Архимедовы и замкнутые конусы

Гутман А. Е.*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
e-mail: gutman@math.nsc.ru

Всюду ниже X — векторное пространство над $\mathbb{R}$. Выпуклое подмножество $K \subseteq X$ называется *конусом*, если $\alpha K \subseteq K$ для всех $\alpha \geqslant 0$ и $K \cap -K = \{0\}$. Как известно, в любом упорядоченном векторном пространстве $(X, \leqslant)$ множество $X^+ := \{x \in X : x \geqslant 0\}$ является конусом и, наоборот, любому конусу $K \subseteq X$ соответствует векторный порядок $x \leqslant_K y \Leftrightarrow y - x \in K$, для которого $X^+ = K$.

Выпуклое множество $C \subseteq X$ *замкнуто в направлении* $y \in X$, если для всех $x \in X$ из $\inf\{\varepsilon > 0 : x + \varepsilon y \in C\} = 0$ следует $x \in C$. Множество, замкнутое в любом направлении, называется *архимедовым*. Архимедовость конуса $K \subseteq X$ равносильна архимедовости соответствующего упорядоченного векторного пространства $(X, \leqslant_K)$: если $x, y \in X$, $y \geqslant_K 0$ и $x \leqslant_K \frac{1}{n} y$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $x \leqslant_K 0$.

Сведения о связи архимедовости и замкнутости конусов в хаусдорфовых локально выпуклых пространствах (ЛВП) до недавнего времени оставались весьма скудными и фактически исчерпывались следующими наблюдениями [1–3].

Теорема 1. (a) *Всякий замкнутый конус архимедов.*

(b) *Архимедов конус с непустой внутренностью замкнут.*

(c) *В конечномерном пространстве архимедовость конуса равносильна его замкнутости.*

(d) *Конус в конечномерном пространстве архимедов тогда и только тогда, когда он имеет компактную базу.* (*Базой конуса* K называется такое выпуклое множество B, что $0 \notin B \subseteq K$ и любой лежащий в K луч, выходящий из нуля, пересекает B ровно в одной точке.)

(e) *Пусть конус $K \subseteq X$, линейный функционал f на X и элемент $y \in K$ таковы, что $f \geqslant 0$ на K и $f(y) > 0$. Конус K архимедов тогда и только тогда, когда K замкнут в направлении y и множество $\{x \in K : f(x) = 1\}$ архимедово.*

(f) *Следующие свойства выпуклого множества C равносильны архимедовости: пересечение C с любой прямой замкнуто; пересечение C с любым подпространством размерности $\leqslant 2$ замкнуто; пересечение C с любым конечномерным подпространством замкнуто; дополнение C алгебраически*

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

открыто; C секвенциально замкнуто в какой-либо векторной топологии; C секвенциально замкнуто в сильнейшей локально выпуклой топологии.

В частности, оставался открытым вопрос о том, в каких ЛВП все архимедовы конусы замкнуты.

ЛВП называется (*секвенциально*) *тотальным*, если в нем (секвенциально) замкнуты все подпространства или, что то же самое, (секвенциально) непрерывны все линейные функционалы. ЛВП называется (*секвенциально*) *предтотальным*, если в нем (секвенциально) замкнуты все линейно независимые множества.

Теорема 2. (a) *Всякое тотальное ЛВП предтотально, а всякое предтотальное ЛВП секвенциально тотально, причем обратные импликации не имеют места.*

(b) *Секвенциальная тотальность ЛВП равносильна его секвенциальной предтотальности.*

Теорема 3. *Следующие свойства ЛВП равносильны:*

(1) *все архимедовы конусы секвенциально замкнуты;*
(2) *все архимедовы выпуклые множества секвенциально замкнуты;*
(3) *все подпространства секвенциально замкнуты;*
(4) *все линейно независимые множества секвенциально замкнуты;*
(5) *все линейные функционалы секвенциально непрерывны;*
(6) *пространство секвенциально тотально.*

Для пространств несчетной размерности удалось получить следующий универсальный ответ на вопрос о замкнутости архимедовых конусов [2].

Теорема 4. *В любом ЛВП бесконечной несчетной размерности существует незамкнутый архимедов конус.*

Примером такого конуса в пространстве $\mathbb{R}^I_{\mathrm{fin}}$ финитных вещественных функций, определенных на несчетном множестве I, служит коническая оболочка множества

$$\left\{x \in (\mathbb{R}^I_{\mathrm{fin}})^+ : x(j) = 0,\ \sum_{i\in I} x(i) \leqslant 1,\ \sum_{i\in I} \sqrt{x(i)} \geqslant 1\right\} + \chi_{\{j\}}, \quad j \in I.$$

Что же касается счетномерных ЛВП, то для них рассматриваемый вопрос сводится к изучению пространств вида $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|Y$ с носителем $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ и слабой топологией, наведенной плотным подпространством $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ посредством естественной двойственности $\langle x \mid y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$ между $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Пространства Y, для которых в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|Y$ существует незамкнутый архимедов конус, для краткости были названы *тонкими*.

Для ЛВП такого вида к 2015 году было известно лишь следующее [2].

Теорема 5. *Пространство* $Y = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *не является тонким. Если плотное подпространство* $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *не является тонким, то* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|Y$ *предтотально.*

Промежуточный случай предтотальных, но не тотальных ЛВП, оказался самым сложным и остался без рассмотрения. Не было известно, являются ли тонкими пространства $\operatorname{lin}\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\operatorname{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, дающие все имеющиеся на тот момент примеры предтотальных, но не тотальных счетномерных ЛВП. Более того, сохраняла силу гипотеза о том, что $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — единственное плотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, не являющееся тонким [4].

Благодаря идеям, предложенным И. А. Емельяненковым, в 2021 году удалось выяснить, что пространства $\operatorname{lin}\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\operatorname{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ всё же не являются тонкими, а в 2023 году было получено исчерпывающее описание всех тонких пространств [5, 6]. (Но это уже тема для отдельного сообщения.)

Список литературы

[1] Aliprantis C. D., Tourky R., *Cones and Duality*, Providence, RI: American Mathematical Society, 2007.

[2] Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В., “Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах”, *Владикавк. матем. журн.*, **17**:3 (2015), 36–43 Math-Net.Ru crossref.

[3] Gutman A. E., “Archimedean and directionally closed cones”, *Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске — 2018». Тез. докладов*, Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2018, 15.

[4] Сторожук К. В., “Тонкие гиперплоскости”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **15** (2018), 1553–1555 Math-Net.Ru crossref.

[5] Гутман А. Е., Емельяненков И. А., “Локально выпуклые пространства, в которых все архимедовы конусы замкнуты”, *Сиб. матем. журн.*, **64**:5 (2023), 945–970 Math-Net.Ru crossref; *Siberian Math. J.*, **64** (2023), 1117–1136 crossref.

[6] Гутман А. Е., Емельяненков И. А., “Квазиплотность в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и проективные параллелотопы”, *Сиб. матем. журн.*, **65**:2 (2024), 258–276 Math-Net.Ru crossref; *Siberian Math. J.*, **65** (2024), 265–278 crossref.