{P}$-линейности f справедливы равенства

$$p_1v_1 + p_2v_2 = (p_1x_1 + p_2x_2, p_1f(x_1) + p_2f(x_2)) = \\ = (p_1x_1 + p_2x_2, f(p_1x_1 + p_2x_2))$$

при любых $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$. $\triangleright$

3.4. Для того чтобы решение f системы (L) допускало представление $f(x) = cx$ $(x \in \mathbb{F})$, нужно потребовать какое-нибудь дополнительное условие регулярности. Таким очевидным условием является непрерывность, так как в силу $\mathbb{P}$-линейности f будет $f(p) = pf(1)$ и, воспользовавшись плотностью $\mathbb{P}$ в $\mathbb{F}$, получим требуемое представление. Приведем несколько других условий регулярности. Аддитивную функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ назовем *порядково ограниченной*, если она ограничена на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Решение f системы (L) при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ допускает представление $f(x) = cx$ $(x \in \mathbb{R})$ в том и только в том случае, когда выполнено любое из следующих условий (см. [14, § 2.1]):

(1) f непрерывна в некоторой точке;

(2) f монотонно убывает или монотонно возрастает;

(3) f порядково ограничена;

(4) f ограничена сверху или снизу на некотором измеримом множестве положительной лебеговой меры;

(5) f измеримо по Лебегу.

3.5. Рассмотрим теперь $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, и пусть $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0 + i\mathbb{P}_0$ для некоторого подполя $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{R}$. Тогда пространство решений системы (L) — комплексификация пространства решений той же системы при $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0$. Точнее, если $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — $\mathbb{P}_0$-линейная функция, то существует единственная $\mathbb{P}$-линейная функция $\widetilde{g} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, определяемая формулой

$$\widetilde{g}(z) = g(x) + ig(y) \quad (z = x + iy \in \mathbb{C}).$$

Наоборот, если $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — $\mathbb{P}$-линейная функция, то существует единственная пара $\mathbb{P}_0$-линейных функций $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что $f(z) = \widetilde{g}_1(z) + i\widetilde{g}_2(z)$ $(z \in \mathbb{C})$. Таким образом, любое решение f системы (L) имеет вид $f = f_1 + if_2$, где $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{P}_0$-линейны и $f_i(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$. Будем говорить, что f монотонна или ограничена, если таковы функции f_1 и f_2. Легко можно убедиться в справедливости следующих утверждений.

(1) График f плотен в $\mathbb{C}^2$ в том и только в том случае, когда график каждой из функций $f_1|_{\mathbb{R}}$ и $f_2|_{\mathbb{R}}$ плотен в $\mathbb{R}^2$.

(2) Решение f системы (L) при $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ и $\mathbb{P}=\mathbb{P}_0+i\mathbb{P}_0$, $\mathbb{P}_0\subset\mathbb{R}$, допускает представление $f(x) = cx$ $(x \in \mathbb{C})$ для некоторого $c\in\mathbb{C}$ в том и только в том случае, если выполнено любое из условий (1)–(5) из 3.4.

3.6. Теорема. *Пусть $\mathbb{P}$ — подполе поля $\mathbb{F}$, причем $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0 + i\mathbb{P}_0$ для некоторого подполя $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{R}$, если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Равносильны утверждения:*

(1) $\mathbb{F} = \mathbb{P}$;

(2) *любое решение системы (L) порядково ограничено.*

$\lhd$ Импликация (1) $\to$ (2) тривиальна. Противоположную импликацию докажем от противного. Предположение $\mathbb{F} \neq \mathbb{P}$ означает, что базис Гамеля $\mathscr{E}$ векторного пространства $\mathbb{F}_{\mathbb{P}}$ содержит по крайней мере два ненулевых несовпадающих элемента $e_1, e_2 \in \mathscr{E}$. Определим функцию $\psi : \mathscr{E} \to \mathbb{F}$ так, чтобы $\psi(e_1)/e_1 \neq \psi(e_2)/e_2$. Тогда $\mathbb{P}$-линейная функция $f = f_\psi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, совпадающая с ψ на $\mathscr{E}$, имеет плотный в $\mathbb{F}^2$ график согласно 3.3. Следовательно, f_ψ не может быть порядково ограниченной, см. 3.4, 3.5. $\rhd$

3.7. Рассмотрим еще две системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{F}), \\ f(px) = pf(x) \quad (p \in \mathbb{P},\ x \in \mathbb{F}), \\ f(xy) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{F}), \end{cases} \tag{A}$$

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{F}), \\ f(px) = pf(x) \quad (p \in \mathbb{P},\ x \in \mathbb{F}), \\ f(xy) = f(x)y + xf(y) \quad (x, y \in \mathbb{F}). \end{cases} \tag{D}$$

Ненулевые решения системы (A) называют $\mathbb{P}$-*автоморфизмами* поля $\mathbb{F}$, а решения системы D — $\mathbb{P}$-*дифференцированиями* поля $\mathbb{F}$. Тождественный автоморфизм и нулевое дифференцирование принято называть *тривиальными*. Вопрос о существовании нетривиальных решений систем (A) и (D) требует привлечения более тонких результатов из теории полей, излагаемых в следующей части настоящей лекции.

3.8. Исторический комментарий. Первоначально изучение функциональных уравнений было связано с задачами физики. Ранние исследования относятся к XIV веку, хотя идея функционального уравнения использовалась и раньше. Несмотря на солидный возраст теория функциональных уравнений представляют собой живой раздел современной математики с многочисленными внутриматематическими взаимосвязями, с расширяющейся областью приложений к наукам о природе, человеке и обществе. Первое систематическое изложение основных функциональных уравнений было дано в книге О. Л. Коши[9] «Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, преподаваемых в Королевской Политехнической школе», опубликованном в 1821 году. Детальное изложение результатов, приложений и истории предмета см. в книге [14].

Существование разрывных решений функционального уравнения Коши впервые доказал Гамель[10] (1905), используя базис векторного пространства вещественных чисел над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

4. Расширения полей. В этом разделе собраны некоторые сведения из теории полей, необходимые для дальнейшего анализа систем (A) и (D).

4.1. Рассмотрим два поля K и L. Если K — подполе поля L, то говорят также, что L — *расширение поля* K. Расширение L поля K называют *алгебраическим*, если каждый элемент из L служит корнем ненулевого многочлена (от одной переменной) с коэффициентами из поля K. Другими словами расширение L поля K именуем алгебраическим, если всякий элемент $x \in L$ алгебраичен над K; последнее же означает существование конечного числа элементов $a_0, \dots, a_n \in K$, $n \geqslant 1$, не равных нулю одновременно, для которых $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$. Расширение L поля K, не являющееся алгебраическим, называют *трансцендентным* (над K).

Напомним, что поле K алгебраически замкнуто, если всякий непостоянный многочлен с коэффициентами из K имеет хотя бы один корень в K. Эквивалентное условие состоит в том, что всякое алгебраическое расширение поля K совпадает с K.

Алгебраическим замыканием поля K называют такое его расширение, которое алгебраично над K и алгебраически замкнуто. В теории полей доказывается, что всякое поле K имеет единственное с точностью до K-изоморфизма алгебраическое замыкание (см. [5, 15]).

4.2. Пусть L — расширение поля K. Попарно различные элементы $x_1, \dots, x_n \in L$ называют *алгебраически независимыми* над K, если для любого многочлена P от n переменных с коэффициента-

[9] Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy; 1789–1857) — французский математик и механик, один из наиболее активных творцов современного математического анализа, один из основоположников механики сплошных сред.

[10] Георг Карл Вильгельм Гамель (1877–1954 года) — немецкий математик и механик, ученик Давида Гильберта.

ми из поля K равенство $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ влечет $P \equiv 0$, т. е. все коэффициенты P равны нулю.

Как видно из этого определения, алгебраическая независимость элементов $x_1, \ldots, x_n$ равносильна линейной независимости над K множества всех одночленов вида $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$, где $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \geqslant 0$.

Множество $\mathscr{E} \subset L$ назовем алгебраически независимым, если всякое конечное его подмножество алгебраически независимо. Пустое множество считают алгебраически независимым. Максимальное по включению алгебраически независимое над K множество $\mathscr{E} \subset L$ называют *алгебраическим базисом* (или *базисом трансцендентности*) L. Символом $K(\mathscr{E})$ обозначают наименьшее подполе поля L, содержащее K и множество $\mathscr{E} \subset L$, и при этом говорят, что $K(\mathscr{E})$ получается из K присоединением множества $\mathscr{E}$. Если $L = K(\mathscr{E})$ и $\mathscr{E}$ алгебраически независимо, то L принято называть *чистым расширением* поля K, а $\mathscr{E}$ — *чистым базисом* L над K.

