Сибирский математический журнал
Июль—август, 2026. Том 67, № 4

УДК 519.682.1+519.683+519.7+519.1

ОБЪЕКТНО–ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ДАННЫЕ И ПРЕФИКСНАЯ ПЕРЕЗАПИСЬ. ЧАСТЬ II: ЭФФЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРЕЗАПИСИ

А. Е. Гутман

Аннотация. Для произвольной детерминированной префиксной перезаписывающей системы получен критерий бесконечной перезаписываемости слова, на основе которого разработана алгоритмическая процедура анализа последовательности перезаписи.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.404

Ключевые слова: префиксная перезапись, полутуэвская система, информационная система, объектно-ориентированная система данных, лемма о накачке.

Введение

Эта статья является частью запланированной серии публикаций, реализующих анонсированное в [1] систематическое исследование префиксной перезаписи как инструмента для представления и анализа объектно-ориентированных систем данных.

В обзоре [1] центральным предметом исследования является детерминированная префиксная перезаписывающая система $\langle \to, \omega \rangle$, где действующая на множестве слов функция перезаписи $\to$ рассматривается в паре с некоторой выделенной буквой ω, называемой первичным объектом. Интерпретация соотношений $X \to A$ и $XY \to B$ как «X is A» и соответственно «the Y of X is B» позволяет использовать перезапись префиксов для определения и анализа понятий, характерных для объектно-ориентированных систем данных — таких как наследование классов и объектов, экземпляры классов, атрибуты классов и экземпляров, концептуальная зависимость и непротиворечивость, концептуальная схема, типы, подтипы и др. Поскольку настоящая работа затрагивает лишь те аспекты префиксной перезаписи, в которых первичный объект ω не участвует, рассмотрение ограничивается функцией перезаписи.

Материал статьи сгруппирован в трех параграфах. Параграф 1 содержит основные определения и обозначения, касающиеся функции перезаписи префиксов, в параграфе 2 приведены некоторые вспомогательные утверждения, а основной параграф 3 включает критерий бесконечной перезаписываемости слова, алгоритм поиска слова в последовательности перезаписи и эффективную процедуру проверки конечной перезаписываемости всех слов.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2026–0022).

© **2026 Гутман А. Е.**

§ 1. Определения и обозначения

1.1. На протяжении всей статьи $\mathbb{A}$ — непустой конечный алфавит, $\mathbb{A}^*$ (соответственно, $\mathbb{A}^+$) — множество всех (соответственно, всех непустых) слов над $\mathbb{A}$. Элементы $\mathbb{A}$ называются *буквами*. Буквы традиционно отождествляются с соответствующими однобуквенными словами. Длина слова X обозначается через $|X|$. Для $X \in \mathbb{A}^+$ и $n \geqslant 0$ символом X^n обозначается соединение $XX\cdots X$, составленное из n вхождений слова X; при этом X^0 полагается равным пустому слову $\varnothing$.

Для краткости будем в дальнейшем говорить «*слово*» вместо «непустое слово над $\mathbb{A}$».

Символ $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots\}$. Упорядоченные кортежи и последовательности условимся записывать с использованием угловых скобок: $\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2. Слово X будем называть *префиксом* слова $Y \in \mathbb{A}^+$ и писать $X \sqsubseteq Y$, если $X \in \mathbb{A}^+$ и $Y = XS$ для некоторого $S \in \mathbb{A}^*$. Суффикс S слова $Y = XS$, определяемый префиксом $X \sqsubseteq Y$, условимся обозначать символом $\frac{Y}{X}$. Таким образом,

$$X\tfrac{Y}{X} = Y \quad \text{для любых } X, Y \in \mathbb{A}^+,\ X \sqsubseteq Y;$$
$$\tfrac{XS}{X} = S \quad \text{для любых } X \in \mathbb{A}^+,\ S \in \mathbb{A}^*.$$

Если $n \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{A}^+$ и $|X| \geqslant n$, то символом $X\restriction_n$ обозначается префикс слова X, имеющий длину n.

1.3. *Функцией перезаписи* назовем произвольную функцию $\to$, определенную на некотором конечном непустом подмножестве $\mathbb{A}^+$ и действующую в $\mathbb{A}^+$. Функцию $\to$ условимся считать бинарным отношением на $\mathbb{A}^+$ (т. е. подмножеством $\to \subseteq \mathbb{A}^+ \times \mathbb{A}^+$) и использовать инфиксную запись $X \to Y$ вместо принадлежности $\langle X, Y\rangle \in \to$ или равенства $\to(X) = Y$.

В дальнейшем, давая определения и формулируя утверждения, по умолчанию считаем фиксированной произвольную функцию перезаписи $\to$, относительно которой интерпретируются вводимые понятия, а также используемые термины и обозначения.

