Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2026. Том 67, № 1

УДК 517.98

СЛАБАЯ ЛАТЕРАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Е. Гутман, А. В. Коптев

Аннотация. Описана латеральная сходимость последовательностей в банаховых пространствах, снабженных слабой топологией.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.106

Ключевые слова: топологическое пространство, отделимость, сходящаяся последовательность, банахово пространство, слабая топология, сепарабельность.

В работе [1] было введено и исследовано понятие латеральной сходимости в топологическом пространстве и, в частности, показано, что латеральная сходимость последовательности обеспечивает существование непрерывных отображений (в том числе вектор-функций, сечений и гомоморфизмов банаховых расслоений), принимающих заранее заданные значения в точках этой последовательности. В связи с этим возникает задача описания латеральной сходимости в конкретных классах топологических пространств.

Латеральная сходимость подразумевает определенную отделимость членов последовательности друг от друга и от предельной точки. В регулярных топологических пространствах, имеющих счетный псевдохарактер (в частности, в метрических пространствах), латеральная сходимость описывается очень просто: сходящаяся последовательность сходится латерально тогда и только тогда, когда она сходится инъективно, т. е. когда ее члены отличны друг от друга и от предельной точки (см. [1, 1.15]). Менее очевидной задачей является описание латеральной сходимости в банаховых пространствах, снабженных слабой топологией, а также в замкнутых шарах таких пространств. Решению этой задачи посвящена настоящая заметка.

Основные результаты состоят в следующем. Пусть X_{w} и B_{w} — банахово пространство X и его замкнутый единичный шар, снабженные слабой топологией, а X'_{w} и B'_{w} — соответствующее топологически сопряженное пространство и его замкнутый единичный шар, снабженные слабой* топологией. Если пространство X сепарабельно, то в X'_{w} и B'_{w} латеральная сходимость равносильна инъективной сходимости (следствие 16). Если же X не сепарабельно, то в пространстве X'_{w} нет ни одной латерально сходящейся последовательности (теорема 18), а в шаре B'_{w} латеральная сходимость последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тесно связана со сходимостью $\|f_n\| \to 1$ (теоремы 17 и 23 и следствие 24). Справедливы также двойственные утверждения, описывающие латеральную сходимость последовательностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в X_{w} и B_{w} в связи с сепарабельностью X'_{w} и сходимостью $\|x_n\| \to 1$. Кроме того, приведены примеры, когда в пространствах B_{w} и B'_{w} отсутствуют латерально сходящиеся последовательности (теорема 25).

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2022–0004).

Определение 1 [1, § 1]. Пусть X — произвольное топологическое пространство.

Покрытием последовательности точек $x_n \in X$ называется произвольная последовательность множеств $U_n \subseteq X$, каждое из которых является окрестностью соответствующей точки x_n.

Последовательность множеств $U_n \subseteq X$ *латерально сходится* к точке $x \in X$, если

$$\operatorname{cl} U_m \cap \operatorname{cl} \bigcup_{n>m} U_n = \varnothing$$

для всех $m \in \mathbb{N}$ и, кроме того, x является единственной собственной предельной точкой объединения $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n$, т. е.

$$\Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n = \{x\}.$$

Последовательность точек $x_n \in X$ *латерально сходится* к точке $x \in X$, если $x_n \to x$ и последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ допускает покрытие, латерально сходящееся к x. Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *инъективно сходится* к x, если $x_n \to x$, $x_n \neq x_m$ при $n \neq m$ и, кроме того, $x_n \neq x$ для всех $n \in \mathbb{N}$. (Очевидно, всякая латерально сходящаяся последовательность сходится инъективно.)

Лемма 2 [1, 1.2]. *Пусть X — топологическое пространство. Последовательность множеств $U_n \subseteq X$ латерально сходится к точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:*

(a) $\operatorname{cl} U_m \cap \operatorname{cl} U_n = \varnothing$ *при* $m \neq n$;
(b) $x \in \operatorname{cl} \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n$;
(c) *если* $x \neq y \in X$, *то* $y \notin \operatorname{cl} \bigcup\limits_{n\geqslant m} U_n$ *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$.