4.3. Теорема Штейница. *Всякое расширение L поля K допускает алгебраический базис $\mathscr{E}$ над K. При этом L служит алгебраическим расширением чистого расширения $K(\mathscr{E})$.*

4.4. Теорема о продолжении изоморфизмов. *Пусть L — расширение поля K и $\mathscr{E}$ — алгебраический базис L над K. Пусть i — изоморфизм K на некоторое поле K' и L' — алгебраически замкнутое расширение поля K'. Для любого алгебраически независимого семейства $(l_e)_{e \in \mathscr{E}}$ элементов расширения L' существует изоморфизм i' из L в L', продолжающий i и удовлетворяющий условию $i'(e) = l_e$ для всех $e \in \mathscr{E}$.*

4.5. Отображение $d : K \to L$ называют *дифференцированием подполя* $K \subset L$ в поле L, если $d(x+y) = d(x)+d(y)$ и $d(xy) = d(x)y+xd(y)$ для любых $x, y \in K$. Общий результат о продолжении дифференцирований, сформулированный в следующем пункте, использует понятие *сепарабельного расширения*. Для наших дальнейших целей нет необходимости углубляться в свойства сепарабельных расширений; детали можно найти в [5, 6]. Здесь нам достаточно отметить, что если поле K алгебраически замкнуто или имеет характеристику нуль, то любое расширение K будет сепарабельным.

4.6. Теорема о продолжении дифференцирований. *Пусть K — расширение поля k, L — расширение поля K и d — дифференцирование поля k в L.*

(1) *Если K — сепарабельное алгебраическое расширение поля k, то d однозначно продолжается до дифференцирования D поля K в L.*

(2) *Если K — сепарабельное расширение поля k с чистым алгебраическим базисом $\mathscr{E} \subset K$ над k, то для любого семейства $(l_e)_{e\in\mathscr{E}}$ элементов L существует и притом единственное дифференцирование D поля K в L, продолжающее d и удовлетворяющее условию $De = l_e$ для всех $e \in \mathscr{E}$.*

4.7. *Пусть $\mathbb{C}$ служит трансцендентным расширением поля $\mathbb{P}$. Тогда в $\mathbb{C}$ существует нетривиальный $\mathbb{P}$-автоморфизм.*

$\lhd$ Пусть $\mathscr{E}$ — базис трансцендентности расширения $\mathbb{C}$ над $\mathbb{P}$. Так как $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое расширение поля $\mathbb{P}(\mathscr{E})$, то любой $\mathbb{P}$-автоморфизм ϕ поля $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ продолжается до $\mathbb{P}$-автоморфизма Φ поля $\mathbb{C}$ (см. 4.4).

Для построение нетривиального $\mathbb{P}$-автоморфизма в $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ рассмотрим сначала случай, когда $\mathscr{E}$ содержит лишь один элемент e, т. е. когда $\mathbb{C}$ — алгебраическое расширение простого трансцендентного расширения $\mathbb{P}(e)$. Возьмем элементы $a, b, c, d \in \mathbb{P}$, для которых $ad - bc \neq 0$. Тогда $e' = (ae + b)/(ce + d)$ — порождающий элемент поля $\mathbb{P}(e)$, отличный от e. Поле $\mathbb{P}(e) = \mathbb{P}(e')$ изоморфно полю рациональных дробей от одной переменной t, следовательно, дробно-линейная подстановка $t \mapsto (at + b)/(ct + d)$ определяет $\mathbb{P}$-автоморфизм ϕ поля $\mathbb{P}(e)$, переводящий e в e' (см. [3, § 39]).

Допустим теперь, что $\mathscr{E}$ содержит по меньшей мере два разных элемента e_1 и e_2, и возьмем произвольное биективное отображение $\phi_0 : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, для которого $\phi_0(e_1) = e_2$. Вновь используя то обстоятельство, что $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое расширение поля $\mathbb{P}(\mathscr{E})$, можно построить $\mathbb{P}$-автоморфизм ϕ поля $\mathbb{C}$, для которого $\phi_0(e) = \phi(e)$ при всех $e \in \mathscr{E}$ (см. 4.4). Как видно, ϕ нетривиален. $\rhd$

4.8. *Пусть $\mathbb{C}$ служит трансцендентным расширением поля $\mathbb{P}$. Тогда в $\mathbb{C}$ существует нетривиальное $\mathbb{P}$-дифференцирование.*

$\lhd$ Воспользуемся вновь базисом трансцендентности $\mathscr{E}$ расширения $\mathbb{C}$ над $\mathbb{P}$. Известно, что любое дифференцирование поля $\mathbb{P}$ продолжается на чисто трансцендентное расширение, причем такое продолжение однозначно определяется заданием произвольных значений на базисе трансцендентности (см. (2) из 4.6). Таким образом, для любого отображения $d : \mathscr{E} \to \mathbb{C}$ существует единственное дифференцирование $D : \mathbb{P}(\mathscr{E}) \to \mathbb{C}$, для которого $D(e) = d(e)$ при всех $e \in \mathscr{E}$ и $D(x) = 0$ при $x \in \mathbb{P}$. Далее, $\mathbb{C}$ служит сепарабельным алгебраическим расширением поля $\mathbb{P}(\mathscr{E})$, следовательно, D допускает, и притом единственное, продолжение до дифференцирования $\overline{D} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (см. (1) из 4.6). Очевидно, что свобода в выборе d гарантирует нетривиальность $\overline{D}$. $\rhd$

4.9. Теорема. *Пусть $\mathbb{C}$ служит расширением некоторого алгебраически замкнутого поля $\mathbb{P}$. Равносильны утверждения:*

(1) $\mathbb{C} = \mathbb{P}$;

(2) *в $\mathbb{C}$ нет нетривиальных $\mathbb{P}$-автоморфизмов;*

(3) *в $\mathbb{C}$ нет нетривиальных $\mathbb{P}$-дифференцирований.*

$\lhd$ Если $\mathbb{C} \neq \mathbb{P}$, то $\mathbb{C}$ — трансцендентное расширение поля $\mathbb{P}$, поэтому (2) $\to$ (1) и (3) $\to$ (1) вытекают из 4.7 и 4.8 соответственно. Обратные импликации очевидны. $\rhd$

4.10. Исторический комментарий. Теория полей и тесно связанная с ней теория многочленов берут свое начало из решения алгебраических уравнений. Первое четкое определение абстрактного поля дал Генрих Вебер[11] в 1893 году. В знаменитой работе 1910 года Эрнст Штайниц[12] развил аксиоматическую теорию полей и предложил множество важных концепций, таких как простое поле, сепарабельные элементы, совершенное поле и степень трансцендентности расширения поля.

Лекция 3.
Булевозначное моделирование. Спуски и подъемы

5. Булевозначное моделирование. Здесь коротко представлена необходимая информация о булевозначных моделях теории множеств. Подробное изложение имеется в книгах [3, 16].

Отметим сразу же, что в контексте настоящей статьи формальная теория множеств и ее модели используются как техническое средство для исследования конкретных функционально-аналитических объектов и нет прямой связи наших рассмотрений с основаниями математики. Поэтому придерживаемся принятого в функциональном анализе уровня строгости.

---

[11] Генрих Мартин Вебер (Heinrich Martin Weber; 1842–1913) — немецкий математик и педагог, ученик Б. Римана; основные труды в области теории алгебраических чисел, алгебраических функций и математической физики.

[12] Эрнст Штайниц (также Штейниц; Ernst Steinitz; 1871–1928) — немецкий математик; основные труды посвящены теории графов и топологии, однако наибольшую известность получила работа «Алгебраическая теория полей», опубликованная в 1910 году.

5.1. Теория множество Цермело — Френкеля с аксиомой выбора обозначается символом ZFC. Язык теории множеств ZFC использует следующие символы (совокупность которых называют *алфавитом* ZFC): символы переменных $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$; скобки (,); пропозициональные связки (т. е. знаки алгебры высказываний) $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\neg$; кванторы $\forall$, $\exists$; знак равенства $=$; символ специального двухместного предиката $\in$. Из символов алфавита составляются слова, т. е. конечные последовательности символов из алфавита ZFC. Правильно составленные слова называют *формулами.* Точнее, формулы теории ZFC определяются обычной рекурсивной процедурой из атомарных формул вида $x = y$ и $x \in y$, с помощью разумной расстановки скобок, кванторов и пропозициональных связок.

При этом теория ZFC — это наименьшее множество формул, содержащее аксиомы ZFC и замкнутое относительно правил вывода (см. [17]). Формулы теории называют также теоремами этой теории. Теория ZFC включает обычные аксиомы и правила вывода теорий первого порядка с равенством, которые можно найти в любом университетском курсе математической логики (см., например, [17, 18]). Помимо этого принимаются *специальные* аксиомы — аксиомы *объемности, объединения, степени, подстановки, регулярности, бесконечности* и *выбора.*

Естественный смысл вкладывается в термины *свободная переменная* и *связанная переменная*, а также в понятие *область действия квантора.* Так, например, в формуле $(\forall\, x)\,(x \in y)$ переменная x связана (входит в область действия квантора $\forall$), а переменная y свободна. При желании подчеркнуть, что в формуле φ свободными являются переменные $x_1, \ldots, x_n$ и только они, пишут $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

5.2. Содержательно область изменения переменных ZFC мыслят как мир множеств — универсум множеств. Иначе говоря, область изменения переменных содержит только множества. Вместо $\in (x, y)$ пишут $x \in y$ и говорят, что «x — элемент множества y», или «x принадлежит (содержится в, входит в) y».

