Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 517.98

ЛАТЕРАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ И ГОМОМОРФИЗМЫ БАНАХОВЫХ РАССЛОЕНИЙ

А. Е. Гутман, А. В. Коптев

Аннотация. Введены и исследованы понятия инъективной и латеральной сходимости в топологическом пространстве. Получен ряд результатов о существовании гомоморфизмов непрерывных банаховых расслоений, а также непрерывных и слабо непрерывных вектор-функций и сечений, принимающих наперед заданные значения в точках инъективно и латерально сходящихся последовательностей.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.205

Ключевые слова: топологическое пространство, отделимость, сходящаяся последовательность, непрерывное банахово расслоение, гомоморфизм, сечение.

Александру Александровичу Толстоногову
в связи с его 85-летием

Говоря о непрерывных банаховых расслоениях (НБР), используем термины и обозначения из [1; 2, 2.4]. В общей топологии следуем терминологии монографий [3, 4]. В частности, понятия регулярного и вполне регулярного топологического пространства включают отделимость. Под окрестностью точки понимаем множество, которое включает какое-либо открытое подмножество, содержащее данную точку. Символ «$\subset$» обозначает нестрогое включение.

Если $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над топологическим пространством Q, символом $Hom(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ обозначается множество всех гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$. (В [1, 2] это множество обозначается символом $Hom_Q(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, а его элементы именуются в [1] Q-гомоморфизмами.) Согласно теореме [1, 2.4.4] $Hom(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ совпадает с множеством всех отображений H, которые сопоставляют точкам $q \in Q$ ограниченные линейные операторы $H(q) \in B(\mathscr{X}(q),\mathscr{Y}(q))$, имеют локально ограниченную поточечную норму $|\!|\!|H|\!|\!|\colon q \in Q \mapsto \|H(q)\|$ и удовлетворяют условию $H \otimes u \in C(Q,\mathscr{Y})$ для всех $u \in C(Q,\mathscr{X})$, где $H \otimes u\colon q \in Q \mapsto H(q)u(q) \in \mathscr{Y}(q)$. Символом $\mathscr{X}^*$ обозначается множество $Hom(\mathscr{X}, Q \times \{\mathbb{R}\})$ всех гомоморфизмов, действующих из $\mathscr{X}$ в постоянное НБР над Q со слоем $\mathbb{R}$.

Для каждой точки $q \in Q$ рассмотрим подпространство $\mathscr{X}^*(q) := \{H(q) : H \in \mathscr{X}^*\}$ сопряженного банахова пространства $\mathscr{X}(q)' = B(\mathscr{X}(q),\mathbb{R})$. В теории НБР остается открытым вопрос о представительности $\mathscr{X}^*(q)$ в $\mathscr{X}(q)'$. Так, имеются разнообразные широкие классы расслоений $\mathscr{X}$ (см., например, [5, 3.4.4]), для которых в каждой точке $q \in Q$ пространство $\mathscr{X}^*(q)$ является нормирующим, т. е. удовлетворяет условию

$$\|x\| = \sup\{|\langle x \,|\, y\rangle| : y \in \mathscr{X}^*(q),\ \|y\| \leqslant 1\}, \quad x \in \mathscr{X}(q),$$

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2022–0004).

но пока не обнаружен ни один случай нарушения этого условия. Более того, находится под вопросом возможность равенства $\mathscr{X}^* = \{0\}$ для ненулевого расслоения $\mathscr{X}$, в то время как для всех известных на данный момент расслоений справедливо соотношение

$$\|x\| = \sup\{|H(q)x| : H \in \mathscr{X}^*, \ \|H\|_\infty \leqslant 1\}, \quad x \in \mathscr{X}(q).$$

В этой связи сохраняют актуальность общие методы построения гомоморфизмов НБР, обладающих теми или иными аппроксимирующими свойствами. К их числу относятся полученные в этой статье результаты о существовании гомоморфизмов H, принимающих наперед заданные значения $H(q_n)$ и $H(q)$ для данной сходящейся последовательности $q_n \to q$.

Последовательность точек $q_n \in Q$ условимся называть *инъективно сходящейся* к точке $q \in Q$, если $q_n \to q$, $q_n \neq q_m$ при $n \neq m$ и $q_n \neq q$ для всех $n \in \mathbb{N}$. *Покрытием последовательности* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ назовем произвольную последовательность окрестностей U_n точек q_n. Покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходящейся последовательности $q_n \to q$ назовем *латерально прикасающимся* к точке q, если

$$\operatorname{cl} U_m \cap \operatorname{cl} \bigcup_{n\neq m} U_n = \varnothing \ \text{ для всех } m \in \mathbb{N} \tag{1}$$

и, кроме того, q является собственной предельной точкой объединения $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n$.

В регулярном пространстве всякая инъективно сходящаяся последовательность $q_n \to q$ допускает покрытие, латерально прикасающееся к q (см. предложение 1.5). Если же пространство является вполне регулярным, то инъективная сходимость $q_n \to q$ позволяет конструировать непрерывные векторфункции, сечения и гомоморфизмы, принимающие наперед заданные значения в точках q_n и q. Один из результатов в этом направлении — предложение 2.6 — утверждает наличие гомоморфизма $H \in Hom(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, принимающего значения $H(q_n) = H_n(q_n)$ для любой наперед заданной последовательности гомоморфизмов $H_n \in Hom(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, удовлетворяющей условию $\|H_n\|_\infty \to 0$.

Требование равномерной сходимости $\|H_n\|_\infty \to 0$ является довольно ограничительным. В рассматриваемом контексте более естественно выглядит условие, аналогичное поточечной сходимости: $\|H_n(q_n)u(q_n)\| \to 0$ для достаточно представительного набора сечений $u \in C(Q, \mathscr{X})$. Существование искомого гомоморфизма H в этом случае удается обеспечить за счет более аккуратного покрытия последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (см. теорему 2.10) — а именно, такого покрытия $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющего условию (1), что q является *единственной* собственной предельной точкой объединения $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n$. Покрытие с таким свойством называется *латерально сходящимся* к точке q.

В упомянутой выше теореме 2.10 наличие латерально сходящегося покрытия является существенным требованием. Пример 2.11 показывает, что одной лишь инъективной сходимости $q_n \to q$ недостаточно для существования искомого гомоморфизма H — даже в случае компактного пространства Q.

Параграф 1 посвящен исследованию латеральных покрытий сходящихся последовательностей, а в параграфе 2 полученные результаты применяются для построения непрерывных вектор-функций, сечений и гомоморфизмов, принимающих наперед заданные значения на последовательностях, допускающих латеральные покрытия.

§ 1. Латеральная сходимость

Всюду ниже Q — произвольное топологическое пространство.

1.1. Определение. Условимся называть множества $U, V \subset Q$ *дизъюнктными* и писать $U \perp V$, если $\mathrm{cl}\, U \cap \mathrm{cl}\, V = \varnothing$.