Лемма 3 [1, 1.13]. *Пусть в регулярном топологическом пространстве последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ инъективно сходится к точке x и допускает покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, обладающее следующим свойством: для любой окрестности V точки x найдется такой номер $m \in \mathbb{N}$, что $U_n \subseteq V$ для всех $n \geqslant m$. Тогда $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к x.*

Определение 4. *Псевдохарактер* T_1-пространства X *в точке* $x \in X$ обозначается символом $\psi(x, X)$ и определяется как наименьшая среди мощностей $|\mathscr{U}|$ множеств $\mathscr{U}$, состоящих из открытых подмножеств X и удовлетворяющих равенству $\cap\mathscr{U} = \{x\}$:

$$\psi(x, X) := \min\{|\mathscr{U}| : \mathscr{U} \subseteq \mathit{Open}(X),\ \cap\mathscr{U} = \{x\}\}.$$

Псевдохарактером пространства X называется кардинал $\sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$.

Замечание 5. Очевидно, псевдохарактер пространства X счетен тогда и только тогда, когда X имеет счетный псевдохарактер в каждой точке. Примерами пространств, имеющих счетный псевдохарактер, служат пространства, удовлетворяющие первой аксиоме счетности. В частности, таковы все метрические пространства.

Предложение 6 [1, 1.15]. *Пусть X — регулярное топологическое пространство и $x \in X$. Если псевдохарактер $\psi(x, X)$ счетен, то всякая последовательность в X, инъективно сходящаяся к точке x, сходится латерально.*

Следствие 7. *В регулярном топологическом пространстве, имеющем счетный псевдохарактер, инъективная и латеральная сходимости последовательностей равносильны.*

Замечание 8. Как легко видеть, для любого хаусдорфова топологического векторного пространства X следующие утверждения равносильны:

(a) X имеет счетный псевдохарактер;

(b) X имеет счетный псевдохарактер в каждой точке;

(c) X имеет счетный псевдохарактер в некоторой точке;

(d) X имеет счетный псевдохарактер в нуле, т. е. $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\}$ для некоторой последовательности $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ окрестностей нуля в X.

Определение 9. Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство. (Все рассматриваемые здесь векторные пространства предполагаются вещественными.) Топологически сопряженное к X пространство (т. е. векторное пространство непрерывных линейных функционалов на X) обозначается символом X'. Символами X_{w} и X'_{w} условимся обозначать пространства X и X', снабженные слабой и слабой* топологиями $\sigma(X, X')$ и $\sigma(X', X)$ соответственно. Как известно, в локально выпуклых пространствах X_{w} и X'_{w} базовыми окрестностями произвольных точек $x \in X$ и $f \in X'$ соответственно служат множества вида $x + (X\langle f_1\rangle \cap \cdots \cap X\langle f_m\rangle)$ и $f + (X'\langle x_1\rangle \cap \cdots \cap X'\langle x_m\rangle)$, где $m \in \mathbb{N}$, $f_i \in X'$, $x_i \in X$. Здесь и ниже используются обозначения

$$X\langle f\rangle := \{x \in X : |f(x)| < 1\}, \quad X'\langle x\rangle := \{f \in X' : |f(x)| < 1\}$$

для $x \in X$ и $f \in X'$.

Определение 10. Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство.

(i) Как известно, следующие свойства подмножества $T \subseteq X$ равносильны:

  (a) линейная оболочка T плотна в X;

  (b) если $f \in X'$ и $f = 0$ на T, то $f = 0$ на X;

  (c) если $f, g \in X'$ и $f \neq g$, то $f(t) \neq g(t)$ для некоторого элемента $t \in T$.

(ii) Из (i) вытекает эквивалентность следующих свойств множества $F \subseteq X'_{\mathrm{w}}$:

  (a) линейная оболочка F плотна в X'_{w};

  (b) если $x \in X$ и $f(x) = 0$ для всех $f \in F$, то $x = 0$;

  (c) если $x, y \in X$ и $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$ для некоторого $f \in F$.

Подмножества $T \subseteq X$ и $F \subseteq X'_{\mathrm{w}}$, обладающие перечисленными выше эквивалентными свойствами, называют *тотальными* (а также фундаментальными или разделяющими, см. [2]).