Точное представление о классе всех множеств складывается на основе аксиоматики ZFC. Этот класс принято обозначать символом $\mathbb{V}$ и называть *универсумом фон Неймана*. В качестве исходного объекта этой конструкции принимается пустое множество. Элементарные шаги конструирования новых множеств из уже имеющихся — формирование множества подмножеств и объединения. Трансфинитное повторение этих шагов исчерпывает класс всех множеств $\mathbb{V}$.

Точнее, полагают

$$\mathbb{V} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathbb{V}_\alpha,$$

где On — класс всех ординалов и $\mathbb{V}_\alpha$ определяется по индукции:

$$\mathbb{V}_0 := \varnothing,$$

$$\mathbb{V}_{\alpha+1} := \mathscr{P}(\mathbb{V}_\alpha) \quad (\alpha \in \mathrm{On}),$$

$$\mathbb{V}_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbb{V}_\beta \quad (\alpha \text{ — предельный ординал}).$$

Класс $\mathbb{V}$ представляет собой стандартную модель теории ZFC. Это означает, что любая теорема φ теории ZFC будет истинным теоретико-множественным утверждением, если переменные в формуле φ трактовать, как элементы универсума $\mathbb{V}$, а предикат $\in$ понимать как отношение «быть элементом» в $\mathbb{V}$.

5.3. Рассмотрим теперь конструкцию булевозначного универсума. Пусть $\mathbb{B}$ — фиксированная полная булева алгебра. Для произвольного ординала α положим

$$\mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})} := \big\{x :\ \mathrm{Funct}(x) \wedge (\exists \beta)\, (\beta < \alpha \wedge \mathrm{dom}(x) \subset \mathbb{V}_\beta^{(\mathbb{B})} \wedge \mathrm{im}(x) \subset \mathbb{B})\big\}.$$

Итак, в более подробной записи, семейство $\big(\mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})}\big)_{\alpha \in \mathrm{On}}$ определяется индукцией по ординалам:

$$\mathbb{V}_0^{(\mathbb{B})} := \varnothing,$$

$$\mathbb{V}_{\alpha+1}^{(\mathbb{B})} := \big\{x :\ X \to \mathbb{B} :\ X \subset \mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})}\big\};$$

$$\mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})} := \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbb{V}_\beta^{(\mathbb{B})} \quad (\alpha \text{ — предельный ординал}).$$

Собрав воедино все эти множества $\mathbb{B}$-значных функций, получим класс

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} \mathbb{V}_\alpha^{(\mathbb{B})},$$

который и называют *булевозначным универсумом*. Элементы класса $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ принято называть $\mathbb{B}$-*значными множествами*.

5.4. Возьмем произвольную формулу $\varphi = \varphi(u_1, \dots, u_n)$ теории ZFC. Если заменить переменные $u_1, \dots, u_n$ элементами $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, то получим некоторое утверждение об объектах $x_1, \dots, x_n$. Вводится новый способ проверки истинности таких утверждений, отличный от способа, принятого в $\mathbb{V}$. Для этой цели указанному утверждению сопоставляют некоторую *оценку истинности* $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!]$, служащую элементом булевой алгебры $\mathbb{B}$. Тогда мы получаем возможность придать смысл формальным выражениям типа $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, где $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и φ — формула ZFC, т. е. определить, в каком точном смысле для элементов $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ выполнено теоретико-множественное высказывание $\varphi(u_1, \dots, u_n)$. Именно, будем говорить, что формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *истинна внутри* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ или *элементы* $x_1, \dots, x_n$ *удовлетворяют условию* φ, если $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] = \mathbb{1}$. При этом пишут $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Несложно убедиться, что аксиомы и теоремы исчисления предикатов первого порядка с равенством верны внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Приписывание булевых оценок истинности проводится двойной индукцией, учитывая характер построения формул из атомарных и задавая оценки атомарных формул $x \in y$ и $x = y$, где $x, y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, на основе конструкции $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Подробности этого определения можно найти в [3, 16].

5.5. В булевозначном универсуме $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ соотношение $[\![x = y]\!] = \mathbb{1}$ не влечет, вообще говоря, что $\mathbb{B}$-значные функции x и y (рассматриваемые как элементы $\mathbb{V}$) совпадают. Это обстоятельство затрудняет некоторые конструкции. В этой связи переходят от $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ к *отделимому булевозначному универсуму* $\overline{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$. Для определения последнего рассмотрим отношение $\{(x, y) : [\![x = y]\!] = \mathbb{1}\}$ в классе $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, представляющее собой, что очевидно, отношение эквивалентности. Выбирая элемент (представитель наименьшего ранга) в каждом классе эквивалентности, приходим к отделимому булевозначному универсуму $\overline{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$. Для обозначения последнего будем использовать тот же самый символ $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. полагаем $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} := \overline{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$. Для любой формулы φ теории ZFC и произвольных элементов x и y из $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ выполняется

$$[\![x = y]\!] = \mathbb{1} \to [\![\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(y)]\!].$$

Поэтому при вычислении булевых оценок истинности в отделимом универсуме можно использовать любые представители классов эквивалентности.

Важнейшие свойства булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ формулируются в виде трех принципов.

5.6. Принцип переноса. *Все теоремы* ZFC *истинны внутри* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, *символически*

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \textit{теорема}\ \mathrm{ZFC}.$$

Иными словами, если теоретико-множественная формула φ выражает доказуемое в ZFC утверждение, то $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi$. Иногда принцип переноса выражается словами: «$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — булевозначная модель теории ZFC».

5.7. Принцип максимума. *Для каждой формулы* $\varphi(x)$ *теории* ZFC *существует элемент* $x_0 \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, *для которого*

$$[\![(\exists x)\,\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(x_0)]\!].$$

Иными словами, принцип максимума утверждает, что для любой формулы φ теории ZFC выполняется

$$\big(\exists\, x_0 \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}\big)\, [\![\varphi(x_0)]\!] = \bigvee_{x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}} [\![\varphi(x)]\!].$$

В частности, если внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ истинно утверждение «выполняется $\varphi(x)$ для некоторого x», то существует элемент x_0 в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ (в смысле универсума фон Неймана $\mathbb{V}$), для которого $[\![\varphi(x_0)]\!] = \mathbb{1}$. Символически,

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models (\exists\, x)\,\varphi(x) \ \to\ (\exists\, x_0)\,\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_0).$$

5.8. Принцип перемешивания. *Пусть* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *разбиение единицы в* $\mathbb{B}$. *Для любого семейства* $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *элементов универсума* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ *существует единственный элемент* $x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ *такой, что* $b_\xi \leqslant [\![x = x_\xi]\!]$ *для всех* $\xi \in \Xi$. *Элемент* x *называют* **перемешиванием** *семейства* (x_ξ) *относительно* (b_ξ). *Перемешивание обозначается*

$$x = \mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi) = \mathrm{mix}\{b_\xi x_\xi : \xi \in \Xi\}.$$

5.9. Исторический комментарий. Своим возникновением булевозначные модели теории множеств обязаны выдающемуся достижению П. Дж. Коэна[13], установившему в начале 1960-х годов совместимость отрицания гипотезы континуума CH с аксиомами теории множеств Цермело — Френкеля ZFC. Вместе с более ранним результатом К. Гёделя[14] о совместимости CH с ZFC, установленный П. Дж. Коэном факт означает независимость CH от обычных аксиом ZFC. Способ моделирования, предложенный П. Дж. Коэном и названный им *методом форсинга*, вызывал определенные трудности восприятия. Булевозначные модели изобрели Дана Скотт[15], Роберт М. Соловей[16] и Петр Вопенка[17] в 1960-х годах, чтобы помочь понять метод форсинга Пола Коэна. Булевозначные модели не только обеспечили привлекательную наглядность методу Коэна с точки зрения классических математиков, но и оказались мощным инструментом доказательства теорем о совместимости и независимости. Подробнее об этом можно прочитать в книге [16].

6. Спуски и подъемы. Сравнительный анализ миров (универсумов) $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ предполагает их тесную взаимосвязь. Иначе говоря, необходим математический аппарат, позволяющий узнавать, как связаны между собой интерпретации одного и того же факта в указанных выше двух моделях $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Основу такого аппарата составляют операции канонического вложения, спуска и подъема, представленные ниже.