Будем говорить, что последовательность множеств $U_n \subset Q$

(a) *дизъюнктна*, если ее члены попарно дизъюнктны: $U_m \perp U_n$ при $m \neq n$;

(b) *латеральна*, если $U_m \perp \bigcup\limits_{n\neq m} U_n$ для всех $m \in \mathbb{N}$ или, что то же самое, $U_m \perp \bigcup\limits_{n>m} U_n$ для всех $m \in \mathbb{N}$;

(c) *латерально прикасается* к точке $q \in Q$, если эта последовательность латеральна и, кроме того, q является собственной предельной точкой объединения $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}\, U_n$, т. е.

$$q \in \Big(\mathrm{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}\, U_n;$$

(d) *латерально сходится* к точке $q \in Q$, если эта последовательность латеральна и, кроме того, q является единственной собственной предельной точкой объединения $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}\, U_n$, т. е.

$$\Big(\mathrm{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}\, U_n = \{q\};$$

(e) *стягивается* к точке $q \in Q$, если для любой окрестности V точки q найдется такой номер $m \in \mathbb{N}$, что $U_n \subset V$ для всех $n \geqslant m$ (т. е. фильтр, порожденный хвостами $\bigcup\limits_{n\geqslant m} U_n$, $m \in \mathbb{N}$, сходится к q).

1.2. Лемма. *Пусть $U_n \subset Q$ $(n \in \mathbb{N})$ и $q \in Q$. Положим $\mathscr{U}_m := \bigcup\limits_{n\geqslant m} \mathrm{cl}\, U_n$ $(m \in \mathbb{N})$. Следующие утверждения равносильны:*

(a) *(U_n) латерально сходится к q, т. е. (U_n) латеральна и $\mathrm{cl}\, \mathscr{U}_1 \setminus \mathscr{U}_1 = \{q\}$;*

(b) *(U_n) дизъюнктна и $\mathrm{cl}\, \mathscr{U}_m \setminus \mathscr{U}_m = \{q\}$ для всех $m \in \mathbb{N}$;*

(c) *(U_n) дизъюнктна, $q \in \mathrm{cl}\, \mathscr{U}_1 \setminus \mathscr{U}_1$ и $(\forall p \in Q\setminus\{q\})(\exists m \in \mathbb{N})(p \notin \mathrm{cl}\, \mathscr{U}_m)$;*

(d) *$q \in \mathrm{cl}\, \mathscr{U}_1 \setminus \mathscr{U}_1$ и $(\forall p \in Q\setminus\{q\})(\exists m \in \mathbb{N})\big(p \notin \mathrm{cl} \bigcup\limits_{n\neq m} U_n\big)$.*

$\lhd$ (a)$\Rightarrow$(b). Достаточно показать равенство $\mathrm{cl}\, \mathscr{U}_m \setminus \mathscr{U}_m = \{q\}$ для $m \geqslant 2$. Для всех $i \in \{1, \dots, m-1\}$ имеем

$$\mathrm{cl}\, U_i \cap \mathrm{cl}\, \mathscr{U}_m \subset \mathrm{cl}\, U_i \cap \mathrm{cl} \bigcup_{n\neq i} U_n = \varnothing;$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\mathrm{cl}\, \mathscr{U}_m \setminus \mathscr{U}_m &= (\mathrm{cl}\, \mathscr{U}_m \setminus (\mathrm{cl}\, U_1 \cup \dots \cup \mathrm{cl}\, U_{m-1})) \setminus \mathscr{U}_m \\
&= ((\mathrm{cl}\, U_1 \cup \dots \cup \mathrm{cl}\, U_{m-1} \cup \mathrm{cl}\, \mathscr{U}_m) \setminus (\mathrm{cl}\, U_1 \cup \dots \cup \mathrm{cl}\, U_{m-1})) \setminus \mathscr{U}_m \\
&= (\mathrm{cl}\, \mathscr{U}_1 \setminus (\mathrm{cl}\, U_1 \cup \dots \cup \mathrm{cl}\, U_{m-1})) \setminus \mathscr{U}_m \\
&= \mathrm{cl}\, \mathscr{U}_1 \setminus \mathscr{U}_1 = \{q\}.
\end{aligned}$$

(b)$\Rightarrow$(c). Пусть $p \in Q\setminus\{q\}$. Поскольку множества $\mathrm{cl}\, U_n$ попарно не пересекаются, найдется такой номер m, что $p \notin \mathscr{U}_m$. Тогда из равенства $\mathrm{cl}\, \mathscr{U}_m \setminus \mathscr{U}_m = \{q\}$ следует $p \notin \mathrm{cl}\, \mathscr{U}_m$.

(c)$\Rightarrow$(d). Пусть $p \in Q\setminus\{q\}$. Рассмотрим наименьший номер $k \in \mathbb{N}$, для которого $p \notin \mathrm{cl}\, \mathscr{U}_k$. Если $k \leqslant 2$, то доказывать нечего. Пусть $k > 2$. Тогда

$$p \in \mathrm{cl}\, \mathscr{U}_{k-1} = \mathrm{cl}\, U_{k-1} \cup \mathrm{cl}\, \mathscr{U}_k,$$

а значит, $p \in \operatorname{cl} U_{k-1}$. Поскольку множества $\operatorname{cl} U_1, \ldots, \operatorname{cl} U_{k-2}$ не пересекаются с $\operatorname{cl} U_{k-1}$, получаем

$$p \notin \operatorname{cl} U_1 \cup \cdots \cup \operatorname{cl} U_{k-2} \cup \operatorname{cl} \mathscr{U}_k = \operatorname{cl} \bigcup_{n \neq k-1} U_n.$$

(d)$\Rightarrow$(a). Согласно условию (d) для любой точки $p \in \operatorname{cl} \mathscr{U}_1 \setminus \{q\}$ имеется такой номер m, что

$$p \in \operatorname{cl} \mathscr{U}_1 \setminus \operatorname{cl} \bigcup_{n \neq m} U_n = \operatorname{cl} U_m \cup \operatorname{cl} \bigcup_{n \neq m} U_n \setminus \operatorname{cl} \bigcup_{n \neq m} U_n = \operatorname{cl} U_m \subset \mathscr{U}_1,$$

а значит, $\operatorname{cl} \mathscr{U}_1 \setminus \mathscr{U}_1 \subset \{q\}$.

Чтобы обосновать равенство

$$\operatorname{cl} U_k \cap \operatorname{cl} \bigcup_{n \neq k} U_n = \varnothing, \quad k \in \mathbb{N},$$

достаточно заметить, что для любой точки $p \in \operatorname{cl} U_k$ фигурирующий в условии (d) номер m не может отличаться от k. ▷

1.3. Определение. *Покрытием последовательности* точек $q_n \in Q$ условимся называть произвольную последовательность множеств $U_n \subset Q$, каждое из которых является окрестностью соответствующей точки q_n. Покрытие, состоящее из открытых (замкнутых) окрестностей, назовем *открытым* (*замкнутым*) *покрытием.*

1.4. Определение. Будем говорить, что последовательность точек $q_n \in Q$

(a) *инъективна*, если $q_n \neq q_m$ при $n \neq m$;

(b) *инъективно сходится* к точке $q \in Q$, если эта последовательность сходится к q, является инъективной и, кроме того, $q_n \neq q$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(c) *латерально сходится* к точке $q \in Q$, если эта последовательность сходится к q и допускает покрытие, латерально сходящееся к q.