Лемма 11. *Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство.*

(i) *Следующие утверждения равносильны:*

  (a) *X сепарабельно;*

  (b) *X_{w} сепарабельно;*

  (c) *X содержит счетное тотальное подмножество;*

  (d) *X_{w} содержит счетное тотальное подмножество;*

  (e) *X'_{w} имеет счетный псевдохарактер.*

Более того, если X не сепарабельно, то для любой последовательности $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ окрестностей нуля в X'_{w} пересечение $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ содержит ненулевое векторное подпространство.

(ii) *Следующие утверждения равносильны:*
(a) X'_{w} *сепарабельно;*
(b) X'_{w} *содержит счетное тотальное подмножество;*
(c) X_{w} *имеет счетный псевдохарактер.*

Более того, если X'_{w} не сепарабельно, то для любой последовательности $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ окрестностей нуля в X_{w} пересечение $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ содержит ненулевое векторное подпространство.

Доказательство. (i) Равносильность условий (a)–(d) хорошо известна и легко проверяется, например, с помощью аппроксимации произвольных линейных комбинаций посредством комбинаций с рациональными коэффициентами, а также с использованием того факта, что замыкание выпуклого множества не зависит от выбора топологии, согласованной с двойственностью.

(c)⇒(e). Если T — тотальное подмножество X, то для любого ненулевого функционала $f \in X'$ найдутся такие $t \in T$ и $n \in \mathbb{N}$, что $|f(nt)| \geqslant 1$, а значит,

$$\bigcap_{(t,n)\in T\times\mathbb{N}} X'\langle nt\rangle = \{0\}.$$

(e)⇒(c). Пусть $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность окрестностей нуля в X'_{w}. Каждое из множеств U_n содержит некоторую базовую окрестность

$$X'\big\langle x_1^n\big\rangle \cap \dots \cap X'\big\langle x_{m_n}^n\big\rangle,$$

где $m_n \in \mathbb{N}$, $x_i^n \in X$. Если счетное подмножество

$$T := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big\{x_1^n, \dots, x_{m_n}^n\big\} \subseteq X$$

не является тотальным, то найдется ненулевой функционал $f \in X'$, зануляющийся на T, и тогда

$$\{\lambda f : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X'\big\langle x_1^n\big\rangle \cap \dots \cap X'\big\langle x_{m_n}^n\big\rangle \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Утверждение (ii) непосредственно вытекает из (i). □

Определение 12. Всюду ниже X — произвольное вещественное банахово пространство, X' — сопряженное к X банахово пространство. Условимся использовать следующие обозначения:

$B := \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$;
$S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$;
B_{w} — шар B как топологическое подпространство X_{w};
$B(x,\varepsilon) := \{y \in B : \|x-y\| < \varepsilon\}$ для $x \in B$ и $\varepsilon > 0$;
$B\langle x,f\rangle := (x + X\langle f\rangle) \cap B = \{y \in B : |f(x-y)| < 1\}$ для $x \in B$ и $f \in X'$

и аналогично

$B' := \{f \in X' : \|f\| \leqslant 1\}$;
$S' := \{f \in X' : \|f\| = 1\}$;
B'_{w} — шар B' как топологическое подпространство X'_{w};
$B'(f,\varepsilon) := \{g \in B' : \|f-g\| < \varepsilon\}$ для $f \in B'$ и $\varepsilon > 0$;
$B'\langle f,x\rangle := (f + X'\langle x\rangle) \cap B' = \{g \in B' : |f(x)-g(x)| < 1\}$ для $f \in B'$ и $x \in X$.

С использованием введенных обозначений базовые окрестности произвольных точек $x \in B$ и $f \in B'$ в топологических пространствах B_{w} и B'_{w} соответственно приобретают вид $B\langle x,f_1\rangle \cap \dots \cap B\langle x,f_m\rangle$ и $B'\langle f,x_1\rangle \cap \dots \cap B'\langle f,x_m\rangle$, где $m \in \mathbb{N}$, $f_i \in X'$, $x_i \in X$.

Лемма 13. *Пусть X — банахово пространство.*

(i) *Если X не сепарабельно и $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — покрытие последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в X'_{w}, то для любого $\lambda \geqslant 0$ существует такой функционал $g \in X'$, что $\|g\| = \lambda$ и $f_n + g \in U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Если X'_{w} не сепарабельно и $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — покрытие последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в X_{w}, то для любого $\lambda \geqslant 0$ существует такой элемент $y \in X$, что $\|y\| = \lambda$ и $x_n + y \in U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. (i) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ разность $U_n - f_n$ является окрестностью нуля в X'_{w}. Согласно лемме 11(i) пересечение

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (U_n - f_n)$$

содержит ненулевое векторное подпространство, в котором, очевидно, имеется искомый элемент g.