6.1. Начнем с канонического вложения универсума фон Неймана в булевозначный универсум. Для $x \in \mathbb{V}$ обозначим символом $x^\wedge$

---

[13] Пол Джозеф Коэн (Paul Joseph Cohen; 1934–2007) — американский математик; известен доказательством совместимости отрицания континуум-гипотезы с аксиоматикой Цермело — Френкеля и независимости аксиомы выбора от остальных аксиом Цермело — Френкеля.

[14] Курт Фридрих Гёдель (Kurt Friedrich Gödel; 1906–1978) — австрийский логик, математик и философ математики; известен своими *теоремами о неполноте*, которые оказали огромное влияние на представление об основаниях математики.

[15] Дана Стюарт Скотт (Dana Stewart Scott; 1932) — американский математик, известный работами в области математической логики и информатики.

[16] Роберт Мартин Соловей (Robert Martin Solovay; 1938) — американский математик, работающий в области теории множеств; в частности, установил, что утверждение «каждое множество вещественных чисел является измеримым по Лебегу» совместимо с теорией множеств Цермело — Френкеля без аксиомы выбора.

[17] Петр Вопенка (Petr Vopěnka; 1935–2015) — чешский математик, разработал альтернативную теорию множеств, автор известного принципа Вопенки.

стандартное имя x в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. элемент, определяемый следующей схемой рекурсии:

$$\varnothing^{\wedge} := \varnothing, \quad \operatorname{dom}(x^{\wedge}) := \{y^{\wedge} : y \in x\}, \quad \operatorname{im}(x^{\wedge}) := \{\mathbb{1}\}.$$

Работая с отделимым булевозначным универсумом $\overline{\mathbb{V}}^{(\mathbb{B})}$, мы сохраняем символ $x^{\wedge}$ для обозначения выделенного элемента из соответствующего класса эквивалентности. Рассмотрим одно важное свойство отображения $x \mapsto x^{\wedge}$.

Формула называется *ограниченной,* если все содержащиеся в ней связанные переменные входят в нее под знаками ограниченных кванторов, т. е. кванторов, область действия которых ограничена каким-либо множеством. Последнее означает, что любая связанная переменная x встречается в виде $(\forall\, x \in y)$ или $(\exists\, x \in y)$ для некоторого y.

6.2. Ограниченный принцип переноса. *Для каждой ограниченной формулы* φ *теории* ZFC *и любого набора* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ *имеет место эквивалентность*

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \varphi(x_1^{\wedge}, \dots, x_n^{\wedge}).$$

6.3. Для произвольного элемента x из (отделимого) булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ определяется класс $x{\downarrow}$ формулой

$$x{\downarrow} := \bigl\{y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : [\![y \in x]\!] = \mathbb{1}\bigr\}.$$

Этот класс называют *спуском* элемента x. При этом класс $x{\downarrow}$ является множеством, т. е. $x{\downarrow} \in \mathbb{V}$ для любого $x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Если $[\![x \neq \varnothing]\!] = \mathbb{1}$, то $x{\downarrow}$ — непустое множество.

6.4. Пусть f — отображение из X в Y внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Это означает, что f, X и Y — элементы $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, причем $[\![f : X \to Y]\!] = \mathbb{1}$. Существует единственное отображение $f{\downarrow}$ из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$ такое, что

$$[\![f{\downarrow}(x) = f(x)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X{\downarrow}).$$

При этом для любого непустого подмножества A множества X внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ (т. е. $[\![A \subset X]\!] = \mathbb{1}$) выполняется $f{\downarrow}(A{\downarrow}) = f(A){\downarrow}$. Отображение $f{\downarrow}$ из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$ называют *спуском* f из $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Отображение $f{\downarrow}$ обладает следующим свойством *экстенсиональности:*

$$[\![x = x']\!] \leqslant [\![f{\downarrow}(x) = f{\downarrow}(x')]\!] \quad (x, x' \in X{\downarrow}).$$

Для спусков композиции отображений $g \circ f$, обратного отображения f^{-1} и тождественного отображения I_X имеют место следующие правила:

$$(g \circ f)\!\downarrow = g\!\downarrow \circ f\!\downarrow, \quad (f^{-1})\!\downarrow = (f\!\downarrow)^{-1}, \quad (I_X)\!\downarrow = I_{X\downarrow}.$$

В силу этих правил можно рассматривать операцию спуска как ковариантный функтор из категории $\mathbb{B}$-значных множеств и отображений в категорию обычных (т. е. в смысле $\mathbb{V}$) множеств и отображений.

6.5. Для $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ обозначим символом $(x_1, \ldots, x_n)^{\mathbb{B}}$ упорядоченную n-ку внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Предположим что P — это n-местное отношение на X внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. $X, P \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $[\![P \subset X^{n^\wedge}]\!] = \mathbb{1}$ $(n \in \omega)$. Тогда существует n-местное отношение P' на $X\!\downarrow$ такое, что

$$(x_1, \ldots, x_n) \in P' \leftrightarrow [\![(x_1, \ldots, x_n)^B \in P]\!] = \mathbb{1}.$$

Допуская некоторую вольность, отношение P' обозначают тем же символом $P\!\downarrow$ и называют его *спуском* отношения P.

6.6. Пусть $x \in \mathbb{V}$ и $x \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, т. е. x — множество, составленное из B-значных множеств или, в символической записи, $x \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})})$. Положим $\varnothing\!\uparrow := \varnothing$ и

$$\operatorname{dom}(x\!\uparrow) = x, \quad \operatorname{im}(x\!\uparrow) = \{\mathbb{1}\},$$

если $x \neq \varnothing$. Элемент $x\!\uparrow$ отделимого универсума (т. е. выделенный представитель класса $\{y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : [\![y = x\!\uparrow]\!] = \mathbb{1}\}$) называют *подъемом* множества x. Для соответствующего элемента отделимого универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ сохраняют те же название и обозначение.

6.7. Пусть $X, Y, f \in \mathscr{P}(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})})$ и f — соответствие из X в Y. Для существования соответствия $f\!\uparrow$ из $X\!\uparrow$ в $Y\!\uparrow$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, удовлетворяющего условию

$$[\![f\!\uparrow\!(x) = f(x)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X),$$

необходимо и достаточно, чтобы f было *экстенсионально*, т. е. чтобы для любых $x, x' \in X$ выполнялось соотношение

$$[\![x = x']\!] \leqslant [\![f(x) = f(x')]\!] \quad (x, x' \in X).$$

Отображение $f\!\uparrow$ с указанным свойством единственно и удовлетворяет соотношению $f\!\uparrow\!(A\!\uparrow) = f(A)\!\uparrow$ $(A \subset X)$.

Композиция экстенсиональных отображений экстенсиональна. При этом подъем композиции отображений равен композиции (внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$) подъемов этих соответствий:

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models (g \circ f)\!\uparrow = g\!\uparrow \circ f\!\uparrow.$$

Отметим также, что если f и f^{-1} экстенсиональны, то $(f\!\uparrow)^{-1} = (f^{-1})\!\uparrow$.

6.8. Возьмем непустое множество X, т. е. $X \in \mathbb{V}$ и $X \neq \varnothing$. Пусть буква $\iota := \iota_X$ обозначает ограничение на X канонического вложения: $\iota : x \mapsto x^\wedge$ $(x \in X)$. Тогда $\iota(X)\!\uparrow = X^\wedge$ и $X = \iota^{-1}(X^\wedge\!\downarrow)$. Рассмотрим произвольный элемент $Y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающий непустое множество. Используя указанные соотношения можно распространить операцию подъема на отображения f из X в $Y\!\downarrow$ и операцию спуска на соответствия g из $X^\wedge$ в Y внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Именно, положим $f\!\Uparrow := (f \circ \iota^{-1})\!\uparrow$ и $g\!\Downarrow := g\!\downarrow \circ\, \iota$. Отображения $f\!\Uparrow$ и $g\!\Downarrow$ называют *модифицированным подъемом* f и *модифицированным спуском* g. (Если контекст исключает путаницу, то говорят по-прежнему о спусках и подъемах и используют простые стрелки.) Легко видеть, что $f\!\Uparrow$ — единственное отображение из $X^\wedge$ в Y внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, удовлетворяющее условию

$$[\![f\!\Uparrow(x^\wedge) = f(x)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X).$$

Аналогично, $g\!\Downarrow$ — единственное отображение из X в $Y\!\downarrow$ (в стандартной модели $\mathbb{V}$), удовлетворяющее равенству

$$[\![g\!\Downarrow(x) = g(x^\wedge)]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X).$$

6.9. Для данного множества $X \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ обозначим символом $\operatorname{mix} X := \operatorname{mix}(X)$ множество всех перемешиваний вида $\operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, где $(x_\xi) \subset X$ и (b_ξ) — произвольное разбиение единицы в $\mathbb{B}$. Имеют место следующие *правила сокращения стрелок*, иногда называемые *правилами Эшера*[18].

