Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2024. Том 65, № 2

УДК 517.98

КВАЗИПЛОТНОСТЬ В $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПАРАЛЛЕЛОТОПЫ

А. Е. Гутман, И. А. Емельяненков

Аннотация. Предложены два новых критерия замкнутости архимедовых конусов в счетномерных локально выпуклых пространствах — в терминах проективных параллелотопов и проективных автоморфизмов. Получены ответы на некоторые открытые вопросы, связанные с понятиями квазивнутренности и квазиплотности.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.204

Ключевые слова: архимедово упорядоченное векторное пространство, локально выпуклое пространство, слабая топология, конус, квазивнутренность, квазиплотное множество.

В работе [1] предложено исчерпывающее описание класса локально выпуклых пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты. А именно, введено понятие квазиплотного подмножества локально выпуклого пространства и показано, что описываемый класс составляют конечномерные пространства, а также все счетномерные пространства X, у которых топологически сопряженное пространство X' квазиплотно в алгебраически сопряженном пространстве $X^{\#}$, снабженном слабой топологией $\sigma(X^{\#}, X)$. Привлечение понятия квазиплотности позволило решить ряд проблем, связанных с архимедовыми конусами, но это понятие остается новым и малоисследованным, о чем, в частности, свидетельствует список открытых вопросов, приведенный в конце статьи [1]. Поскольку в случае $\dim X = |\mathbb{N}|$ локально выпуклое пространство $(X^{\#}, \sigma(X^{\#}, X))$ изоморфно $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, первоочередной задачей в рассматриваемом направлении является характеризация квазиплотных подмножеств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Статья посвящена решению этой задачи.

В параграфах 1 и 2, имеющих вспомогательный характер, приведены предварительные сведения и изучены автоморфизмы пространств последовательностей. В центральном параграфе 3 введено и исследовано понятие проективного параллелотопа и доказаны два новых критерия квазиплотности в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. В параграфах 4 и 5 даны ответы на четыре открытых вопроса, сформулированных в [1], а также на вопросы о представительности параллелотопов в их связи с квазиплотностью и квазивнутренностью.

§ 1. Предварительные сведения

Начнем с того, что уточним обозначения и термины общего характера, а также воспроизведем некоторые используемые в дальнейшем определения

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2022–0004).

и факты из [1], чтобы текст статьи был пригодным для независимого чтения. Более полный набор соответствующих сведений, включающий доказательства и примеры, имеется в работе [1] и цитируемой там литературе.

1.1. Символ «$\subset$» обозначает нестрогое включение множеств. Знак присваивания «$:=$» используется в значении «полагается равным» или «равно по определению».

Символ $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots\}$. Множества рациональных и вещественных чисел обозначаются символами $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. Символ $\mathbb{R}^+$ служит для обозначения совокупности $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geqslant 0\}$ положительных вещественных чисел. Множество $\mathbb{R}$ наделяется стандартными операциями и топологией, относительно которых оно является полем и локально выпуклым пространством. Символом $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ условимся обозначать множество вещественных чисел, снабженное дискретной топологией. Замкнутые и открытые числовые промежутки обозначаются символами $[\alpha, \beta]$ и $]\alpha, \beta[$.

Символы $\operatorname{lin} S$, $\operatorname{co} S$, $\operatorname{cl} S$ и $\operatorname{int} S$ служат для обозначения линейной оболочки, выпуклой оболочки, замыкания и внутренности множества S в рассматриваемом векторном или топологическом пространстве.

1.2. В дальнейшем под *векторным пространством* понимается векторное пространство над $\mathbb{R}$. Термин *подпространство* всюду означает векторное подпространство. Подмножество K векторного пространства называется *конусом*, если $K + K \subset K$, $\mathbb{R}^+K \subset K$ и $K \cap -K = \{0\}$. Конус K в векторном пространстве X называется *архимедовым*, если архимедово упорядоченное векторное пространство $(X, \leqslant_K)$, где $x \leqslant_K y \Leftrightarrow y - x \in K$.

1.3. Если X и Y — векторные пространства, символом $L(X, Y)$ обозначается векторное пространство линейных операторов из X в Y. Символ $X^{\#}$ используется для обозначения алгебраически сопряженного к X векторного пространства $L(X, \mathbb{R})$. Если X и Y — топологические векторные пространства, символом $\mathscr{L}(X, Y)$ обозначается векторное пространство непрерывных линейных операторов из X в Y, а символом X' — топологически сопряженное к X пространство $\mathscr{L}(X, \mathbb{R})$. Записи $L(X)$ и $\mathscr{L}(X)$ служат сокращениями для $L(X, X)$ и $\mathscr{L}(X, X)$. Символом $Aut(X)$ условимся обозначать совокупность всех автоморфизмов топологического векторного пространства X, т. е. множество таких биекций $T\colon X \to X$, что $T, T^{-1} \in \mathscr{L}(X)$.

1.4. Символом $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ обозначается подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, состоящее из финитных последовательностей, т. е. функций $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ с конечными носителями $\operatorname{supp} s := \{n \in \mathbb{N} : s(n) \neq 0\}$. Кортежи $x = (x(1), \dots, x(n)) \in \mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, традиционно считаются функциями $x\colon \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$. В дальнейшем используются обозначения

$$e_n := \chi_{\{n\}} = (0, \dots, 0, \underset{(n)}{1}, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};$$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n := \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_n\} = \bigl\{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}} : \operatorname{supp} s \subset \{1, \dots, n\}\bigr\}.$$

Линейный оператор $\pi_n\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$\pi_n s := s\big|_{\{1,\dots,n\}} = (s(1), \dots, s(n)). \tag{1}$$

Условимся использовать обозначение (1) не только для последовательностей $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, но и для кортежей $s \in \mathbb{R}^m$, где $m \geqslant n$. Кроме того, для удобства положим $\mathbb{R}^0 := \{0\}$ и $\pi_0 s := 0 \in \mathbb{R}^0$.

1.5. Говорят, что векторные пространства X и Y образуют *двойственную пару* относительно двойственности $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$, если $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ — такой билинейный функционал, что $\ker\langle\cdot| = \{0\}$ и $\ker|\cdot\rangle = \{0\}$, где $\langle x| = \langle x\,|\,\cdot\rangle \in Y^{\#}$ $(x\in X)$ и $|y\rangle = \langle\cdot\,|\,y\rangle \in X^{\#}$ $(y\in Y)$. Такие пространства X и Y по умолчанию наделяются соответствующими слабыми топологиями $\sigma(X,Y)$ и $\sigma(Y,X)$ и тем самым становятся хаусдорфовыми локально выпуклыми пространствами, которые условимся обозначать символами $X|Y$ и $Y|X$. При этом отображения $\langle\cdot|\colon X\to Y'$ и $|\cdot\rangle\colon Y\to X'$ (или, точнее, $\langle\cdot|\colon X|Y\to(Y|X)'$ и $|\cdot\rangle\colon Y|X\to(X|Y)'$) являются линейными и топологическими изоморфизмами.

1.6. Пространство $\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ рассматривается в двойственной паре с $\mathbb{R}^n$, где $\langle x\,|\,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x(i)y(i)$, а векторные пространства $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ по умолчанию считаются парой относительно двойственности $\langle x\,|\,y\rangle = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x(n)y(n)$ и наделяются соответствующими слабыми топологиями: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$. Эта же двойственность подразумевается при рассмотрении локально выпуклых пространств вида $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y$, где Y — подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющее следующим равносильным условиям (см. [1, 3.5, 3.6]):

(a) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ и Y образуют двойственную пару относительно $\langle x\,|\,y\rangle = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x(n)y(n)$;
(b) слабая топология $\sigma\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}, Y\big)$ хаусдорфова;
(c) Y плотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$;
(d) Y плотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{D}}$;
(e) $\pi_n Y = \mathbb{R}^n$ для всех $n\in\mathbb{N}$;
(f) $\pi_n e_n \in \pi_n Y$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

1.7. Множество $S\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, называется *проективным* (см. [1, 7.1]), если оно замкнуто в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{D}}$ или, что то же самое, содержит каждую последовательность $s\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющую включениям $\pi_n s\in\pi_n S$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

Примерами проективных множеств служат произвольные декартовы произведения $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n$, где $\Lambda_n\subset\mathbb{R}$. Кроме того, любое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ замкнуто также в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{D}}$ и поэтому проективно.