1.4. Обозначим символом $\mathbb{E}$ непустое конечное подмножество $\mathbb{A}^+$, являющееся областью определения функции перезаписи $\to$. Элементы множества $\mathbb{E}$ условимся называть *явными словами*. Будем говорить, что слово E является *явным префиксом* слова X, если $E \sqsubseteq X$ и $E \in \mathbb{E}$. Слово $S \in \mathbb{A}^+$ назовем *явным дополнением* слова X, если $XS \in \mathbb{E}$. Кроме того, определим число μ как длину самого длинного явного слова:

$$\mu := \max\{|E| :\ E \in \mathbb{E}\}.$$

1.5. Значение функции $\to$ на явном слове $E \in \mathbb{E}$ будем обозначать символом E' и называть *явной перезаписью* слова E. Таким образом,

$$E \to E'$$

для всех $E \in \mathbb{E}$. Слово X назовем *перезаписываемым*, если X имеет хотя бы один явный префикс. Для перезаписываемого слова X рассмотрим его самый длинный явный префикс E, определим соответствующий суффикс $S \in \mathbb{A}^*$, для которого $X = ES$, и введем обозначение

$$X' := E'S.$$

Слово X' назовем *перезаписью* слова X. Самый длинный явный префикс перезаписываемого слова X условимся обозначать символом $\mathrm{lep}(X)$. Таким образом, если $E = \mathrm{lep}(X)$, то с учетом обозначений, введенных в 1.2, имеем

$$\bigl(E\tfrac{X}{E}\bigr)' = E'\tfrac{X}{E}.$$

1.6. Введем в рассмотрение бинарное отношение $\Rightarrow$ на $\mathbb{A}^+$, полагая

$$X \Rightarrow Y \text{ тогда и только тогда, когда } X \text{ перезаписываемо и } X' = Y.$$

Символами $\overset{*}{\Rightarrow}$ и $\overset{+}{\Rightarrow}$ обозначим соответственно рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\Rightarrow$ и транзитивное замыкание отношения $\Rightarrow$. Таким образом, запись $x \overset{*}{\Rightarrow} y$ (соответственно, $x \overset{+}{\Rightarrow} y$) означает, что

$$x = z_0 \Rightarrow z_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow z_n = y$$

для некоторых $z_1, \ldots, z_n$, где $n \geqslant 0$ (соответственно, $n \geqslant 1$). В частности, соотношение $x \overset{*}{\Rightarrow} y$ справедливо тогда и только тогда, когда $x = y$ или $x \overset{+}{\Rightarrow} y$.

1.7. Для всех целых $n \geqslant 0$ определим множества $\mathbb{W}_n$ n-кратно перезаписываемых слов и n-е перезаписи $X^{(n)}$ слов $X \in \mathbb{W}_n$ посредством следующей совместной рекурсии:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{W}_0 := \mathbb{A}^+,\\
&X^{(0)} := X \text{ для } X \in \mathbb{W}_0;\\
&\mathbb{W}_n := \{X \in \mathbb{W}_{n-1} : X^{(n-1)} \text{ перезаписываемо}\},\ n \geqslant 1,\\
&X^{(n)} := (X^{(n-1)})' \text{ для } X \in \mathbb{W}_n,\ n \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Положим

$$\mathbb{W}_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{W}_n, \quad \mathbb{W}_{\mathrm{fin}} := \mathbb{A}^+ \setminus \mathbb{W}_\infty.$$

Слово $X^{(n)}$ назовем *n-й перезаписью* слова X. Таким образом, $\mathbb{W}_n$ представляет собой совокупность всех слов X, допускающих n-кратную перезапись, и для каждого слова $X \in \mathbb{W}_n$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&X = X^{(0)} \Rightarrow X^{(1)} \Rightarrow \cdots \Rightarrow X^{(n)};\\
&X \overset{*}{\Rightarrow} X^{(n)} \text{ при } n \geqslant 0,\\
&X \overset{+}{\Rightarrow} X^{(n)} \text{ при } n > 0.
\end{aligned}$$

Имеет место цепь включений

$$\mathbb{W}_0 \supseteq \mathbb{W}_1 \supseteq \mathbb{W}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{W}_n \supseteq \mathbb{W}_{n+1} \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{W}_\infty.$$

Слова, принадлежащие множеству $\mathbb{W}_\infty$, назовем *бесконечно перезаписываемыми*, а остальные слова, т. е. элементы множества $\mathbb{W}_{\mathrm{fin}}$, — *конечно перезаписываемыми*. Для данного слова X максимальную (конечную или бесконечную) последовательность вида

$$\langle X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots \rangle$$

будем называть *последовательностью перезаписи* слова X. Таким образом, слово X конечно (бесконечно) перезаписываемо тогда и только тогда, когда последовательность перезаписи слова X конечна (бесконечна).