Пусть X и X' — подмножества $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $f : X \to X'$ — экстенсиональное отображение. Предположим, что элементы $Y, Y', g \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$

[18]Мауриц Корнелис Эшер (Maurits Cornelis Escher; 1898–1972) — нидерландский художник-график; известен своими концептуальными литографиями, гравюрами на дереве и металле, в которых он мастерски исследовал пластические аспекты понятий бесконечности и симметрии.

таковы, что $[\![Y \neq \varnothing]\!] = [\![g : Y \to Y']\!] = \mathbb{1}$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$X{\uparrow}{\downarrow} = \operatorname{mix} X, \quad Y{\downarrow}{\uparrow} = Y; \qquad f{\uparrow}{\downarrow} = f, \quad g{\downarrow}{\uparrow} = g.$$

Имеются и другие правила сокращения стрелок но они нам не понадобятся.

6.10. Исторический комментарий. Спуски и подъемы (термины ввел С. С. Кутателадзе[19]) неявно использовались с самого создания булевозначных моделей, см. [16]. Систематизация аппарата булевозначного анализа и ее адаптация к задачам анализа осуществлена в работах А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе, см. [3, 4]. Взаимосвязи, существующие между основными операциями булевозначного анализа, давно и плодотворно используются в приложениях. Трудно здесь выделить вклад отдельных авторов, кроме основополагающих работ Д. Скотта, Р. Соловея и С. Тенненбаума. О роли булевозначных моделей в исследованиях по основаниям математики можно прочитать в предисловии к книге [16] (написанной Д. Скоттом). Д. Скотт предвидел более широкое значение булевозначных моделей в математике и писал еще в 1969 году: *“We must ask whether there is any interest in these nonstandard models aside from the independence proof; that is do they have any mathematical interest? The answer must be yes, but we cannot yet give a really good arguments.”* В настоящее время имеются весьма впечатляющие доводы в пользу этой позиции, см., например, монографии [3, 4, 19].

Лекция 4.
Решение проблемы Викстеда

7. Булевозначные числа. Булевозначная интерпретация поля комплексных чисел представляет собой расширенное комплексное K-пространство, причем нерасширяющий оператор в этом пространстве — интерпретация линейного отображения в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемого как векторные пространство над подполем $\mathbb{C}^\wedge$. Тем самым возникает возможность изучения некоторых классов операторов как функционалов.

[19] Семён Самсонович Кутателадзе (род. 1945) — советский и российский математик, специалист в области функционального анализа и его приложений; внес вклад в выпуклый анализ и оптимизацию, теорию выпуклых поверхностей и изопериметрических задач, теорию операторов в векторных решетках, нестандартные методы анализа; автор учебника «Основы функционального анализа», один из основателей журнала «Positivity».

7.1. Всюду ниже $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра, а $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — соответствующий булевозначный универсум. В силу принципа максимума существует элемент $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которого $[\![\,\mathscr{R}$ — поле действительных чисел$\,]\!] = \mathbb{1}$. Если формула $\varphi(x)$ представляет собой формальную запись аксиом архимедова упорядоченного поля (для x), то она эквивалентна ограниченной формуле. Так как для поля действительных чисел формула $\varphi(\mathbb{R})$ истинна, то согласно ограниченному принципу переноса 6.2 будет $[\![\,\varphi(\mathbb{R}^\wedge)\,]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $[\![\,\mathbb{R}^\wedge$ — архимедово упорядоченное поле$\,]\!] = \mathbb{1}$. Можно считать при этом, что $\mathbb{R}^\wedge$ — подполе поля $\mathscr{R}$ в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

7.2. Пусть $\mathbf{R}$ — несущее множество поля $\mathscr{R}$, на котором заданы алгебраические операции и порядок, обозначаемые символами $\oplus$, $\otimes$, $\circledcirc$ соответственно. Тогда $\mathscr{R}$ представляет собой упорядоченную пятерку $(\mathbf{R}, \oplus, \otimes, \circledcirc, 0^\wedge, 1^\wedge)$ внутри $\mathbb{V}^{\mathbb{B}}$; символически, $\mathbb{V}^{\mathbb{B}} \models \mathscr{R} = (\mathbf{R}, \oplus, \otimes, \circledcirc, 0^\wedge, 1^\wedge)$.

Спуском поля $\mathscr{R}$ назовем множество $\mathbf{R}{\downarrow}$ на котором определены операции $\oplus{\downarrow}$, $\otimes{\downarrow}$ и предикат $\circledcirc{\downarrow}$, а также имеются два выделенных элемента $0^\wedge$ и $1^\wedge$; символически, $\mathscr{R}{\downarrow} = (\mathbf{R}{\downarrow}, \oplus{\downarrow}, \otimes{\downarrow}, \circledcirc{\downarrow}, 0^\wedge, 1^\wedge)$.

Если алгебраические операции и порядок в $\mathscr{R}{\downarrow}$ обозначить символами $+, \times, \leqslant$, то определение сложения, умножения и отношения порядка на множестве $\mathbf{R}{\downarrow}$ в более подробной записи выглядят так:

$$\begin{gathered} z = x + y \leftrightarrow [\![\, z = x \oplus y \,]\!] = \mathbb{1}, \\ z = x \times y \leftrightarrow [\![\, z = x \otimes y \,]\!] = \mathbb{1}, \\ x \leqslant y \leftrightarrow [\![\, x \circledcirc y \,]\!] = \mathbb{1} \\ (x, y, z \in \mathbb{R}{\downarrow}). \end{gathered}$$

Можно показать, что $\mathscr{R}{\downarrow}$ служит коммутативным упорядоченным кольцом. Более того, $\mathscr{R}{\downarrow}$ будет упорядоченной алгеброй, если умножение элементов $\mathscr{R}{\downarrow}$ на действительные числа определить правилом

$$y = \lambda x \leftrightarrow y = \lambda^\wedge \times x \leftrightarrow [\![\, y = \lambda^\wedge \otimes x \,]\!] = \mathbb{1} \quad (x, y \in \mathscr{R}{\downarrow},\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

7.3. Теорема Гордона. *Пусть $\mathscr{R}$ — поле действительных чисел в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда $\mathscr{R}{\downarrow}$ (со спущенными операциями и порядком) представляет собой расширенное K-пространство с порядковой единицей $\mathbb{1} = 1^\wedge$. Более того, существует булев изоморфизм χ булевой алгебры $\mathbb{B}$ на базу $\mathbb{P}(\mathscr{R}{\downarrow})$ такой, что для любых $x, y \in \mathscr{R}{\downarrow}$ и $b \in \mathbb{B}$*

справедливы эквивалентности:

$$\chi(b)x = \chi(b)y \leftrightarrow b \leqslant [\![x = y]\!],$$

$$\chi(b)x \leqslant \chi(b)y \leftrightarrow b \leqslant [\![x \leqslant y]\!].$$

7.4. В силу принципа максимума 5.9 существует элемент $\mathscr{C} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которого $[\![\mathscr{C}$ — поле комплексных чисел $]\!] = \mathbb{1}$. Так как равенство $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ выражается ограниченной теоретико-множественной формулой, то согласно ограниченному принципу переноса 6.2 будет $[\![\mathbb{C}^\wedge = \mathbb{R}^\wedge \oplus i^\wedge \mathbb{R}^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Кроме того, $\mathbb{R}^\wedge$ считают подполем поля $\mathscr{R}$, поэтому можно считать также, что $\mathbb{C}^\wedge$ — подполе поля $\mathscr{C}$. Если 1 — единица поля $\mathbb{C}$, то $1^\wedge$ — единица поля $\mathscr{C}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Будем писать i вместо $i^\wedge$ и $\mathbb{1}$ вместо $1^\wedge$.

7.5. Пусть $\mathbf{C}$ — несущее множество поля $\mathscr{C}$, а алгебраические операции обозначаем так же, как и в 7.2. Тогда $(\mathbf{C}, \oplus, \otimes, 0^\wedge, 1^\wedge)$ — упорядоченная пятерка внутри $\mathbb{V}^{\mathbb{B}}$. Спуском поля будет множество $\mathbf{C}{\downarrow}$, на котором определены операции $\oplus{\downarrow}$, $\otimes{\downarrow}$ и имеются два выделенных элемента $0^\wedge$ и $1^\wedge$. При этом $\mathscr{C}{\downarrow}$ будет комплексным коммутативным кольцом. Кроме того, $\mathscr{C}{\downarrow} = \mathscr{R}{\downarrow} \oplus i\mathscr{R}{\downarrow}$, следовательно, в силу теоремы Гордона 7.3 $\mathscr{C}{\downarrow}$ — расширенное комплексное K-пространство и комплексная f-алгебра одновременно, причем $1^\wedge$ — порядковая и кольцевая единица в $\mathscr{C}{\downarrow}$. Пространство $\mathscr{C}{\downarrow}$ зависит только от $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$, поэтому будем использовать также обозначение $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$.