Последовательность множеств $S_n\subset\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ называется *проективной* (см. [1, 7.1]), если она обладает следующими равносильными свойствами:

(a) существует такое множество $S\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что $S_n = \pi_n S$ для всех $n\in\mathbb{N}$;
(b) $S_n = \pi_n S_m$ при $n\leqslant m$;
(c) $S_n = \pi_n S_{n+1}$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

При этом множество

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi_n^{-1}(S_n) = \big\{s\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \pi_n s\in S_n \text{ для всех } n\in\mathbb{N}\big\}$$

называется *проективным пределом* последовательности $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и обозначается символом $\varprojlim S_n$ (см. [1, 7.3]). Проективный предел $\varprojlim S_n$ представляет собой наибольшее среди множеств S, удовлетворяющих условию пункта (a), является единственным проективным среди таких множеств и совпадает с замыканием любого из них в топологическом пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{D}}$.

1.8. *Квазивнутренность* $\operatorname{qi} S$ подмножества S хаусдорфова локально выпуклого пространства X определяется следующим образом:

$$\operatorname{qi} S := \{x \in S : \operatorname{cl} \mathbb{R}^{+}(S - x) = X\}.$$

Элементы $\operatorname{qi} S$ называются *квазивнутренними точками* множества S. В случае $\operatorname{qi} S = S$ говорят, что множество S *квазиоткрыто.*

Теорема [1, 4.13]. *Для любого выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ справедливо равенство*

$$\operatorname{qi} C = \{c \in C : \pi_n c \in \operatorname{int} \pi_n C \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}.$$

В частности, выпуклое множество C квазиоткрыто в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ тогда и только тогда, когда каждая проекция $\pi_n C$ открыта в $\mathbb{R}^n$.

1.9. Подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, имеющее вид $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n$, где Λ_n — открытые подмножества $\mathbb{R}$, называется *открытой коробкой.* Топология на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, для которой открытые коробки служат базовыми открытыми множествами, называется *коробочной топологией.* Как легко видеть, для любого элемента $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ выпуклые открытые коробки

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \,]z(n) - r(n), z(n) + r(n)[, \quad r(n) > 0, \tag{2}$$

образуют базу окрестностей точки z в коробочной топологии.

Предложение [1, 7.8]. *Всякая выпуклая открытая коробка в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ служит примером проективного ограниченного квазиоткрытого множества. Более того, все подмножества $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, открытые в коробочной топологии, квазиоткрыты.*

1.10. Подмножество S локально выпуклого пространства X называют *квазиплотным* в X, если $S \cap B \neq \varnothing$ для любого замкнутого ограниченного выпуклого множества $B \subset X$, имеющего непустую квазивнутренность (см. [1, 6.2]).

Предложение [1, 6.4]. *В пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ все квазиплотные множества являются плотными.*

1.11. Предложение [1, 8.8]. *Следующие свойства множества $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильны:*

(a) *S квазиплотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;*

(b) *если C — компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\operatorname{qi} C \neq \varnothing$, то $S \cap C \neq \varnothing$;*

(c) *если B — непустое проективное ограниченное квазиоткрытое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, то $S \cap B \neq \varnothing$;*

(d) *если $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — проективная последовательность непустых ограниченных открытых выпуклых множеств, то $S \cap \varprojlim B_n \neq \varnothing$;*

(e) *если C — проективное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\operatorname{qi} C \neq \varnothing$, то $S \cap C \neq \varnothing$.*

1.12. Теорема [1, 8.5]. *Пусть Y — плотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

(a) *В пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|Y$ все архимедовы конусы замкнуты тогда и только тогда, когда Y квазиплотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

(b) *Если C — компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\operatorname{qi} C \neq \varnothing$ и $Y \cap C = \varnothing$* (см. предложение 1.11 (b)), *то множество $\left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}} : \langle x \,|\, c\rangle \geqslant 0 \text{ при } c \in C\right\}$ служит примером архимедова, но не замкнутого* (*более того, плотного*) *конуса в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|Y$.*

§ 2. Индуктивные и проективные автоморфизмы

В этом вспомогательном параграфе уточняется вид числовых матриц, задающих непрерывные линейные операторы в пространствах последовательностей, и исследуются операторы, соответствующие верхнетреугольным и нижнетреугольным матрицам.

2.1. Пусть X, Y — двойственная пара векторных пространств и $T \in \mathscr{L}(X)$. Как известно, в этом случае существует единственное отображение $T' \colon Y \to Y$, удовлетворяющее равенству $\langle Tx \,|\, y\rangle = \langle x \,|\, T'y\rangle$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Отображение T' принадлежит $\mathscr{L}(Y)$ и называется *сопряженным к T оператором* (см. [2, 11-1]). Аналогично для $S \in \mathscr{L}(Y)$ определяется оператор $S' \in \mathscr{L}(X)$.

Всякий оператор $T \in \mathscr{L}(X)$ является сопряженным к $T' \in \mathscr{L}(Y)$, а оператор $S \in \mathscr{L}(Y)$ — сопряженным к $S' \in \mathscr{L}(X)$, т. е. $T'' = T$ и $S'' = S$.

Для любого оператора $T \in \mathscr{L}(X)$ включения $T \in Aut(X)$ и $T' \in Aut(Y)$ равносильны. При этом $(T^{-1})' = (T')^{-1}$.

В дальнейшем в роли X, Y будет выступать пара $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Заметим, что в силу соотношения $\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big)' = \big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big)^{\#}$ все линейные операторы $T \colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ непрерывны, т. е. $L\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big) = \mathscr{L}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big)$.

2.2. Условимся называть числовые семейства $\mu \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *матрицами*, а последовательности $\mu(\cdot, n)$ и $\mu(m, \cdot)$ $(m, n \in \mathbb{N})$ — *столбцами* и *строками* матрицы μ:

$$\begin{array}{c@{}l}
\left(\begin{array}{cccccc}
\mu(1,1) & \mu(1,2) & \mu(1,3) & \cdots & \mu(1,n) & \cdots \\
\mu(2,1) & \mu(2,2) & \mu(2,3) & \cdots & \mu(2,n) & \cdots \\
\mu(3,1) & \mu(3,2) & \mu(3,3) & \cdots & \mu(3,n) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mu(m,1) & \mu(m,2) & \mu(m,3) & \cdots & \mu(m,n) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right) &
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \mu(m,\cdot) \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{cccccc} & & & & \mu(\cdot,n) & \end{array} &
\end{array}$$

$$\mu(\cdot, n) = (\mu(m,n))_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ — } n\text{-й столбец } (n \in \mathbb{N}) \text{ матрицы } \mu,$$
$$\mu(m, \cdot) = (\mu(m,n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ — } m\text{-я строка } (m \in \mathbb{N}) \text{ матрицы } \mu.$$

Транспонированная матрица μ^{T} определяется формулой $\mu^{\mathrm{T}}(m, n) := \mu(n, m)$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Матрицу μ назовем *матрицей с финитными столбцами* (*с финитными строками*), если $\mu(\cdot, n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (соответственно, $\mu(m, \cdot) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ для всех $m \in \mathbb{N}$). Частными случаями матриц с финитными столбцами и финитными строками служат *верхнетреугольные* и *нижнетреугольные матрицы* — такие $\mu, \lambda \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, что $\mu(m, n) = 0$ при $m > n$ и $\lambda(m, n) = 0$ при $n > m$:

$$\begin{pmatrix}
\mu(1,1) & \mu(1,2) & \mu(1,3) & \cdots & \mu(1,n) & \cdots \\
0 & \mu(2,2) & \mu(2,3) & \cdots & \mu(2,n) & \cdots \\
0 & 0 & \mu(3,3) & \cdots & \mu(3,n) & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mu(n,n) & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix},
\quad
\begin{pmatrix}
\lambda(1,1) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\lambda(2,1) & \lambda(2,2) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\lambda(3,1) & \lambda(3,2) & \lambda(3,3) & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\lambda(m,1) & \lambda(m,2) & \lambda(m,3) & \cdots & \lambda(m,m) & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix}.$$

2.3. Матрицам μ с финитными столбцами и матрицам λ с финитными строками соответствуют отображения $\mu^{\wedge}\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ и $\lambda^{\vee}\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, определяемые следующими формулами:

$$(\mu^{\wedge}x)(m) := \langle x \,|\, \mu(m,\cdot)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(m,n)x(n), \quad x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}},\ m\in\mathbb{N},$$

$$(\lambda^{\vee}y)(m) := \langle \lambda(m,\cdot) \,|\, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(m,n)y(n), \quad y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \ m\in\mathbb{N}.$$

(Поясним, почему $\mu^{\wedge}x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ при $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$. Действительно, благодаря финитности столбцов $\mu(\cdot,n)$ имеется такая последовательность натуральных чисел m_n, что $\mu(m,n) = 0$ для всех $m \geqslant m_n$. Пусть $x(n) = 0$ при $n > k$. Тогда для всех чисел $m \geqslant \max\{m_1,\ldots,m_k\}$ имеем $(\mu^{\wedge}x)(m) = \sum\limits_{n=1}^{k} \mu(m,n)x(n) = 0.$)

Всякому оператору T, принадлежащему $L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$ или $L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, сопоставим матрицу $[T] \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, полагая

$$[T](m,n) := (Te_n)(m), \quad m,n\in\mathbb{N}.$$

2.4. Предложение (ср. [2, 11-1-6, 11-1-10, 11-1-11]).