§ 2. Вспомогательные утверждения

2.1. Предложение. *Пусть $X \in \mathbb{A}^+$, $S \in \mathbb{A}^*$ и $\alpha \in \mathbb{A}$.*
(1) *Если $X\alpha \notin \mathbb{E}$ и $X\alpha \in \mathbb{W}_1$, то $X \in \mathbb{W}_1$ и $(X\alpha)' = X'\alpha$.*
(2) *Если X не имеет явных дополнений и $XS \in \mathbb{W}_1$, то $X \in \mathbb{W}_1$ и $(XS)' = X'S$.*
(3) *Если $|X| \geqslant \mu$ и $XS \in \mathbb{W}_1$, то $X \in \mathbb{W}_1$ и $(XS)' = X'S$.*

Доказательство. Положим $S := \alpha$ в случае (1). В каждом из случаев (1) и (2) — когда $X\alpha \notin \mathbb{E}$ или когда X не имеет явных дополнений — выполняется следующее условие: всякий явный префикс $E \sqsubseteq XS$ является префиксом слова X и, в частности, удовлетворяет равенству

$$\tfrac{XS}{E} = \tfrac{X}{E}S.$$

Предположим теперь, что $XS \in \mathbb{W}_1$, и рассмотрим $E := \mathrm{lep}(XS)$. Тогда E является префиксом X, а значит, $E = \mathrm{lep}(X)$. Следовательно, $X \in \mathbb{W}_1$ и

$$(XS)' = \bigl(E\tfrac{XS}{E}\bigr)' = E'\tfrac{XS}{E} = E'\tfrac{X}{E}S = \bigl(E\tfrac{X}{E}\bigr)'S = X'S.$$

Утверждение (3) вытекает из (2), поскольку в случае $|X| \geqslant \mu$ слово X не имеет явных дополнений. □

2.2. Замечание. Всякое слово, имеющее перезаписываемый префикс, само является перезаписываемым. В частности, в условиях каждого из утверждений предложения 2.1 включения $X \in \mathbb{W}_1$ и $XS \in \mathbb{W}_1$ равносильны.

2.3. Лемма. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{W}_r$, $\bigl|X^{(1)}\bigr|, \ldots, \bigl|X^{(r)}\bigr| \geqslant |X|$ и пусть $Y \in \mathbb{A}^+$ и $S \in \mathbb{A}^*$ таковы, что $X = YS$ и $|Y| \geqslant \mu$. Тогда*

$$Y \in \mathbb{W}_i,\ X^{(i)} = Y^{(i)}S \ \text{ и } \ \bigl|Y^{(i)}\bigr| \geqslant \mu \qquad (\mathrm{C}_i)$$

для всех $i = 0, \ldots, r$.

Доказательство. Покажем справедливость (C_i) для всех $i = 0, \ldots, r$, воспользовавшись индукцией по i. Утверждение (C_0) справедливо по условию леммы. Предположим, что (C_i) справедливо для некоторого $0 \leqslant i < r$, и установим (C_{i+1}). Действительно, применяя предложение 2.1(3) для $Y^{(i)}$ в роли X, заключаем, что $Y^{(i)} \in \mathbb{W}_1$ (т. е. $Y \in \mathbb{W}_{i+1}$) и

$$X^{(i+1)} = (X^{(i)})' = (Y^{(i)}S)' = (Y^{(i)})'S = Y^{(i+1)}S.$$

Из полученного равенства следует, что

$$\bigl|Y^{(i+1)}\bigr| + |S| = \bigl|Y^{(i+1)}S\bigr| = \bigl|X^{(i+1)}\bigr| \geqslant |X| = |YS| = |Y| + |S| \geqslant \mu + |S|,$$

а значит, $\bigl|Y^{(i+1)}\bigr| \geqslant \mu$. □

2.4. Лемма. *Для всякой последовательности натуральных чисел $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\langle n_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ такая, что для любых $n, i \in \mathbb{N}$ из $n \geqslant n_i$ следует $x_n \geqslant x_{n_i}$.*

Доказательство. Последовательность $\langle n_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ можно определить рекурсивно, выбрав n_1 так, чтобы $x_{n_1} = \min\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, и затем для каждого $i \in \mathbb{N}$ выбирая $n_{i+1} > n_i$ так, чтобы $x_{n_{i+1}} = \min\{x_n : n > n_i\}$. □

§ 3. Основные результаты

3.1. Следующее утверждение анонсировано в [1, теорема 5.1].