7.6. Пусть $\mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ — множество всех нерасширяющих линейных операторов в $G_{\mathbb{C}}$, где $G := \mathscr{R}{\downarrow}$. Ясно, что $\mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ — комплексное векторное пространство. Более того, $\mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ будет точным унитарным модулем над кольцом $G_{\mathbb{C}}$, если для $g \in G_{\mathbb{C}}$ и $T \in \mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ определить оператор gT формулой $gT : x \mapsto g \cdot Tx$ $(x \in G_{\mathbb{C}})$. Это следует из того, что умножение на элемент $G_{\mathbb{C}}$ представляет собой нерасширяющий оператор и композиция нерасширяющих операторов есть нерасширяющий оператор.

7.7. Обозначим символом $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C})$ элемент $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающий пространство всех $\mathbb{C}^\wedge$-линейных отображений из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{C}$. Тогда $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C})$ — векторное пространство над полем $\mathbb{C}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, а $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C}){\downarrow}$ — точный унитарный модуль над $G_{\mathbb{C}}$.

7.8. *Линейный оператор в K-пространстве G или $G_{\mathbb{C}}$ будет нерасширяющим в том и только в том случае, когда он экстенсионален.*

$\lhd$ Как видно из теоремы Гордона 7.3, для произвольного линейного оператора $T : G \to G$ условие экстенсиональности $[\![x = y]\!] \leqslant [\![Tx = Ty]\!]$ $(x, y \in G = \mathscr{R}{\downarrow})$ означает, что для любых $x, y \in G$ и $\pi \in \mathbb{P}(G)$ из равенства $\pi x = \pi y$ следует $\pi Tx = \pi Ty$. Ввиду линейности T последнее равносильно условию $\pi x = 0 \;\to\; \pi Tx = 0$ $(x \in G,\ \pi \in \mathbb{P}(G))$. Если взять $x := \pi^{\perp} y$, то получим $\pi T \pi^{\perp} = 0$ или, что то же, $\pi T = \pi T \pi$. Согласно 2.1 последнее представляет собой одно из эквивалентных определений нерасширяющего оператора. В случае комплексного пространства $G_{\mathbb{C}}$ следует привлечь 2.2. $\rhd$

7.9. Теорема. *Модули* $\mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ *и* $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C}){\downarrow}$ *изоморфны. Изоморфизм устанавливается путем сопоставления нерасширяющему оператору его подъема.*

$\lhd$ Так как экстенсиональные отображения допускают подъем, то каждый оператор $T \in \mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ имеет подъем $\tau := T{\uparrow}$, который представляет собой единственную функцию из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{C}$, удовлетворяющую условию $[\![\tau(x) = Tx]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in G_{\mathbb{C}})$, см. 6.7. Нетрудно проверяется, что отображение $T \mapsto \tau$ является изоморфизмом модулей, причем обратным изоморфизмом служит отображение, сопоставляющее элементу $\tau \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C}){\downarrow}$ его спуск $\tau{\downarrow}$. $\rhd$

Теорема 7.9 сводит изучение нерасширяющих операторов в расширенном пространстве Канторовича к изучению решений функционального уравнения Коши с дополнительным условием однородности.

7.10. Исторический комментарий. В 1977 году Евгений Гордон[20], молодой преподаватель Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, опубликовал короткую заметку [20], начинавшуюся словами:

В настоящей работе устанавливается, что множество, элементами которого являются объекты, изображающие вещественные числа в булевозначной модели теории множеств $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$*, можно наделить линейной структурой и отношением порядка так, что оно превратится в расширенное* K*-пространство с базой* $\mathbb{B}$*. Показывается, что в некоторых случаях этот факт может быть использован для обобщения теорем о вещественных числах на расширенные* K*-пространства.*

Это заметка стала связующим звеном между различными разделами математики, что помогает, в частности, решать многочисленные задачи

[20]Евгений Израильевич Гордон (1949) — советский математик (с 1971 года работал в США), специалист в области нестандартного анализа, один из основателей булевозначного анализа.

функционального анализа в «полуупорядоченных векторных пространствах» с использованием техники булевозначных моделей теории множеств.

В том же году на симпозиуме по приложениям теории пучков к логике, алгебре и анализу (Дарем, 9–11 июля 1977 г.) Г. Такеути[21], известный специалист по теории доказательств, заметил, что если $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра ортогональных проекторов в гильбертовом пространстве H, то множество, элементы которого представляют вещественные числа в булевозначной модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, можно отождествить с векторной решеткой самосопряженных операторов в H, спектральные разложения которых принимают значения в $\mathbb{B}$ (см. [19]).

Эти два события ознаменовали рождение нового раздела функционального анализа, который Такеути обозначил термином *Булевозначный анализ.* История и достижения булевозначного анализа отражены в книгах [3] и [4].

8. Решение проблема Виксетда. В этом заключительном разделе сформулируем несколько результатов о наличии или отсутствии нерасширяющих линейных операторов в расширенных K-пространствах, которые можно получить, используя возможности, открываемые теоремой 7.9.

8.1. Напомним еще несколько определений, необходимых для формулировки основных результатов. Булеву σ-алгебру $\mathbb{B}$ называют *σ-дистрибутивной,* если для любой двойной последовательности $(b_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{B}$ выполнено условие

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\bigwedge_{m\in\mathbb{N}} b_{n,m} = \bigwedge_{\varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\bigvee_{n\in\mathbb{N}} b_{n,\varphi(n)}.$$

Другие эквивалентные определения имеются в книге [21]. Примером σ-дистрибутивной булевой алгебры служит полная атомная булева алгебра, т. е. алгебра всех подмножеств непустого множества. Важно подчеркнуть, что существуют и безатомные σ-дистрибутивные полные булевы алгебры (см. [8, 5.1.8]).

8.2. Пусть даны алгебра A и ее подалгебра A_0. Линейный оператор D из A_0 в A называют *дифференцированием*, если выполнено

[21] Гайши Такеути (Gaisi Takeuti; 1926–2017) — японский математик, известный своими работами в области теории доказательств; один из основателей булевозначного анализа; ученик Курта Гёделя, работал над непротиворечивостью действительных чисел.

условие

$$D(uv) = D(u)v + uD(v) \quad (u, v \in A_0).$$

Ядро дифференцирования представляет собой подалгебру. Ненулевое дифференцирование называют *нетривиальным.*

Пусть G — расширенное K-пространство с фиксированной мультипликативной структурой, E — подкольцо и подрешетка G, $D \in L(E_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{C}})$ и $D = D_1 + iD_2$. Оператор D будет комплексным дифференцированием в том и только в том случае, если D_1 и D_2 представляют собой вещественные дифференцирования из E в G.

$\vartriangleleft$ Нужно лишь в равенстве $D(uv) = D(u)v + uD(v)$ подставить $D := D_1 + iD_2$, вещественные $u := x \in E$ и $v := y \in E$, а затем приравнять вещественные и мнимые части полученного соотношения. $\vartriangleright$

Эндоморфизмом алгебры называют линейный мультипликативный оператор в ней. Биективный эндоморфизм называют *автоморфизмом.* Тождественный автоморфизм принято называть *тривиальным.*

Если данные выше определения автоморфизма и дифференцирования относятся к алгебре над полем $\mathbb{P}$, то говорят также о $\mathbb{P}$-автоморфизмах и $\mathbb{P}$-дифференцированиях соответственно.

8.3. *Если $E^{\perp\perp} = G$, то любое дифференцирование из $E_{\mathbb{C}}$ в $G_{\mathbb{C}}$ является нерасширяющим оператором.*

$\vartriangleleft$ В силу 2.2 и 8.2 нужно лишь установить, что любое вещественное дифференцирование является нерасширяющим оператором. Пусть $D : E \to G$ — вещественное дифференцирование. Возьмем дизъюнктные $x, y \in E$. Так как в f-алгебре соотношение $x \perp y$ влечет $xy = 0$, то $0 = D(xy) = D(x)y + xD(y)$. Но элементы $D(x)y$ и $xD(y)$ также дизъюнктны по определению f-алгебры, поэтому $D(x)y = 0$ и $xD(y) = 0$. Отсюда в силу точности f-алгебры E получаем $D(x) \perp y$ и $x \perp D(y)$. Рассмотрим теперь дизъюнктные $x \in E$ и $g \in G$. По условию идеал I, порожденный множеством $\{x\}^{\perp}$ и точкой x, будет фундаментом в G, поэтому можем предположить, не ограничивая общности, что $g \in I$. В то же время, $|g| \leqslant y$ для некоторого $y \in E_+$, следовательно, $D(x) \perp g$ в силу доказанного выше. $\vartriangleright$

8.4. Пусть $\mathscr{D}(\mathscr{C}{\downarrow})$ — множество всех дифференцирований, а $\mathscr{M}_N(\mathscr{C}{\downarrow})$ — множество всех нерасширяющих автоморфизмов в f-алгебре $\mathscr{C}{\downarrow}$. Пусть $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C})$ и $\mathscr{M}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C})$ — элементы $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающие множества всех $\mathbb{C}^{\wedge}$-дифференцирований и всех $\mathbb{C}^{\wedge}$-автоморфизмов в $\mathscr{C}$. Как видно, $\mathscr{D}(\mathscr{C}{\downarrow})$ — модуль над кольцом $\mathscr{C}{\downarrow}$ и $[\![\, \mathscr{D}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C})$ — комплексное векторное пространство $]\!] = \mathbb{1}$.