(a) *Если μ — матрица с финитными столбцами, то $\mu^{\wedge} \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$ и $[\mu^{\wedge}] = \mu$.*

(b) *Если λ — матрица с финитными строками, то $\lambda^{\vee} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ и $[\lambda^{\vee}] = \lambda$.*

(c) *Если $\nabla \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$, то $[\nabla]$ — матрица с финитными столбцами, $[\nabla]^{\wedge} = \nabla$, $\nabla' \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ и $[\nabla'] = [\nabla]^{\mathrm{T}}$.*

(d) *Если $\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, то $[\Delta]$ — матрица с финитными строками, $[\Delta]^{\vee} = \Delta$, $\Delta' \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$ и $[\Delta'] = [\Delta]^{\mathrm{T}}$.*

$\lhd$ В пояснении нуждается лишь пункт (d). Пусть $\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Тогда для всех $m,n\in\mathbb{N}$

$$[\Delta](m,n) = (\Delta e_n)(m) = \langle e_m \,|\, \Delta e_n\rangle = \langle \Delta' e_m \,|\, e_n\rangle = (\Delta' e_m)(n),$$

а значит, $[\Delta](m,\cdot) = \Delta' e_m \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$, т. е. $[\Delta]$ — матрица с финитными строками. Далее, для всех $m,n\in\mathbb{N}$

$$([\Delta]^{\vee}e_n)(m) = \langle [\Delta](m,\cdot) \,|\, e_n\rangle = ([\Delta](m,\cdot))(n) = [\Delta](m,n) = (\Delta e_n)(m),$$

откуда с учетом плотности $\mathrm{lin}\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и непрерывности операторов Δ и $[\Delta]^{\vee}$ (см. п. (b)) вытекает равенство $[\Delta]^{\vee} = \Delta$. Равенство $[\Delta'] = [\Delta]^{\mathrm{T}}$ очевидно. $\rhd$

2.5. Предложение. *Следующие свойства оператора $\nabla \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$ равносильны:*

(a) *$[\nabla]$ — верхнетреугольная матрица;*

(b) *$\nabla(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{n}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{n}$ для всех $n\in\mathbb{N}$;*

(c) *$\nabla e_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{n}$ для всех $n\in\mathbb{N}$.*

Оператор $\nabla \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$, обладающий равносильными свойствами (a)–(c), назовем *индуктивным*.

2.6. Предложение. *Следующие свойства оператора $\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ равносильны:*

(a) *$[\Delta]$ — нижнетреугольная матрица;*

(b) *если $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $n\in\mathbb{N}$ и $\pi_n y = 0$, то $\pi_n\Delta y = 0$;*

(c) *если $y,z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $n\in\mathbb{N}$ и $\pi_n y = \pi_n z$, то $\pi_n\Delta y = \pi_n\Delta z$;*

(d) *$\pi_n\Delta e_{n+1} = 0$ для всех $n\in\mathbb{N}$.*

Оператор $\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, обладающий равносильными свойствами (a)–(d), назовем *проективным*.

2.7. Предложение. (a) *Оператор* $\nabla \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$ *является индуктивным тогда и только тогда, когда* $\nabla' \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ *— проективный оператор.*

(b) *Оператор* $\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ *является проективным тогда и только тогда, когда* $\Delta' \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$ *— индуктивный оператор.*

2.8. Предложение. (a) *Для любой последовательности элементов* $x_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$ *существует единственный оператор* $\nabla \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$ *такой, что* $\nabla e_n = x_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Такой оператор* ∇ *является индуктивным.*

(b) *Если последовательность элементов* $y_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *удовлетворяет условию* $\pi_n y_{n+1} = 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то существует единственный оператор* $\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ *такой, что* $\Delta e_n = y_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Такой оператор* Δ *является проективным.*

$\triangleleft$ Утверждение (a) в пояснении не нуждается.

(b) По условию матрица λ, определенная формулой $\lambda(m,n) := y_n(m)$, является нижнетреугольной, а значит, $\Delta := \lambda^{\vee}$ — искомый оператор (см. предложение 2.4(b)). Единственность такого оператора вытекает из его непрерывности и плотности $\mathrm{lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, а проективность обусловлена соотношением 2.6(d). $\triangleright$

2.9. Предложение. *Пусть* $\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ *— проективный оператор.*

(a) *Оператор* Δ *непрерывен как отображение из* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{D}}$ *в* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{D}}$.

(b) *Если* P *— проективное подмножество* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *то* $\Delta^{-1}(P)$ *— проективное подмножество* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(c) *Если* $\mathrm{im}\,\Delta = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *и* Y *— плотное подпространство* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *то* $\Delta(Y)$ *— плотное подпространство* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$\triangleleft$ Утверждение (a) легко доказать с помощью предложения 2.6(c). Утверждения (b) и (c) вытекают из утверждения (a) согласно пп. 1.7 и 1.6(d) соответственно. $\triangleright$

2.10. Предложение. *Пусть* $\nabla \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$ *— индуктивный оператор. Следующие свойства* ∇ *равносильны:*

(a) $\nabla \in Aut(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$;

(b) ∇e_n $(n \in \mathbb{N})$ *— линейно независимые элементы* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$;

(c) $[\nabla](n,n) \neq 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

$\triangleleft$ Импликация (a)$\Rightarrow$(b) тривиальна.

(b)$\Rightarrow$(c). Поскольку $\nabla e_1 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_1$ (см. предложение 2.5(c)) и $\nabla e_1 \neq 0$, имеем $[\nabla](1,1) = (\nabla e_1)(1) \neq 0$. Пусть теперь $n > 1$. Согласно п. (b) элементы $\nabla e_1, \dots, \nabla e_{n-1}$ образуют базис $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{n-1}$. Если бы число $[\nabla](n,n) = (\nabla e_n)(n)$ равнялось нулю, то с учетом включения $\nabla e_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$ были бы справедливы соотношения $\nabla e_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{n-1} = \mathrm{lin}\{\nabla e_1, \dots, \nabla e_{n-1}\}$ вопреки линейной независимости $\nabla e_1, \dots, \nabla e_n$.

(c)$\Rightarrow$(a). Поскольку верхнетреугольная матрица $n \times n$ с ненулевыми диагональными элементами невырождена, элементы $\nabla e_1, \dots, \nabla e_n$ образуют базис $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, а значит, $\{\nabla e_n : n \in \mathbb{N}\}$ — базис $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$. $\triangleright$

Индуктивный оператор $\nabla \in L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$, обладающий равносильными свойствами (a)–(c), будем называть *индуктивным автоморфизмом*. Индуктивный автоморфизм ∇ назовем *позитивным*, если $[\nabla](n,n) > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Множество всех позитивных индуктивных автоморфизмов обозначим символом $\nabla_{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$.

2.11. Предложение. *Пусть $\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ — проективный оператор. Следующие свойства Δ равносильны:*

(a) $\Delta \in Aut(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$;

(b) Δe_n $(n \in \mathbb{N})$ — *линейно независимые элементы* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *и* $\operatorname{cl}\operatorname{im}\Delta = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;

(c) $[\Delta](n,n) \neq 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

$\lhd$ Импликация (a)$\Rightarrow$(b) тривиальна.

(b)$\Rightarrow$(c). Покажем, что $\Delta' e_n$ $(n \in \mathbb{N})$ — линейно независимые элементы $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$. Действительно, если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta' e_i = 0$, то для всех $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\Big\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \,\Big|\, \Delta y \Big\rangle = \Big\langle \Delta'\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) \,\Big|\, y \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta' e_i \,\Big|\, y \Big\rangle = 0,$$

откуда благодаря плотности $\operatorname{im}\Delta$ в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ вытекает равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ и поэтому $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Согласно предложениям 2.4(d), 2.7(b) и 2.10 отсюда следует, что $[\Delta](n,n) = [\Delta']^{\mathrm{T}}(n,n) = [\Delta'](n,n) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Импликация (c)$\Rightarrow$(a) так же легко выводится из предложений 2.4(d), 2.7(b) и 2.10. $\rhd$

Заметим, что в пункте (b) требование $\operatorname{cl}\operatorname{im}\Delta = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ является существенным. Соответствующим контрпримером служит оператор сдвига, определяемый формулой $\Delta(y) = (0, y(1), y(2), y(3), \ldots)$.

Проективный оператор $\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, обладающий равносильными свойствами (a)–(c), будем называть *проективным автоморфизмом.* Проективный автоморфизм Δ назовем *позитивным*, если $[\Delta](n,n) > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Множество всех позитивных проективных автоморфизмов обозначим символом $\triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

2.12. Следующее утверждение с очевидностью вытекает из приведенных выше сведений.

Предложение. (a) *Для любых* $\nabla \in L\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big)$ *и* $\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$

$$\nabla \in \triangledown_{+}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big) \;\Leftrightarrow\; \nabla' \in \triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}});$$
$$\Delta \in \triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \;\;\Leftrightarrow\;\; \Delta' \in \triangledown_{+}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big).$$

(b) *Множества* $\triangledown_{+}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big)$ *и* $\triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ *являются подгруппами в группах автоморфизмов* $Aut\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big)$ *и* $Aut(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ *относительно композиции операторов.*

§ 3. Проективные параллелотопы

В этом параграфе вводится понятие проективного параллелотопа, устанавливается связь параллелотопов с индуктивными и проективными автоморфизмами (теорема 3.4) и предлагаются два новых критерия квазиплотности в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — в терминах параллелотопов и автоморфизмов (теорема 3.8).

3.1. Для $\varkappa = (\varkappa_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ и $r \in \,]0,\infty[^{\mathbb{N}}$ положим

$$\Pi^r_\varkappa := \Big\{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(1)| < r(1),$$
$$\Big| y(n+1) - \sum_{i=1}^{n} \varkappa_n(i) y(i) \Big| < r(n+1) \text{ для всех } n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Для удобства в дальнейшем будем полагать $\varkappa_0 := 0 \in \mathbb{R}^0$. (Напомним о введенных ранее обозначениях $\mathbb{R}^0 := \{0\}$ и $\pi_0 y := \pi_0 x := 0 \in \mathbb{R}^0$ для $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $x \in \mathbb{R}^n$.) С учетом этого соглашения имеем

$$\Pi^r_\varkappa = \bigl\{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(n) - \langle \varkappa_{n-1} \,|\, \pi_{n-1} y\rangle| < r(n) \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\bigr\}.$$

Множество $z + \Pi^r_\varkappa$, где $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, условимся называть *параллелотопом* (точнее, *проективным параллелотопом*) с *центром* z, *наклоном* $\varkappa$ и *радиусом* r.

Символом Π^r_0 обозначим параллелотоп с нулевым центром $0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, нулевым наклоном $(0, 0, \dots) \in \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ и радиусом $r \in \,]0, \infty[^{\mathbb{N}}$, а символом Π^1_0 — параллелотоп $\Pi_0^{(1,1,\dots)}$:

$$\Pi^r_0 = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(n)| < r(n) \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\},$$
$$\Pi^1_0 = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(n)| < 1 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}.$$

3.2. Из следующей леммы видно, что каждая проекция $\pi_n P$ параллелотопа $P \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ является открытым параллелотопом в $\mathbb{R}^n$, т. е. открытым n-мерным параллелепипедом.

Лемма. *Пусть* $\varkappa \in \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$, $r \in \,]0, \infty[^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\pi_n \Pi^r_\varkappa &= \bigl\{x \in \mathbb{R}^n : |x(m) - \langle \varkappa_{m-1} \,|\, \pi_{m-1} x\rangle| < r(m) \text{ для } m = 1, \dots, n\bigr\}\\ &= \bigl\{x \in \mathbb{R}^n : \pi_{n-1} x \in \pi_{n-1}\Pi^r_\varkappa \text{ и } |x(n) - \langle \varkappa_{n-1} \,|\, \pi_{n-1} x\rangle| < r(n)\bigr\}.\end{aligned}$$

$\lhd$ Включение «$\subset$» очевидно. Предположим теперь, что $x \in \mathbb{R}^n$ и

$$|x(m) - \langle \varkappa_{m-1} \,|\, \pi_{m-1} x\rangle| < r(m), \quad m = 1, \dots, n.$$

Определим $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, полагая $\pi_n y := x$ и $y(m) := \sum\limits_{i=1}^{m-1} \varkappa_{m-1}(i) y(i)$ рекурсивно для $m > n$. Тогда $y \in \Pi^r_\varkappa$, а значит, $x \in \pi_n \Pi^r_\varkappa$. $\rhd$

3.3. Предложение. *Центр, наклон и радиус однозначно определяются параллелотопом: если* $z + \Pi^r_\varkappa = z' + \Pi^{r'}_{\varkappa'}$, *то* $z = z'$, $\varkappa = \varkappa'$ *и* $r = r'$.

$\lhd$ Пусть $z + \Pi^r_\varkappa = z' + \Pi^{r'}_{\varkappa'}$. Сразу заметим, что $z = z'$, так как непустое ограниченное множество не может иметь два центра симметрии. Поэтому можно считать, что $z = z' = 0$.

Рассмотрим $n \in \mathbb{N}$ и покажем, что $r(n) = r'(n)$ и $\varkappa_{n-1} = \varkappa'_{n-1}$. Случай $n = 1$ тривиален. Пусть $n > 1$. Для каждого $x \in \pi_{n-1}\Pi^r_\varkappa = \pi_{n-1}\Pi^{r'}_{\varkappa'}$ благодаря лемме 3.2 имеем при всех $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|\lambda - \langle \varkappa_{n-1} \,|\, x\rangle| < r(n) \;&\Leftrightarrow\; (x, \lambda) \in \pi_n \Pi^r_\varkappa\\ &\Leftrightarrow\; (x, \lambda) \in \pi_n \Pi^{r'}_{\varkappa'} \;\Leftrightarrow\; |\lambda - \langle \varkappa'_{n-1} \,|\, x\rangle| < r'(n),\end{aligned}$$

а значит, $r(n) = r'(n)$ и $\langle \varkappa_{n-1} \,|\, x\rangle = \langle \varkappa'_{n-1} \,|\, x\rangle$. Последнее равенство с учетом произвольности $x \in \pi_{n-1}\Pi^r_\varkappa$ означает, что функционал $\langle \varkappa_{n-1} - \varkappa'_{n-1}|$ постоянен на $\pi_{n-1}\Pi^r_\varkappa$. Следовательно, $\varkappa_{n-1} = \varkappa'_{n-1}$, так как согласно лемме 3.2 множество $\pi_{n-1}\Pi^r_\varkappa$ является окрестностью нуля в $\mathbb{R}^{n-1}$. $\rhd$

3.4. Теорема. *Следующие свойства множества $P \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильны:*

(a) *P является параллелотопом с центром в нуле, т. е. $P = \Pi_{\varkappa}^{r}$ для некоторых $\varkappa \in \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ и $r \in]0,\infty[^{\mathbb{N}}$;*

(b) *$P = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |\langle \nabla e_n \,|\, y\rangle| < 1$ при всех $n \in \mathbb{N}\}$ для некоторого автоморфизма $\nabla \in \triangledown_{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$;*

(c) *$P = \Delta(\Pi_0^1)$ для некоторого автоморфизма $\Delta \in \triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.*

При этом $\varkappa$, r, ∇ и Δ однозначно определяются параллелотопом P и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$r(n) = \frac{1}{(\nabla e_n)(n)}; \quad \varkappa_{n-1} = -r(n)\,\pi_{n-1}\nabla e_n; \tag{3}$$

$$\nabla e_n = \frac{1}{r(n)}(-\varkappa_{n-1}(1), \ldots, -\varkappa_{n-1}(n-1), 1, 0, 0, \ldots); \tag{4}$$

$$\Delta = (\nabla')^{-1} = (\nabla^{-1})'; \quad \nabla = (\Delta')^{-1} = (\Delta^{-1})'.$$

◁ (a)⇒(b). Пусть $\varkappa$ и r удовлетворяют условию (a). Согласно предложению 2.8(a) имеется индуктивный оператор ∇, удовлетворяющий равенству (4) для всех $n \in \mathbb{N}$, причем $\nabla \in \triangledown_{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$, поскольку $[\nabla](n,n) = (\nabla e_n)(n) = \frac{1}{r(n)} > 0$. Остается заметить, что для $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$

$$|y(n) - \langle \varkappa_{n-1} \,|\, \pi_{n-1} y\rangle| < r(n) \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{1}{r(n)} y(n) - \left\langle \frac{1}{r(n)}\varkappa_{n-1} \,\middle|\, \pi_{n-1} y\right\rangle\right| < 1$$
$$\Leftrightarrow\; |\langle \nabla e_n \,|\, y\rangle| < 1.$$

(b)⇒(c). Пусть P и ∇ удовлетворяют условию (b). Согласно предложению 2.12 операторы ∇' и $\Delta := (\nabla')^{-1}$ принадлежат группе $\triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Кроме того, для всех $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$ неравенство $|\langle \nabla e_n \,|\, y\rangle| < 1$ равносильно $|(\nabla' y)(n)| < 1$, а значит,

$$y \in P \;\Leftrightarrow\; \nabla' y \in \Pi_0^1 \;\Leftrightarrow\; y \in (\nabla')^{-1}(\Pi_0^1) = \Delta(\Pi_0^1).$$

(c)⇒(a). Пусть $\Delta \in \triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ и $P = \Delta(\Pi_0^1)$. Согласно предложению 2.12 оператор $\nabla := (\Delta^{-1})'$ принадлежит $\triangledown_{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})$. Определим r и $\varkappa$ в соответствии с равенствами (3) и покажем, что $P = \Pi_{\varkappa}^{r}$. Действительно, для всех $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$

$$(\Delta^{-1} y)(n) = \langle e_n \,|\, \Delta^{-1} y\rangle = \langle (\Delta^{-1})' e_n \,|\, y\rangle = \langle \nabla e_n \,|\, y\rangle$$
$$= (\nabla e_n)(n) y(n) + \langle \pi_{n-1}\nabla e_n \,|\, \pi_{n-1} y\rangle = \frac{1}{r(n)} y(n) - \left\langle \frac{1}{r(n)}\varkappa_{n-1} \,\middle|\, \pi_{n-1} y\right\rangle.$$

Следовательно, неравенства $|(\Delta^{-1} y)(n)| < 1$ и $|y(n) - \langle \varkappa_{n-1} \,|\, \pi_{n-1} y\rangle| < r(n)$ равносильны и поэтому

$$y \in P \;\Leftrightarrow\; y \in \Delta(\Pi_0^1) \;\Leftrightarrow\; \Delta^{-1} y \in \Pi_0^1 \;\Leftrightarrow\; y \in \Pi_{\varkappa}^{r}.$$

Поясним единственность параметров $\varkappa$, r, ∇ и Δ, фигурирующих в формулировке теоремы. Единственность $\varkappa$ и r обоснована в лемме 3.3. Если ∇ удовлетворяет условию (b), то, как видно из доказательства импликации (c)⇒(a), имеет место равенство $P = \Pi_{\varkappa}^{r}$, где r и $\varkappa$ определяются соотношениями (3). Тогда из предложения 3.3 следует, что параллелотопом P однозначно определяются значения ∇e_n ($n \in \mathbb{N}$), а значит, и оператор ∇. Если же Δ удовлетворяет условию (c), то, как легко видеть, $\nabla := (\Delta^{-1})'$ удовлетворяет условию (b) и, следовательно, параллелотоп P однозначно определяет операторы ∇ и $\Delta = (\nabla')^{-1}$. ▷

3.5. Следующее утверждение вытекает из предложения 2.12(b) и теоремы 3.4.

Следствие. *Если P — параллелотоп и $\Delta \in \triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, то $\Delta(P)$ и $\Delta^{-1}(P)$ — параллелотопы.*

3.6. Следствие. *Всякий параллелотоп является непустым проективным ограниченным квазиоткрытым выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

$\triangleleft$ Параллелотоп Π_0^1, очевидно, обладает перечисленными свойствами, а значит, с учетом предложений 2.9(b) и 2.12(b) ими обладает и всякое множество вида $z + \Delta(\Pi_0^1)$, где $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\Delta \in \triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Остается привлечь теорему 3.4. $\triangleright$

3.7. Лемма. *Пусть C — проективное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Тогда $\operatorname{qi} C \neq \varnothing$ в том и только в том случае, если C содержит некоторый параллелотоп.*

$\triangleleft$ Достаточность вытекает из следствия 3.6. Покажем необходимость. Можно считать, что $0 \in \operatorname{qi} C$. Согласно теореме 1.8 для каждого $n \in \mathbb{N}$ проекция $\pi_n C$ является окрестностью нуля в $\mathbb{R}^n$, а значит, существуют последовательности элементов $c_n \in C$ и чисел $\varepsilon_n > 0$ такие, что

$$\pi_n c_n = \varepsilon_n \pi_n e_n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\pi_n c_{n+1} = \pi_n \pi_{n+1} c_{n+1} = \pi_n(\varepsilon_{n+1} \pi_{n+1} e_{n+1}) = 0$, благодаря предложению 2.8(b) имеется такой проективный оператор $\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, что $\Delta e_n = \frac{1}{2^{n+1}} c_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того,

$$\begin{aligned}[]
[\Delta](n,n) &= (\Delta e_n)(n) = \frac{1}{2^{n+1}} c_n(n) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} (\pi_n c_n)(n) = \frac{1}{2^{n+1}} (\varepsilon_n \pi_n e_n)(n) > 0,
\end{aligned}$$

а значит, $\Delta \in \triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Из предложения 2.9(b) следует, что $D := \Delta^{-1}(C)$ — проективное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, причем $0 \in D$ и $2^{n+1} e_n \in D$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $z := (1, 1, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и покажем, что $z + \Pi_0^1 \subset D$.

Пусть $y \in \Pi_0^1$. Поскольку множество D проективно, достаточно фиксировать $n \in \mathbb{N}$ и установить включение $x := \pi_n(z+y) \in \pi_n D$. Для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $x(i) = 1 + y(i)$, где $|y(i)| < 1$, и поэтому $0 < x(i) < 2$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
x &= x(1)\pi_n e_1 + x(2)\pi_n e_2 + \dots + x(n)\pi_n e_n \\
&= \frac{x(1)}{4}\pi_n(4e_1) + \frac{x(2)}{8}\pi_n(8e_2) + \dots + \frac{x(n)}{2^{n+1}}\pi_n\bigl(2^{n+1}e_n\bigr) + \Bigl(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{x(i)}{2^{i+1}}\Bigr)0,
\end{aligned}$$

а значит, x принадлежит $\pi_n D$ как выпуклая комбинация элементов

$$\pi_n(4e_1), \pi_n(8e_2), \dots, \pi_n\bigl(2^{n+1}e_n\bigr), 0 \in \pi_n D.$$

Из включения $z + \Pi_0^1 \subset D$ следует, что множество $C = \Delta(D)$ содержит параллелотоп $\Delta z + \Delta(\Pi_0^1)$ (см. теорему 3.4). $\triangleright$

В связи с леммой 3.7 возникает естественный вопрос о том, образуют ли параллелотопы «базу квазивнутренности» в следующем смысле: если C — проективное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $x \in \operatorname{qi} C$, то содержится ли в C какой-либо параллелотоп с центром x или хотя бы параллелотоп, включающий точку x? Ответ на этот вопрос приведен ниже в пп. 5.5 и 5.6.

3.8. Теорема. *Следующие свойства множества $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильны:*

(a) *S квазиплотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;*

(b) *S имеет непустое пересечение с любым параллелотопом;*

(c) *для любого автоморфизма $\Delta \in \triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ множество $\Delta(S)$ коробочно плотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

◁ Эквивалентность (a)⇔(b) вытекает из предложения 1.11, следствия 3.6 и леммы 3.7.

(b)⇒(c). Пусть $\Delta \in \triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Поскольку всякая базовая открытая коробка

$$B = \prod_{n\in\mathbb{N}}]z(n) - r(n), z(n) + r(n)[$$

(см. (2)) представляет собой параллелотоп $z + \Pi_0^r$, по следствию 3.5 множество $\Delta^{-1}(B)$ — тоже параллелотоп. Тогда из условия (b) следует $S \cap \Delta^{-1}(B) \neq \varnothing$, а значит, $\Delta(S) \cap B \neq \varnothing$.

(c)⇒(b). Согласно теореме 3.4 всякий параллелотоп имеет вид $z + \Delta(\Pi_0^1)$ для некоторых $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\Delta \in \triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Поскольку $\Delta^{-1} \in \triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ (см. предложение 2.12(b)) и $\Delta^{-1}z + \Pi_0^1$ — коробка, из условия (c) следует, что

$$\Delta^{-1}(S) \cap (\Delta^{-1}z + \Pi_0^1) \neq \varnothing,$$

а значит, $S \cap (z + \Delta(\Pi_0^1)) \neq \varnothing$. ▷

3.9. Следствие. *Если S — квазиплотное подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\Delta \in \triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, то $\Delta(S)$ квазиплотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

§ 4. Примеры

В этом параграфе приведены контрпримеры к трем сформулированным в [1] гипотезам — о полярах конусов [1, 9.6], о связи квазиплотности с проективностью [1, 9.7] и о пространствах, в которых все линейно независимые множества замкнуты [1, 9.11].

4.1. Если X, Y — двойственная пара векторных пространств, то для всякого множества $S \subset X$ определены поляры (см. [1, 3.7])

$$S^{\oplus} := \{y \in Y : \langle s \,|\, y\rangle \geqslant 0 \text{ для всех } s \in S\};$$
$$S^{\boxplus} := \{y \in Y : \langle s \,|\, y\rangle > 0 \text{ для всех } s \in S\backslash\{0\}\}.$$

Последовательность подмножеств $S_n \subset \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ $(n \in \mathbb{N})$ называется *индуктивной* (см. [1, 8.1]), если она обладает любым из следующих равносильных свойств:

(a) существует такое множество $S \subset \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$, что $S_n = S \cap \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(b) $S_n = S_m \cap \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ при $n \leqslant m$;

(c) $S_n = S_{n+1} \cap \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

При этом множество S, удовлетворяющее условию (a), единственно и равно объединению $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

Лемма [1, 8.3]**.** *Если $K_n \subset \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ $(n \in \mathbb{N})$ — индуктивная последовательность замкнутых конусов, то $(\pi_n K_n)^{\boxplus}$ $(n \in \mathbb{N})$ — проективная последовательность и*

$$\varprojlim\, (\pi_n K_n)^{\boxplus} = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\Big)^{\boxplus}.$$

Следующий пример дает отрицательный ответ на вопрос [1, 9.6] о том, проективна ли в этой ситуации последовательность поляр $(\pi_n K_n)^{\oplus}$.

Пример. Рассмотрим замкнутый конус $K_3 := \mathbb{R}^{+}(\{1\} \times D) \subset \mathbb{R}^3$, где $D = \{(y,z) : y^2 + (z-1)^2 \leqslant 1\}$ (см. рис. 1).

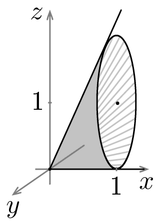

Рис. 1

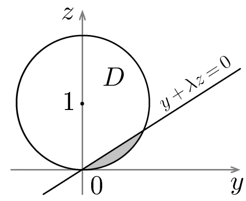

Рис. 2

Положим $\mathbb{R}^3_2 := \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$,

$$K_2 := \pi_2(K_3 \cap \mathbb{R}^3_2) = \{(x,0) : x \geqslant 0\}$$

и покажем, что $K_2^{\oplus} \neq \pi_2 K_3^{\oplus}$. Действительно, $(0,1) \in K_2^{\oplus}$, но никакая тройка $(0,1,\lambda)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, не принадлежит $K_3^{\oplus}$, так как для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ полуплоскость $\{(y,z) : y + \lambda z < 0\}$ пересекается с кругом D (см. рис. 2), и для пары (y,z) из этого пересечения выполняется $(1,y,z) \in K_3$ и $\langle (1,y,z) \,|\, (0,1,\lambda)\rangle = y + \lambda z < 0$. Таким образом, для $S := K_3 \times \{(0,0,\dots)\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ последовательность поляр $\big(\pi_n(S \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n)\big)^{\oplus}$ не является проективной.

4.2. Согласно предложению 1.11 квазиплотность множества $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильна каждому из следующих двух условий:

(a) S пересекается с любым непустым выпуклым множеством $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, которое является ограниченным, квазиоткрытым и *проективным*;

(b) S пересекается с любым выпуклым множеством $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, которое имеет непустую квазивнутренность и является *проективным*.

Приведенный ниже пример дает ответ на вопрос [1, 9.7] и показывает, что требование проективности множеств B и C в условиях (a) и (b) является существенным даже в случае, когда S — плотное векторное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Пример. Существуют квазиплотное (и поэтому плотное) подпространство $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и непустое ограниченное квазиоткрытое выпуклое подмножество $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ такие, что $Y \cap B = \varnothing$.

$\lhd$ Пусть T — базис трансцендентности $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$, т. е. максимальное алгебраически независимое над $\mathbb{Q}$ подмножество $\mathbb{R}$ или, что то же самое, алгебраически независимое над $\mathbb{Q}$ подмножество $T \subset \mathbb{R}$, для которого $\operatorname{alg}\mathbb{Q}(T) = \mathbb{R}$. (Здесь $\mathbb{Q}(T)$ — подполе $\mathbb{R}$, порожденное множеством T, $\operatorname{alg} F$ — подполе $\mathbb{R}$, состоящее из всех чисел, являющихся алгебраическими над подполем $F \subset \mathbb{R}$.) Рассмотрим произвольную последовательность $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно различных элементов множества T и положим $T_0 := T \setminus \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$, $T_n := T_0 \cup \{t_1, \dots, t_n\}$ и $F_n := \operatorname{alg}\mathbb{Q}(T_n)$. Тогда $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность подполей $\mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

(i) $F_n \subset F_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \mathbb{R}$;

(iii) для каждого $n \in \mathbb{N}$ поле $\mathbb{R}$ бесконечномерно как векторное пространство над F_n.

Действительно, благодаря равенству $\operatorname{alg}\mathbb{Q}(T) = \mathbb{R}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеется ненулевой многочлен $p(x)$ с коэффициентами из $\mathbb{Q}(T)$, для которого $p(\lambda) = 0$, откуда с учетом очевидных соотношений $\mathbb{Q}(T_n) \subset \mathbb{Q}(T_{n+1})$ и $\mathbb{Q}(T) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}(T_n)$ следует, что все коэффициенты многочлена $p(x)$ принадлежат $\mathbb{Q}(T_n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и поэтому $\lambda \in \operatorname{alg}\mathbb{Q}(T_n) = F_n$. Кроме того, как легко видеть, $F_n \neq \mathbb{R}$ и для $\lambda \in \mathbb{R}\backslash F_n$ числа $\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots$ линейно независимы над F_n.

Согласно условию (iii) имеется такая последовательность элементов $x_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ числа $x_n(1), \dots, x_n(n)$ линейно независимы над F_n, причем $x_n(n) > 0$. Рассмотрим автоморфизм $\nabla \in \triangledown_{+}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big)$, принимающий значения $\nabla e_n = x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (см. предложения 2.8(a) и 2.10), и положим

$$Y := \nabla'(\operatorname{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}), \quad B := \big\{b \in \Pi^1_0 \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}} : b(1) > 0\big\}.$$

Ясно, что множество B является непустым, выпуклым, ограниченным и квазиоткрытым (см. теорему 1.8). С помощью предложения 1.11(d) легко показать, что $\operatorname{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ — квазиплотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Кроме того, $\nabla' \in \triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ (см. предложение 2.12(a)), а значит, Y квазиплотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (см. следствие 3.9). Плотность пространства Y в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ вытекает из его квазиплотности согласно предложению 1.10 (см. также предложение 2.9(c)). Для завершения доказательства достаточно установить равенство $Y \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}} = \{0\}$.

Покажем, что $\nabla' z \notin \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ для любого ненулевого $z \in \operatorname{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Пусть

$$z = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j q_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R},\ q_j \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}},$$

и пусть $z(l) \neq 0$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Благодаря условиям (i) и (ii) имеется такое число $m \geqslant l$, что $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F_m$. Рассмотрим произвольное $n \geqslant m$ и покажем, что $(\nabla' z)(n) \neq 0$. Действительно, для всех $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$z(i) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j q_j(i) \in F_m \subset F_n.$$

Тогда $\langle x_n \,|\, z\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_n(i) z(i)$ — линейная комбинация линейно независимых над F_n чисел $x_n(1), \dots, x_n(n)$ с коэффициентами $z(1), \dots, z(n) \in F_n$, причем эта комбинация нетривиальна, так как $n \geqslant l$ и $z(l) \neq 0$. Следовательно, $\langle x_n \,|\, z\rangle \neq 0$. Осталось заметить, что $\langle x_n \,|\, z\rangle = \langle \nabla e_n \,|\, z\rangle = \langle e_n \,|\, \nabla' z\rangle = (\nabla' z)(n)$. ▷

4.3. В работе [3] приведены примеры собственных плотных векторных подпространств $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, для которых все линейно независимые множества замкнуты в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y$ (см. [3, 4.8]), и показано, что наличие незамкнутого линейно независимого множества влечет наличие незамкнутого архимедова конуса (см. [3, 4.7]). Вопрос о справедливости обратного утверждения был оставлен открытым и явно сформулирован в [1, 9.11]. Приведенный ниже пример дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Для числовой последовательности $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и числа λ будем писать $\lambda_n \twoheadrightarrow \lambda$, если $\lambda_n \to \lambda$ и существует такой номер $\bar{n} \in \mathbb{N}$, что $\lambda_n \neq \lambda$ при $n \geqslant \bar{n}$. Множество $\Lambda \subset \mathbb{R}$ условимся называть *разреженным*, если оно обладает следующими равносильными свойствами:

(a) Λ замкнуто и дискретно;

(b) все ограниченные подмножества Λ конечны;

(c) не существуют такая последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в Λ и такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\lambda_n \twoheadrightarrow \alpha$.

Лемма. *Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ множество*

$$\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k) := \{\alpha_1 2^{n_1} + \dots + \alpha_k 2^{n_k} : n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

является разреженным.

$\lhd$ Воспользуемся индукцией по k. Разреженность множества $\Lambda(\alpha) = \{\alpha 2^n : n \in \mathbb{N}\}$ для любого числа α не вызывает сомнений. Предположим, что для любых чисел $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ множество $\Lambda(\beta_1, \dots, \beta_{k-1})$ является разреженным, рассмотрим произвольные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ и допустим вопреки доказываемому, что $\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — не разреженное множество. Тогда существуют последовательности $\nu_1, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и число α такие, что

$$\lambda(n) := \alpha_1 2^{\nu_1(n)} + \dots + \alpha_k 2^{\nu_k(n)} \twoheadrightarrow \alpha.$$

Текущая цель — обнаружить противоречие.

Заметим, что все последовательности $\nu_1, \dots, \nu_k$ стремятся к бесконечности. Действительно, если, например, $\nu_1 \not\to \infty$, то ν_1 имеет постоянную подпоследовательность $\nu_1(n_m) \equiv i$. В этом случае

$$\lambda(n_m) = \alpha_1 2^i + \alpha_2 2^{\nu_2(n_m)} + \dots + \alpha_k 2^{\nu_k(n_m)} \twoheadrightarrow \alpha$$

и тогда

$$\alpha_2 2^{\nu_2(n_m)} + \dots + \alpha_k 2^{\nu_k(n_m)} \twoheadrightarrow \alpha - \alpha_1 2^i$$

вопреки разреженности множества $\Lambda(\alpha_2, \dots, \alpha_k)$.

Положим $\mu(n) := \min\{\nu_1(n), \dots, \nu_k(n)\} - 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда

$$\lambda(n) = 2^{\mu(n)}\big(\alpha_1 2^{\mu_1(n)} + \dots + \alpha_k 2^{\mu_k(n)}\big),$$

где $\mu_i(n) = \nu_i(n) - \mu(n)$, причем $\mu(n) \to \infty$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ хотя бы одно из натуральных чисел $\mu_1(n), \dots, \mu_k(n)$ равно 1. Для определенности будем считать, что последовательность μ_1 имеет постоянную подпоследовательность $\mu_1(n_m) \equiv 1$. В этом случае

$$\lambda(n_m) = 2^{\mu(n_m)}\big(2\alpha_1 + \alpha_2 2^{\mu_2(n_m)} + \dots + \alpha_k 2^{\mu_k(n_m)}\big) \twoheadrightarrow \alpha,$$

откуда с учетом стремления $\mu(n_m) \to \infty$ следует, что

$$\alpha_2 2^{\mu_2(n_m)} + \dots + \alpha_k 2^{\mu_k(n_m)} \twoheadrightarrow -2\alpha_1$$

вопреки разреженности множества $\Lambda(\alpha_2, \dots, \alpha_k)$. $\rhd$

Пример. Положим $Y = \operatorname{lin} \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} \{2^{n+m} : m \in \mathbb{N}\}$. Тогда Y — плотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, и в пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y$ все линейно независимые множества замкнуты, но имеются незамкнутые архимедовы конусы.

$\lhd$ Пространство Y плотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, так как для всех $m \in \mathbb{N}$

$$e_m = \frac{1}{2^{m+1}}\big(d + 2^{m+1} e_m\big) - \frac{1}{2^{m+1}} d \in Y, \quad \text{где } d = (2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Замкнутость всех линейно независимых множеств в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y$ доказывается совершенно аналогично [3, 4.8]. Согласно предложениям 1.11(c) и 1.9 и теореме 1.12(a) для того, чтобы установить наличие в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}\big|Y$ незамкнутого архимедова конуса, достаточно показать, что $Y \cap \,]0,1[^{\mathbb{N}} = \varnothing$. Каждый элемент $y \in Y$ имеет вид

$$y(n) = \alpha_1 2^{n+m_1(n)} + \dots + \alpha_k 2^{n+m_k(n)} = 2^n \lambda(n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $m_1(n), \dots, m_k(n) \in \mathbb{N}$ и

$$\lambda(n) = \alpha_1 2^{m_1(n)} + \dots + \alpha_k 2^{m_k(n)} \in \Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k).$$

Если $y \in \,]0,1[^{\mathbb{N}}$, т. е. $0 < 2^n \lambda(n) < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lambda(n) \twoheadrightarrow 0$, что противоречит разреженности множества $\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. $\rhd$

§ 5. Квазиплотность и топологическая плотность

В этом параграфе в качестве ответа на вопрос [1, 9.9] установлено, что квазиплотность в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ не равносильна плотности относительно коробочной топологии, а также приведены примеры, относящихся к вопросу [1, 9.10] о топологическом характере квазиплотности и показывающие, что параллелотопы не образуют базу какой-либо топологии и не характеризуют квазиплотность в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ как топологическую. Кроме того, дан отрицательный ответ на сформулированный в п. 3.7 вопрос о том, образуют ли параллелотопы базу квазивнутренности.

5.1. Лемма. *Существует такая последовательность $\varkappa \in \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$, что*

$$\Pi^1_{\varkappa} \cap \Pi^1_0 = \{0\}.$$

В частности, если $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $z \notin Y$, то $Y \cap (z + \Pi^1_{\varkappa}) \cap (z + \Pi^1_0) = \varnothing$.

◁ Пусть $(N_m)_{m\in\mathbb{N}}$ — какое-либо разбиение $\mathbb{N}$ на бесконечные подмножества $N_m \subset \mathbb{N}$. Определим последовательность $\varkappa \in \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n$, полагая $\varkappa_n = n\pi_n e_m$ при $n \in N_m$. Рассмотрим произвольный элемент $y \in \Pi^1_{\varkappa}$, имеющий ненулевое значение $y(m) \neq 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, и покажем, что $y \notin \Pi^1_0$. Действительно, если $n \in N_m$ и $n \geqslant m$, то

$$\langle \varkappa_n \,|\, \pi_n y\rangle = \langle n\pi_n e_m \,|\, \pi_n y\rangle = ny(m),$$

а значит, в силу включения $y \in \Pi^1_{\varkappa}$ для таких n справедливо неравенство

$$|y(n+1) - ny(m)| = |y(n+1) - \langle \varkappa_n \,|\, \pi_n y\rangle| < 1$$

и, в частности, $|y(n+1)| > n|y(m)| - 1$. Следовательно, $\sup\limits_{n\in N_m} |y(n+1)| = \infty$. ▷

5.2. Согласно теореме 3.8 всякое квазиплотное подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ коробочно плотно (см. также предложения 1.9 и 1.11(c)). Как показывает следующий пример, обратное утверждение неверно даже для плотных векторных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что дает отрицательный ответ на вопрос [1, 9.9].

Пример. Существует плотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, являющееся коробочно плотным, но не квазиплотным в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

◁ Пусть Z — коробочно плотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, не содержащее ℓ^∞ и имеющее плотное в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ пересечение $Z \cap \ell^\infty$. (На роль Z подходит, например, $\operatorname{lin} \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.) Согласно лемме 5.1 имеется параллелотоп P с центром в нуле такой, что $P \cap \Pi^1_0 = \{0\}$. Используя абсолютную выпуклость P, легко показать, что $(\operatorname{lin} P) \cap \ell^\infty = \{0\}$. Положим $Y_0 := Z \cap \ell^\infty + \operatorname{lin} P$ и рассмотрим произвольный элемент $b \in \ell^\infty$, не принадлежащий Z. Как легко видеть, $b \notin Y_0$ и поэтому имеется подпространство $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ коразмерности 1 такое, что $Y_0 \subset Y$ и $b \notin Y$. Поскольку $Z \cap \ell^\infty \subset Y$, пространство Y плотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Кроме того, из соотношений $P \subset Y$ и $b \notin Y$ следует $Y \cap (b + P) = \varnothing$, а значит, согласно теореме 3.8 пространство Y не квазиплотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Остается показать, что Y коробочно плотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Рассмотрим произвольные последовательности $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $r \in \,]0, \infty[^{\mathbb{N}}$ и докажем, что $Y \cap (s + \Pi^r_0) \neq \varnothing$. Можно считать, что $r \in \ell^\infty$, т. е. $\Pi^r_0 \subset \ell^\infty$. Поскольку $\operatorname{codim} Y = 1$, существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $s - \alpha b \in Y$. Благодаря коробочной плотности Z в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ имеется элемент $z \in Z \cap (\alpha b + \Pi^r_0)$. Включение $\alpha b + \Pi^r_0 \subset \ell^\infty$ влечет $z \in Z \cap \ell^\infty \subset Y$. Кроме того, $z + s - \alpha b \in s + \Pi^r_0$. Следовательно, $z + s - \alpha b \in Y \cap (s + \Pi^r_0)$. ▷

5.3. Из леммы 5.1 следует, что параллелотопы не образуют базу какой-либо топологии. Несмотря на то, что любое квазиплотное подпространство $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ пересекается с каждым параллелотопом, в случае $Y \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ найдутся два таких параллелотопа P и Q с общим центром, что

$$Y \cap P \cap Q = \varnothing.$$

В частности, критерии 1.11 и 3.8 не характеризуют квазиплотность в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ как топологическую плотность даже для векторных подпространств. Это наблюдение тем не менее не дает ответа на вопрос [1, 9.10] о том, существует ли топология на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, плотность относительно которой была бы равносильна квазиплотности в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

5.4. В дальнейшем каждое из пространств $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ наделяется евклидовой нормой $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ положим $\|S\| := \sup\limits_{s\in S} \|s\|$. Символом 0_n обозначим нулевой элемент $(0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$. Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то кортеж $(x(1),\dots,x(n),\lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$ условимся записывать в виде (x,λ). В частности,

$$(0_n,\lambda) = (0,\dots,0,\lambda) = \lambda\pi_{n+1}e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Лемма. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, C — ограниченное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, $0 \in \operatorname{int} C$ и $\lambda > 0$. Определим подмножества $D, D^+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$, полагая*

$$D := \operatorname{co}(C\times\{-1\} \cup \{(0_n,\lambda)\}), \quad D^+ := \{d \in D : d(n+1) \geqslant 0\}.$$

Тогда

(a) $0 \in \operatorname{int} D$;
(b) $D \cap -D \subset D^+ \cup -D^+$;
(c) $\|D \cap -D\| \leqslant \|D^+\| = \max\bigl\{\lambda, \frac{\lambda}{\lambda+1}\|C\|\bigr\}$;
(d) $\pi_n D = C$.

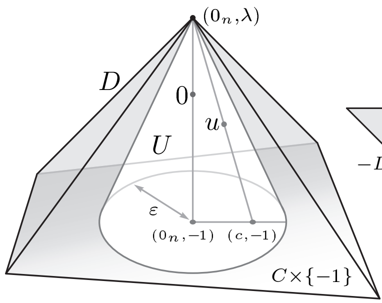

Рис. 3a

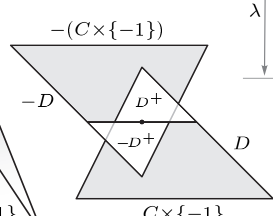

Рис. 3b

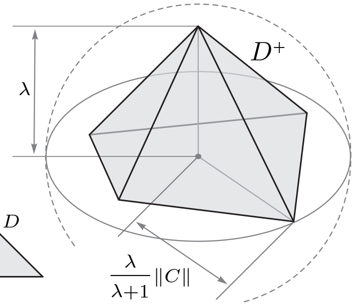

Рис. 3c

◁ (a) По условию множество C содержит некоторый шар $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Элементарная проверка показывает, что открытая окрестность нуля

$$U := \left\{u \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{\|\pi_n u\|}{\varepsilon} + \frac{u(n+1)+1}{\lambda+1} < 1,\ u(n+1) > -1\right\}$$

содержится в D. Действительно, если $u \in U$ и

$$c := \frac{\lambda+1}{\lambda - u(n+1)}\,\pi_n u,$$

то $\|c\| < \varepsilon$ и вектор u принадлежит отрезку $[(c,-1),(0_n,\lambda)]$ (см. рис. 3a). Остальные соотношения тривиальны (см. рис. 3b и 3c). ▷

5.5. Если x — квазивнутренняя точка проективного выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, то в связи с леммой 3.7 можно было бы ожидать, что в C содержится параллелотоп с центром x. Тем не менее доказательство леммы 3.7 обеспечивает лишь наличие параллелотопа $P \subset C$, центр которого отличен от x и, более того, $x \notin P$. Следующий пример показывает, что это обстоятельство является существенным.

Пример. Существует такое проективное выпуклое подмножество $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что $0 \in \operatorname{qi} C$, но C не содержит параллелотопов с центром в нуле.

$\triangleleft$ Рассмотрим последовательность множеств $C_n \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, определенную следующим рекурсивным построением (см. рис. 4):

$$\begin{aligned} &C_1 := [-1, 1], \\ &C_{n+1} := \operatorname{co}(C_n \times \{-1\} \cup \{(0_n, \lambda_n)\}), \end{aligned}$$

где числа $\lambda_n > 0$ выбираются исходя из условия $\max\bigl\{\lambda_n, \frac{\lambda_n}{\lambda_n+1}\|C_n\|\bigr\} \leqslant \frac{1}{n}$.

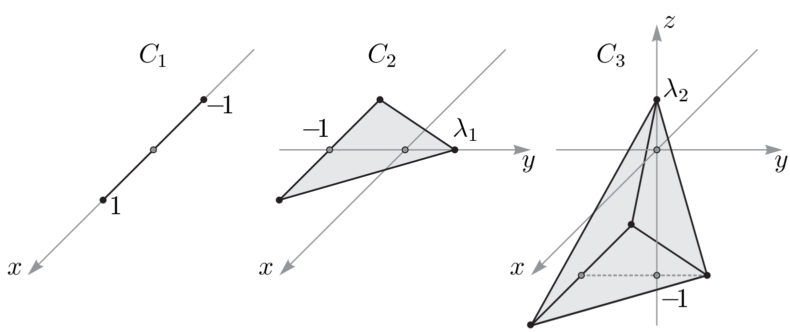

Рис. 4

Согласно лемме 5.4 выпуклые множества $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ образуют проективную последовательность, причем $0 \in \operatorname{int} C_n$ и $\|C_n \cap -C_n\| \leqslant \frac{1}{n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $C := \varprojlim C_n$. Из теоремы 1.8 следует, что $0 \in \operatorname{qi} C$. С другой стороны, если бы множество C содержало какой-либо параллелотоп с центром в нуле, то нашелся бы такой элемент $c \in C \cap -C$, что $c(1) \neq 0$, и тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ имели бы место противоречивые соотношения

$$|c(1)| \leqslant \|\pi_n c\| \leqslant \|\pi_n(C \cap -C)\| = \|C_n \cap -C_n\| \leqslant \frac{1}{n}. \ \triangleright$$

5.6. Усилим предыдущий пример и покажем, что в рассматриваемом случае точка $0 \in \operatorname{qi} C$ не принадлежит никакому параллелотопу, содержащемуся в C.

Лемма. *Пусть $P \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — параллелотоп и $x \in P$. Тогда имеется параллелотоп P_x с центром x такой, что $P_x \subset P$.*

$\triangleleft$ По теореме 3.4 существуют $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\Delta \in \triangle^{+}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ такие, что $P = z + \Delta(\Pi_0^1)$. Как легко видеть, $y := \Delta^{-1}(x - z) \in \Pi_0^1$. Определим $r \in \,]0, \infty[^{\mathbb{N}}$, полагая $r(n) := 1 - |y(n)|$. Тогда $y + \Pi_0^r \subset \Pi_0^1$ и, следовательно,

$$P_x := x + \Delta(\Pi_0^r) = z + \Delta y + \Delta(\Pi_0^r) = z + \Delta(y + \Pi_0^r) \subset z + \Delta(\Pi_0^1) = P. \ \triangleright$$

Следствие. *Если множество C не содержит параллелотопов с центром x, то C не содержит и таких параллелотопов P, что $x \in P$.*

Таким образом, всякое проективное выпуклое множество $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ с непустой квазивнутренностью содержит некоторый параллелотоп, но такие параллелотопы не всегда покрывают квазивнутренность C.

5.7. Говорят, что выпуклое множество $C \subset X$ *квазилокально ограничено в точке* $x \in \operatorname{qi} C$, если $x \in \operatorname{qi} B$ для некоторого ограниченного подмножества $B \subset C$. Пространство X называют *квазилокально ограниченным*, если в X любое выпуклое множество C квазилокально ограничено в каждой точке $x \in \operatorname{qi} C$ (см. [1, § 5]).

Согласно теореме [1, 5.10] пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ является квазилокально ограниченным, но из п. 5.6 следует, что параллелотопы не образуют «базу квазилокальной ограниченности»: если x — квазивнутренняя точка выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, то $x \in \operatorname{qi} B$ для некоторого ограниченного подмножества $B \subset C$, но среди таких множеств B может не найтись ни одного параллелотопа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман А. Е., Емельяненков И. А.* Локально выпуклые пространства, в которых все архимедовы конусы замкнуты // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 945–970.
2. *Wilansky A.* Modern methods in topological vector spaces. New York: McGraw-Hill, 1978.
3. *Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В.* Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах // Владикавк. мат. журн. 2015. Т. 17, № 3. С. 36–43.

Поступила в редакцию 24 декабря 2023 г.
После обработки 24 декабря 2023 г.
Принята к публикации 28 января 2024 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru

Емельяненков Иван Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
i.emelianenkov@yandex.ru