

ДВА ПРИМЕРА КВАЗИПЛОТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ $\mathbb{R}^N$

А. Е. Гутман, И. А. Емельяненко

Аннотация. Доказано, что классы экспоненциально плотных, декартово плотных и рекурсивно плотных векторных подпространств $\mathbb{R}^N$ попарно различны.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.605

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, слабая топология, архимедов конус, пространство последовательностей

*Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе
с любовью и благодарностью*

В работе [1] было инициировано исследование вопроса о том, в каких хаусдорфовых локально выпуклых пространствах все архимедовы конусы замкнуты. (Такие пространства приятны тем, что при любом определении в них архимедова векторного порядка линейные неравенства выдерживают переход к пределам сетей.) Конечномерные пространства, как хорошо известно, обладают этим свойством (см., например, [2, 3.4]). В [1] было показано, что пространства, имеющие несчетную размерность, этим свойством не обладают, а для счетномерных пространств вопрос был оставлен открытым.

В работе [3] было введено понятие квазиплотности и получено исчерпывающее описание счетномерных хаусдорфовых локально выпуклых пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты. Таковыми оказались в точности те счетномерные пространства X , у которых топологически сопряженное пространство X' квазиплотно в алгебраически сопряженном пространстве $X^\#$, снабженном слабой* топологией.

Благодаря работе [3] квазиплотные пространства стали объектом тщательного изучения, а поскольку в счетномерном случае пространство $X^\#$ линейно и топологически изоморфно $\mathbb{R}^N$, класс исследуемых объектов естественным образом сузился до квазиплотных векторных подпространств $\mathbb{R}^N$. В работе [4] такие подпространства были охарактеризованы в терминах их связи с проективными параллелотопами и автоморфизмами. Эти результаты в значительной степени прояснили устройство квазиплотных подпространств $\mathbb{R}^N$ с геометрической и алгебраической точек зрения, но не привели к немедленному обнаружению новых примеров и сохранили открытым вопрос о совпадении класса таких пространств с другими классами, допускающими существенно более простые определения.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2022–0004).

В данной заметке в теоремах 1 и 2 построены примеры, подтверждающие сформулированную в [3, 9.8] гипотезу о несовпадении трех видов квазиплотных векторных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — экспоненциально плотных, декартово плотных и рекурсивно плотных.

Символ $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots\}$. Множества рациональных и вещественных чисел обозначаются символами $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. Векторное пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ числовых последовательностей $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ снабжается тихоновской топологией (также называемой топологией поточечной сходимости). Кортежи $x = (x(1), \dots, x(n)) \in \mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, считаются функциями $x : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$. Линейный оператор $\pi_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$\pi_n s = s|_{\{1, \dots, n\}} = (s(1), \dots, s(n)). \quad (1)$$

Условимся использовать обозначение (1) не только для последовательностей $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, но и для кортежей $s \in \mathbb{R}^m$, где $m \geq n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [3, 4.1]. *Квазивнутренность* $\text{qi} S$ подмножества S локально выпуклого пространства X определяется как совокупность элементов $x \in S$, для которых клин

$$\mathbb{R}^+(S - x) = \{\lambda(s - x) : s \in S, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0\}$$

плотен в X .

Предложение 1 [3, 4.13]. *Для любого выпуклого множества $S \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ справедливо равенство*

$$\text{qi} S = \{s \in S : \pi_n s \in \text{int } \pi_n S \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\},$$

где $\text{int } \pi_n S$ — внутренность $\pi_n S$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [3]. Рассмотрим следующие свойства множества $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- (а) Y содержит степень $\Lambda^{\mathbb{N}}$ для некоторого плотного подмножества $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$;
- (b) Y содержит произведение $\prod_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$ для некоторой последовательности плотных подмножеств $\Lambda_n \subseteq \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$);
- (с) Y содержит некоторое подмножество $P \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющее следующим трем условиям:
 - (i) если $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\pi_n s \in \pi_n P$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $s \in P$;
 - (ii) множество $\{p(1) : p \in P\}$ плотно в $\mathbb{R}$;
 - (iii) для всех $n \in \mathbb{N}$ и $q \in P$ множество $\{p(n+1) : p \in P, \pi_n p = \pi_n q\}$ плотно в $\mathbb{R}$;
- (d) Y имеет непустое пересечение с любым замкнутым ограниченным выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, имеющим непустую квазивнутренность.