Операции спуска и подъема осуществляют изоморфизм модулей $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C}){\downarrow}$ и $\mathscr{D}(\mathscr{C}{\downarrow})$, а также биекцию множеств $\mathscr{M}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C}){\downarrow}$ и $\mathscr{M}_N(\mathscr{C}{\downarrow})$.

$\lhd$ Следует из 7.9. Нужно лишь заметить, что оператор $T \in \operatorname{End}_N(\mathscr{C}{\downarrow})$ будет дифференцированием (автоморфизмом) тогда и только тогда, когда $[\![\tau := T{\uparrow}$ — дифференцирование (автоморфизм)$]\!] = \mathbb{1}$. $\rhd$

8.5. *Порядково ограниченное дифференцирование и порядково ограниченный нерасширяющий автоморфизм расширенного f-кольца $G_{\mathbb{C}}$ тривиальны.*

$\lhd$ Можно считать $G_{\mathbb{C}} = \mathscr{C}{\downarrow}$. Если T — дифференцирование (нерасширяющий автоморфизм) f-кольца $G_{\mathbb{C}}$, то $[\![\tau := T{\uparrow}$ — $\mathbb{C}^\wedge$-дифференцирование ($\mathbb{C}^\wedge$-автоморфизм) поля $\mathscr{C}\,]\!] = \mathbb{1}$. Более того, T порядково ограничен тогда и только тогда, когда $[\![\tau$ порядково ограничен в $\mathscr{C}\,]\!] = \mathbb{1}$. Однако в поле $\mathscr{C}$ любое порядково ограниченное $\mathbb{C}^\wedge$-дифференцирование является нулевым и любой порядково ограниченный $\mathbb{C}^\wedge$-автоморфизм тождественен. В первом случае $T = 0$, а во втором $T = I$. $\rhd$

8.6. *Если $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{C}^\wedge \neq \mathscr{C}$, то в комплексной расширенной f-алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) = \mathscr{C}{\downarrow}$ существуют нетривиальное дифференцирование и нетривиальный нерасширяющий автоморфизм.*

$\lhd$ Можно показать, что в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ имеет место утверждение: поле $\mathbb{C}^\wedge$ алгебраически замкнуто в $\mathscr{C}$ (см. [22]). Но тогда условие $\mathbb{C}^\wedge \neq \mathscr{C}$ влечет за собой, что $\mathscr{C}$ служит трансцендентным расширением подполя $\mathbb{C}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Согласно 4.9 существуют нетривиальное $\mathbb{C}^\wedge$-дифференцирование $\delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ и нетривиальный $\mathbb{C}^\wedge$-автоморфизм $\alpha : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$. Если $D := \delta{\downarrow}$ и $A := \alpha{\downarrow}$, то в соответствии с 8.4 D — нетривиальное дифференцирование, а A — нетривиальный нерасширяющий автоморфизм f-алгебры $\mathscr{C}{\downarrow}$. $\rhd$

Следующий результат содержит решение проблемы Викстеда. Эквивалентности 8.7 (1) $\leftrightarrow$ 8.7 (2) $\leftrightarrow$ 8.7 (3) установлены А. Е. Гутманом в [23] для вещественного K-пространства $\mathbb{B}(\mathbb{R}) := \mathscr{R}{\downarrow}$. Эквивалентность 8.7 (3) $\leftrightarrow$ 8.7 (4) ранее была установлена в работах Ю. А. Абрамовича, А. И. Векслера, А. В. Колдунова [12] и П. Макполлина, А. В. Викстеда [10]. Оставшаяся часть теоремы 8.7 получена А. Г. Кусраевым [22].

8.7. Теорема. *Для произвольной полной булевой алгебры $\mathbb{B}$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *$\mathbb{B}$ является σ-дистрибутивной;*

(2) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathscr{C} = \mathbb{C}^{\wedge}$;

(3) *комплексное K-пространство $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ локально одномерно;*

(4) *в комплексном K-пространстве $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ все нерасширяющие линейные операторы порядково ограничены;*

(5) *в комплексной f-алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ нет ненулевых дифференцирований;*

(6) *в комплексной f-алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ всякий нерасширяющий эндоморфизм является порядковым проектором;*

(7) *в комплексной f-алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ нет нетривиальных нерасширяющих автоморфизмов.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Известно [3, 10.7.6], что если булева алгебра $\mathbb{B}$ σ-дистрибутивна, то $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{R}^{\wedge} = \mathscr{R}$. Отсюда, используя принцип ограниченного переноса 6.2, выводим: $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathscr{C} = \mathscr{R} \oplus i\mathscr{R} = \mathbb{R}^{\wedge} \oplus i\mathbb{R}^{\wedge} = \mathbb{C}^{\wedge}$.

(2) $\to$ (1): Устанавливается аналогично.

(3) $\leftrightarrow$ (4): Вытекает из теоремы 2.9.

(2) $\to$ (4): Если $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{C}^{\wedge} = \mathscr{C}$, то внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ множество $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C})$ состоит из функций $\tau : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ вида $\tau(z) = cz$, где $c \in \mathscr{C}$. Но тогда оператор $T := \tau{\downarrow}$ из $\mathscr{C}{\downarrow}$ в $\mathscr{C}{\downarrow}$ также имеет вид $T(u) = gu$ для некоторого $g \in \mathscr{C}{\downarrow}$.

(4) $\to$ (2): Из (3) следует, что в K-пространстве $\mathscr{R}{\downarrow}$ все нерасширяющие линейные операторы порядково ограничены. Но тогда $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{R}^{\wedge} = \mathscr{R}$ (см. [3, теорема 10.7.6]), стало быть, $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathscr{C} = \mathbb{C}^{\wedge}$.

(4) $\to$ (5): Следует из 8.3 и 8.5.

(4) $\to$ (6): Нерасширяющий эндоморфизм $T : \mathscr{C}{\downarrow} \to \mathscr{C}{\downarrow}$ допускает представление $T = T_1 + iT_2$, где T_1, T_2 — нерасширяющие линейные операторы в вещественном K-пространстве $\mathscr{R}{\downarrow}$ (см. 2.2). В силу (4) T_1 и T_2 порядково ограничены, следовательно, $T_l x = c_l x$ $(x \in \mathscr{R}{\downarrow})$ для некоторых констант $c_1, c_2 \in \mathscr{R}{\downarrow}$. Как видно, $Tz = c \cdot z$ $(z \in \mathscr{C}{\downarrow})$, где $c := c_1 + ic_2$. Мультипликативность оператора T влечет $c^2 = c$, поэтому выполнены равенства $c_1^2 - c_2^2 = c_1$ и $2c_1c_2 = c_2$. Если $\pi := [c_2]$ — порядковый проектор в $\mathscr{R}{\downarrow}$ на полосу $\{c_2\}^{\perp\perp}$, то из второго равенства выводим $\pi c_1 = (1/2)\pi(\mathbb{1})$, а из первого вытекает $-\pi(c_2^2) = (1/4)\pi(\mathbb{1})$. Последнее возможно только при $\pi = 0$, значит $c_2 = 0$ и $0 \leqslant c_1^2 = c_1$. Но верно также $0 \leqslant (\mathbb{1} - c_1)^2 = \mathbb{1} - c_1$, значит, $c_1 \leqslant \mathbb{1}$. Теперь видно, что оператор $x \mapsto T_1 x = c_1 x$ служит

порядковым проектором в $\mathscr{R}{\downarrow}$ и, так как $T_2 = 0$, то его каноническое продолжение на $\mathscr{C}{\downarrow}$ совпадает с T.

(6) $\to$ (7): Очевидно.

Нужные для завершения доказательства импликации (5) $\to$ (2) и (7) $\to$ (2) вытекают из 4.9 и 8.6.

(5) $\to$ (2): Если в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ не выполняется равенство $\mathscr{C} = \mathbb{C}^{\wedge}$, то $b := [\![\mathscr{C} = \mathbb{C}^{\wedge}]\!] < \mathbb{1}$. Но тогда $b^* = [\![\mathscr{C} \neq \mathbb{C}^{\wedge}]\!] \neq \mathbb{0}$. В булевозначной модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B}_0)}$ над булевой алгеброй $\mathbb{B}_0 := [\mathbb{0}, b^*]$ имеет место неравенство $\mathscr{C} \neq \mathbb{C}^{\wedge}$. В силу утверждения 8.6 существует ненулевое дифференцирование D в полосе $b^*\mathscr{C}{\downarrow}$. Единственное продолжение $D \oplus 0$ оператора D, совпадающее с нулем на полосе $b\mathscr{C}{\downarrow}$, также будет ненулевым дифференцированием в $\mathscr{C}{\downarrow}$.