1.5. Предложение. *В регулярном топологическом пространстве Q всякая инъективно сходящаяся последовательность $q_n \to q$ допускает покрытие, латерально прикасающееся к точке q.*

◁ Из инъективной сходимости $q_n \to q$ и хаусдорфовости Q следует, что

$$q_n \notin \operatorname{cl}\{q_m : m > n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определим открытые множества U_n и V_n ($n \in \mathbb{N}$) посредством следующей рекурсивной процедуры: положим $V_0 := Q$ и, привлекая регулярность Q, для каждого $n \in \mathbb{N}$ подберем открытые подмножества $U_n, V_n \subset V_{n-1}$ так, чтобы

$$q_n \in U_n, \quad \operatorname{cl}\{q_m : m > n\} \subset V_n, \quad U_n \perp V_n.$$

Тогда $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — искомое покрытие, поскольку

$$\operatorname{cl} U_n \cap \operatorname{cl} \bigcup_{m > n} U_n \subset \operatorname{cl} U_n \cap \operatorname{cl} V_n = \varnothing \text{ для всех } n \in \mathbb{N};$$

$$q \in \operatorname{cl}\{q_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n;$$

$$q \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl}\{q_m : m > n\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (Q \setminus \operatorname{cl} U_n) = Q \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n. \ ▷$$

1.6. Предложение. (a) *Пусть* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *— два покрытия последовательности точек* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *причем* $V_n \subset \operatorname{cl} U_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Если покрытие* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *является дизъюнктным (латеральным, латерально прикасающимся к* q, *латерально сходящимся к* q*), то тем же свойством обладает* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) *Если последовательность точек допускает дизъюнктное (латеральное, латерально прикасающееся к* q, *латерально сходящееся к* q*) покрытие, то она допускает открытое покрытие и замкнутое покрытие, обладающие тем же свойством.*

(c) *Если последовательность точек латерально сходится к* q, *то она инъективно сходится к* q.

(d) *Если последовательность точек латерально сходится к* q, *то точка* q *служит единственным пределом этой последовательности.*

1.7. Пример. В хаусдорфовом пространстве всякая инъективно сходящаяся последовательность изолированных точек q_n сходится латерально. Соответствующим сходящимся латеральным покрытием служит последовательность синглетонов $\{q_n\}$. В частности, в компактном ординале $\omega + 1$, где ω — первый бесконечный ординал, последовательность $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к ω.

1.8. Предложение. (a) *В метризуемом пространстве совпадают классы инъективно сходящихся и латерально сходящихся последовательностей.*

(b) *Если в метрическом пространстве* (Q, d) *последовательность* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *инъективно сходится к точке* q, *то на роль латерально сходящегося к* q *покрытия последовательности* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *подходит последовательность замкнутых шаров* $B(q_n, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_n > 0$, *которые попарно не пересекаются и не содержат точку* q. *Это условие выполняется, например, в случае, когда*

$$0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2} \inf_{m\neq n} d(q_m, q_n) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

◁ Пусть $q_n \to q$ в метрическом пространстве (Q, d), и пусть $B(q_n, \varepsilon_n)$ — попарно непересекающиеся замкнутые шары, не содержащие точку q. Согласно условию (c) леммы 1.2 достаточно рассмотреть точку $p \in Q\backslash\{q\}$ и найти номер m, для которого $p \notin \operatorname{cl} \bigcup\limits_{n\geqslant m} B(q_n, \varepsilon_n)$. Положим $\varepsilon := d(q, p)$ и рассмотрим номер m, для которого $q_n \in B(q, \frac{1}{3}\varepsilon)$ при $n \geqslant m$. Поскольку $q \notin B(q_n, \varepsilon_n)$, при $n \geqslant m$ имеем $\varepsilon_n < \frac{1}{3}\varepsilon$ и поэтому $B(q_n, \varepsilon_n) \subset B(q, \frac{2}{3}\varepsilon)$, так как из неравенства $d(r, q_n) \leqslant \varepsilon_n$ следует

$$d(r, q) \leqslant d(r, q_n) + d(q_n, q) \leqslant \varepsilon_n + \frac{1}{3}\varepsilon < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Следовательно, $\operatorname{cl} \bigcup\limits_{n\geqslant m} B(q_n, \varepsilon_n) \subset B(q, \frac{2}{3}\varepsilon)$, в то время как $p \notin B(q, \frac{2}{3}\varepsilon)$.

Далее, в случае (2) шары $B(q_n, \varepsilon_n)$ попарно не пересекаются, поскольку при существовании точки $p \in B(q_m, \varepsilon_m) \cap B(q_n, \varepsilon_n)$, $m \neq n$, были бы выполнены противоречивые соотношения

$$d(q_m, q_n) \leqslant d(q_m, p) + d(p, q_n) \leqslant \varepsilon_m + \varepsilon_n < \frac{1}{2} d(q_m, q_n) + \frac{1}{2} d(q_m, q_n) = d(q_m, q_n).$$

Кроме того, из (2) следует $q \notin B(q_n, \varepsilon_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, так как $d(q_m, q_n) > 2\varepsilon_n$ при $m > n$ и поэтому

$$d(q, q_n) = \lim_{m\to\infty} d(q_m, q_n) \geqslant 2\varepsilon_n > \varepsilon_n.$$

Остается заметить, что из инъективной сходимости $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ вытекает неравенство $\inf\limits_{m\neq n} d(q_m, q_n) > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. ▷

1.9. Пример. Существует компактное хаусдорфово пространство, содержащее последовательность, которая сходится инъективно, он не латерально.

◁ Рассмотрим декартово произведение $Q = (\omega + 1) \times (\omega_1 + 1)$ компактных ординалов $\omega + 1$ и $\omega_1 + 1$, где ω — первый бесконечный ординал, ω_1 — первый несчетный ординал. Тогда в пространстве Q последовательность $((n, \omega_1))_{n \in \mathbb{N}}$, инъективно сходящаяся к (ω, ω_1), не сходится латерально.

В самом деле, рассмотрим произвольное покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $((n, \omega_1))_{n\in\mathbb{N}}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ в пространстве $\omega_1 + 1$ имеется такая окрестность V_n точки ω_1, что $\{n\} \times V_n \subset U_n$. Поскольку в $\omega_1 + 1$ пересечение $V = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ является окрестностью ω_1, существует отличный от ω_1 элемент $\alpha \in V$. Тогда для всех $m \in \mathbb{N}$

$$(\omega, \omega_1) \neq (\omega, \alpha) = \lim_{n\to\infty} (n, \alpha) \in \mathrm{cl} \bigcup_{n \geqslant m} \{n\} \times V \subset \mathrm{cl} \bigcup_{n\geqslant m} U_n,$$

а значит, согласно лемме 1.2(c) покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не сходится к (ω, ω_1). ▷

1.10. Отметим еще несколько простых свойств латерально сходящихся последовательностей.