Множество Y , обладающее свойством (а), (b), (с), (d), называется соответственно *экспоненциально плотным*, *декартово плотным*, *рекурсивно плотным* и *квазиплотным* (см. [3, 6.2, 8.9, 9.8]).

Предложение 2 [3, 8.9]. *Для любого подмножества $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ имеют место следующие импликации:*

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [3, 6.4] доказано, что каждое из условий (а)–(d) влечет плотность Y в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ относительно тихоновской топологии. Там же приведен пример плотного векторного подпространства $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, не обладающего свойствами (а)–(d).

До недавнего времени список примеров собственных квазиплотных векторных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ включал лишь экспоненциально плотные пространства $\text{lin } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, $\text{lin } \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и их образы при проективных автоморфизмах (см. [3, 8.10; 4, 4.2]). (Здесь и ниже $\text{lin } S$ — линейная оболочка множества S в векторном пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.) Для векторных подпространств $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ также оставался открытым вопрос об эквивалентности условий (а)–(д) (см. [3, 9.8]). Приведенные ниже теоремы частично проясняют этот вопрос.

Теорема 1. *Условия (а) и (б) не эквивалентны для векторных подпространств $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность попарно различных алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$ вещественных чисел. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим плотное подмножество

$$\mathbb{Q} t_n = \{q t_n : q \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$$

и докажем, что декартово плотное векторное подпространство

$$Y = \text{lin} \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q} t_n \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

не является экспоненциально плотным.

Достаточно показать, что Y не содержит ни одной ненулевой постоянной последовательности. Допустим, это не так. Тогда $(1, 1, \dots) \in Y$, а значит, найдутся $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^m$ и последовательность $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в $\mathbb{Q}^m$ такие, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^m x(i) q_n(i) t_n = 1$$

или, что то же самое, $\langle q_n | x \rangle = t_n^{-1}$, где $\langle u | v \rangle = \sum_{i=1}^m u(i) v(i)$ для $u, v \in \mathbb{R}^m$.

Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} \langle q_1 | x \rangle = t_1^{-1}, \\ \dots, \\ \langle q_m | x \rangle = t_m^{-1} \end{cases}$$

в виде $Qx = y$, где матрица $Q \in \mathbb{Q}^{m \times m}$ состоит из элементов $Q_{ij} = q_i(j)$, а вектор $y \in \mathbb{R}^m$ полагается равным $(t_1^{-1}, \dots, t_m^{-1})$.

Заметим, что матрица Q обратима. Действительно, в противном случае транспонированная матрица Q^T удовлетворяет равенству $Q^T q = 0$ для некоторого ненулевого вектора $q \in \mathbb{Q}^m$, и тогда

$$\sum_{i=1}^m q(i) t_i^{-1} = \langle q | y \rangle = \langle q | Qx \rangle = \langle Q^T q | x \rangle = 0,$$

что противоречит алгебраической независимости чисел $t_1, \dots, t_m$ над $\mathbb{Q}$.

Наконец, используя обратимость матрицы Q и полагая

$$p = (Q^{-1})^T q_{m+1} \in \mathbb{Q}^m,$$

заключаем, что

$$\sum_{i=1}^m p(i) t_i^{-1} = \langle (Q^{-1})^T q_{m+1} | y \rangle = \langle q_{m+1} | Q^{-1} y \rangle = \langle q_{m+1} | x \rangle = t_{m+1}^{-1}$$

вопреки алгебраической независимости чисел $t_1, \dots, t_m, t_{m+1}$ над $\mathbb{Q}$. $\square$

Теорема 2. Условия (b) и (c) не эквивалентны для векторных подпространств $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение $\mathbb{Q}_\circ = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ и рассмотрим какую-либо инъективную функцию

$$t : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_\circ^n \rightarrow \mathbb{R},$$

образ которой является алгебраически независимым над $\mathbb{Q}$ подмножеством $\mathbb{R}$. Для произвольной последовательности $\rho \in \mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}$ определим $\hat{\rho} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ формулой

$$\hat{\rho} = (\rho(1), \rho(2)t(\pi_1\rho), \rho(3)t(\pi_2\rho), \dots, \rho(n)t(\pi_{n-1}\rho), \dots)$$

и покажем, что множество

$$P = \{\hat{\rho} : \rho \in \mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}\}$$

удовлетворяет условиям (i)–(iii).