Теорема. *Слово X является бесконечно перезаписываемым тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух взаимоисключающих условий:*

(a) *существуют целые числа $n \geqslant 0$ и $r > 0$ такие, что $X^{(n)} = X^{(n+r)}$;*

(b) *существуют целые числа $n \geqslant 0$ и $r > 0$ такие, что*

$$\mu \leqslant \bigl|X^{(n)}\bigr| \leqslant \bigl|X^{(n+1)}\bigr|, \ldots, \bigl|X^{(n+r)}\bigr|,$$
$$X^{(n)} \neq X^{(n+r)}, \quad X^{(n)}\restriction_{\mu} = X^{(n+r)}\restriction_{\mu}.$$

В случае (a) *последовательность перезаписи слова X начиная с n-го члена становится периодической с периодом длины r:*

$$X \overset{*}{\Rightarrow} \underbrace{X^{(n)} \Rightarrow \cdots \Rightarrow X^{(n+r-1)}}_{\text{период}} \Rightarrow X^{(n)} \Rightarrow \cdots.$$

В случае (b) *рассмотрим представление $X^{(n)} = YS$, где $Y \in \mathbb{A}^+$, $S \in \mathbb{A}^*$ и $|Y| = \mu$, т. е. положим $Y := X^{(n)}\restriction_{\mu}$ и $S := \frac{X^{(n)}}{Y}$. Тогда $Y \in \mathbb{W}_r$ и существует такое слово $R \in \mathbb{A}^+$, что $Y^{(r)} = YR$ и последовательность перезаписи слова X содержит подпоследовательность, образованную словами $X^{(n+mr)} = YR^mS$, $m \geqslant 0$, каждое из которых начинает регулярный «период роста» длины r:*

$$\begin{aligned} X \overset{*}{\Rightarrow} X^{(n)} &= YS &&\Rightarrow Y^{(1)}S &&\Rightarrow \cdots \Rightarrow Y^{(r-1)}S \\ \Rightarrow X^{(n+r)} &= YRS &&\Rightarrow Y^{(1)}RS &&\Rightarrow \cdots \Rightarrow Y^{(r-1)}RS \\ \Rightarrow X^{(n+2r)} &= YR^2S &&\Rightarrow Y^{(1)}R^2S &&\Rightarrow \cdots \Rightarrow Y^{(r-1)}R^2S \\ \Rightarrow \cdots & \\ \Rightarrow X^{(n+mr)} &= YR^mS &&\Rightarrow Y^{(1)}R^mS &&\Rightarrow \cdots \Rightarrow Y^{(r-1)}R^mS \\ \Rightarrow \cdots. & \end{aligned}$$

В частности, $\{X^{(n)}, X^{(n+1)}, \ldots\} = \{Y^{(j)}R^mS : 0 \leqslant j < r,\ m \geqslant 0\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $X \in \mathbb{W}_\infty$.

Предположим сначала, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдется число $m > n$ такое, что $\bigl|X^{(m)}\bigr| < \mu$. Покажем, что в этом случае выполнено условие (a). В рассматриваемом случае имеется строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\langle n_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ такая, что $\bigl|X^{(n_i)}\bigr| < \mu$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Поскольку множество $\{Y \in \mathbb{A}^+ : |Y| < \mu\}$ конечно, слова $X^{(n_i)}$, $i \in \mathbb{N}$, не могут быть попарно различными. Следовательно, найдутся числа $i < j$ такие, что $X^{(n_i)} = X^{(n_j)}$. Тогда, полагая $n = n_i$ и $r = n_j - n_i$, получаем $X^{(n)} = X^{(n+r)}$, и тем самым выполнено условие (a).

Пусть теперь существует число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\bigl|X^{(n)}\bigr| \geqslant \mu$ для всех $n > n_0$. Покажем, что в этом случае выполнено одно из условий (a) или (b). Согласно лемме 2.4 имеется строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\langle n_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$\text{из } \ n \geqslant n_i \ \text{ следует } \ \bigl|X^{(n)}\bigr| \geqslant \bigl|X^{(n_i)}\bigr| \tag{$*$}$$

для любых $n, i \in \mathbb{N}$. Не нарушая общности, можем считать, что $n_1 > n_0$. Тогда

$$\bigl|X^{(n_i)}\bigr| \geqslant \mu \ \text{ для всех } \ i \in \mathbb{N}. \tag{$**$}$$

Поскольку множество слов длины μ конечно, слова $X^{(n_i)}\restriction_\mu$, $i \in \mathbb{N}$, не могут быть попарно различными. Следовательно, найдутся числа $i < j$ такие, что $X^{(n_i)}\restriction_\mu = X^{(n_j)}\restriction_\mu$. Положим $n = n_i$ и $r = n_j - n_i$. Тогда $X^{(n)}\restriction_\mu = X^{(n+r)}\restriction_\mu$. Кроме того, благодаря $(*)$ и $(**)$ имеем

$$\mu \leqslant \bigl|X^{(n)}\bigr| \leqslant \bigl|X^{(n+1)}\bigr|, \ldots, \bigl|X^{(n+r)}\bigr|.$$

Таким образом, в случае $X^{(n)} = X^{(n+r)}$ выполнено условие (a), а в случае $X^{(n)} \neq X^{(n+r)}$ выполнено условие (b).