Предложение. *Пусть $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к q в пространстве Q.*

(a) *Всякая подпоследовательность $(q_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к q.*

(b) *Если Q_0 — топологическое подпространство Q, содержащее $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и q, то $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к q в Q_0.*

(c) *Пусть τ — топология на множестве Q, более сильная, чем топология пространства Q. Если последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в τ, то она латерально сходится к q в τ.*

(d) *Если $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — латерально сходящееся покрытие $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $p_n \in \mathrm{cl}\, U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\mathrm{cl}\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{p_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{q\}$. В частности, если $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится, то $p_n \to q$.*

1.11. Теорема. *Для латеральной сходимости $q_n \to q$ в пространстве Q необходима, а если Q регулярно, то и достаточна, конъюнкция следующих двух условий:*

(a) *$q_n \to q$ инъективно;*

(b) *существуют открытое множество U, содержащее $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, и последовательность $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ окрестностей точки q такие, что*

$$\mathrm{cl}\, U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{q\}. \tag{3}$$

◁ Необходимость. Пусть $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — открытое покрытие $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, латерально сходящееся к q (см. предложение 1.6(b)). Инъективная сходимость $q_n \to q$ отмечена в предложении 1.6(c). Далее, поскольку $q \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}\, U_n$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $V_n := Q \setminus \mathrm{cl}\, U_n$ служит окрестностью точки q. Полагая $U := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$, заключаем, что

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}\, U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n &= \mathrm{cl}\, U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Q \setminus \mathrm{cl}\, U_n) = \mathrm{cl}\, U \cap \Big(Q \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}\, U_n\Big) \\ &= \Big(\mathrm{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}\, U_n = \{q\}.\end{aligned}$$

Достаточность. Пусть $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ инъективно сходится к q, и пусть U и $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяют условию (b). Не нарушая общности, потребуем $V_1 = Q$. Ввиду регулярности пространства Q для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое открытое множество G_n, что $q \in G_n$ и $\operatorname{cl} G_n \subset V_n$, причем $G_1 = Q$. Заменяя G_n пересечением $G_1 \cap \dots \cap G_n$, будем считать, что $G_1 \supset G_2 \supset \cdots$.

Поскольку

$$U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \subset \operatorname{cl} U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{q\},$$

любой отличный от q элемент U принадлежит лишь конечному числу множеств G_m. В частности, для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно рассмотреть номер

$$m(n) = \max\{m \in \mathbb{N} : q_n \in G_m\}. \tag{4}$$

Используя регулярность пространства Q, которая гарантирует отделимость каждой точки q_n от замкнутого множества $\{q_{n+1}, q_{n+2}, \dots\} \cup \{q\}$, и применяя рекурсию, несложно определить две последовательности открытых множеств U_n и W_n, удовлетворяющих для всех $n \in \mathbb{N}$ следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\operatorname{cl} U_n \cap \operatorname{cl} W_n = \varnothing;\\ &q_n \in U_n \subset U \cap G_{m(n)} \cap W_{n-1};\\ &\{q_{n+1}, q_{n+2}, \dots\} \cup \{q\} \subset W_n \subset W_{n-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $W_0 = Q$. Покажем, что последовательность $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к точке q, проверив условие (c) леммы 1.2. Из соотношений (5) и сходимости $q_n \to q$ видно, что последовательность $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дизъюнктна и

$$q \in \operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n.$$

Далее, рассмотрим произвольную точку $p \neq q$. Если $p \notin \operatorname{cl} U$, то $p \notin \operatorname{cl} \bigcup\limits_{n\geqslant 1} U_n$, поскольку $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} U_n \subset U$. Пусть теперь $p \in \operatorname{cl} U \setminus \{q\}$. Из равенства (3) и включений $\operatorname{cl} G_n \subset V_n$ следует, что $p \notin \operatorname{cl} G_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $q_n \to q \in G_k$, имеется такой номер $m \in \mathbb{N}$, что $g_n \in G_k$ при $n \geqslant m$. Согласно (4) из $g_n \in G_k$ следует $m(n) \geqslant k$, а значит, $G_k \supset G_{m(n)} \supset U_n$ при $n \geqslant m$. Таками образом, $p \notin \operatorname{cl} G_k \supset \operatorname{cl} \bigcup\limits_{n\geqslant m} U_n$. $\rhd$

1.12. Следствие. *Для латеральной сходимости $q_n \to q$ в пространстве Q необходима, а если Q регулярно, то и достаточна, конъюнкция следующих двух условий:*

(a) *последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ инъективна и $q_n \to q$;*

(b) *$(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ допускает такое покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что*

$$\Bigl(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Bigr) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n = \{q\}.$$

$\lhd$ В пояснении нуждается лишь достаточность. Пусть инъективная последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к q и ее покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (b). Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $q \notin \operatorname{cl} U_n$, откуда $q_n \neq q$ (и тем самым сходимость $q_n \to q$ инъективна) и $V_n := Q \setminus \operatorname{cl} U_n$ —

окрестность точки q. Кроме того, открытое множество $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{int} U_n$ содержит $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$q \in \operatorname{cl} U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{int} U_n\Big) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Q \setminus \operatorname{cl} U_n)$$
$$\subset \Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \cap \Big(Q \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n\Big) = \Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n = \{q\}.$$

Остается привлечь теорему 1.11. ▷

1.13. Предложение. *Пусть в регулярном топологическом пространстве последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ инъективно сходится к точке q и допускает покрытие, стягивающееся к q. Тогда $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к q.*

◁ Рассмотрим стягивающееся к q покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Не нарушая общности, можно считать, что $q \notin \operatorname{cl} U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда, с одной стороны,

$$q \in \operatorname{cl}\{q_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n \subset \Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n.$$

С другой стороны, если V — произвольная окрестность точки q и $U_n \subset V$ при $n > m$, то

$$\Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n \subset \Big(\bigcup_{n\leqslant m} \operatorname{cl} U_n \cup \operatorname{cl} \bigcup_{n>m} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\leqslant m} \operatorname{cl} U_n$$
$$\subset \operatorname{cl} \bigcup_{n>m} U_n \subset \operatorname{cl} V.$$

Следовательно, $\big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n = \{q\}$, и согласно следствию 1.12 последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к q. ▷

1.14. Теорема. *Пусть $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность, латерально сходящаяся к точке q в регулярном пространстве Q. Следующие утверждения равносильны:*

(a) *любое латерально сходящееся к q покрытие $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ стягивается к q;*

(b) *пространство Q счетно компактно.*

◁ (a)⇒(b). Предположим вопреки доказываемому, что пространство Q не является счетно компактным. Тогда в Q существует бесконечное множество, не имеющее предельных точек (см., например, [3, гл. III, задача 189]). Несомненно, такое множество содержит лишь конечное число членов последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, а значит, в нем можно выделить инъективную последовательность элементов p_n, не принадлежащих $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{q\}$. Отметим, что каждое из множеств $P_m := \{p_n : n \geqslant m\}$ $(m \in \mathbb{N})$ не имеет предельных точек и поэтому замкнуто.

По условию последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ допускает латерально сходящееся к q покрытие $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Благодаря регулярности пространства Q существует такое замкнутое покрытие $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что $V_n \subset W_n \setminus P_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$U_n := V_n \cup \{p_n\} \ (n \in \mathbb{N}), \quad \mathscr{U}_m := \bigcup_{n\geqslant m} U_n, \ \mathscr{V}_m := \bigcup_{n\geqslant m} V_n \ (m \in \mathbb{N}).$$

Покажем, что замкнутое покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к q, проверив условие (b) леммы 1.2. Действительно, согласно предложению 1.6 (a) покрытие $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к q. Поэтому

$$U_m \cap U_n = V_m \cap V_n = \varnothing \quad \text{при } m \neq n$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned}\operatorname{cl}\mathscr{U}_m \setminus \mathscr{U}_m &= \operatorname{cl}(\mathscr{V}_m \cup P_m) \setminus (\mathscr{V}_m \cup P_m) = (\operatorname{cl}\mathscr{V}_m \cup P_m) \setminus (\mathscr{V}_m \cup P_m)\\ &= (\operatorname{cl}\mathscr{V}_m \setminus \mathscr{V}_m) \setminus P_m = \{q\} \setminus P_m = \{q\}\end{aligned}$$

для всех $m \in \mathbb{N}$. Остается заметить, что $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не стягивается к q, так как $p_n \in U_n$ и $p_n \nrightarrow q$.

(b)$\Rightarrow$(a). Допустим, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — покрытие $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, латерально сходящееся, но не стягивающееся к q. Тогда существуют окрестность V точки q и последовательности $(n_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ и $(p_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset Q$ такие, что $n_m \to \infty$ и $p_m \in U_{n_m} \setminus V$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Из дизъюнктности последовательности $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ следует, что множество $P := \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ бесконечно. Очевидно, $q \notin \operatorname{cl} P$. Кроме того, из утверждения 1.2 (d) видно, что элементы $Q\setminus\{q\}$ также не могут быть предельными для P. Таким образом, Q содержит бесконечное множество, не имеющее предельных точек, и тем самым не является счетно компактным (см. [3, гл. III, задача 189]). ▷

1.15. Напомним, что *псевдохарактером* $\psi(q,Q)$ T_1-пространства Q в точке $q \in Q$ называется наименьшая среди мощностей $|\mathscr{V}|$ множеств $\mathscr{V}$, состоящих из открытых подмножеств Q и удовлетворяющих равенству $\cap\mathscr{V} = \{q\}$:

$$\psi(q,Q) \;:=\; \min\{|\mathscr{V}| : \mathscr{V} \subset \mathit{Open}(Q),\ \cap\mathscr{V} = \{q\}\}.$$

Например, псевдохарактер T_1-пространства в точке, имеющей счетную базу окрестностей, счетен.

Следующее утверждение с очевидностью вытекает из теоремы 1.11.

Предложение. *Пусть Q — регулярное пространство и $q \in Q$. Если псевдохарактер $\psi(q,Q)$ счетен, то всякая последовательность в Q, инъективно сходящаяся к точке q, сходится латерально.*

1.16. Пример. Утверждение, обратное к предложению 1.15, не имеет места даже при дополнительном предположении о компактности пространства Q. Действительно, пусть $Q = D \cup \{q\}$ — одноточечная компактификация несчетного дискретного пространства D. Псевдохарактер $\psi(q,Q)$ несчетен, поскольку для любой последовательности $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ открытых окрестностей точки q дополнение $Q \setminus \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (Q \setminus V_n)$ является счетным. При этом всякая инъективная последовательность элементов D латерально сходится к q (см. пример 1.7).

1.17. Опишем еще один наглядный случай, когда компактное пространство имеет несчетный псевдохарактер в пределе латерально сходящейся последовательности.

Пример. Пусть P — хаусдорфово компактное пространство, имеющее в некоторой своей точке p несчетный псевдохарактер $\psi(p,P)$ (или, что в данном случае то же самое, содержащее точку p, для которой не существует счетной базы окрестностей, см. [3, гл. III, задача 68; 4, упр. 3.1.F]). Будем считать, что P не пересекается с $\mathbb{N}$. Снабдим $Q := P \cup \mathbb{N}$ топологией, в которой роль открытых множеств играют объединения $U \cup V$, где U — открытое подмножество P, а V — подмножество $\mathbb{N}$, удовлетворяющее условию

$$(\exists\, m \in \mathbb{N})(\forall\, n \geqslant m)(n \in V)$$

в случае $p \in U$. (Такое топологическое пространство Q гомеоморфно соединению $P \cup_{\{(p,\,\omega)\}} (\omega + 1)$ в смысле [4, 2.1.12] или же фактор-пространству суммы $P \oplus (\omega + 1)$ по отношению эквивалентности, отождествляющему точки p и ω.) Тогда Q — хаусдорфово компактное пространство (см., например, [4, 3.2.11]), имеющее несчетный псевдохарактер $\psi(p, Q)$, в то время как последовательность $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к p (см. пример 1.7).

§ 2. Гомоморфизмы банаховых расслоений

В этом параграфе устанавливается ряд результатов о существовании гомоморфизмов НБР, а также непрерывных и слабо непрерывных вектор-функций и сечений, принимающих наперед заданные значения в точках инъективно и латерально сходящихся последовательностей. Как и прежде, Q — топологическое пространство.

2.1. Определение. *Функциональным покрытием последовательности* точек $q_n \in Q$ условимся называть произвольную последовательность непрерывных функций $f_n\colon Q \to [0, 1]$ таких, что $f_n(q_n) = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Функциональное покрытие $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходящейся последовательности $q_n \to q$ назовем *латерально прикасающимся* (*латерально сходящимся*) к точке q, если таковой является последовательность носителей $\operatorname{supp} f_n := \operatorname{cl}\{q \in Q : f_n(q) \neq 0\}$.

2.2. Как легко видеть, для любого покрытия $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ во вполне регулярном пространстве найдется такое функциональное покрытие $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ этой последовательности, что $\operatorname{supp} f_n \subset U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В частности, если сходящаяся последовательность $q_n \to q$ во вполне регулярном пространстве допускает покрытие, латерально прикасающееся (латерально сходящееся) к точке q, то эта последовательность допускает и функциональное покрытие, обладающее тем же свойством. С учетом этого наблюдения из предложения 1.5 вытекает следующий факт.

Предложение. *Во вполне регулярном топологическом пространстве всякая инъективно сходящаяся последовательность $q_n \to q$ допускает функциональное покрытие, латерально прикасающееся к точке q.*

2.3. Определение. Опишем конструкцию поточечной суммы дизъюнктной последовательности сечений расслоения векторных пространств, которая будет многократно использована в дальнейшем в различных частных случаях (пп. 2.4, 2.6, 2.7, 2.9, 2.10).

Пусть $\mathscr{X} := (\mathscr{X}(q))_{q\in Q}$ — семейство векторных пространств, $S(Q, \mathscr{X}) := \prod_{q\in Q} \mathscr{X}(q)$ — векторное пространство сечений $\mathscr{X}$, и пусть $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность сечений $s_n \in S(Q, \mathscr{X})$, имеющих попарно дизъюнктные носители $\operatorname{supp} s_n := \operatorname{cl}\{q \in Q : s_n(q) \neq 0\}$. В этом контексте возникает возможность рассмотреть сечение $\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \in S(Q, \mathscr{X})$, которое представляет собой поточечную сумму сечений s_n и принимает следующие значения в точках $q \in Q$:

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n\Big)(q) = \begin{cases} s_n(q), & q \in \operatorname{supp} s_n, \\ 0, & q \in Q \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{supp} s_n. \end{cases}$$

В большинстве рассматриваемых ниже случаев отображения s_n в том или ином смысле непрерывны, принадлежат подпространству $S(Q,\mathscr{X})$, имеющему естественную векторную топологию, а сечение $\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n$ оказывается поточечной суммой равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$.

2.4. Лемма. *Пусть выполнены следующие условия:*
(a) Q *— вполне регулярное топологическое пространство;*
(b) *последовательность точек* $q_n \in Q$ *инъективно сходится к* $q \in Q$*;*
(c) $\mathscr{X}$ *— НБР над* Q*;*
(d) $x_n \in \mathscr{X}(q_n)$, $\|x_n\| \to 0$.
Тогда существует ограниченное непрерывное сечение $s \in C(Q,\mathscr{X})$*, принимающее значения*

$$s(q_n) = x_n \ (n \in \mathbb{N}), \quad s(q) = 0.$$

$\lhd$ По теореме Дюпре [6, 1.1] для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется непрерывное сечение $s_n \in C(Q,\mathscr{X})$ такое, что $s_n(q_n) = x_n$ и $\|s_n\| \leqslant \|x_n\|$. Пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — функциональное покрытие последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, латерально прикасающееся к точке q (см. предложение 2.2). Тогда сечение $s := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n s_n \in S(Q,\mathscr{X})$ принимает требуемые значения и, кроме того, является ограниченным и непрерывным, будучи поточечной суммой равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n s_n$ в банаховом пространстве $C^b(Q,\mathscr{X}) \subset \ell^\infty(Q,\mathscr{X})$ ограниченных непрерывных сечений (см. [1, 2.3.6]). $\rhd$

2.5. Предложение. *Пусть выполнены следующие условия:*
(a) Q *— вполне регулярное топологическое пространство;*
(b) *последовательность точек* $q_n \in Q$ *инъективно сходится к* $q \in Q$*;*
(c) $\mathscr{X}$ *— НБР над* Q*;*
(d) $x_n \in \mathscr{X}(q_n)$, $x \in \mathscr{X}(q)$*;*
(e) $(q_n, x_n) \to (q, x)$ *в топологическом пространстве* $Q \otimes \mathscr{X}$ (см. [1, 2.1.4]).
Тогда существует ограниченное непрерывное сечение $s \in C(Q,\mathscr{X})$*, принимающее значения*

$$s(q_n) = x_n \ (n \in \mathbb{N}), \quad s(q) = x.$$

$\lhd$ По теореме Дюпре [6, 1.1] существует сечение $s_x \in C^b(Q,\mathscr{X})$, принимающее значение $s_x(q) = x$. Из предложения [1, 2.3.8] следует $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - s_x(q_n)\| = 0$. Согласно лемме 2.4 существует такое сечение $s_0 \in C^b(Q,\mathscr{X})$, что $s_0(q_n) = x_n - s_x(q_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $s_0(q) = 0$. Тогда сечение $s := s_0 + s_x$ является искомым. $\rhd$

2.6. Предложение. *Пусть выполнены следующие условия:*
(a) Q *— вполне регулярное топологическое пространство;*
(b) *последовательность точек* $q_n \in Q$ *инъективно сходится к* $q \in Q$*;*
(c) $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ *— НБР над* Q*;*
(d) $H_n \in Hom(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, $\|H_n\|_\infty \to 0$.
Тогда существует ограниченный гомоморфизм $H \in Hom(\mathscr{X},\mathscr{Y})$*, принимающий значения*

$$H(q_n) = H_n(q_n) \ (n \in \mathbb{N}), \quad H(q) = 0.$$

$\lhd$ Обозначим через $\mathscr{Z}$ банахово расслоение над Q со слоями $B(\mathscr{X}(p),\mathscr{Y}(p))$ в точках $p \in Q$. Пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — функциональное покрытие последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, латерально прикасающееся к точке q (см. предложение 2.2). Тогда сечение $H := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n H_n \in S(Q,\mathscr{Z})$ принимает требуемые значения и, кроме того, является ограниченным гомоморфизмом из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, будучи поточечной суммой равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n H_n$ в банаховом пространстве $Hom^b(\mathscr{X},\mathscr{Y}) \subset \ell^\infty(Q,\mathscr{Z})$ ограниченных гомоморфизмов (см. [1, 2.4.11]). $\triangleright$

2.7. Предложение. *Пусть выполнены следующие условия:*
(a) *Q — вполне регулярное топологическое пространство;*
(b) *последовательность точек $q_n \in Q$ инъективно сходится к $q \in Q$;*
(c) *X — топологическое векторное пространство;*
(d) *последовательность векторов $x_n \in X$ сходится к $x \in X$.*
Тогда существует непрерывная функция $u\colon Q \to X$, принимающая значения

$$u(q_n) = x_n \ (n \in \mathbb{N}), \quad u(q) = x. \tag{6}$$

Если, кроме того, множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено, то существует ограниченная функция $u \in C(Q,X)$, удовлетворяющая (6).

$\triangleleft$ Пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — функциональное покрытие последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, латерально прикасающееся к точке q (см. предложение 2.2). Определим функцию $u_0\colon Q \to X$, полагая $u_0 := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \otimes (x_n - x)$. Тогда $u_0(q_n) = x_n - x$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $u_0(q) = 0$ и, кроме того, функция u_0 ограничена и непрерывна, будучи поточечной суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \otimes (x_n - x)$, равномерно сходящегося относительно равномерности пространства X. Следовательно, функция $u := u_0 + x$ является искомой. $\triangleright$

2.8. Предложение. *Пусть выполнены следующие условия:*
(a) *Q — вполне регулярное топологическое пространство;*
(b) *последовательность точек $q_n \in Q$ инъективно сходится к $q \in Q$;*
(c) *$\mathscr{X} = Q \times \{X\}$ — постоянное НБР над Q со слоем X;*
(d) *последовательность функционалов $y_n \in X'$ слабо* сходится к $y \in X'$.*
Тогда существует ограниченный гомоморфизм $H \in \mathscr{X}^*$, принимающий значения

$$H(q_n) = y_n \ (n \in \mathbb{N}), \quad H(q) = y.$$

$\triangleleft$ Согласно предложению 2.7 имеется слабо* ограниченное слабо* непрерывное отображение $H\colon Q \to X'$, принимающее значения $H(q_n) = y_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $H(q) = y$. Ясно, что $H \otimes u \in C(Q)$ для всех постоянных функций $u\colon Q \to X$. Кроме того, в силу полноты X отображение H ограничено по норме. Остается воспользоваться теоремой [1, 2.4.9]. $\triangleright$