Прежде всего заметим, что для любых $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}$ равенства $\rho = \sigma$ и $\hat{\rho} = \hat{\sigma}$ эквивалентны и, более того,

$$\pi_n \rho = \pi_n \sigma \Leftrightarrow \pi_n \hat{\rho} = \pi_n \hat{\sigma} \quad (2)$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$. Действительно, импликация « $\Rightarrow$ » тривиальна, так как для всякой функции $\rho \in \mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}$ кортеж $\pi_n \hat{\rho}$ однозначно определяется числами $\rho(1), \dots, \rho(n)$ и значениями функции t на кортежах, составленных из этих чисел. Импликацию « $\Leftarrow$ » несложно установить индукцией по n . Для $n = 1$ она обеспечивается равенствами $\hat{\rho}(1) = \rho(1)$ и $\hat{\sigma}(1) = \sigma(1)$. Если же эта импликация справедлива для n и имеет место равенство $\pi_{n+1} \hat{\rho} = \pi_{n+1} \hat{\sigma}$, то в силу $\pi_n \hat{\rho} = \pi_n \hat{\sigma}$ имеем $\pi_n \rho = \pi_n \sigma$, а недостающее равенство $\rho(n+1) = \sigma(n+1)$ следует из соотношений

$$\rho(n+1)t(\pi_n \rho) = \hat{\rho}(n+1) = \hat{\sigma}(n+1) = \sigma(n+1)t(\pi_n \sigma) = \sigma(n+1)t(\pi_n \rho)$$

и отсутствия нуля в образе функции t .

(i) Пусть $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и пусть $\pi_n s \in \pi_n P$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. имеется такая последовательность $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ элементов $\mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}$, что $\pi_n s = \pi_n \widehat{\rho_n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $s \in P$.

Определим последовательность $\rho \in \mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}$, полагая $\rho(n) = \rho_n(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Индукцией по n установим равенство

$$\pi_n \widehat{\rho_n} = \pi_n \hat{\rho} \quad (3)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Действительно, для $n = 1$ равенство (3) сразу вытекает из (2). Если же (3) справедливо для n , то

$$\pi_n \widehat{\rho_{n+1}} = \pi_n \pi_{n+1} \widehat{\rho_{n+1}} = \pi_n \pi_{n+1} s = \pi_n s = \pi_n \widehat{\rho_n} = \pi_n \hat{\rho},$$

откуда в силу (2) следует соотношение $\pi_n \rho_{n+1} = \pi_n \rho$, обеспечивающее недостающее равенство

$$\widehat{\rho_{n+1}}(n+1) = \rho_{n+1}(n+1)t(\pi_n \rho_{n+1}) = \rho(n+1)t(\pi_n \rho) = \hat{\rho}(n+1).$$

Благодаря (3) для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$s(n) = (\pi_n s)(n) = (\pi_n \widehat{\rho_n})(n) = (\pi_n \hat{\rho})(n) = \hat{\rho}(n),$$

т.е. $s = \hat{\rho}$ и тем самым $s \in P$.

(ii) Множество

$$\{p(1) : p \in P\} = \{\hat{\rho}(1) : \rho \in \mathbb{Q}_o^{\mathbb{N}}\}$$

совпадает с $\mathbb{Q}_o$ и поэтому плотно в $\mathbb{R}$.

(iii) С учетом (2) для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in \mathbb{Q}_o^{\mathbb{N}}$ множество

$$\begin{aligned} \{p(n+1) : p \in P, \pi_n p = \pi_n \hat{\sigma}\} &= \{\hat{\rho}(n+1) : \rho \in \mathbb{Q}_o^{\mathbb{N}}, \pi_n \hat{\rho} = \pi_n \hat{\sigma}\} \\ &= \{\rho(n+1) t(\pi_n \rho) : \rho \in \mathbb{Q}_o^{\mathbb{N}}, \pi_n \rho = \pi_n \sigma\} \end{aligned}$$

совпадает с $\mathbb{Q}_o t(\pi_n \sigma)$ и поэтому плотно в $\mathbb{R}$.

Таким образом, векторное подпространство

$$Y = \text{lin } P \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

рекурсивно плотно. Покажем, что оно не является декартово плотным.

Предположим вопреки доказываемому, что Y удовлетворяет условию (b). В этом случае существуют последовательности $y, z \in Y$, для которых $y(1) \neq z(1)$ и $y(n) = z(n)$ при $n > 1$, а значит,

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots) = \frac{1}{y(1) - z(1)}(y - z) \in Y = \text{lin } P.$$

Следовательно, найдутся $n \in \mathbb{N}$, ненулевые числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и попарно различные последовательности $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{Q}_o^{\mathbb{N}}$ такие, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{\rho}_i = e_1.$$

Пусть I — множество всех пар (i, j) , где $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и $i \neq j$. Учитывая, что $\rho_1, \dots, \rho_n$ попарно различны, рассмотрим натуральные числа

$$m_{ij} = \min\{k \in \mathbb{N} : \rho_i(k) \neq \rho_j(k)\}, \quad (i, j) \in I,$$

и положим

$$m = \max\{m_{ij} : (i, j) \in I\}.$$

Тогда $\pi_k \rho_i \neq \pi_k \rho_j$ при $k \geq m$ и $(i, j) \in I$. В частности, числа $t(\pi_k \rho_i)$ различны для различных пар (k, i) таких, что $k \geq m$ и $i \in \{1, \dots, n\}$.

Поскольку при $k > m$ справедливы соотношения

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_i(k) t(\pi_{k-1} \rho_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{\rho}_i(k) = e_1(k) = 0,$$

имеет место система равенств

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_i(m+1) t(\pi_m \rho_i) = 0, \\ \dots, \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_i(m+n) t(\pi_{m+n-1} \rho_i) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим матрицу

$$M = \begin{pmatrix} \rho_1(m+1)t(\pi_m\rho_1) & \rho_2(m+1)t(\pi_m\rho_2) & \dots & \rho_n(m+1)t(\pi_m\rho_n) \\ \rho_1(m+2)t(\pi_{m+1}\rho_1) & \rho_2(m+2)t(\pi_{m+1}\rho_2) & \dots & \rho_n(m+2)t(\pi_{m+1}\rho_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_1(m+n)t(\pi_{m+n-1}\rho_1) & \rho_2(m+n)t(\pi_{m+n-1}\rho_2) & \dots & \rho_n(m+n)t(\pi_{m+n-1}\rho_n) \end{pmatrix}$$

размера $n \times n$. Ее определитель $|M|$ представляет собой значение однородного многочлена степени n от попарно различных алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$ чисел $t(\pi_{m+j-1}\rho_i)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, причем коэффициенты этого многочлена рациональны и отличны от нуля, так как с точностью до знака они являются произведениями чисел вида $\rho_i(m+j) \in \mathbb{Q}_0$. Следовательно, $|M| \neq 0$. С другой стороны, система (4) означает равенство $Mx = 0$ для ненулевого вектора $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вопрос об эквивалентности условий (с) и (d) для векторных подпространств $Y \subseteq \mathbb{R}^N$ на данный момент остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В. Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах // Владикавк. мат. журн. 2015. Т. 17, № 3. С. 36–43.
2. Aliprantis C. D., Tourky R. Cones and duality. Providence, RI: American Mathematical Society, 2007.
3. Гутман А. Е., Емельяненко И. А. Локально выпуклые пространства, в которых все архимедовы конусы замкнуты // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 945–970.
4. Гутман А. Е., Емельяненко И. А. Квазиплотность в $\mathbb{R}^N$ и проективные параллелотопы // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 2. С. 258–276.

Поступила в редакцию 14 августа 2025 г.

После доработки 21 августа 2025 г.

Принята к публикации 25 сентября 2025 г.

Гутман Александр Ефимович (ORCID 0000-0003-2030-7459)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru

Емельяненко Иван Александрович (ORCID 0009-0002-0914-6412)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
i.emelianenkov@yandex.ru