Достаточность. Из условия (a) с очевидностью следует, что $X \in \mathbb{W}_\infty$. Пусть выполнено условие (b). Тогда имеются целые числа $n \geqslant 0$ и $r > 0$, слово Y и кортежи $S, T \in \mathbb{A}^*$ такие, что

$$\begin{aligned} &\bigl|X^{(n+1)}\bigr|, \ldots, \bigl|X^{(n+r)}\bigr| \geqslant \bigl|X^{(n)}\bigr|, \quad X^{(n)} \neq X^{(n+r)}, \\ &|Y| = \mu, \quad X^{(n)} = YS, \quad X^{(n+r)} = YT. \end{aligned}$$

Применяя лемму 2.3 к слову $X^{(n)}$ в роли X, заключаем, что $Y \in \mathbb{W}_r$ и

$$X^{(n+i)} = Y^{(i)}S \quad \text{и} \quad \bigl|Y^{(i)}\bigr| \geqslant \mu \quad \text{для всех} \quad i = 0, \ldots, r.$$

В частности, $Y^{(r)}S = X^{(n+r)} = YT$ и $\bigl|Y^{(r)}\bigr| \geqslant \mu$. С другой стороны, $|Y| = \mu$, а значит, $Y^{(r)} = YR$ для некоторого кортежа $R \in \mathbb{A}^*$. При этом $R \neq \varnothing$, так как в противном случае

$$X^{(n)} = YS = Y^{(r)}S = X^{(n+r)}.$$

Учитывая неравенства $\bigl|Y^{(0)}\bigr|, \ldots, \bigl|Y^{(r)}\bigr| \geqslant \mu$ и привлекая предложение 2.1(3), заключаем, что $(YZ)^{(i)} = Y^{(i)}Z$ для всех $Z \in \mathbb{A}^*$, $i = 0, \ldots, r$. Следовательно, последовательность перезаписи слова X начиная с n-го члена имеет вид

$$\begin{aligned} X^{(n)} &= YS \Rightarrow Y^{(1)}S \Rightarrow \cdots \Rightarrow Y^{(r)}S \\ &= YRS \Rightarrow Y^{(1)}RS \Rightarrow \cdots \Rightarrow Y^{(r)}RS \\ &= YR^2S \Rightarrow \cdots \Rightarrow YR^3S \Rightarrow \cdots \Rightarrow YR^mS \Rightarrow \cdots \end{aligned}$$

и тем самым $X \in \mathbb{W}_\infty$.

Остается заметить, что условия (a) и (b) взаимно исключают друг друга, так как в первом случае последовательность длин $\bigl|X^{(n)}\bigr|$ ограничена, а во втором случае (как показано выше) она стремится к бесконечности. $\square$

3.2. Замечание. В заключительной формуле теоремы 3.1 возникает множество слов

$$\{Y^{(j)}R^mS \,:\, 0 \leqslant j < r,\ m \geqslant 0\},$$

которое внешне напоминает стандартную картину, лежащую в основе леммы о накачке для регулярных языков: достаточно длинное слово разлагается на части таким образом, что один из его фрагментов можно повторять произвольное число раз, сохраняя принадлежность соответствующему языку. В классической форме такая лемма восходит к работе М. О. Рабина и Д. Скотта [2], где она появляется как одно из базовых следствий теории конечных автоматов. Каноническое учебное изложение этой леммы, ее доказательства и типичные случаи применения можно найти, например, в монографиях [3, 4].

Теорема 3.1 не является непосредственным приложением леммы о накачке. Приведенное выше доказательство опирается не на стандартный автоматный аргумент с повторением состояния при чтении достаточно длинного слова, а на внутреннюю структуру рассматриваемой последовательности перезаписей слова. Тем не менее было бы интересно выяснить, не скрывается ли за этим внешним сходством более глубокая связь. В частности, естественно спросить, можно ли интерпретировать появление слов вида YR^mS в терминах некоторого автоматного или регулярного механизма и получить приведенное выше описание последовательности перезаписей как следствие подходящего варианта леммы о накачке. В настоящей работе этот вопрос не рассматривается.

3.3. Пусть $\mathscr{P}$ — какое-либо множество «конструктивных объектов» (т. е. множество, чьи элементы допустимы в качестве входных данных алгоритмов), и пусть $C(Y,p)$ — условие, которое может быть наложено на слова Y с дополнительными параметрами $p \in \mathscr{P}$. Формально можно считать, что C является подмножеством произведения $\mathbb{A}^+ \times \mathscr{P}$ и для всех $Y \in \mathbb{A}^+$ и $p \in \mathscr{P}$ выражение $C(Y,p)$ означает включение $\langle Y,p\rangle \in C$.