2.9. Говорят, что последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в банаховом пространстве X w-w*-*сходится* к $x \in X$, если для любых $y_n, y \in X'$ из слабой* сходимости $y_n \to y$ следует $\langle x_n \,|\, y_n\rangle \to \langle x \,|\, y\rangle$ (см. [5, 3.1.7]). Сечение $w \in S(Q,\mathscr{X})$ НБР $\mathscr{X}$ над Q называют *слабо непрерывным* и пишут $w \in C_{\mathrm{w}}(Q,\mathscr{X})$, если $H \otimes w \in C(Q)$ для всех $H \in \mathscr{X}^*$ (см. [5, 3.5]).

Предложение. *Пусть выполнены следующие условия:*
(a) *Q — вполне регулярное пространство Фреше — Урысона;*
(b) *последовательность точек $q_n \in Q$ инъективно сходится к $q \in Q$;*
(c) *$\mathscr{X} = Q \times \{X\}$ — постоянное НБР над Q со слоем X;*
(d) *последовательность векторов $x_n \in X$ w-w*-сходится к $x \in X$.*
Тогда существует слабо непрерывное сечение $w \in C_{\mathrm{w}}(Q,\mathscr{X})$, принимающее значения

$$w(q_n) = x_n \ (n \in \mathbb{N}), \quad w(q) = x.$$

◁ Как и в доказательстве предложения 2.7, рассмотрим функциональное покрытие $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, латерально прикасающееся к q (см. предложение 2.2), и положим $u := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \otimes (x_n - x) \in S(Q, \mathscr{X})$, т. е.

$$u(p) = \begin{cases} f_n(p)(x_n - x), & p \in \operatorname{supp} f_n, \\ 0, & p \in Q \setminus S, \end{cases}$$

где $S := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{supp} f_n$. Тогда сумма $w := u + x$ принимает требуемые значения в точках q_n и q, и нужно лишь установить, что $u \in C_{\mathrm{W}}(Q, \mathscr{X})$.

Рассмотрим произвольный гомоморфизм $H \in \mathscr{X}^*$ и покажем непрерывность функции $H \otimes u \colon Q \to \mathbb{R}$. Прежде всего заметим, что функция $H \otimes u$ непрерывна на дополнении $Q \setminus \operatorname{cl} S$, так как на нем она тождественно равна нулю. Далее, $H \otimes u$ непрерывна на S, так как каждый из носителей $\operatorname{supp} f_n$ содержится в открытом множестве $Q \setminus \operatorname{cl} \bigcup\limits_{m\neq n} \operatorname{supp} f_m$, на котором

$$H(p)u(p) = f_n(p)H(p)(x_n - x).$$

Остается показать непрерывность функции $H \otimes u$ на $\operatorname{cl} S \setminus S$. Допустим, эта функция разрывна в некоторой точке $p \in \operatorname{cl} S \setminus S$. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, последовательность точек $p_m \in S$ и строго возрастающая последовательность номеров $n_m \in \mathbb{N}$ такие, что

$$p \in \operatorname{cl}\{p_m : m \in \mathbb{N}\}, \quad p_m \in \operatorname{supp} f_{n_m}, \quad |H(p_m)u(p_m)| > \varepsilon$$

для всех $m \in \mathbb{N}$. Поскольку Q является пространством Фреше — Урысона, имеется подпоследовательность $p_{m_k} \to p$. Легко проверить, что последовательность векторов $u(p_m) = f_{n_m}(p_m)(x_{n_m} - x)$ w-w*-сходится к нулю, а значит, это верно и для ее подпоследовательности $u(p_{m_k})$. Вместе с тем $H(p_{m_k}) \to H(p)$ слабо*, откуда вытекают противоречивые соотношения

$$\varepsilon < |H(p_{m_k})u(p_{m_k})| \to |H(p)u(p)| = 0. \ \triangleright$$

2.10. Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*
(a) *Q — вполне регулярное топологическое пространство;*
(b) *последовательность точек $q_n \in Q$ латерально сходится к $q \in Q$;*
(c) *$\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над Q;*
(d) *$H_n \in Hom(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, $\|H_n\|_\infty \leqslant 1$ $(n \in \mathbb{N})$;*
(e) *$\mathscr{U}$ — счетное подмножество $C(Q, \mathscr{X})$;*
(f) *$\operatorname{cl} \mathscr{U}(q) = \mathscr{X}(q)$, где $\mathscr{U}(q) := \{u(q) : u \in \mathscr{U}\}$;*
(g) *$\|H_n(q_n)u(q_n)\| \to 0$ для всех $u \in \mathscr{U}$.*
Тогда существует такой гомоморфизм $H \in Hom(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, что

$$\|H\|_\infty \leqslant 1, \quad H(q_n) = H_n(q_n) \ (n \in \mathbb{N}), \quad H(q) = 0.$$

◁ Обозначим через $\mathscr{Z}$ банахово расслоение над Q со слоями $B(\mathscr{X}(p), \mathscr{Y}(p))$ в точках $p \in Q$. По теореме [1, 2.4.9] ограниченное сечение $H \in S(Q, \mathscr{Z})$ принадлежит $Hom(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, если существует такое послойно плотное в $\mathscr{X}$ множество $\mathscr{V} \subset C(Q, \mathscr{X})$, что $H \otimes v \in C(Q, \mathscr{Y})$ для всех $v \in \mathscr{V}$. Начнем с введения множества $\mathscr{V}$, удобного для дальнейших выкладок.

Рассмотрим латерально сходящееся к q покрытие $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и положим

$$\mathscr{W} := \Big\{ w \in C(Q, \mathscr{X}) \,:\, w = 0 \text{ на } \operatorname{cl} \bigcup_{m\neq n} W_m \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Заметим, что $\mathscr{W}(p) = \mathscr{X}(p)$ для каждой точки

$$p \in Q \backslash \{q\} = \Big(Q \setminus \operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n\Big) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl} W_n.$$

Действительно, в силу полной регулярности пространства Q в каждом из случаев $p \notin \operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ и $p \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl} W_n$ существует такая непрерывная функция $f \colon Q \to [0,1]$, что $f(p) = 1$ и $f = 0$ на $\operatorname{cl} \bigcup_{m \neq n} W_m$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. По теореме Дюпре [6, 1.1] для каждого элемента $x \in \mathscr{X}(p)$ имеется сечение $u \in C(Q, \mathscr{X})$ со значением $u(p) = x$, а значит, x является значением в точке p сечения fu, принадлежащего множеству $\mathscr{W}$. Таким образом, $\mathscr{W}(p) = \mathscr{X}(p)$ для всех $p \neq q$, и поэтому объединение

$$\mathscr{V} := \mathscr{W} \cup \{u_m : m \in \mathbb{N}\}$$

послойно плотно в $\mathscr{X}$, где $\{u_m : m \in \mathbb{N}\} = \mathscr{U}$.