(7) $\to$ (2): Аналогичным образом, используя утверждение 8.6, для того же $b \in \mathbb{B}$ можно найти нетривиальный автоморфизм A^* в полосе $b^*\mathscr{C}{\downarrow}$. Если A — тождественное отображение в полосе $b\mathscr{C}{\downarrow}$, то $A^* \oplus A$ — нетривиальный автоморфизм в $\mathscr{C}{\downarrow}$. $\triangleright$

8.8. Следствие. *Для расширенного вещественного K-пространства G с фиксированной структурой f-алгебры равносильны утверждения:*

(1) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathscr{R} = \mathbb{R}^{\wedge}$, *где* $\mathbb{B} = \mathbb{P}(G)$;

(2) *булева алгебра* $\mathbb{B} := \mathbb{P}(G)$ *σ-дистрибутивна;*

(3) *K-пространство* $\mathbb{B}(\mathbb{R}) := \mathscr{R}{\downarrow}$ *локально одномерно;*

(4) *в K-пространстве* $\mathbb{B}(\mathbb{R}) := \mathscr{R}{\downarrow}$ *все нерасширяющие линейные операторы порядково ограничены;*

(5) *в f-алгебре G нет нетривиальных дифференцирований;*

(6) *в комплексной f-алгебре $G_{\mathbb{C}}$ нет нетривиальных нерасширяющих автоморфизмов.*

8.9. Рассмотрим теперь вопрос о том, когда в пространстве измеримых функций существуют нетривиальные дифференцирования и автоморфизмы. Говорят, что пространство с мерой (Ω, Σ, μ) *обладает свойством прямой суммы*, если Σ содержит семейство $(\Omega_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно непересекающихся множеств конечной меры такое, что для каждого измеримого подмножества $A \in \Sigma$ конечной меры существуют счетное множество индексов $\Theta \subset \Xi$ и множество нулевой меры $A_0 \in \mathscr{N}$ такие, что

$$A = A_0 \cup \left(\bigcup_{\xi \in \Theta} (A \cap \Omega_\xi) \right).$$

Ненулевое дифференцирование, а также отличный от тождественного отображения автоморфизм принято называть нетривиальным. Дифференцирование (автоморфизм) S в расширенном K-пространстве L назовем *существенно нетривиальным*, если для любого порядкового проектора $\pi \in \mathbb{P}(L)$ из $\pi S = 0$ (соответственно $\pi S = \pi I_L$) следует $\pi = 0$.

8.10. Теорема. *Пусть* (Ω, Σ, μ) — *пространство с безатомной мерой, обладающее свойством прямой суммы. Тогда справедливы утверждения:*

(1) *в* $L^0_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ *имеется существенно нетривиальное дифференцирование;*

(2) *в* $L^0_{\mathbb{C}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ *имеется существенно нетривиальное дифференцирование;*

(3) *в* $L^0_{\mathbb{R}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ *имеется единственный нерасширяющий автоморфизм — тождественное отображение;*

(4) *в* $L^0_{\mathbb{C}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ *имеется существенно нетривиальный нерасширяющий автоморфизм.*

$\lhd$ Доказательство следует из теоремы 8.7 и из того факта, что булева алгебра измеримых множеств по модулю пренебрежимых множеств σ-дистрибутивна в том и только в том случае, когда она атомна и, следовательно, изоморфна булевой алгебре всех подмножеств некоторого непустого множества (см. [7, 5.3.4]). $\rhd$

8.11. Исторический комментарий. В связи с обстоятельствами, отмеченными в 2.10, в ходе изучения проблемы Викстеда сложилось убеждение, что равенство $\mathbb{R}^\wedge = \mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ связано с дискретностью K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$ или, что то же, с дискретностью булевой алгебры $\mathbb{B}$.

В 1995 г. А. Е. Гутман в работе [23] установил, что существует непрерывное (безатомное) локально одномерное K-пространство (см. также [24, 25]). В этой же работе он получил описание баз расширенных локально одномерных K-пространств: ими оказались в точности σ-дистрибутивные полные булевы алгебры. Эти результаты дают полное решение проблемы Викстеда.

В 2004 г. в работе А. Г. Кусраева [26] был предложен булевозначный подход к изучению нерасширяющих операторов. При этом были обнаружены новые взаимосвязи. Так, например, построение нерегулярного нерасширяющего оператора можно провести внутри подходящего булевозначного универсума с помощью базиса Гамеля поля вещественных чисел, рассматриваемого как векторное пространство над некоторым его подполем (см. [3, 8]). Разумеется, некоторые важные свойства K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$ связаны со строением поля вещественных чисел $\mathscr{R}$, рассматриваемого как векторное пространство над $\mathbb{R}^\wedge$. В частности, используя базис Гамеля, можно построить разрывную $\mathbb{R}^\wedge$-линейную функцию в $\mathscr{R}$, которая и дает нерегулярный линейный нерасширяющий оператор в $\mathscr{R}\!\downarrow$.

Развивая булевозначный подход, в [22] проведены аналогичные построения, но с привлечением *базиса трансцендентности* вместо базиса Гамеля, и получены новые характеризации K-пространств с σ-дистрибутивной базой в терминах более узкого класса нерасширяющих линейных операторов.

Литература

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—N. Y.: Acad. Press, 1985.—xvi+367 p.
2. *Schaefer H. H.* Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—xi+376 p.
3. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.—525 с.
4. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—(Trends in Science: The South of Russia. A Math. Monogr. 6).
5. *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы.—М.: Наука, 1965.—300 с.
6. *Зарисский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра.—М.: ИЛ, 1963.—373 с.
7. *Gutman A. E., Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* The Wickstead problem // Sib. Electronic Math. Reports.—2008.—Vol. 5.—P. 293–333.
8. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
9. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Операторы, сохраняющие дизъюнктность, их непрерывность и мультипликативное представление // Линейные операторы и их приложения: Межвуз. сб. науч. тр.—Л.: ЛГПИ, 1981.—С. 3–34.
10. *McPolin P. T. N., Wickstead A.W.* The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices // Math. Proc. Cambridge Phylos. Soc.—1985.—Vol. 97, № 3.—P. 481–487.
11. *Wickstead A. W.* Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces // Compositio Math.—1977.—Vol. 35, № 3.—P. 225–238.
12. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Операторы, сохраняющие дизъюнктность // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 248, № 5.—С. 1033–1036.
13. *Abramovich Yu. A., Wickstead A. W.* The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II // Quart. J. Math. Oxford Ser. 2.—1993.—Vol. 44.—P. 257–270.
14. *Ацел Я., Домбр Ж.* Функциональные уравнения с несколькими переменными.—М.: Физматлит, 2003.—432 с.
15. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра.—М.: Наука, 1976.—648 с.
16. *Bell J. L.* Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—N. Y. etc.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 p.

17. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика.—М.: Наука, 1987.—320 с.
18. *Шёнфильд Дж. Р.* Математическая логика.—М.: Наука, 1975. —520 с.
19. *Takeuti G.* Boolean valued analysis // Applications of Sheaves: Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Durham, July 9–21, 1977 / Eds. M. P. Fourman, C. J. Mulvey and D. S. Scott.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—pp. 714–731.—(Lect. Notes Math. Vol. 753).
20. *Гордон Е. И.* Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР.—1977.—Т. 237, № 4.—С. 773–775.
21. *Сикорский Р.* Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—375 с.
22. *Кусраев А. Г.* Автоморфизмы и дифференцирования в расширенной комплексной алгебре // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 1.—С. 97–107.
23. *Gutman A. E.* Locally one-dimensional K-spaces and σ-distributive Boolean algebras // Sib. Adv. Math.—1995.—Vol. 5, № 2.—P. 99–121.
24. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.
25. *Gutman A. E.* Disjointness preserving operators // Vector Lattices and Integral Operators / Ed. S. S. Kutateladze.—Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1996.—P. 361–454.
26. *Кусраев А. Г.* О нерасширяющих операторах // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, № 3.—С. 48–58.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4;
Новосибирский государственный университет
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1
E-mail: gutman@math.nsc.ru

Кусраев Анатолий Георгиевич
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1;
Южный математический институт ВНЦ РАН
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: kusraev@smath.ru

BOOLEAN VALUED ANALYSIS AND THE WICKSTEAD PROBLEM

A. E. Gutman, A. G. Kusraev

The purpose of this mini-course, consisting of four lectures, is to sketch Boolean valued analysis and its application to one problem from the theory of linear operators in vector lattices.

Key words: Kantorovich space, Wickstead problem, Cauchy functional equation, field extension, Boolean valued model, descent and ascent, Boolean valued reals.