Условие $C(Y,p)$ называется *разрешимым*, если существует алгоритм, проверяющий соотношение $C(Y,p)$ для любых входных данных $Y \in \mathbb{A}^+$ и $p \in \mathscr{P}$. Условие $C(Y,p)$ назовем *циклически разрешимым*, если существует алгоритм, проверяющий следующее соотношение $C'(Y,R,S,p)$ для любых входных данных $Y \in \mathbb{A}^+$, $R,S \in \mathbb{A}^*$ и $p \in \mathscr{P}$:

$$C'(Y,R,S,p) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, m \in \mathbb{N})\; C(YR^mS,p).$$

3.4. Предложение.
(1) *Всякое циклически разрешимое условие является разрешимым.*
(2) *Для любого непустого алфавита $\mathbb{A}$ существует условие $C(Y)$, $Y \in \mathbb{A}^+$, являющееся разрешимым, но не циклически разрешимым.*

Доказательство. (1) Соотношение $C(Y,p)$ равносильно $C'(Y,\varnothing,\varnothing,p)$.
(2) Пусть D — рекурсивное подмножество $\mathbb{N}^2$, для которого множество

$$D' := \{n \in \mathbb{N} :\; (\exists\, m \in \mathbb{N})\; \langle n,m\rangle \in D\}$$

не является рекурсивным (см., например, [5, гл. 1, §6]).

Если в алфавите $\mathbb{A}$ есть две различные буквы α и β, рассмотрим условие

$$C(Y) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, \langle n,m\rangle \in D)\; Y = \alpha^n\beta^m.$$

Из рекурсивности множества D непосредственно вытекает разрешимость $C(Y)$. С другой стороны, множество

$$\{n \in \mathbb{N} :\; C'(\alpha^n,\beta,\varnothing)\} = \{n \in \mathbb{N} :\; (\exists\, m \in \mathbb{N})\; C(\alpha^n\beta^m)\} = D'$$

не рекурсивно, а значит, условие $C(Y)$ не является циклически разрешимым.

В случае однобуквенного алфавита $\mathbb{A} = \{\alpha\}$ можно рассмотреть условие

$$C(Y) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, \langle n,m\rangle \in D)\; Y = \alpha^{2^n(2m+1)},$$

для которого

$$\bigl\{n \in \mathbb{N} :\; C'\bigl(\alpha^{2^n},\, \alpha^{2^{n+1}},\, \varnothing\bigr)\bigr\} = \bigl\{n \in \mathbb{N} :\; (\exists\, m \in \mathbb{N})\; C\bigl(\alpha^{2^n(2m+1)}\bigr)\bigr\} = D'. \quad \square$$

3.5. Пусть $C(Y,p)$ — произвольное циклически разрешимое условие.

Описываемый ниже алгоритм принимает на входе функцию перезаписи, произвольное слово X и параметр $p \in \mathscr{P}$ и возвращает сообщение о наличии или отсутствии слова Y, удовлетворяющего условиям $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ и $C(Y,p)$, дополняя ответ поясняющим фрагментом последовательности перезаписи слова X (см. [1, алгоритм 5.3]).

Алгоритм использует целочисленные переменные μ, n, i и r, переменные $R \in \mathbb{A}^+$ и $S \in \mathbb{A}^*$, а также два массива переменной длины, члены которых являются словами и обозначаются через X_i и Y_i.

Алгоритм. Существует ли такое слово Y, что $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ и $C(Y,p)$?

(1) Полагаем $\mu := \max\{|E| : E \in \mathbb{E}\}$, $n := 0$, $X_0 := X$.

(2) Если выполнено условие $C(X_n,p)$, то завершаем работу с ответом
- **Да**, *слово* $Y = X_n$ *удовлетворяет условиям* $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ *и* $C(Y,p)$*:* $X_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow X_n$.

(3) Если X_n не является перезаписываемым, то завершаем работу с ответом
- **Нет**, *не существует такого слова* Y*, что* $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ *и* $C(Y,p)$*:* $X_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow X_n$ *— полная последовательность перезаписи.*

(4) Если $X_i = X_n$ для некоторого $0 \leqslant i < n$, то завершаем работу с ответом
- **Нет**, *не существует такого слова* Y*, что* $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ *и* $C(Y,p)$*:* $X_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{X_i \Rightarrow \cdots \Rightarrow X_{n-1}}_{\text{период}} \Rightarrow X_i \Rightarrow \cdots$.

(5) Если $n = 0$ или $|X_n| < \mu$, то переходим к (9).
В противном случае полагаем $i := n - 1$.

(6) Если $|X_i| < \mu$, то переходим к (9).

(7) Если $X_i{\restriction_\mu} = X_n{\restriction_\mu}$ и $|X_i| \leqslant |X_{i+1}|, \ldots, |X_n|$, то делаем следующее.