Далее, согласно условию (g) имеется строго возрастающая последовательность номеров $n_m \in \mathbb{N}$, для которой

$$\|H_n(q_n)u_1(q_n)\| < \frac{1}{m}, \ \ldots, \ \|H_n(q_n)u_m(q_n)\| < \frac{1}{m}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant n_m.$$

Как легко видеть, существует покрытие последовательности $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, состоящее из таких подокрестностей $V_n \subset W_n$, что

$$|\!|\!| H_n \otimes u_1 |\!|\!| \leqslant \frac{1}{m}, \ \ldots, \ |\!|\!| H_n \otimes u_m |\!|\!| \leqslant \frac{1}{m} \ \text{ на } V_n \text{ при } n_m \leqslant n < n_{m+1}.$$

Рассмотрим функциональное покрытие $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ последовательности $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такое, что $\operatorname{supp} f_n \subset V_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (см. п. 2.2). Ясно, что покрытие $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, как и $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, латерально сходится к q (см. предложение 1.6 (a)), причем

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n H_n \otimes u_m\|_\infty = 0 \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N}.$$

Тогда сечение

$$H := \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n H_n \in S(Q, \mathscr{Z})$$

принимает требуемые значения в точках q_n и q и, кроме того, $\|H\|_\infty \leqslant 1$. Остается показать, что $H \otimes v \in C(Q, \mathscr{Y})$ для всех $v \in \mathscr{V}$.

Если $v \in \mathscr{W}$, то имеется номер $n \in \mathbb{N}$, для которого $v = 0$ на множестве

$$\operatorname{cl} \bigcup_{m \neq n} W_m \supset \bigcup_{m \neq n} V_m \supset \bigcup_{m \neq n} \operatorname{supp} f_m H_m,$$

и тогда $H \otimes v = f_n H_n \otimes v \in C(Q, \mathscr{Y})$. Если же $v = u_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n H_n \otimes v\|_\infty = \lim_{n \to \infty} \|f_n H_n \otimes u_m\|_\infty = 0,$$

и тогда сечение $H \otimes v = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n H_n \otimes v$ непрерывно, будучи поточечной суммой равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n H_n \otimes v)$ в банаховом пространстве $C^b(Q, \mathscr{Y})$ ограниченных непрерывных сечений (см. [1, 2.3.6]). $\triangleright$

2.11. Следующий пример показывает, что условие (b) о латеральной сходимости $q_n \to q$ в теореме 2.10 является существенным и не может быть ослаблено до инъективной сходимости.

Пример. Возможна ситуация, когда выполнены следующие условия:
(a) Q — компактное хаусдорфово пространство;
(b) последовательность точек $q_n \in Q$ инъективно сходится к $q \in Q$;
(c) $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над Q;
(d) $H_n \in \mathit{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, $\|H_n\|_\infty \leqslant 1$ $(n \in \mathbb{N})$;
(e) $\mathscr{X}(q) = \{0\}$,
но нет такого гомоморфизма $H \in \mathit{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, что $H(q_n) = H_n(q_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

$\vartriangleleft$ Рассмотрим компактное хаусдорфово пространство S, имеющее в некоторой точке $t \in S$ несчетный псевдохарактер $\psi(t, S)$, и положим

$$Q = (\omega + 1) \times S, \quad q_n = (n, t), \quad q = (\omega, t).$$

(Например, в случае $S = \omega_1 + 1$ и $t = \omega_1$ пространство Q и инъективно сходящаяся последовательность $q_n \to q$ совпадают с рассмотренными в примере 1.9.) В качестве $\mathscr{Y}$ возьмем постоянное НБР над Q со слоем $\mathbb{R}$, а на роль $\mathscr{X}$ пригласим подрасслоение $\mathscr{Y}$ со слоями

$$\mathscr{X}(p) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p \neq q; \\ \{0\}, & p = q \end{cases}$$

и непрерывной структурой $\{u \in C(Q) : u(q) = 0\} = C(Q, \mathscr{X})$ (см. [1, 2.2.1, 2.2.2]). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через χ_n характеристическую функцию подмножества $\{n\} \times S \subset Q$:

$$\chi_n(\alpha, s) = \begin{cases} 1, & \alpha = n; \\ 0, & \alpha \neq n \end{cases}$$

для всех $(\alpha, s) \in Q$. Заметим, что функции $\chi_n \colon Q \to \mathbb{R}$ непрерывны, причем в силу равенства $\chi_n(q) = \chi_n(\omega, t) = 0$ они принадлежат $C(Q, \mathscr{X})$. Наконец, определим последовательность гомоморфизмов $H_n \in \mathit{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, полагая

$$H_n(\alpha, s)x = \begin{cases} \chi_n(\alpha, s)x & \text{при четном } n; \\ 0 & \text{при нечетном } n \end{cases}$$

для всех $(\alpha, s) \in Q$ и $x \in \mathscr{X}(\alpha, s)$.

Предположим вопреки доказываемому, что существует гомоморфизм $H \in \mathit{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, принимающий значения $H(q_n) = H_n(q_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем $H(n,t)\chi_n(n,t) = 1$ при четном n и $H(n,t)\chi_n(n,t) = 0$ при нечетном n, а значит, в пространстве S найдется окрестность V_n точки t такая, что

$$H \otimes \chi_n > \tfrac{2}{3} \ \text{ на } \{n\} \times V_n \ \text{ при четном } n;$$
$$H \otimes \chi_n < \tfrac{1}{3} \ \text{ на } \{n\} \times V_n \ \text{ при нечетном } n.$$

Поскольку псевдохарактер $\psi(t, S)$ несчетен, существует точка $t' \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n \setminus \{t\}$. Рассмотрим функцию $f \in C(S)$, принимающую значения $f(t') = 1$ и $f(t) = 0$, и определим сечение $u \in C(Q, \mathscr{X})$, полагая

$$u(\alpha, s) = f(s), \quad (\alpha, s) \in Q.$$

Тогда $(n, t') \to (\omega, t')$, в то время как последовательность чисел

$$(H \otimes u)(n, t') = H(n, t')f(t') = H(n, t')1 = H(n, t')\chi_n(n, t') = (H \otimes \chi_n)(n, t')$$

не имеет предела. $\vartriangleright$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. С. 63–211.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
3. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
5. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Сопряженные банаховы расслоения // Нестандартный анализ и векторные решетки, изд. 2-е. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005. С. 125–201.
6. *Коптев А. В.* Несколько классов банаховых расслоений с непрерывными слабо непрерывными сечениями // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 600–612.

Поступила в редакцию 14 января 2025 г.
После доработки 14 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru

Коптев Александр Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
koptev@math.nsc.ru