Утверждение (ii) доказывается аналогично (i) с привлечением леммы 11(ii) вместо 11(i). $\square$

Лемма 14. *Пусть X — банахово пространство.*

(i) *Следующие утверждения равносильны:*
  (a) *X сепарабельно;*
  (b) *B'_{w} имеет счетный псевдохарактер;*
  (c) *B'_{w} имеет счетный псевдохарактер в некоторой точке $B' \setminus S'$.*

(ii) *Следующие утверждения равносильны:*
  (a) *X'_{w} сепарабельно;*
  (b) *B_{w} имеет счетный псевдохарактер;*
  (c) *B_{w} имеет счетный псевдохарактер в некоторой точке $B \setminus S$.*

Доказательство. (i) Импликации (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c) тривиальны с учетом леммы 11(i).

(c)$\Rightarrow$(a). Допустим, X не сепарабельно. Рассмотрим произвольную точку $f \in B' \setminus S'$ и последовательность ее окрестностей U_n в B'_{w} и покажем, что

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \{f\}.$$

Каждое из множеств U_n имеет вид $V_n \cap B'$, где V_n — окрестность f в X'_{w}. Согласно лемме 13(i) существует такой функционал $g \in X'$, что $\|g\| = 1 - \|f\|$ и $f + g \in V_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f + g \in B'$ и таким образом

$$f \neq f + g \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \cap B' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Утверждение (ii) доказывается аналогично (i) с привлечением лемм 11(ii) и 13(ii) вместо 11(i) и 13(i). $\square$

Замечание 15. Условия (a)–(c) леммы 14(ii) выполняются, если, например, банахово пространство X сепарабельно или является сопряженным к сепарабельному банахову пространству (см. [3, 3.1.5]).

Приведенное ниже утверждение вытекает из следствия 7 и лемм 11 и 14.

Следствие 16. *Пусть X — банахово пространство.*

(i) *Если X сепарабельно, то в пространствах X'_{w} и B'_{w} инъективная и латеральная сходимости последовательностей равносильны.*

(ii) *Если X'_{w} сепарабельно, то в пространствах X_{w} и B_{w} инъективная и латеральная сходимости последовательностей равносильны.*

Теорема 17. *Пусть X — банахово пространство.*

(i) *Если X не сепарабельно и $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — латерально сходящаяся последовательность в B'_{w}, то $\|f_n\|\to 1$ при $n\to\infty$.*

(ii) *Если X'_{w} не сепарабельно и $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — латерально сходящаяся последовательность в B_{w}, то $\|x_n\|\to 1$ при $n\to\infty$.*

Доказательство. (i) Пусть X не сепарабельно, пусть $f_n\to f$ в B'_{w}, и пусть $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — латерально сходящееся к f покрытие последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в B'_{w}. Предположим вопреки доказываемому, что существуют бесконечное множество $I\subseteq\mathbb{N}$ и число $0<\lambda<1$ такие, что $\|f_i\|\leqslant\lambda$ для всех $i\in I$.

Каждое из множеств U_i имеет вид $V_i\cap B'$, где V_i — окрестность f_i в X'_{w}. Согласно лемме 13 (i) имеется такой функционал $g\in X'$, что $\|g\|=1-\lambda$ и $f_i+g\in V_i$ для всех $i\in I$. Из соотношений

$$\|f_i+g\|\leqslant\|f_i\|+\|g\|\leqslant\lambda+(1-\lambda)=1$$

следует, что $f_i+g\in V_i\cap B'=U_i$ для всех $i\in I$. В частности, для каждого $m\in\mathbb{N}$

$$f_i+g\in U_i\ \subseteq\bigcup_{n\in I,\,n\geqslant m}U_n\subseteq\bigcup_{n\geqslant m}U_n\quad\text{для всех } i\in I,\ i\geqslant m.$$

Кроме того, из сходимости $f_i+g\xrightarrow[i\in I]{}f+g$ в X'_{w} и замкнутости B' в X'_{w} следует включение $f+g\in B'$. Таким образом, в топологическом пространстве B'_{w} имеет место соотношение

$$f\neq f+g\in\operatorname{cl}\bigcup_{n\geqslant m}U_n\quad\text{для всех } m\in\mathbb{N},$$

что противоречит условию (c) леммы 2.

Утверждение (ii) доказывается аналогично (i) с привлечением леммы 13 (ii) вместо 13 (i). □

Теорема 18. *Пусть X — ненулевое банахово пространство.*

(i) *Следующие утверждения равносильны:*
  - (a) *X сепарабельно;*
  - (b) *в X'_{w} инъективная и латеральная сходимость равносильны;*
  - (c) *в X'_{w} существует латерально сходящаяся последовательность.*

(ii) *Следующие утверждения равносильны:*
  - (a) *X'_{w} сепарабельно;*
  - (b) *в X_{w} инъективная и латеральная сходимость равносильны;*
  - (c) *в X_{w} существует латерально сходящаяся последовательность.*

Доказательство. (i) Импликация (a)⇒(b) содержится в следствии 16.

Импликация (b)⇒(c) тривиальна: например, для любого ненулевого функционала $f\in X'$ имеет место инъективная сходимость $\frac{1}{n}f\to 0$ в X'_{w}, которая благодаря условию (b) является латеральной.

(c)⇒(a). Рассмотрим латерально сходящуюся последовательность $g_n\to g$ в X'_{w} и предположим вопреки доказываемому, что X не сепарабельно. Из слабой* сходимости $g_n\to g$ следует наличие такого числа $\lambda>0$, что $\|g\|\leqslant\lambda$ и $\|g_n\|\leqslant\lambda$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Положим $f_n:=\frac{1}{2\lambda}g_n$ и $f:=\frac{1}{2\lambda}g$. Очевидно, последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к f в X'_{w}, причем члены этой последовательности и ее предел лежат в B'_{w}. Следовательно, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится в B'_{w} (см. [1, 1.10 (b)]). Согласно теореме 17 (i) отсюда вытекает сходимость $\|f_n\|\to 1$, противоречащая соотношениям $\|f_n\|=\frac{1}{2\lambda}\|g_n\|\leqslant\frac{1}{2\lambda}\lambda=\frac{1}{2}$.

Утверждение (ii) доказывается аналогично (i) с привлечением теоремы 17 (ii) вместо 17 (i). □

Определение 19. Напомним несколько классических определений и фактов о выпуклых и гладких пространствах (см., например, [4, гл. II; 5, ч. 3]).

Банахово пространство X называется

(a) *строго выпуклым*, если для любых $x, y \in X$
$$\|x\| = \|y\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1 \;\Rightarrow\; x = y;$$

(b) *равномерно выпуклым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x, y \in X$
$$\|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| \geqslant \varepsilon \;\Rightarrow\; \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1-\delta;$$

(c) *гладким*, если для любого ненулевого элемента $x \in X$ существует единственный функционал $f \in X'$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$;

(d) *равномерно гладким*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x, y \in X$
$$\|x\| = 1,\ \|y\| \leqslant \delta \;\Rightarrow\; \|x+y\| + \|x-y\| \leqslant 2 + \varepsilon\|y\|.$$

Классическими примерами пространств, обладающих свойствами (a)–(d), служат гильбертовы пространства, а также пространства вида L^p, где $1 < p < \infty$.

Замечание 20 (см. [4, гл. II; 5, ч. 3]).

(a) Всякое равномерно выпуклое пространство является строго выпуклым, а всякое равномерно гладкое пространство является гладким.

(b) Гладкость X' влечет строгую выпуклость X, а строгая выпуклость X' влечет гладкость X.

(c) Равномерная выпуклость X равносильна равномерной гладкости X', а равномерная гладкость X равносильна равномерной выпуклости X'.

(d) Все равномерно выпуклые и все равномерно гладкие банаховы пространства рефлексивны.

Лемма 21. *Пусть X — банахово пространство.*

(i) *Если X' строго выпукло, то B'_{w} имеет счетный псевдохарактер в каждой точке S'.*

(ii) *Если X строго выпукло, то B_{w} имеет счетный псевдохарактер в каждой точке S.*

Доказательство. (i) Пусть X' строго выпукло, и пусть $f \in S'$. Поскольку $\|f\| = 1$, имеется последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов B, для которой $f(x_n) \to 1$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B'\langle f, nx_n\rangle = \{f\}$. Для этого рассмотрим произвольный элемент $g \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B'\langle f, nx_n\rangle$ и установим равенство $f = g$. Действительно, для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $|g(x_n) - f(x_n)| < \frac{1}{n}$, откуда
$$1 \geqslant \|g\| \geqslant g(x_n) = f(x_n) + g(x_n) - f(x_n) > f(x_n) - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$
$$1 \geqslant \left\|\frac{f+g}{2}\right\| \geqslant \frac{f+g}{2}(x_n) = f(x_n) + \frac{g(x_n)-f(x_n)}{2} > f(x_n) - \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$
а значит, $f = g$ в силу строгой выпуклости X'.

(ii) Доказательство можно провести по той же схеме, что и для (i). При этом возникающие аргументы более элементарны: если X строго выпукло, то счетность псевдохарактера B_{w} в точке $x \in S$ обеспечивается равенством $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B\langle x, nf\rangle = \{x\}$, где f — такой функционал, что $f(x) = \|f\| = 1$. $\square$

Следствие 22. *Пусть X — банахово пространство.*

(i) *Если X' строго выпукло, то в B'_{w} инъективная и латеральная сходимость последовательности к элементу S' равносильны.*

(ii) *Если X строго выпукло, то в B_{w} инъективная и латеральная сходимость последовательности к элементу S равносильны.*

Теорема 23. *Пусть X — банахово пространство.*

(i) *Пусть X — равномерно гладкое пространство, пусть последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ инъективно сходится к f в B'_{w}, и пусть $\|f_n\| \to 1$ при $n\to\infty$. Тогда $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к f в B'_{w}.*

(ii) *Пусть X — равномерно выпуклое пространство, пусть последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ инъективно сходится к x в B_{w}, и пусть $\|x_n\| \to 1$ при $n\to\infty$. Тогда $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к x в B_{w}.*

Доказательство. (i) Пусть выполнены условия утверждения (i). Можно считать, что $\dim X' > 1$ и $f_n \neq 0$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Поскольку пространство X' равномерно выпукло (см. замечание 20(c)), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $g, h \in X'$

$$\|g\| = \|h\| = 1, \quad \left\|\frac{g+h}{2}\right\| > 1-\delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; \|g-h\| < \varepsilon. \tag{1}$$

Покажем, что для всех $x\in X$ и $g,h\in X'$

$$\|x\| = \|g\| = g(x) = 1, \quad \|h\| \leqslant 1, \quad |h(x)-1| < \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; \|g-h\| < \varepsilon. \tag{2}$$

Действительно, пусть $\|x\| = \|g\| = g(x) = 1$ и $|h(x)-1| < \delta(\varepsilon)$. В случае $\|h\| = 1$ имеем

$$\left\|\frac{g+h}{2}\right\| \geqslant \frac{g+h}{2}(x) = 1 + \frac{1}{2}(h(x)-1) > 1 - \frac{\delta(\varepsilon)}{2} > 1-\delta(\varepsilon),$$

откуда следует $\|g-h\| < \varepsilon$ в силу (1). Пусть теперь $\|h\| < 1$. Рассмотрим ненулевой функционал $z \in X'$, принимающий значение $z(x) = 0$, и положим $h_\lambda := h + \lambda z$ для $\lambda\in\mathbb{R}$. Очевидно, имеются такие числа $\lambda < 0 < \mu$, что $\|h_\lambda\| = \|h_\mu\| = 1$. Поскольку $h_\lambda(x) = h_\mu(x) = h(x)$ и соотношение (2) доказано для функционалов h единичной нормы, имеем

$$\|g-h_\lambda\| < \varepsilon, \quad \|g-h_\mu\| < \varepsilon,$$

а значит, $\|g-h\| < \varepsilon$, так как h принадлежит отрезку $[h_\lambda, h_\mu]$.

Поскольку пространство X рефлексивно (см. замечание 20(d)), по теореме Джеймса имеется последовательность таких элементов $x_n\in S$, что $f_n(x_n) = \|f_n\|$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Благодаря сходимости $\|f_n\|\to 1$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, что при $n \geqslant N(\varepsilon)$

$$\frac{1}{n} + \bigl|\|f_n\| - 1\bigr| < \delta(\varepsilon), \tag{3}$$

$$\bigl|\|f_n\| - 1\bigr| < \varepsilon. \tag{4}$$

Покажем, что для любых $\varepsilon > 0$, $n \geqslant N(\varepsilon)$ и $h\in X'$

$$\|h\| \leqslant 1, \quad |h(x_n) - f_n(x_n)| < \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \|f_n - h\| < 2\varepsilon. \tag{5}$$

Действительно, если $n \geqslant N(\varepsilon)$, $\|h\| \leqslant 1$ и $|h(x_n) - f_n(x_n)| < \frac{1}{n}$, то согласно неравенству (3) имеем

$$|h(x_n) - 1| \leqslant |h(x_n) - f_n(x_n)| + |f_n(x_n) - 1| < \frac{1}{n} + \bigl|\|f_n\| - 1\bigr| < \delta(\varepsilon). \tag{6}$$

Положим $g_n := f_n/\|f_n\|$. Тогда $\|x_n\| = \|g_n\| = g_n(x_n) = 1$, откуда с учетом (2) и (6) вытекает неравенство $\|g_n - h\| < \varepsilon$. Привлекая (4), заключаем, что

$$\begin{aligned}\|f_n - h\| \leqslant \|f_n - g_n\| + \|g_n - h\| &< \left\|f_n - \frac{f_n}{\|f_n\|}\right\| + \varepsilon \\ &= \left\|\bigl(\|f_n\| - 1\bigr)\frac{f_n}{\|f_n\|}\right\| + \varepsilon = \bigl|\|f_n\| - 1\bigr| + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Согласно лемме 3 для обоснования латеральной сходимости $f_n \to f$ в B'_{w} достаточно показать, что для любой окрестности V точки f в B'_{w} имеет место включение $B'\langle f_n, nx_n\rangle \subseteq V$ при больших n. С учетом структуры базовых окрестностей в B'_{w} (см. определение 12) для этого, в свою очередь, достаточно фиксировать произвольный ненулевой элемент $x \in X$ и для больших n установить включение

$$B'\langle f_n, nx_n\rangle \subseteq B'\langle f, x\rangle. \tag{7}$$

Благодаря слабой сходимости $f_n \to f$ имеется такой номер $M \in \mathbb{N}$, что

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2}$$

при $n \geqslant M$. Покажем, что (7) выполняется для

$$n \geqslant \max\Bigl\{N\Bigl(\frac{1}{4\|x\|}\Bigr), M\Bigr\}.$$

Действительно, если $h \in B'\langle f_n, nx_n\rangle$, т. е. $\|h\| \leqslant 1$ и $|h(x_n) - f_n(x_n)| < \frac{1}{n}$, то согласно (5) имеем $\|f_n - h\| < \frac{1}{2\|x\|}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}|f(x) - h(x)| &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - h(x)| \\ &< \frac{1}{2} + \|f_n - h\|\,\|x\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\|x\|}\,\|x\| = 1,\end{aligned}$$

т. е. $h \in B'\langle f, x\rangle$.

(ii) Равномерно выпуклое пространство X рефлексивно, а сопряженное к нему пространство X' является равномерно гладким (см. замечание 20(c),(d)). Эти наблюдения позволяют отождествить B_{w} с единичным шаром во втором сопряженном пространстве X'', наделенном слабой* топологией, и воспользоваться утверждением (i). $\square$

Следствие 24. (i) *Пусть X — несепарабельное равномерно гладкое банахово пространство. В пространстве B'_{w} последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к f тогда и только тогда, когда $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ инъективно сходится к f и $\|f_n\| \to 1$ при $n \to \infty$.*

(ii) *Пусть X — несепарабельное равномерно выпуклое банахово пространство. В пространстве B_{w} последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к x тогда и только тогда, когда $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ инъективно сходится к x и $\|x_n\| \to 1$ при $n \to \infty$.*

Теорема 25. (i) *Существует ненулевое банахово пространство X такое, что B'_{w} не содержит ни одной латерально сходящейся последовательности.*

(ii) *Существует ненулевое банахово пространство X такое, что B_{w} не содержит ни одной латерально сходящейся последовательности.*

Доказательство. (i) Рассмотрим несчетное множество I и классические банаховы пространства $X := \ell^1(I)$ и $\ell^\infty(I)$, состоящие соответственно из суммируемых функций $x : I \to \mathbb{R}$ и ограниченных функций $f : I \to \mathbb{R}$ с нормами

$$\|x\|_1 = \sum_{i \in I} |x(i)|, \quad \|f\|_\infty = \sup_{i \in I} |f(i)|.$$

Как известно, отображение $f \mapsto \widehat{f}$, сопоставляющее каждой функции $f \in \ell^\infty(I)$ функционал

$$\widehat{f} : x \mapsto \sum_{i \in I} x(i) f(i),$$

осуществляет линейную изометрию $\ell^\infty(I)$ на X'.

Допустим, имеются такие $f_n \in \ell^\infty(I)$ $(n \in \mathbb{N})$ и $f \in \ell^\infty(I)$, что последовательность $(\widehat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ допускает латерально сходящееся к $\widehat{f}$ покрытие $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в B'_{w}.

Каждое из множеств U_n содержит некоторую базовую окрестность

$$B'\big\langle \widehat{f}_n, x_1^n \big\rangle \cap \dots \cap B'\big\langle \widehat{f}_n, x_{m_n}^n \big\rangle,$$

где $m_n \in \mathbb{N}$, $x_k^n \in X$. Поскольку всякая функция $x \in \ell^1(I)$ имеет счетный носитель $\operatorname{supp} x := \{i \in I : x(i) \neq 0\}$, все x_k^n зануляются вне счетного подмножества

$$I_0 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=1}^{m_n} \operatorname{supp} x_k^n \subseteq I.$$

Как легко видеть, для каждого $n \in \mathbb{N}$ в множество U_n попадает любой функционал $\widehat{g}$, соответствующий такой функции $g \in \ell^\infty(I)$, что $\|g\|_\infty \leqslant 1$ и $g = f_n$ на I_0.

Зафиксируем элемент $j \in I \setminus I_0$ и отличное от $f(j)$ число $\lambda \in [-1, 1]$. Обозначим символом e_j характеристическую функцию синглетона $\{j\} \subseteq I$ и определим функции $g, g_n \in \ell^\infty(I)$, полагая

$$g := f + (\lambda - f(j))\, e_j, \quad g_n := f_n + (\lambda - f_n(j))\, e_j.$$

Ясно, что $\|g_n\|_\infty \leqslant 1$ и $g_n = f_n$ на $I \setminus \{j\} \supseteq I_0$. Следовательно, $\widehat{g}_n \in U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, в B'_{w} имеет место сходимость

$$\widehat{g}_n = \widehat{f}_n + (\lambda - f_n(j))\, \widehat{e}_j \to \widehat{f} + (\lambda - f(j))\, \widehat{e}_j = \widehat{g}$$

при $n \to \infty$. Таким образом,

$$\widehat{f} \neq \widehat{g} \in \operatorname{cl} \bigcup_{n \geqslant m} U_n$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, что противоречит условию (c) леммы 2.

(ii) Соответствующим примером служит снабженное равномерной нормой пространство $X := c_0(I)$, состоящее из вещественных функций, определенных на несчетном множестве I и стремящихся к нулю на бесконечности, т. е. таких функций $x : I \to \mathbb{R}$, что множество $\{i \in I : |x(i)| > \varepsilon\}$ конечно для любого $\varepsilon > 0$. Доказательство можно получить, повторив выкладки (i) применительно к $c_0(I)$ вместо $\ell^\infty(I)$ и используя линейную изометричность банаховых пространств $c_0(I)'$ и $\ell^1(I)$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Латеральная сходимость и гомоморфизмы банаховых расслоений // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 2. С. 188–203.
2. *Wilansky A.* Modern methods in topological vector spaces. New York: McGraw-Hill, 1978.
3. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Сопряженные банаховы расслоения // Нестандартный анализ и векторные решетки, изд. 2-е. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005. С. 125–201.
4. *Diestel J.* Geometry of Banach spaces – Selected topics. Berlin etc.: Springer, 1975.
5. *Beauzamy B.* Introduction to Banach spaces and their geometry. Amsterdam etc.: North-Holland, 1982.

Поступила в редакцию 7 октября 2025 г.
После доработки 24 ноября 2025 г.
Принята к публикации 30 ноября 2025 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru

Коптев Александр Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
koptev@math.nsc.ru