(a) Полагаем $r := n - i$, $Y_0 := X_i{\restriction_\mu}$, $Y_1 := Y_0'$, $\ldots$, $Y_r := Y_{r-1}'$ и определяем $S \in \mathbb{A}^*$, исходя из равенства $X_i = Y_0 S$.
При этом окажется, что $Y_r = Y_0 R$ для некоторого слова R.

(b) Используя циклическую разрешимость условия $C(Y,p)$, выясняем, существуют ли $j \in \{1,\ldots,r\}$ и $m \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условию $C(Y_j R^m S, p)$.

(c) Если результат теста (b) положителен, то (исключительно для построения поясняющего фрагмента последовательности перезаписи слова X) продолжаем цикл вычислений $n := n + 1$, $X_n := X_{n-1}'$ до тех пор, пока не будет выполнено условие $C(X_n,p)$, и завершаем работу с ответом
- **Да**, *слово* $Y = X_n$ *удовлетворяет условиям* $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ *и* $C(Y,p)$*:* $X_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow X_n$.

Если же результат (b) отрицателен, то завершаем работу с ответом
- **Нет**, *не существует такого слова* Y*, что* $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ *и* $C(Y,p)$*:* $X_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{X_i \Rightarrow \cdots \Rightarrow X_{n-1}}_{\text{период роста}} \Rightarrow X_n \Rightarrow \cdots$.

(8) Если $i > 0$, то полагаем $i := i - 1$ и переходим к (6).

(9) Полагаем $n := n + 1$, $X_n := X_{n-1}'$ и переходим к (2).

3.6. Предложение. *Если $C(Y,p)$ — циклически разрешимое условие, то для любой функции перезаписи, любого слова X и любого параметра $p \in \mathscr{P}$ алгоритм 3.5 за конечное время возвращает правильный ответ на вопрос о существовании слова Y, удовлетворяющего условиям $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$ и $C(Y,p)$.*

Доказательство. Ясно, что при каждом прохождении этапа 3.5(9) значение X_n полагается равным n-й перезаписи слова X, а значит, последовательность $\langle X_0, \dots, X_n\rangle$ является начальным фрагментом последовательности перезаписи слова X.

Из сказанного выше с очевидностью следует, что на этапе 3.5(2) при выполнении условия $C(X_n,p)$ возвращается правильный ответ.

Если на этапе 3.5(3) слово X_n оказалось неперезаписываемым, то возвращаемый на этом этапе ответ является правильным, поскольку $\langle X_0, \dots, X_n\rangle$ — полная последовательность перезаписи слова X и предшествующие прохождения этапа 3.5(2) не выявили выполнение условия $C(X_i,p)$ ни при одном $i = 0, \dots, n$.

Аналогичные соображения обосновывают правильность ответа, возвращаемого на этапе 3.5(4), поскольку равенство $X_i = X_n$ для некоторого $0 \leqslant i < n$ гарантирует, что в последовательности перезаписи слова X начиная с n-го члена будут встречаться лишь слова, принадлежащие множеству $\{X_{i+1}, \dots, X_n\}$.

Как легко видеть, этап 3.5(5) и идущий вслед за ним цикл 3.5(6)–(8) проверяют существование такого числа $0 \leqslant i < n$, что

$$\mu \leqslant \bigl|X^{(i)}\bigr| \leqslant \bigl|X^{(i+1)}\bigr|, \dots, \bigl|X^{(n)}\bigr|, \quad X^{(i)}\restriction_\mu = X^{(n)}\restriction_\mu.$$

Коль скоро работа алгоритма не завершилась на этапе 3.5(4), во время этой проверки имеют место неравенства $X^{(i)} \neq X^{(n)}$ для всех $0 \leqslant i < n$. Таким образом, этапы 3.5(5)–(8) проверяют условие 3.1(b) для фрагмента $\langle X_0, \dots, X_n\rangle$. В случае положительного результата этой проверки существование упомянутого в 3.5(7)(a) слова R и правильность ответа, возвращаемого на этапе 3.5(7)(c), обосновываются теоремой 3.1, согласно которой

$$\{X^{(n+1)}, X^{(n+2)}, \dots\} = \{Y_j R^m S : 1 \leqslant j \leqslant r,\ m \in \mathbb{N}\}.$$

Остается заметить, что благодаря той же теореме 3.1 работа алгоритма непременно завершится на одном из этапов 3.5(2)–(4) или (7)(c). □

3.7. Как легко видеть, для данной функции перезаписи $\to$ условие

$$\begin{aligned} C(Y,\to) &\Leftrightarrow Y \text{ не является перезаписываемым относительно } \to \\ &\Leftrightarrow Y \text{ не имеет явного префикса} \end{aligned}$$

циклически разрешимо. Поэтому алгоритм 3.5, специализированный для этого условия, проверяет конечную перезаписываемость данного слова. Ниже приведена упрощенная версия этой процедуры (см. [1, алгоритм 5.4]).

Алгоритм. Является ли слово X конечно перезаписываемым?

- Начинаем вычисление последовательности перезаписи $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots$.
- Если возникает неперезаписываемое слово $X^{(i)}$, возвращаем **Да**.
- В противном случае согласно теореме 3.1 в последовательности встретится фрагмент $\langle X^{(n)}, X^{(n+1)}, \dots, X^{(n+r)}\rangle$, удовлетворяющий условию (a) или условию (b) теоремы 3.1. В этом случае возвращаем **Нет**.

3.8. Следующее утверждение анонсировано в [1, теорема 2.12].

Теорема. *Если* $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{W}_{\text{fin}}$, *то* $\mathbb{W}_{\text{fin}} = \mathbb{A}^+$.

Доказательство. Предположим, что все явные слова конечно перезаписываемы, и докажем конечную перезаписываемость любого слова X, воспользовавшись индукцией по длине $|X|$ слова X.

Пусть $|X| = 1$. Если $X \in \mathbb{E}$, то $X \in \mathbb{W}_{\text{fin}}$ по условию теоремы. Если же $X \notin \mathbb{E}$, то, будучи однобуквенным, слово X не имеет явных префиксов, а значит, не является перезаписываемым, т. е. принадлежит $\mathbb{A}^+ \setminus \mathbb{W}_1 \subset \mathbb{W}_{\text{fin}}$.

Пусть все слова длины l конечно перезаписываемы. Рассмотрим произвольное слово X длины $l+1$ и допустим вопреки доказываемому, что X имеет бесконечную последовательность перезаписи

$$X^{(0)} \Rightarrow X^{(1)} \Rightarrow \cdots \Rightarrow X^{(n)} \Rightarrow X^{(n+1)} \Rightarrow \cdots .$$

Тогда все слова $X^{(n)}$ бесконечно перезаписываемы, а значит, по условию теоремы не являются явными. Кроме того, $\left|X^{(n)}\right| \geqslant 2$ для всех $n \geqslant 0$ согласно доказанной выше базе индукции.

Для любого слова Y длины $|Y| \geqslant 2$ обозначим символом $\lfloor Y \rfloor$ префикс Y длины $|Y| - 1$.

Покажем, что $\lfloor X^{(n)} \rfloor \Rightarrow \lfloor X^{(n+1)} \rfloor$ для всякого $n \geqslant 0$. Действительно, пусть α — последняя буква слова $X^{(n)}$. Поскольку слово $X^{(n)} = \lfloor X^{(n)} \rfloor \alpha$ является неявным и перезаписываемым, согласно предложению 2.1(1) имеем $\lfloor X^{(n)} \rfloor \in \mathbb{W}_1$ и $(\lfloor X^{(n)} \rfloor \alpha)' = \lfloor X^{(n)} \rfloor' \alpha$. Следовательно,

$$\lfloor X^{(n)} \rfloor \Rightarrow \lfloor X^{(n)} \rfloor' = \left\lfloor \lfloor X^{(n)} \rfloor' \alpha \right\rfloor = \left\lfloor (\lfloor X^{(n)} \rfloor \alpha)' \right\rfloor = \lfloor (X^{(n)})' \rfloor = \lfloor X^{(n+1)} \rfloor.$$

Таким образом, последовательность перезаписи слова $\lfloor X \rfloor$, имеющего длину l, бесконечна: $\lfloor X^{(0)} \rfloor \Rightarrow \lfloor X^{(1)} \rfloor \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lfloor X^{(n)} \rfloor \Rightarrow \lfloor X^{(n+1)} \rfloor \Rightarrow \cdots$. Полученное противоречие с предположением индукции завершает доказательство. □

3.9. Поскольку множество $\mathbb{E}$ явных слов конечно, из теоремы 3.8 следует существование эффективной проверки конечной перезаписываемости всех слов относительно данной функции перезаписи: для такой проверки достаточно применить алгоритм 3.7 ко всем явным словам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман А. Е.* Объектно-ориентированные данные и префиксная перезапись. Часть I: Обзор и основные результаты // Сиб. мат. журн. 2026. Т. 67, № 3. С. 392–413.
2. *Rabin M. O., Scott D.* Finite automata and their decision problems // IBM J. Res. Dev. 1959. V. 3, N 2. P. 114–125.
3. *Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж.* Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. Москва: Вильямс, 2015.
4. *Пентус А. Е., Пентус М. Р.* Математическая теория формальных языков. Москва: ИНТУИТ; Бином. Лаборатория знаний, 2006.
5. *Барвайс Дж.* Справочная книга по математической логике. Часть III: Теория рекурсии. Москва: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 28 мая 2026 г.
После доработки 28 мая 2026 г.
Принята к публикации 26 июня 2026 г.

Гутман Александр Ефимович (ORCID 0000-0003-2030-7459)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru