

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

С. К. Водопьянов

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Учебное пособие

Новосибирск
2012

ББК В.162.12

УДК 517.5

А465

Водопьянов С. К. Дифференциальное исчисление функций многих переменных: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. 125 с.

В пособии изложены начальные сведения о дифференцировании в конечномерных нормированных пространствах и некоторых его применениях в объёме, соответствующем программе базового курса «Математический анализ», читаемого студентам 2-го курса механико-математического факультета НГУ. Приведены задачи, рекомендуемые для решения на практических занятиях по указанному курсу.

Предназначено студентам и преподавателям механико-математического факультета НГУ и других вузов с математическим профилем.

Пособие подготовлено в рамках реализации Программы развития НГУ как национального исследовательского университета

Рецензент

Содержание

Предисловие	3
1 НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА	3
1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМИРОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА. ПРИМЕРЫ .	3
1.2. ПОНЯТИЕ СХОДИМОСТИ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ . .	4
1.2.1. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА О ЧАСТИЧНЫХ ПРЕДЕЛАХ В ($\mathbb{R}^k, \cdot _\infty$)	6
1.2.2. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НОРМ В КОНЕЧНОМЕРНОМ НОРМИ- РОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ	8
1.2.3. КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА В КОНЕЧНОМЕРНОМ НОР- МИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ	11
1.3. ПОНЯТИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. КРИ- ТЕРИЙ КОШИ	11
1.3.1. КРИТЕРИЙ КОШИ	12
1.4. РЯДЫ	13
1.4.1. ПОНЯТИЕ РЯДА. ПРИМЕРЫ. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ. ПРИЗНАК КОШИ СХОДИМОСТИ РЯДА . .	13
1.4.2. МАЖОРАНТНЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ	14
2 ТОПОЛОГИЯ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ	15
2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА. ПРИМЕРЫ. . .	15
2.2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОКРЕСТНОСТИ. ПОНЯТИЕ ОКРЕСТНОСТИ. СВОЙ- СТВА ОКРЕСТНОСТЕЙ ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКИ. ПОНЯТИЕ ПРЕ- ДЕЛЬНОЙ ТОЧКИ МНОЖЕСТВА.	16
2.2.1. ПОНЯТИЕ ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ	16
2.2.2. СВОЙСТВА ОКРЕСТНОСТЕЙ ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКИ . .	17
2.3. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКИ ЧИСЛОВОГО МНОЖЕСТВА . . .	17
2.4. ЗАМКНУТЫЕ И ОТКРЫТЫЕ МНОЖЕСТВА. ЗАМКНУТОСТЬ МНО- ЖЕСТВА ПРЕДЕЛЬНЫХ ТОЧЕК НА РАСШИРЕННОЙ ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ	18
3 ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ	19
3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРИМЕРЫ	19
3.2. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬ- НОСТИ	20
3.3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ	21
3.4. ПРЕДЕЛ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ	22

3.5.	Частичные пределы последовательности. Теорема Вей- ерштрасса о частичных пределах	23
3.5.1.	Частичные пределы последовательности	23
4	ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ	24
4.1.	Топологическое определение предела функции $f : A \rightarrow$ $\mathbb{T}$, $A \subset \mathbb{M}$. ПРИМЕРЫ.	24
4.2.	Единственность предела функции.	25
4.3.	ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЕ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ.	26
4.4.	ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ В НЕРАВЕНСТВАХ.	27
4.5.	ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЕ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ФУНКЦИИ.	28
4.6.	АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИИ.	28
4.7.	ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ.	29
4.8.	КРИТЕРИЙ ГЕЙНЕ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИИ.	30
4.9.	АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ СРАВНЕНИЯ. Символы O и o , правила оперирования с ними.	31
4.10.	КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ.	33
5	ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ	33
5.1.	ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ	35
5.2.	ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ	39
6	ДИФФЕРЕНЦИАЛ И ЕГО СВОЙСТВА	44
6.1.	Производная вдоль вектора и ее свойства. Частные производные	45
6.2.	ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ	45
6.3.	ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ	47
6.3.1.	ЛЕММА ОБ ОЦЕНКЕ ПРИРАЩЕНИЯ	47
6.3.2.	ЛЕММА ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СО- ОТНОШЕНИЙ	49
6.3.3.	ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНК- ЦИИ В ТОЧКЕ	53
6.4.	СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛА	54
6.5.	ТЕОРЕМА О КОНЕЧНЫХ О ПРИРАЩЕНИЯХ	62
6.6.	КООРДИНАТНАЯ ЗАПИСЬ 1-ГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА	66
6.7.	ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ	68
6.8.	ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА ОБ ОДНОРОДНОЙ ФУНКЦИИ	70

7	ВТОРОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ И ЕГО СВОЙСТВА	72
7.1.	ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА	72
7.2.	СИММЕТРИЧНОСТЬ ВТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА	74
8	ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА	75
8.1.	ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫСШИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ И ИХ СВОЙСТВА . .	75
8.2.	КООРДИНАТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ. Мультииндексные обозначения	78
9	ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ	81
9.1.	ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ	81
9.2.	ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА В КООРДИНАТАХ	82
9.3.	АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛИНОМА ТЕЙЛОРА .	82
9.4.	ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА К ИЗУЧЕНИЮ МАКСИМУМОВ И МИНИМУМОВ	83
9.5.	ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ f ДВУХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ x, y	86
9.6.	ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА К ИЗУЧЕНИЮ РАСПОЛОЖЕНИЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПО ОТНОШЕНИЮ К КАСАТЕЛЬНОЙ ГИПЕРПЛОСКОСТИ	88
10	ПОТОЧЕЧНАЯ И РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТИ	88
10.1.	ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИЗНАКИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ . . .	89
10.2.	ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ АНАЛИЗА . . .	95
10.3.	ПРИМЕНЕНИЯ	99
10.3.1.	СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ	99
11	ТЕОРЕМА О ЛОКАЛЬНОМ ДИФФЕОМОРФИЗМЕ	101
12	НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ	105
12.1.	КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ТЕОРЕМЫ О ВЫПРЯМЛЕНИИ	109
12.2.	ТЕХНИКА ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ И ЗАМЕНЫ ФУНКЦИЙ	113
13	ТЕОРЕМА О РАНГЕ	116
13.1.	ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ	118
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	121

ПРЕДИСЛОВИЕ

1 НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМИРОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА. ПРИМЕРЫ

Пусть $\mathbb{X}$ — произвольное векторное пространство.

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторное пространство $\mathbb{X}$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ называется *нормированным*, если на $\mathbb{X}$ определена норма $|\cdot| : \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty)$, обладающая свойствами:

- 1) $|v| \geq 0$, $|v| = 0$ тогда и только тогда, когда $v = 0$;
- 2) $|\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$;
- 3) $|u + v| \leq |u| + |v|$ для любых $u, v \in \mathbb{X}$.

Далее, как правило, символами $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$ обозначаются нормированные векторные пространства.

1.2. ЗАДАЧА. Доказать, что в нормированном пространстве вместе с неравенством треугольника $|u + v| \leq |u| + |v|$ справедливо также и неравенство

$$||u| - |v|| \leq |u - v| \quad (1.1.1)$$

для любых $u, v \in \mathbb{X}$.

1.3. ПРИМЕРЫ. 1) Арифметическое n -мерное пространство $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$ с нормой

$$|x|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{если } p \in [1, \infty), \\ \max_{i=1, \dots, n} |x_i|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

2) Рассмотрим конечномерное векторное пространство $\mathbb{X}$ и фиксируем в нем базис $\{f_j\}$, $j = 1, \dots, m$. Любой вектор $a \in \mathbb{X}$ представим в виде $a = \sum_{i=1}^m a_i f_i$. Сопоставление

$$\mathbb{X} \ni a \mapsto (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$$

устанавливает изоморфизм i между $\mathbb{X}$ и $\mathbb{R}^m$.

а) Проверить, что величина $|a|_p = |i(a)|_p$ будет нормой в $\mathbb{X}$.

б) С другой стороны, если пространство $\mathbb{X}$ нормированное с нормой $|\cdot|_{\mathbb{X}}$, то величина $|i^{-1}(b)|_{\mathbb{X}}$, $b \in \mathbb{R}^n$, будет нормой в $\mathbb{R}^n$.

3) Рассмотрим декартово произведение $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n$ нормированных пространств $\mathbb{X}_i$, $i = 1, \dots, n$. Введем в $\mathbb{X}$ норму элемента $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{X}_i$, полагая

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{если } p \in [1, \infty), \\ \max_{i=1, \dots, n} \|x_i\|, & \text{если } p = \infty, \end{cases} \quad (1.1.2)$$

где $\|x_i\|$ — норма в пространстве $\mathbb{X}_i$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, всегда предполагается, что норма в декартовом произведении $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n$ определена в соответствии с (1.1.2)

1.2. ПОНЯТИЕ СХОДИМОСТИ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этом разделе мы определим понятие сходимости в нормированном пространстве и изучим подробно его свойства в *конечномерных* нормированных пространствах. Наша цель — показать, что сходимость (топология) в конечномерном пространстве не зависит от нормы.

В нормированном пространстве $\mathbb{X}$ с нормой $|\cdot|$ стандартным образом определяем

1) шар $B(a, r) = \{u \in \mathbb{X} : |u - a| < r\}$ с центром в точке a радиуса $r \in (0, \infty)$;

2) систему $\mathcal{N}(a)$ окрестностей точки a : $U \in \mathcal{N}(a)$ тогда и только тогда, когда U содержит некоторый шар с центром в точке a ;

3) понятие предельной точки множества $A \subset \mathbb{X}$: точка $a \in \mathbb{X}$ называется *предельной* к множеству $A \subset \mathbb{X}$, если $A \cap U \setminus \{a\} \neq \emptyset$ для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ точки a ;

4) понятие точки прикосновения множества $A \subset \mathbb{X}$: точка $a \in \mathbb{X}$ называется точкой *прикосновения* к множеству A , если $A \cap U \neq \emptyset$ для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ точки a ;

5) понятие замкнутого множества: множества $A \subset \mathbb{X}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения;

6) понятие открытого множества: множества $A \subset \mathbb{X}$ называется *открытым*, если вместе с каждой точкой a оно содержит также и некоторую ее окрестность;

7) понятие сходимости: последовательность точек $u_n \in \mathbb{X}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к элементу $a \in \mathbb{X}$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - a| = 0$;

8) понятие предела: отображение $f : A \rightarrow \mathbb{Y}$, где $A \subset \mathbb{X}$, со значениями в нормированном пространстве $(\mathbb{Y}, |\cdot|_{\mathbb{Y}})$ имеет предел $v \in \mathbb{Y}$ при $u \rightarrow a$ по множеству A , если выполняются следующие условия:

i) a — предельная точка множества A ;

ii) $|f(u) - v|_{\mathbb{Y}} \rightarrow 0$ при $u \rightarrow a$ по множеству A , т. е. для любой окрестности $V \in \mathcal{N}(v)$ найдется окрестность $U \in \mathcal{N}(a)$ такая, что $f(u) \in V$ для любой точки $u \in A \cap U \setminus \{a\}$;

9) понятие сходящегося ряда: ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

элементов u_n нормированного векторного пространства $\mathbb{X}$ называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм

$$v_l = \sum_{n=1}^l u_n \text{ при } l \rightarrow \infty;$$

10) *понятие банахова пространства*: нормированное пространство $\mathbb{X}$ называется *банаховым*, если всякая фундаментальная последовательность сходится.

1.4. ЗАДАЧА. Пусть $\mathbb{V}$ — произвольное нормированное конечномерное пространство. Если последовательность $x_n \in \mathbb{V}$ сходится к $a \in \mathbb{V}$ при $n \rightarrow \mathbb{N}$, то $|x_n|$ сходится к числу $|a|$ при $n \rightarrow \mathbb{N}$.

1.5. ЗАДАЧА. Доказать, что если последовательность u_n векторов банахова пространства $\mathbb{X}$ обладает свойством

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty, \quad (1.2.3)$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1.2.4)$$

сходится в $\mathbb{X}$.

Ряд в $\mathbb{X}$, обладающий свойством (1.2.3), называется *нормально сходящимся*. Таким образом, задачу 1.5 можно переформулировать следующим образом: *всякий нормально сходящийся ряд в банаховом пространстве сходится*. Если $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, то понятие нормально сходящегося ряда совпадает с понятием числового абсолютно сходящегося ряда.

В следующей теореме доказывается арифметический критерий сходимости.

1.6. ТЕОРЕМА. Последовательности x_n сходятся к $a \in \mathbb{X}$ при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность x_n сходится к a при $n \rightarrow \infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Этому выбору соответствует шар $B(a, \varepsilon)$, который является элементарной окрестностью точки a . По определению сходимости x_n к a существует число n_0 такое, что $x_n \in B(a, \varepsilon)$ для всех $n \geq n_0$. Последнее включение эквивалентно неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$. Необходимость доказана.

Для доказательства достаточности возьмем произвольную окрестность $U \in \mathcal{N}(a)$. В этой окрестности содержится некоторый шар $B(a, \varepsilon)$. Тогда существует n_0 такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$. Следовательно, имеем $x_n \in B(a, \varepsilon) \subset U$ для всех $n \geq n_0$.

Пусть $x_n \in \mathbb{V}$, $n \in \mathbb{N}$, — произвольная последовательность. Фиксируем произвольный базис $\{e_1, \dots, e_k\}$ в $\mathbb{V}$. Рассмотрим проекцию

$$\text{Pr}_i : x \rightarrow x_i.$$

1.7. ЛЕММА. Пусть $\mathbb{V}$ — конечномерное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\{e_1, \dots, e_k\}$ — некоторый фиксированный базис в $\mathbb{V}$. Пусть $x_n \in \mathbb{V}$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность такая, что последовательности координат $\text{Pr}_i(x_n)$ сходятся в $\mathbb{R}$ для любого фиксированного $i = 1, \dots, k$. Тогда последовательность x_n , $n \in \mathbb{N}$, сходится в $\mathbb{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Pr}_i(x_n) = a_i$. Покажем, что $a = \sum_{i=1}^k a_i e_i$ будет пределом последовательности $\{x_n\}$ в пространстве $\mathbb{V}$ при $n \rightarrow \infty$. Имеем

$$\|x - a\| = \left\| \sum_{i=1}^k x_n^i e_i - \sum_{i=1}^k a^i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^k |x_n^i - a^i| \|e_i\|.$$

Так как правая часть неравенства содержит лишь конечное число слагаемых и каждое из них стремится к нулю, то и левая часть стремится к нулю, что и доказывает лемму.

1.2.1. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА О ЧАСТИЧНЫХ ПРЕДЕЛАХ В $(\mathbb{R}^k, |\cdot|_\infty)$

1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число $a \in \mathbb{V}$ называется *частичным пределом* последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, если существует последовательность на-

туральных чисел $\{n_k \in \mathbb{N}\}_{k \in \mathbb{N}}$ с условием $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a. \quad (1.2.5)$$

1.9. ЗАДАЧА. Если последовательность $x_n \in \mathbb{V}$ сходится к числу $a \in \mathbb{V}$ при $n \rightarrow \infty$, то a будет также и пределом любой ее подпоследовательности. В этом случае все ее частичные пределы совпадают.

Далее в этом разделе мы рассматриваем арифметическое k -мерное пространство $\mathbb{R}^k$ с нормой $|x|_\infty = \max_{i=1, \dots, k} |x_i|$ для любого элемента $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$.

1.10. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbb{V} = (\mathbb{R}^k, |\cdot|_\infty)$ — арифметическое k -мерное пространство $\mathbb{R}^k$ с нормой $|x|_\infty = \max_{i=1, \dots, k} |x_i|$. Всякая ограниченная последовательность в $x_n \in \mathbb{R}^k$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

Другими словами, теорема 1.10 утверждает, что совокупность частичных пределов ограниченной последовательности $x_n \in \mathbb{V}$, $n \in \mathbb{N}$, не пусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_n \in \mathbb{V}$, $n \in \mathbb{N}$, — произвольная последовательность. Фиксируем стандартный базис $\{e_1, \dots, e_k\}$ в $\mathbb{R}^k$. Рассмотрим проекцию $\text{Pr}_i : x \rightarrow x_i$. Так как последовательность $x_n \in \mathbb{V}$, $n \in \mathbb{N}$, ограничена, то последовательность $\text{Pr}_1(x_n) \in \mathbb{R}$ ограничена в $\mathbb{R}$ (ПРОВЕРИТЬ). Тогда по классической теореме Вейерштрасса из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что x_n ограничена в $\mathbb{V}$, а последовательность $\text{Pr}_1(x_n) \in \mathbb{R}$ сходится.

Рассмотрим теперь последовательность $\text{Pr}_2(x_n) \in \mathbb{R}$. Из нее, как и в предыдущем случае, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность так, чтобы она сходилась. Опять переходим к подпоследовательности и получаем ограниченную последовательность в $\mathbb{V}$ такую, что последовательности $\text{Pr}_1(x_n) \in \mathbb{R}$ и $\text{Pr}_2(x_n) \in \mathbb{R}$ сходятся.

Продолжая этот процесс по индукции, приходим к последовательности x_n , у которой все проекции $\text{Pr}_l(x_n) \in \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, k$, сходятся. Тогда по лемме 1.7 полученная последовательность (она является подпоследовательностью исходной) сходится. Таким образом, исходная последовательность имеет частичный предел.

1.11. ЗАДАЧА. Совокупность частичных пределов последовательности $x_n \in \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}$, нормой, как и в теореме 1.10, представляет собой непустое замкнутое множество.

1.2.2. Эквивалентность норм в конечномерном нормированном пространстве

Цель настоящего раздела — показать, что две нормы в конечномерном нормированном пространстве эквивалентны. Эта задача рашается в два этапа. На первом этапе мы доказываем двкх эквивалентность норм в пространстве $\mathbb{R}^k$, а затем в произвольном нормированном пространстве конечной размерности.

1.12. ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НОРМ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^k$. Пусть рассмотрим две произвольные нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ в арифметическом k -мерном пространстве $\mathbb{R}^k$. Тогда существуют две постоянные $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ такие, что

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\| \leq \beta\|x\|_1 \quad (1.2.6)$$

для любого вектора $x \in \mathbb{R}^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать теорему для случая, когда $\|x\|_1 = |x|_\infty$. (ОБЪЯСНИТЬ ПОЧЕМУ?)

Заметим, что правая часть (1.2.6) очевидна, так как

$$\|x\| \leq \sum_{l=1}^k |x_l| \cdot \|e_l\| \leq \max_{l=1, \dots, k} |x_l| \cdot \sum_{l=1}^k \|e_l\| = \beta |x|_\infty, \quad (1.2.7)$$

где $\beta = \sum_{l=1}^k \|e_l\|$.

Далее рассмотрим отношение

$$f(x) = \frac{\|x\|}{|x|_\infty}$$

для точек $S(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_\infty = 1\}$. Покажем, что $\inf_{x \in S(0, 1)} \|x\| > 0$.

Если это не так, то существует последовательность $x_n \in S(0, 1)$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$. В силу теоремы (1.10) последовательность x_n можно считать сходящейся в норме $|\cdot|_\infty$ к некоторому элементу $a \in \mathbb{R}^k$.

Тогда, с одной стороны, предел $a \in S(0, 1)$ (для проверки этого свойства достаточно воспользоваться задачей 1.4). С другой стороны, в силу неравенства треугольника и неравенства (1.2.7) имеем

$$|||x_n|| - ||a||| \leq \|x_n - a\| \leq \beta |x_n - a|_\infty$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда выводим, что $||a|| = 0$, а, следовательно, и $a = 0$. Получено противоречие показывает, что $\alpha = \inf_{x \in S(0,1)} \|x\| > 0$. Используя свойство однородности нормы, выводим левую часть неравенства (1.2.6). Действительно, имеем

$$\alpha \leq \left\| \frac{x}{|x|_\infty} \right\|$$

для любого $x \neq 0$, откуда получаем $\alpha |x|_\infty \leq \|x\|$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

Фиксируем произвольный базис $\{e_1, \dots, e_k\}$ в $\mathbb{V}$. Тогда каждому элементу $u = \sum_{i=1}^k u_i e_i$ в $\mathbb{V}$ соответствует набор $(u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k$. Это соответствие будет изоморфизмом

$$i : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^k. \quad (1.2.8)$$

1.13. ЗАДАЧА. Доказать, что отображение 1.2.8 действительно будет изоморфизмом векторных пространств.

1.14. ЗАДАЧА. Доказать, что две нормы $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$ в конечномерном нормированном пространстве $\mathbb{V}$ эквивалентны, т. е. существуют положительные числа α и β такие, что $\alpha |u|_1 \leq |u|_2 \leq \beta |u|_1$ для любого элемента $u \in \mathbb{V}$.

УКАЗАНИЕ: Норме $|\cdot|_l$, $l = 1, 2$, в конечномерном нормированном пространстве $\mathbb{V}$ соответствует норма в $\mathbb{R}^k$: для $x \in \mathbb{R}^k$ полагаем $\|x\|_l$ равной $|i^{-1}(x)|_l$, где изоморфизм i определен соотношением 1.2.8. (ПРОВЕРИТЬ, ЧТО $\|x\|_l$ БУДЕТ НОРМОЙ!) В силу теоремы 1.12 нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентны. Следовательно, будут эквивалентными и нормы $|x|_1$ и $|x|_2$.

Пусть $x_n \in \mathbb{V}$, $n \in \mathbb{N}$, — произвольная последовательность. Фиксируем произвольный базис $\{e_1, \dots, e_k\}$ в $\mathbb{V}$. Рассмотрим проекцию

$$\text{Pr}_i : x \rightarrow x_i.$$

1.15. ЛЕММА. Последовательность x_n , $n \in \mathbb{N}$, конечномерного нормированного пространства $\mathbb{V}$ с нормой $\|\cdot\|$ сходится в $\mathbb{V}$ тогда и только тогда, когда последовательность $\text{Pr}_i(x_n)$ сходится в $\mathbb{R}$ для любого $i = 1, \dots, k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность доказана в лемме 1.7. Докажем необходимость. Пусть последовательность x_n , $n \in \mathbb{N}$, конечномерного нормированного пространства $\mathbb{V}$ с нормой $\|\cdot\|$ сходится к элементу $a \in \mathbb{V}$. Рассмотрим изоморфизм 1.2.8 и определим норму элемента $u \in \mathbb{V}$ равной $\|u\|_\infty = \max_{i=1, \dots, k} |u_i|$. В силу задачи 1.14 норма $\|\cdot\|$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_\infty$. Отсюда вытекает, что

$$|\text{Pr}_i(x_n) - \text{Pr}_i(a)| \leq \|x_n - a\|_\infty \leq \gamma \|x_n - a\|$$

для любого i , где γ — некоторая постоянная. Таким образом, лемма доказана.

1.16. ЗАДАЧА. Доказать, что от выбора нормы в конечномерном нормированном пространстве $\mathbb{V}$ не зависят

- 1) сходимость последовательности $x_n \in \mathbb{V}$ к $a \in \mathbb{V}$;
- 2) совокупность $\mathcal{N}(a)$ окрестностей точки $a \in \mathbb{V}$;
- 3) свойство множества быть открытым или замкнутым.

Приведем ниже теорему Вейерштрасса для произвольного конечномерного нормированного пространства.

1.17. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbb{V}$ — конечномерное нормированное пространство. $\mathbb{V}$ с нормой $\|\cdot\|$. Всякая ограниченная последовательность в $x_n \in \mathbb{V}$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сведем доказательство теоремы 1.17 к теореме 1.10. Фиксируем произвольный базис $\{e_1, \dots, e_k\}$ в $\mathbb{V}$. Сопоставим каждому элементу $u = \sum_{i=1}^k u_i e_i$ в $\mathbb{V}$ набор $(u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k$. Как было отмечено выше, такое соответствие (обозначим его $i : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$, будет изоморфизмом. Норме $\|\cdot\|$ в $\mathbb{V}$ соответствует норма $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^k$ (мы обозначаем ее тем же символом): если вектор $x \in \mathbb{R}^k$, то его норма $\|x\|$ в $\mathbb{R}^k$ равна норме $\|i^{-1}(x)\|$ в $\mathbb{V}$. Новая норма $\|x\|$ в $\mathbb{R}^k$ эквивалентна норме $|x|_\infty = \max_{i=1, \dots, k} |x_i|$ в $\mathbb{R}^k$. Следовательно, последовательность $i(x_n)$ будет ограниченной в норме $|\cdot|_\infty$.

Применяя теорему 1.10, выделим из последовательности $i(x_n)$ подпоследовательность $i(x_{n_l})$, сходящуюся к элементу $a \in \mathbb{R}^k$ в норме $|\cdot|_\infty$.

Тогда эта подпоследовательность будет сходиться к $a \in \mathbb{R}^k$ и в норме $\|x\|$, т. е. $\|i(x_{n_l}) - a\| \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Отсюда выводим, что $\|x_{n_l} - i^{-1}(a)\| \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Таким образом, подпоследовательность x_{n_l} имеет предел в пространстве $\mathbb{V}$, равный $i^{-1}(a)$.

1.18. ЗАДАЧА. Совокупность частичных пределов ограниченной последовательности $x_n \in \mathbb{V}$, $n \in \mathbb{N}$, в конечномерном нормированном пространстве не пуста.

1.2.3. КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА В КОНЕЧНОМЕРНОМ НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1.19. ПРИНЦИП БОЛЬЦАНО — ВЕЙЕРШТАССА. Пусть $A \subset \mathbb{V}$ — ограниченное и замкнутое множество в конечномерном нормированном пространстве. Тогда любая последовательность $x_n \in A$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $a \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана последовательность $x_n \in A$. Так как A — ограниченное множество, то и последовательность x_n ограничена. По теореме 1.17 эта последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Ее предел a либо принадлежит множеству A (если x_n постоянна при $n \rightarrow \infty$), либо является предельной точкой для множества A (в противном случае). Так как A — замкнутое множество, то $a \in A$.

1.20. ПРИНЦИП БОРЕЛЯ — ЛЕБЕГА. Из произвольного открытого покрытия U_ε ограниченного и замкнутого множества A в конечномерном нормированном пространстве $\mathbb{V}$ можно выделить конечное подпокрытие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1.21. ЗАДАЧА. Доказать, что множество A в конечномерном нормированном пространстве компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

1.3. ПОНЯТИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. КРИТЕРИЙ КОШИ

Рассмотрим последовательность $x_n \in \mathbb{V}$, $n \in \mathbb{N}$, сходящуюся к некоторому числу $a \in \mathbb{V}$. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.3.9)$$

для всех $n \geq n_0$. Следовательно, для всех $m, l \geq n_0$ из (1.3.9) имеем

$$|x_m - x_l| \leq |x_m - a| + |x_l - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, если последовательность $x_n \in \mathbb{V}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к некоторому числу в $\mathbb{V}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что

$$|x_m - x_l| < \varepsilon \quad (1.3.10)$$

для всех $m, l \geq n_0$. Свойство (1.3.10) можно рассматривать и независимо от того сходится последовательность или нет. Выделим полученное свойство в новое понятие.

1.22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность $x_n \in \mathbb{V}$, $n \in \mathbb{N}$, называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что

$$|x_m - x_l| < \varepsilon \quad (1.3.11)$$

для всех $m, l \geq n_0$.

1.3.1. КРИТЕРИЙ КОШИ

1.23. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbb{V}$ — конечномерное нормированное пространство. Последовательность $\{x_n \in \mathbb{V}\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к некоторому числу в $\mathbb{V}$ тогда и только тогда, когда последовательность фундаментальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ доказана перед определением 1.22.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ фундаментальна. Тогда для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $m, l \geq n_0$ справедливо неравенство (1.3.11). Фиксируем l . При $m \geq n_0$ имеем соотношения

$$-\varepsilon + |x_l| < |x_m| < \varepsilon + |x_l| \quad (1.3.12)$$

из которых вытекает, что последовательность $\{x_m\}$ ограничена. Выделим по теореме Вейерштрасса 1.17 сходящуюся подпоследовательность $x_{m_k}: \lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = a$. Так как $m_k > n_0 \mid_{k \rightarrow \infty}$, то полагая в неравенствах (1.3.12) $m = m_k$ и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в неравенстве $|x_{m_k} - x_l| < \varepsilon$ получаем

$$|a - x_l| \leq \varepsilon \quad (1.3.13)$$

при всех $l \geq n_0$. Таким образом, доказано, что $\lim_{l \rightarrow \infty} x_l = a$.

1.24. ЗАДАЧА. Доказать, что всякое конечномерное нормированное пространство банахово.

1.4. Ряды

1.4.1. Понятие ряда. Примеры. Необходимый признак сходимости. Признак Коши сходимости ряда

Рядом принято называть символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k \in \mathbb{V}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.4.14)$$

который в концентрированной форме содержит следующее:

1) последовательность $\{a_k \in \mathbb{V}\}$, $k \in \mathbb{N}$, элементы которой называют *членами ряда*: говорят, что $\{a_k\}$ — *общий член*;

2) знак суммы означает, что члены ряда складываются по следующему правилу: последовательности членов ряда соответствует последовательность *частичных сумм*

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

3) *Суммой S ряда (1.4.14) называют предел*, если он существует, *частичных сумм (1.4.15)*:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \quad (1.4.16)$$

Если $S \in \mathbb{V}$, то ряд называется *сходящимся* (или *суммируемым*). В противном случае говорят, что ряд *расходится*.

ОСНОВНАЯ ПРОБЛЕМА теории рядов состоит в том, чтобы по поведению членов ряда сделать вывод о его сходимости.

1.25. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ. Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, $a_k = S_k - S_{k-1}$. Так как последовательности $\{S_k\}$ и $\{S_{k-1}\}$ имеют общий предел при $k \rightarrow \infty$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

1.26. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ РЯДА. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1.4.17)$$

элементов конечномерного векторного пространства $\mathbb{V}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для любых $m \geq l \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=l}^m a_k \right| < \varepsilon. \quad (1.4.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вывода критерия Коши сходимости ряда применим критерий Коши 1.23 к последовательности частичных сумм $\{S_n\}$: последовательность $\{S_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_1 \in \mathbb{N}$ такой, что для любых $m \geq l \geq n_1$ выполняется неравенство $|S_m - S_l| < \varepsilon$. Последнее удобно переписать в виде неравенства $|S_m - S_{l-1}| < \varepsilon$, справедливого для любых $m \geq l \geq n_1 + 1$. Заметим теперь, что

$$S_m - S_{l-1} = \sum_{k=l}^m a_k.$$

Последнее эквивалентно 1.4.18 для $m \geq l \geq n_0 = n_1 + 1$.

1.4.2. МАЖОРАНТНЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ

1.27. ТЕОРЕМА. Пусть для членов рядов $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{V}$, и $\sum_{k=l}^{\infty} b_k$, $b_k \in \mathbb{R}$, выполняется соотношение:

$$|a_k| \leq b_k \mid_{k \rightarrow \infty}. \quad (1.4.19)$$

Тогда из сходимости ряда $\sum_{k=l}^{\infty} b_k$ вытекает абсолютная сходимость ряда $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ряд $\sum_{k=l}^{\infty} b_k$, $b_k \in \mathbb{R}$, сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для любых $m \geq l \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=l}^m b_k < \varepsilon. \quad (1.4.20)$$

Тогда в силу неравенства треугольника выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=l}^m a_k \right| < \varepsilon. \quad (1.4.21)$$

для любых $m \geq l \geq n_0$. Таким образом, для ряда $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ выполняется критерий Коши и поэтому он сходится.

2 ТОПОЛОГИЯ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА. ПРИМЕРЫ.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произвольная совокупность элементов $\mathbb{M}$ называется метрическим пространством, если на декартовом произведении $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ определена действительная функция $d : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow [0, \infty)$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$ для любых элементов $x, y \in \mathbb{M}$;
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ для любых $x, y, z \in \mathbb{M}$.

Далее, как правило, символами $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$ обозначаются нормированные векторные пространства, а символами $\mathbb{M}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{S}$ — метрические пространства.

Всякое нормированное пространство будет метрическим: для произвольных точек $u, v \in \mathbb{X}$ полагаем $d(u, v) = |u - v|$.

2.2. ЗАДАЧА. Доказать, что таким образом определенная метрика на нормированном пространстве $\mathbb{X}$ удовлетворяет всем аксиомам метрического пространства. Проверить, что метрика d на $\mathbb{X}$ обладает дополнительными свойствами: $d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| \cdot d(u, v)$ и $d(u + a, v + a) = d(u, v)$ для любых фиксированных $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{X}$ и любых $u, v \in \mathbb{X}$.

В последующих разделах 2 – 4 мы обсуждаем более подробно следующие определения и свойства. Читатель, знакомый с этими понятиями, может сразу переходить к последующим разделам.

В $(\mathbb{M}, d)$, как в метрическом пространстве, стандартным образом определяем

1) шар $B(a, r) = \{u \in \mathbb{M} : d(u, a) < r\}$ с центром в точке a радиуса $r \in (0, \infty)$;

2) систему $\mathcal{N}(a)$ окрестностей точки a : $U \in \mathcal{N}(a)$ тогда и только тогда, когда U содержит некоторый шар с центром в точке a ;

3) понятие предельной точки множества $A \subset \mathbb{M}$: точка $a \in \mathbb{M}$ называется *предельной* к множеству A , если $A \cap U \setminus \{a\} \neq \emptyset$ для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ точки a ;

4) понятие точки прикосновения множества $A \subset \mathbb{M}$: точка $a \in \mathbb{M}$ называется точкой *прикосновения* к множеству A , если $A \cap U \neq \emptyset$ для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ точки a ;

5) понятие замкнутого множества: множества $A \subset \mathbb{M}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения;

6) понятие открытого множества: множества $A \subset \mathbb{M}$ называется *открытым*, если вместе с каждой точкой a оно содержит также и некоторую ее окрестность;

7) понятие сходимости: последовательность точек $u_n \in \mathbb{M}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к элементу $a \in \mathbb{M}$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, a) = 0$;

8) понятие предела: отображение $f : A \rightarrow \mathbb{T}$, где $A \subset \mathbb{M}$, со значениями в метрическом пространстве $(\mathbb{T}, d')$ имеет предел v при $u \rightarrow a$, если выполняются следующие условия:

и) a — предельная точка множества A ;

ii) $d'(f(u), v) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow a$ по множеству A , т. е. для любой окрестности $V \in \mathcal{N}(v)$ найдется окрестность $U \in \mathcal{N}(a)$ такая, что $f(u) \in V$ для любой точки $u \in A \cap U \setminus \{a\}$;

2.2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОКРЕСТНОСТИ. Понятие окрестности. Свойства окрестностей фиксированной точки. Понятие предельной точки множества.

2.2.1. Понятие окрестности точки

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Элементарной окрестностью* точки $p \in \mathbb{M}$ в метрическом пространстве $\mathbb{M}$ будем называть всякий шар $B(p, r)$, $r \in (0, \infty)$.

Такую окрестность называют также открытой ε -окрестностью точки p .

Множество $U \subset \mathbb{M}$ называют *окрестностью точки* $p \in \mathbb{M}$, если оно содержит некоторую элементарную окрестность этой точки.

Множество всех окрестностей точки $p \in \mathbb{M}$ будем обозначать символом $\mathcal{N}(p)$.

2.2.2. Свойства окрестностей фиксированной точки

2.4. СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ОКРЕСТНОСТЕЙ В $\mathbb{M}$. Пусть $p \in \mathbb{M}$ — произвольная фиксированная точка, а $\mathcal{N}(p)$ — совокупность окрестностей этой точки. Тогда

- 1) всякая окрестность точки p содержит эту точку: $p \in U$ для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(p)$;
- 2) пересечение любых двух окрестностей точки p является окрестностью этой точки: $U \cap V \in \mathcal{N}(p)$ для любых окрестностей $U, V \in \mathcal{N}(p)$;
- 3) множество, содержащее окрестность точки p , является окрестностью этой точки: если $U \in \mathcal{N}(p)$ и $V \supset U$, то $V \in \mathcal{N}(p)$;
- 4) любые две различные точки метрического пространства $\mathbb{M}$ обладают непересекающимися окрестностями: если $p, q \in \mathbb{M}$ и $p \neq q$, то существуют окрестности $U \in \mathcal{N}(p)$ и $V \in \mathcal{N}(q)$ такие, что $U \cap V = \emptyset$;
- 5) у каждой точки $p \in \mathbb{M}$ имеется такая последовательность её окрестностей $B_0 \supset B_1 \supset \dots B_n \supset \dots$, что всякая окрестность V этой точки содержит некоторую окрестность вида B_n ;
- 6) у каждой точки x элементарной окрестности $V \in \mathcal{N}(p)$, $p \in \mathbb{M}$, $x \neq p$, имеется элементарная окрестность $W \in \mathcal{N}(x)$ такая, что $W \subset V$ и $p \notin W$;

Последовательности окрестностей точки из свойства 5 называются *базисными системами окрестностей*. Ниже приведен пример такой системы.

2.5. ПРИМЕР. Если $p \in \mathbb{M}$, то $B_n = B(p, 2^{-n})$, $n \in \mathbb{N}$.

2.6. ЗАДАЧА. Доказать, что если B_n , $n \in \mathbb{N}$, — базисная система окрестностей точки $p \in \mathbb{M}$, то $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{p\}$.

2.3. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКИ ЧИСЛОВОГО МНОЖЕСТВА

2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $E \subset \mathbb{M}$. Точка $p \in \mathbb{M}$ называется *предельной* для множества E , если для любой окрестности $V \in \mathcal{N}(p)$ пересечение $V \cap E \setminus \{p\}$ непусто. Совокупность всех предельных точек множества E обозначается символом $\mathcal{L}im E$.

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{M}$ состоит из точек множества E и всех предельных точек этого множества:

$$\overline{E} = E \cup \mathcal{L}im E.$$

2.8. ЗАДАЧА. Доказать, что определение 2.7 предельной точки эквивалентно следующему: точка $p \in \mathbb{M}$ называется *предельной* для множества $E \subset \mathbb{M}$, если для любой *элементарной* окрестности $V \in \mathcal{N}(p)$ пересечение $V \cap E \setminus \{p\}$ непусто.

2.9. ЗАДАЧА.

- 1) Если $S \subset T$, то $\overline{S} \subset \overline{T}$.
- 2) $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$.

2.4. ЗАМКНУТЫЕ И ОТКРЫТЫЕ МНОЖЕСТВА. ЗАМКНУТОСТЬ МНОЖЕСТВА ПРЕДЕЛЬНЫХ ТОЧЕК НА РАСШИРЕННОЙ ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

2.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $A \subset \mathbb{M}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. $\overline{A} \subset A$.

Множество $G \subset \mathbb{M}$ называется *открытым*, если оно является окрестностью любой своей точки, т. е. для любого $x \in G$ имеем $G \in \mathcal{N}(x)$.

2.11. ЗАДАЧА. Доказать, что шар $B(a, r)$ — открытое множество, а множество $\{u \in \mathbb{M} : d(u, a) \leq r\}$ замкнутое.

2.12. ЛЕММА. 1) Дополнение к замкнутому множеству $A \subset \mathbb{R}$ открыто.

2) Дополнение к открытому множеству $G \subset \mathbb{R}$ замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Если, напротив, $U = \mathbb{R} \setminus A$ не является окрестностью некоторой точки $x \in U$, то любая окрестность точки x пересекается с множеством A . Таким образом, x является предельной точкой для A , и в силу замкнутости множества A должна ему принадлежать, что противоречит выбору точки x .

Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что любая точка открытого множества G не может быть предельной точкой для дополнения к множеству G . Поэтому дополнение $\mathbb{R} \setminus G$ содержит все свои предельные точки и поэтому замкнуто.

В следующем утверждении мы формулируем основные свойства открытых и замкнутых множеств.

2.13. ЛЕММА. 1) Объединение произвольной совокупности открытых на $\mathbb{M}$ множеств открыто.

2) Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

3) Пересечение произвольной совокупности замкнутых на $\mathbb{M}$ множеств замкнуто.

4) Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\{U_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ — произвольное семейство открытых множеств, $U = \bigcup_{\xi \in \Xi} U_\xi$. Покажем, что U открыто. Пусть $x \in U$.

Тогда $x \in U_\xi$ для некоторого $\xi \in \Xi$. Так как U_ξ открыто, то U_ξ является окрестностью точки x . Следовательно, и более широкое множество $U \supset U_\xi$ является окрестностью этой точки.

2) Достаточно показать, что если U и V — открытые множества, то $U \cap V$ открыто. Действительно, пусть $x \in U \cap V$. Тогда, так как U и V открыты, то каждое из них является окрестностью точки x . Следовательно, по свойствам системы окрестностей их пересечение $U \cap V$ также является окрестностью точки x .

Утверждения 3) и 4) получаются из предыдущих утверждений 1) и 2), примененных к дополнениям рассматриваемых множеств (см. лемму 2.12).

2.14. ТЕОРЕМА О ЗАМКНУТОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТОЧЕК. Пусть $E \subset \mathbb{M}$. Тогда совокупность $\mathcal{L}im E$ предельных точек множества E замкнута.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{L}im E \neq \emptyset$. Требуется доказать, что $\mathcal{L}im E$ — замкнутое множество. Другими словами, надо доказать, что всякая предельная точка множества $\mathcal{L}im E$ будет также предельной и для множества E . Рассмотрим для этого предельную точку p множества $\mathcal{L}im E$. Тогда для любой элементарной окрестности $V \in \mathcal{N}(p)$ пересечение $V \cap \mathcal{L}im E \setminus \{p\}$ содержит точку $y \in \mathcal{L}im E$. Рассмотрим теперь элементарную окрестность $W \in \mathcal{N}(y)$ такую, что $W \subset V$ и $p \notin W$ (см. свойство 6 в 2.4). Тогда пересечение $W \cap E \setminus \{y\}$ содержит некоторую точку $x \neq p$.

Окончательно имеем: $x \in W \cap E \setminus \{y\} \subset V \cap E \setminus \{y, p\}$. Таким образом, теорема доказана.

3 ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРИМЕРЫ

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}$ — конечное или бесконечное множество, а $\mathbb{S}$ — множество произвольной природы. Отображение

$$x : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{S} \quad (3.1.1)$$

называется последовательностью точек множества $\mathbb{S}$, индексированных числами множества $\mathbb{A}$. Последовательность (3.1.1) обозначается одним

из следующих символов:

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{A}}; \quad x_n, \quad n \in \mathbb{A};$$

или $\{x_n\}$, если множество индексов $\mathbb{A}$ в контексте не меняется.

Таким образом, $x_n \in \mathbb{S}$ — это просто значение последовательности (3.1.1) на номере $n \in \mathbb{A}$.

В дальнейшем изложении мы будем, в основном, рассматривать $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \cup \{0\}$ или $\mathbb{Z}$ в качестве множества индексов $\mathbb{A}$, и метрическое пространство $(\mathbb{M}, d)$ в качестве множества $\mathbb{S}$ значений последовательности.

3.2. ПРИМЕР. 1) $z_n = e^{in} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

3.2. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Фиксируем произвольное метрическое пространство $(\mathbb{M}, d)$.

3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть дана последовательность $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{M}$. Число $p \in \mathbb{M}$ называется *пределом* последовательности x_n , если для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(p)$ найдется номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$x_n \in U \quad \text{для всех номеров } n \geq n_0. \quad (3.2.2)$$

Для обозначения сходимости последовательности $\{x_n\}$ к числу p при $n \rightarrow \infty$ употребляют символы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p, \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p \quad \text{или} \quad x_n \rightarrow p \mid_{n \rightarrow \infty}.$$

3.4. ЗАДАЧА. Доказать, что в определении предела 3.3 достаточно рассматривать лишь элементарные окрестности точки p .

3.5. ЗАДАЧА. Доказать, что если $p \in \mathbb{M}$ — предельная точка для множества $E \subset \mathbb{M}$, то существует последовательность точек $x_n \in E \setminus \{p\}$, сходящаяся к точке p при $n \rightarrow \infty$.

УКАЗАНИЕ: Рассмотреть базисную систему $\{B_n\}$ окрестностей точки p свойства 5 в утверждении 2.4 и в каждой из них выбрать точку $x_n \in B_n \cap A \setminus \{p\}$. Последовательность x_n сходится к точке p при $n \rightarrow \infty$.

3.6. ЗАДАЧА. Доказать из определения, что если $x_n \in \mathbb{M}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$, то $p \in \mathbb{M}$ последовательность x_n ограничена: т. е. существует число $L \in \mathbb{R}$ такое, что $x_n \in B(p, L)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Условие (3.2.2) словами можно выразить следующим образом: *члены последовательности x_n принадлежат окрестности U точки p для всех номеров начиная с некоторого.*

Последнее свойство будем обозначать символом: $x_n \in U|_{n \rightarrow \infty}$. Таким образом, символ $x_n \in U|_{n \rightarrow \infty}$ применяется в тех случаях, когда существует номер n_0 такой, что $x_n \in U$ для всех $n \geq n_0$, или, эквивалентно, $x_n \in U$ для всех номеров начиная с некоторого.

3.7. ЗАДАЧА. Проверить, что определение 3.3 предела эквивалентно следующему: *число $p \in \mathbb{M}$ будет пределом последовательности x_n , если и только если*

для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(p)$ верно $x_n \in U|_{n \rightarrow \infty}$.

3.8. ЗАДАЧА. Исследовать на сходимость последовательности 1–3 задачи 3.2. Найти пределы в случае их существования.

Более общо, для всякого натурального $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим некоторое высказывание $\Phi(n)$, о котором можно сказать истинно оно или ложно. Мы будем употреблять символ

$$\Phi(n)|_{n \rightarrow \infty}$$

для обозначения того, что высказывание $\Phi(n)$ истинно для всех n начиная с некоторого номера, т. е. существует номер n_0 такой, что $\Phi(n)$ истинно для всех $n \geq n_0$.

3.9. ЗАДАЧА. Обобщить задачу 3.6: доказать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p \in \mathbb{M}$, то последовательность x_n ограничена при больших n : т. е. существует число $L \in \mathbb{R}$ такое, что $x_n \in B(0, L)|_{n \rightarrow \infty}$.

3.3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.10. ТЕОРЕМА. *Последовательность может иметь только один предел.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать, что предел последовательности единствен. Для этого мы докажем, что $a = b$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. Пусть $a \neq b$. Известно, что существуют непересекающиеся окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ и $V \in \mathcal{N}(b)$. Тогда с одной стороны $x_n \in U$ для всех $n \geq n_1$, а с другой будет $x_n \in V$ для всех $n \geq n_2$. Положим $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Тогда для номера $n \geq n_0$ имеем $x_n \in U \cap V$. Таким образом, окрестности U и V имеют непустое пересечение, что противоречит их выбору.

3.4. ПРЕДЕЛ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

В этом разделе мы рассматриваем произвольное нормированное конечномерное пространство $\mathbb{V}$ с метрикой $d(u, v) = |u - v|$, порожденной нормой, и последовательности в этом пространстве.

3.11. ТЕОРЕМА. *Сумма пределов равна пределу суммы: если для двух последовательностей $x_n \in \mathbb{V}$ и $y_n \in \mathbb{V}$ существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{V}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \in \mathbb{V}$, и определена сумма $a + b$, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (3.4.3)$$

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b, \quad \text{если } a \in \mathbb{V}, b \in \mathbb{V}. \quad (3.4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует число $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_1$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и существует число $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_2$ выполняется неравенство

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для всех $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ имеем

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$, и равенство (3.4.3) в этом случае доказано.

3.12. ТЕОРЕМА. *Произведение пределов равно пределу произведения: если для последовательности скаляров имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, а для последовательности элементов нормированного пространства $\mathbb{V}$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \in \mathbb{V}$, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = ab. \quad (3.4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, соответственно, в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{V}$, то они ограничены при больших n (см задачу 3.6): существуют числа $L \in (0, \infty)$ и $n_1 \in \mathbb{N}$ такие, что $|x_n| \leq L$ и $|y_n| \leq L$ для всех $n \geq n_1$ (ПРОВЕРИТЬ ЭТО!, см. задачу 3.9).

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует число $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_2$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2L},$$

и существует число $n_3 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_3$ выполняется неравенство

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

Тогда для всех $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$ имеем

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - a \cdot b| &= |(x_n - a) \cdot y_n + a \cdot (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| \cdot |y_n| + |a| \cdot |y_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L + \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$, и равенство (3.4.5) в этом случае доказано.

3.5. ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА О ЧАСТИЧНЫХ ПРЕДЕЛАХ

3.5.1. ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть дана последовательность $x_n \in \mathbb{M}$, $n \in \mathbb{N}$.

3.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число $a \in \mathbb{M}$ называется *частичным пределом* последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, если существует последовательность натуральных чисел $\{n_k \in \mathbb{N}\}_{k \in \mathbb{N}}$ с условием $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a. \quad (3.5.7)$$

3.14. ЗАДАЧА. Если последовательность $x_n \in \mathbb{M}$ сходится к числу $a \in \mathbb{M}$ при $n \rightarrow \infty$, то a будет также и пределом любой ее подпоследовательности. В этом случае все ее частичные пределы совпадают.

3.15. ЗАДАЧА. Последовательность $x_n \in \mathbb{M}$ сходится к числу $a \in \mathbb{M}$ при $n \rightarrow \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ множество

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}$$

конечное.

3.16. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Число $a \in \mathbb{M}$ является частичным пределом последовательности $\{x_n \in \mathbb{M}\}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда и только тогда, когда для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ и любого $k \in \mathbb{N}$ пересечение

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \cap [k, +\infty) \quad \text{непустое.} \quad (3.5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\lim_{l \rightarrow \infty} x_{n_l} = a$ для некоторой последовательности натуральных чисел $\{n_l\}_{l \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющей условию $\lim_{l \rightarrow \infty} n_l = +\infty$. Фиксируем окрестность $U \in \mathcal{N}(a)$. Тогда существует номер l_0 такой, что для всех $l \geq l_0$ выполняется $x_{n_l} \in U$. Проверим, что пересечение

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \cap [k, +\infty)$$

непустое. В самом деле, так как $n_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$, то существует номер l_1 такой, что будет $n_l \geq k$ для всех $l \geq l_1$. Если взять теперь $l \geq \max(l_0, l_1)$, то для натурального числа n_l одновременно выполняется $x_{n_l} \in U$ и $n_l \geq k$. Следовательно, пересечение (3.5.8) непусто.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть для точки $a \in \mathbb{M}$ выполнено условие (3.5.8). Рассмотрим базисную систему окрестностей $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ точки a . Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ в непустом множестве $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_k\} \cap [k, +\infty)$ найдется натуральное число n_k . Так как $k \leq n_k$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ и очевидно выполняется (3.5.7). Следовательно, a — частичный предел последовательности $\{x_n\}$.

4 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

4.1. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ $f : A \rightarrow \mathbb{T}$, $A \subset \mathbb{M}$. ПРИМЕРЫ.

В этом разделе мы рассматриваем метрические пространства $(\mathbb{M}, d)$, $(\mathbb{T}, \rho)$, S , и конечномерное нормированное пространство $\mathbb{V}$.

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим функцию $f : A \rightarrow \mathbb{T}$, определенную на множестве $A \subset \mathbb{M}$. Пусть $p \in \mathcal{L}im A$ — произвольная предельная точка множества A . Точка $a \in \mathbb{T}$ называется *пределом* функции $f : A \rightarrow \mathbb{T}$ при $x \rightarrow p$ по множеству A , если для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ найдется окрестность $V \in \mathcal{N}(p)$ такая, что для любой точки $x \in V \cap A \setminus \{p\}$ имеем $f(x) \in U$.

Вышесказанное записывают символически одним из способов:

$$\lim_{x \rightarrow p, x \in A} f(x) = a, \quad f(x) \rightarrow a \mid_{x \rightarrow p, x \in A} \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow a \text{ при } x \rightarrow p, x \in A.$$

4.2. ЗАДАЧА. Доказать, что в определении 4.1 достаточно рассматривать только элементарные окрестности вместо произвольных.

4.3. ЗАДАЧА. Доказать, что в случае $A = \mathbb{N}$, $p = +\infty$, определение 4.1 предела функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{T}$ совпадает с определением 3.3 предела последовательности.

Следовательно, приводимые ниже свойства пределов можно рассматривать как обобщения аналогичных свойств предела последовательности.

4.2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ.

Следующее свойство является обобщением теоремы 3.10.

4.4. ТЕОРЕМА. Функция $f : A \rightarrow \mathbb{T}$, $A \subset \mathbb{M}$, может иметь только один предел при $x \rightarrow p \in \mathcal{L}im A$ по множеству A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать, что предел последовательности единствен. Для этого мы докажем, что $a = b$, если

$$\lim_{x \rightarrow p, x \in A} f(x) = a \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow p, x \in A} f(x) = b.$$

Пусть $a \neq b$. Известно, что существуют непересекающиеся окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ и $W \in \mathcal{N}(b)$. Тогда, с одной стороны $f(x) \in U$, для всех $x \in V_1 \cap A \setminus \{p\}$, а с другой, будет $f(x) \in W$ для всех $x \in V_2 \cap A \setminus \{p\}$, где V_1 и V_2 — некоторые окрестности точки p . Положим $V = V_1 \cap V_2$. Тогда для $x \in V \cap A \setminus \{p\}$ имеем $f(x) \in U \cap W$. Таким образом, окрестности U и W имеют непустое пересечение, что противоречит их выбору.

4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для всякого $x \in A$ рассмотрим некоторое высказывание $\Phi(x)$, о котором можно сказать истинно он или ложно. Мы будем употреблять символ

$$\Phi(x) \mid_{x \rightarrow p, x \in A}$$

для обозначения того, что высказывание $\Phi(x)$ истинно для всех $x \in A \setminus \{p\}$ из некоторой окрестности $V \in \mathcal{N}(p)$, т. е. существует окрестность $V \in \mathcal{N}(p)$ такая, что $\Phi(x)$ истинно для всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$.

Используя это обозначение, определение предела можно записать в следующей форме: $\lim_{x \rightarrow p, x \in A} f(x) = a$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ имеем $f(x) \in U \mid_{x \rightarrow p, x \in A}$.

4.6. ЗАДАЧА. Доказать, что в случае

$$\lim_{x \rightarrow p, x \in A} f(x) = a \in \mathbb{V}$$

существует такое число $L \in \mathbb{R}$, что

$$|f(x)| \leq L \mid_{x \rightarrow p, x \in A}.$$

Это свойство выражают такими словами: *функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.*

4.3. ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЕ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ.

4.7. ТЕОРЕМА. Пусть даны две функции $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow \mathbb{S}$, $A \subset \mathbb{M}$, $B \subset \mathbb{T}$, такие, что

$$\lim_{x \rightarrow p, x \in A} f(x) = q, \quad \text{где } p \in \mathcal{L}im A,$$

а

$$\lim_{y \rightarrow q, y \in B} g(y) = s \quad \text{где } q \in \mathcal{L}im B.$$

Тогда при одном из следующих двух условий

1) либо $f(x) \neq q \mid_{x \rightarrow p, x \in A}$

2) либо при невыполнении первого условия $s = g(q)$

имеем

$$\lim_{x \rightarrow p, x \in A} g \circ f(x) = s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой окрестности $W \in \mathcal{N}(s)$ существует окрестность $U \in \mathcal{N}(q)$ такая, что $g(y) \in W$ для любой точки $y \in U \cap B \setminus \{q\}$. Далее существует окрестность $V_1 \in \mathcal{N}(p)$ такая, что $f(x) \in U$ для любой точки $x \in V_1 \cap A \setminus \{p\}$.

Если теперь $f(x) \neq q \mid x \rightarrow p, x \in A$, то существует окрестность $V_2 \in \mathcal{N}(p)$ такая, что $f(x) \neq q$ для любой точки $x \in V_2 \cap A \setminus \{p\}$. Тогда имеем $g \circ f(x) \in W$ для любой точки $x \in V \cap A \setminus \{p\}$, где окрестность $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}(p)$.

Если первое условие не выполнено, тогда в окрестности V_1 могут быть точки x такие, что $f(x) = q$. В силу условия $s = g(q)$ в такой точке имеем $g \circ f(x) = g(q) = s \in W$. Последнее обеспечивает $g \circ f(x) \in W$ для любой точки $x \in V_1 \cap A \setminus \{p\}$. По определению предела имеем

$$\lim_{x \rightarrow p, x \in A} g \circ f(x) = s.$$

4.8. ЗАДАЧА. Доказать, что «невыполнении первого условия» теоремы 4.7 эквивалентно тому, что точка p является предельной для множества $f^{-1}(q)$.

4.4. ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ В НЕРАВЕНСТВАХ.

Следующее свойство является обобщением теоремы о неравенстве пределов для функция одной переменной.

4.9. ТЕОРЕМА. Пусть даны две функции $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{M}$, для которых существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow p, x \in A} f(x) = a \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow p, x \in A} g(x) = b \in \mathbb{R}.$$

Если

- 1) $a < b$, то $f(x) < g(x) \mid x \rightarrow p, x \in A$;
- 2) $f(x) \leq g(x) \mid x \rightarrow p, x \in A$, то $a \leq b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Рассмотрим для этого две непересекающиеся элементарные окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ и $W \in \mathcal{N}(b)$ (см. свойство 7 раздела 2.4). По условию теоремы существует окрестность V_1 (V_2) такая, что $f(x) \in U$ для всех $x \in V_1 \cap A \setminus \{p\}$ ($g(x) \in W$ для всех $x \in V_2 \cap A \setminus \{p\}$). Тогда для всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$, где $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}(p)$, имеем $f(x) < g(x)$.

При доказательство второго свойства надо исключить возможность $b < a$. Если такое случилось, то в силу первого пункта имеем $g(x) < f(x) \mid x \rightarrow p, x \in A$, что противоречит условию.

4.5. ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЕ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ФУНКЦИИ.

Следующее утверждение является обобщением теоремы о промежуточной последовательности.

4.10. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbb{M}$ — метрическое пространство. Пусть даны три функции $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, где $A \subset \mathbb{M}$ такие, что

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \mid_{x \rightarrow p, x \in A}.$$

Если существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow p, x \in A} f(x) = a \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow p, x \in A} g(x) = a,$$

то существует также и предел

$$\lim_{x \rightarrow p, x \in A} h(x) = a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную элементарную окрестность $U \in \mathcal{N}(a)$. По условию теоремы существуют окрестности V_1 , V_2 и V_3 точки p такие, что

- 1) $f(x) \in U$ для всех $x \in V_1 \cap A \setminus \{p\}$,
- 2) $g(x) \in U$ для всех $x \in V_2 \cap A \setminus \{p\}$,
- 3) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ для всех $x \in V_3 \cap A \setminus \{p\}$.

Тогда для всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$, где $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3 \in \mathcal{N}(p)$, одновременно выполняются все три условия. Отсюда выводим, что $h(x) \in U$ при всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow p, x \in A} h(x) = a$.

4.6. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИИ.

Следующее утверждение является обобщением теоремы 1.6.

4.11. ТЕОРЕМА. Функция $f : A \rightarrow \mathbb{T}$ сходится к $a \in \mathbb{T}$ при $x \rightarrow p \in \mathbb{M}$ по множеству $A \subset \mathbb{M}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V \in \mathcal{N}(p)$ такая, что для всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$ выполняется неравенство $\rho(f(x), a) < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

4.12. ЗАДАЧА. Функция $f : A \rightarrow \mathbb{T}$ сходится к $a \in \mathbb{T}$ при $x \rightarrow p \in \mathbb{M}$ по множеству $A \subset \mathbb{M}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in A$ с условием $0 < d(x, p) < \delta$ выполняется неравенство $\rho(f(x), a) < \varepsilon$.

4.7. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ.

Следующее утверждение является обобщением теоремы 3.11. Здесь A множество в метрическом пространстве $\mathbb{M}$, а $\mathbb{V}$ — конечномерное нормированное пространство.

4.13. ТЕОРЕМА. *Сумма пределов равна пределу суммы: если*

$$\lim_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}} f(x) = a \in \mathbb{V}, \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}} g(x) = b \in \mathbb{V},$$

то

$$\lim_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}} f(x) + \lim_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}} g(x) = a + b. \quad (4.7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По теореме 4.11 существует окрестность $V_1 \in \mathcal{N}(p)$ такая, что для всех $x \in V_1 \cap A \setminus \{p\}$ выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и существует окрестность $V_2 \in \mathcal{N}(p)$ такая, что для всех $x \in V_2 \cap A \setminus \{p\}$ выполняется неравенство

$$|g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$, где $V = V_1 \cap V_2$, имеем

$$|(f(x) + g(x)) - (a + b)| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}} (f(x) + g(x)) = a + b$, и равенство (4.7.1) доказано.

4.14. ТЕОРЕМА. *Произведение пределов равно пределу произведения: если даны функции $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : A \rightarrow \mathbb{V}$ такие, что*

$$\lim_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}} f(x) = a \in \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}} g(x) = b \in \mathbb{V},$$

то

$$\lim_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b. \quad (4.7.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $f(x)$ сходится в $\mathbb{R}$, а функция $g(x) — в $\mathbb{V}$, то они ограничены при $x \rightarrow p$ по множеству A : существуют число $L \in (0, \infty)$ и окрестность $V_1 \in \mathcal{N}(p)$ такие, что $|f(x)| \leq L$ и $|g(x)| \leq L$ для всех $x \in V_1$ (ПРОВЕРИТЬ ЭТО!, см. задачу 4.6).$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует окрестность $V_2 \in \mathcal{N}(p)$ такая, что для всех $x \in V_2 \cap A \setminus \{p\}$ выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2L},$$

и существует окрестность $V_3 \in \mathcal{N}(p)$ такая, что для всех $x \in V_3 \cap A \setminus \{p\}$ имеем

$$|g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

Тогда для всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$, где $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$, имеем

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - a \cdot b| &= |(f(x) - a) \cdot g(x) + a \cdot (g(x) - b)| \\ &\leq |f(x) - a| \cdot |g(x)| + |a| \cdot |g(x) - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L + \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$, и равенство (4.7.2) доказано.

4.8. КРИТЕРИЙ ГЕЙНЕ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИИ.

4.15. КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ ГЕЙНЕ. Функция $f : A \rightarrow \mathbb{T}$ имеет предел при $x \rightarrow p \in \text{Lim } A$ по множеству $A \subset \mathbb{M}$ тогда и только тогда, когда для каждой последовательности $s_n \in A$, сходящейся к p , последовательность $\{f(s_n)\}$ является сходящейся. Более того, все такие пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n)$ совпадают и их общее значение равно $\lim_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}} f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\lim_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}} f(x) = a$.

Тогда для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ существует окрестность $V \in \mathcal{N}(p)$ такая, что $f(x) \in U$ для любой точки $x \in V \cap A \setminus \{p\}$. Пусть теперь $s_n \in A \setminus \{p\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к точке p (такие последовательности существуют в соответствии с задачей 3.5). Тогда по теореме 4.7 о пределе композиции имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = a$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Рассмотрим, прежде всего, две различные последовательности $\{s_n \in A \setminus \{p\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{s'_n \in A \setminus \{p\}\}_{n \in \mathbb{N}}$, сходящиеся к точке p , и покажем, что пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(s'_n)$$

совпадают. Составим для этого третью последовательность

$$s_1, s'_1, s_2, s'_2, \dots, s_n, s'_n, \dots$$

Понятно, что значения элементов этой последовательности принадлежат множеству $A \setminus \{p\}$ и сходятся к точке p . По условию теоремы последовательность $f(s_1), f(s'_1), f(s_2), f(s'_2), \dots, f(s_n), f(s'_n), \dots$ сходится, и тогда две ее подпоследовательности $f(s_n)$ и $f(s'_n)$ сходятся к одному и тому же пределу. Таким образом, все последовательности вида $\{f(s_n)\}$ при условии $A \setminus \{p\} \ni s_n \rightarrow p$ при $n \rightarrow \infty$ имеют общий предел, который мы обозначим буквой a .

Докажем теперь, что предел $\lim_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}} f(x) = a$. Рассмотрим произвольную базисную систему $\{B_n\}$ окрестностей точки p . Если неверно, что $\lim_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}} f(x) = a$, то найдется окрестность $U \in \mathcal{N}(a)$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $s_n \in B_n \cap A \setminus \{p\}$ такая, что $f(s_n) \notin U$. Тогда очевидно $s_n \rightarrow p$ при $n \rightarrow \infty$, а с другой $f(s_n) \notin U$. Таким образом, предел последовательности $f(s_n)$ не может быть равным a . Получено противоречие с доказанным выше условием, что этот предел должен равняться a .

4.9. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ СРАВНЕНИЯ. Символы O и o , правила ОПЕРИРОВАНИЯ С НИМИ.

Пусть на множестве $A \subset \mathbb{M}$ заданы две функции f и g со значениями в конечномерном нормированном пространстве $\mathbb{V}$, и фиксирована точка $p \in \mathcal{L}im A$.

4.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что функция $f(x)$ *бесконечно мала относительно функции $g(x)$ при x , стремящемся к p по множеству A* , если для каждого $\varepsilon > 0$ справедливо следующее асимптотическое неравенство

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \mid_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}.$$

В этом случае говорят также, что $f(x)$ *есть o -малое от $g(x)$ при $x \rightarrow p$ по множеству A* , и пишут $f(x) = o(g(x)) \mid_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$.

4.17. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА. 1) $f(x) = o(1) \mid_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$ тогда и только тогда, когда $f(x) \rightarrow 0 \mid_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$.

2) $f(x) = o(g(x)) \mid_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$ тогда и только тогда, когда существует вещественнозначная функция $\alpha(x) = o(1)$ такая, что

$$|f(x)| = \alpha(x) |g(x)| \mid_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство первого свойства вытекает непосредственно из сравнения двух определений.

Докажем второе свойство. НЕОБХОДИМОСТЬ. Положим

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}, & \text{если } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (4.9.3)$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ существует $V \in \mathcal{N}(p)$, что $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ для любого $x \in V \cap A \setminus \{p\}$, то для x таких, что $g(x) \neq 0$, одновременно получаем $|f(x)| = \alpha(x)|g(x)|$ и $|\alpha(x)| \leq \varepsilon$. Согласно арифметическому критерию сходимости 4.11 имеем $\alpha(x) = o(1)$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ очевидна.

4.18. ЗАДАЧА. Доказать, что если $g(x) \neq 0|_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$, то $f(x) = o(g(x))|_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$ тогда и только тогда, когда $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \rightarrow 0|_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$.

4.19. ЗАДАЧА. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — вектор с неотрицательными целочисленными компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

1) Если $k < l$, $|\alpha| = l$, то $x^\alpha = o(|x|^k)|_{x \rightarrow 0}$ и $x^\beta = o(|x|^l)|_{|x| \rightarrow \infty}$, где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ и $|\beta| < l$;

2) $x^\alpha = o(e^{|x|})|_{|x| \rightarrow \infty}$ для любого мультииндекса α .

4.20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что $f(x)$ есть *O-большое от $g(x)$ при $x \rightarrow p$ по множеству A* , и пишут $f(x) = O(g(x))|_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$, если найдётся такая константа $C < \infty$, что

$$|f(x)| \leq C|g(x)||_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}.$$

4.21. ЗАДАЧА. Доказать, что $f(x) = O(g(x))|_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$ тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x)$, определенная формулой (4.9.3), асимптотически ограничена при $x \rightarrow p$ по множеству A , т. е.

$$\alpha(x) = O(1)|_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}.$$

4.22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что вещественнозначная функция $f(x)$ эквивалентна вещественнозначной функции $g(x)$ при $x \rightarrow p$ по множеству A , и писать $f(x) \sim g(x)$, если

$$f(x) - g(x) = o(g(x))|_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}.$$

4.23. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Доказать, что $f(x) \sim g(x) \mid_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$ тогда и только тогда, когда существует функция $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $|u(x)| \rightarrow 1 \mid_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$ и $f(x) = u(x)g(x) \mid_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \sim g$, то $f - g = \alpha g \mid_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$, где

$$\alpha \rightarrow 0 \mid_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}},$$

и, стало быть, $u = 1 + \alpha$.

Если же $f = ug$, где $u \rightarrow 1 \mid_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$, то $f - g = (1 - u)g = o(g) \mid_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$.

Функцию $u(x)$ со значением в $\mathbb{R}$ называют *асимптотической единицей* при $x \rightarrow p$ по множеству A , если $u(x) \sim 1 \mid_{x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}}$.

Ниже всюду в этом разделе там, где под знаками $=$, O , $\sim$, $\rightarrow$ нет приписки $x \rightarrow p, x \in A \setminus \{p\}$, она незримо присутствует.

4.24. ЗАДАЧА. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА АСИМПТОТИЧЕСКИХ СРАВНЕНИЙ.

- 1) Отношение асимптотической эквивалентности рефлексивно: $f \sim f$;
симметрично: если $f \sim g$, то $g \sim f$; и
транзитивно: если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$.
- 2) Если $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$, то $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$. Если к тому же функции g_1 и g_2 неотрицательны, то $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.
- 3) Если $f \sim g$ и $g \rightarrow a$, то $f \rightarrow a$.

4.25. ЗАДАЧА. Доказать, что если $g(x) \neq 0$ при $x \rightarrow p$, то $f(x) \sim g(x)$ тогда и только тогда, когда $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$.

4.26. ЗАДАЧА.

- 1) Если $f = o(g)$, то $f = O(g)$. Если $f \sim g$, то $f = O(g)$.
- 2) Если $f = o(g)$ и $g = O(h)$, то $f = o(h)$.
- 3) Если $f_1 = o(g_1)$ и $f_2 = O(g_2)$, то $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.
- 4) Если $f_1 = o(g_1)$ и $f_2 = o(g_2)$, то $f_1 + f_2 = o(|g_1| + |g_2|)$.

4.10. КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

5 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Отображение $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ векторных пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ называется *линейным*, если

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$$

для любых $u, v \in \mathbb{X}$ и любых α, β из поля скаляров. Совокупность всех линейных операторов из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$ с поточечными операциями сложения и умножения на скаляр образует векторное пространство.

Для линейного оператора $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ нормированных пространств определена норма

$$|L| = \sup_{|v| \leq 1} |L(v)|.$$

Линейный оператор $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ называется *ограниченным*, если его норма $|L| = \sup_{|v| \leq 1} |L(v)|$ конечна.

5.1. ЗАДАЧА. Доказать, что

$$|L| = \sup_{|v| < 1} |L(v)| = \sup_{|v|=1} |L(v)| = \sup_{|v| \neq 0} \frac{|L(v)|}{|v|}.$$

5.2. ЗАДАЧА. Доказать, что норма $|L|$ линейного оператора $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ равна точной нижней грани всех чисел $a \in \mathbb{R}$, для каждого из которых верно неравенство $|L(v)| \leq a|v|$, где $v \in \mathbb{X}$ — произвольный вектор.

Если $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$, то линейный оператор $l : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ называют *линейным функционалом*. Совокупность $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{R})$ линейных ограниченных функционалов называют *сопряженным пространством* и обозначают символом $\mathbb{X}^*$.

5.3. ЗАДАЧА. Доказать, что если линейные операторы L_1 и L_2 ограничены, то их сумма $L_1 + L_2$ — также линейный ограниченный оператор.

Совокупность линейных ограниченных операторов из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$ с поточечными операциями сложения и умножения на скаляр образует векторное пространство, обозначаемое символом $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$. Если линейному ограниченному оператору L сопоставить норму $|L|$, то $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ становится нормированным пространством (ПРОВЕРИТЬ!).

5.4. ЗАДАЧА. Доказать, что

i) если нормированное пространство $\mathbb{X}$ конечномерно, то всякий линейный оператор $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ ограничен (таким образом, в этом случае совокупность всех линейных отображений совпадает с $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$);

ii) если нормированные пространства $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ конечномерны, то нормированное пространство $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ также конечномерно. Доказать, что $\dim \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y}) = \dim \mathbb{X} \times \dim \mathbb{Y}$.

Далее мы рассматриваем только конечномерные нормированные пространства в качестве области определения.

5.1. ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

5.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $A : \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n \rightarrow \mathbb{Y}$ прямого произведения векторных пространств $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ в векторное пространство $\mathbb{Y}$ называется *полилинейным* (*n -линейным*), если отображение

$$\mathbb{X}_k \ni u_k \mapsto A(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$$

линейно по переменной $u_k \in \mathbb{X}_k$ при фиксированных значениях переменных $u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n$, $k = 1, \dots, n$.

Совокупность n -линейных отображений $A : \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n \rightarrow \mathbb{Y}$ будет обозначаться символом $\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$.

В частности, при $n = 1$ получаем множество $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ линейных операторов из $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$.

При $n = 2$ полилинейное отображение называется билинейным, при $n = 3$ — трилинейным и т. д. Следует отличать n -линейное отображение $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$ от линейного отображения $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ векторного пространства $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n$ в $\mathbb{Y}$.

Если $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$, то линейные и полилинейные отображения называют линейными или соответственно полилинейными функционалами.

5.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $A : \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n \rightarrow \mathbb{Y}$ — полилинейный оператор, действующий из прямого произведения нормированных пространств $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$. Величина

$$|A| = \sup_{\substack{u_1, \dots, u_n \\ u_i \neq 0}} \frac{|A(u_1, \dots, u_n)|_{\mathbb{Y}}}{|u_1|_{\mathbb{X}_1} \cdot \dots \cdot |u_n|_{\mathbb{X}_n}}, \quad (5.1.1)$$

где верхняя грань берется по всевозможным наборам $u_1, \dots, u_n$, отличных от нуля векторов пространств $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$, называется *нормой* полилинейного оператора A .

В правой части формулы (5.1.1) вместо знака $|\cdot|$ нормы вектора употреблено обозначение $|\cdot|_{\mathbb{X}_1}$, рядом с которым стоит символ того нормированного пространства, которому вектор принадлежит. В дальнейшем мы будем придерживаться этого обозначения для нормы вектора и, если не возникает недоразумений, будем опускать символ пространства, подразумевая, что норма (модуль) вектора вычисляется всегда в том пространстве, которому вектор принадлежит. Мы хотим тем самым пока внести некоторое различие в обозначения нормы вектора и нормы

линейного или полилинейного оператора, действующего на нормированных векторных пространствах.

Рассмотрим некоторые примеры полилинейных отображений и найдем их нормы.

5.7. ПРИМЕР. Обычное произведение $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ n действительных чисел является типичным примером n -линейной функции $A \in \mathcal{L}(\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}; \mathbb{R})$.

Непосредственно из определения 5.6 в данном случае получаем, $|A| = 1$.

5.8. ПРИМЕР. Обобщением предыдущего примера является произведение

$$(u_1, \dots, u_n) \rightarrow l_1(u_1) \cdot \dots \cdot l_n(u_n)$$

n линейных функционалов $l_k : \mathbb{X}_k \rightarrow \mathbb{R}$. Нетрудно видеть, что этот полилинейный оператор является элементом пространства $\mathcal{L}(\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n; \mathbb{R})$.

5.9. ПРИМЕР. В пространстве $\mathbb{X}$ фиксируем базис $e_1, \dots, e_m$. Определим линейную функцию $l : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ полагая $l(u) = \sum_{j=1}^m u_j$ для вектора $u = \sum_{j=1}^m u_j e_j$. Аналогично предыдущему примеру определим n -линейную функцию

$$l(u_1, \dots, u_n) = l(u_1) \cdot \dots \cdot l(u_n), \quad (5.1.2)$$

где $u_i \in \mathbb{X}$, $i = 1, \dots, n$.

Полагая в (5.1.2) $u = u_1 = \dots = u_n$, получаем

$$l(u, \dots, u) = l(u)^n = \left(\sum_{j=1}^m u_j \right)^n = \sum_{j_1=1, \dots, j_n=1}^m u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{j_n}. \quad (5.1.3)$$

В правой сумме формулы (5.1.3) есть повторяющиеся слагаемые. Заметим, что в случае $m = 2$ эта сумма является известным биномом

Ньютона, записываемый в виде

$$\begin{aligned} l(u)^n &= (u_1 + u_2)^n = \sum_{j_1=1, \dots, j_n=1}^2 u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{j_n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} u_1^k u_2^{n-k} = \sum_{k_1+k_2=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2!} u_1^{k_1} u_2^{k_2}. \quad (5.1.4) \end{aligned}$$

Возникает естественное желание обобщить формулу (5.1.4) на произвольное число слагаемых. База индукции — это как раз формула (5.1.4). Пусть для m слагаемых, $m \geq 2$, правая сумма в (5.1.3) записывается в виде

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2 + \dots + u_m)^n &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \cdot \dots \cdot u_m^{k_m}. \quad (5.1.5) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь $m+1$ слагаемое $u_1 + u_2 + \dots + u_m + u_{m+1} = v + u_{m+1}$, где $v = u_1 + u_2 + \dots + u_m$. Тогда применяя базу индукции, а затем индукционное предположение, получаем

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2 + \dots + u_m + u_{m+1})^n &= (v + u_{m+1})^n = \sum_{j+k_{m+1}=n} \frac{n!}{j! \cdot k_{m+1}!} v^j \cdot u_{m+1}^{k_{m+1}} \\ &= \sum_{j+k_{m+1}=n} \frac{n!}{j! \cdot k_{m+1}!} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=j} \frac{j!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \cdot \dots \cdot u_m^{k_m} \cdot u_{m+1}^{k_{m+1}} \\ &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m+k_{m+1}=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m! \cdot k_{m+1}!} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \cdot \dots \cdot u_m^{k_m} \cdot u_{m+1}^{k_{m+1}}. \end{aligned}$$

Следовательно, формула (5.1.5) доказана.

5.10. ПРИМЕР. Скалярное произведение в евклидовом векторном пространстве $\mathbb{E}$ над полем $\mathbb{R}$ является билинейной функцией

$$\mathbb{E} \ni (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle.$$

В силу неравенства Коши — Буняковского

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u| \cdot |v|,$$

причем это неравенство переходит в равенство, если и только если $u = v$. Следовательно, $|A| = 1$.

5.11. ПРИМЕР. Векторное произведение $(u, v) \mapsto [u, v]$ векторов трехмерного евклидова пространства $\mathbb{E}^3$ является билинейным оператором, т. е. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{E}^3, \mathbb{E}^3; \mathbb{E}^3)$.

Мы знаем, что

$$|[u, v]| = |u| \cdot |v| \sin \varphi,$$

где φ — угол между векторами u и v , поэтому $A \leq 1$. В то же время, если векторы u, v ортогональны, то $\sin \varphi = 1$. Таким образом, $|A| = 1$.

5.12. ПРИМЕР. Если $\mathbb{X}$ — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в $\mathbb{X}$, $v_i = \sum_{j=1}^n v_i^j e_j$ — координатное представление вектора $v_i \in \mathbb{X}$, $i = 1, \dots, n$, то, полагая

$$A(v_1, \dots, v_n) = \det \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ v_n^1 & \dots & v_n^n \end{pmatrix},$$

получаем n -линейную функцию $A : \underbrace{\mathbb{X} \times \dots \times \mathbb{X}}_n \rightarrow \mathbb{R}$.

Если считать, что векторы принадлежат евклидову пространству $\mathbb{R}^n$, то можно заметить, что $A(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n)$ есть объем параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, \dots, v_n$, и этот объем максимален, если векторы $v_1, \dots, v_n$, сохранив их длины, сделать взаимно ортогональными. Таким образом,

$$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq |v_1| \cdot \dots \cdot |v_n|,$$

причем для ортогональных векторов имеет место равенство. Значит, в рассматриваемом случае $|A| = 1$.

Пользуясь свойствами нормы вектора и свойствами полилинейного оператора, формулу (5.1.1) можно переписать следующим образом:

$$|A| = \sup_{\substack{u_1, \dots, u_n \\ u_i \neq 0}} \left| A\left(\frac{u_1}{|u_1|}, \dots, \frac{u_n}{|u_n|}\right) \right| = \sup_{\omega_1, \dots, \omega_n} |A(\omega_1, \dots, \omega_n)|, \quad (5.1.6)$$

где последняя верхняя грань берется по всевозможным наборам $\omega_1, \dots, \omega_n$ единичных векторов пространств $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ соответственно (т. е. $|\omega_i| = 1$, $i = 1, \dots, n$).

В частности, для линейного оператора $A : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ из (5.1.1) и (5.1.6) получаем

$$|A| = \sup_{u \neq 0} \frac{|Au|}{|u|} = \sup_{|\omega|=1} |A\omega|. \quad (5.1.7)$$

Из определения 5.6 нормы полилинейного оператора A следует, что если $|A| < \infty$, то при любых векторах $u_i \in \mathbb{X}_i$, $i = 1, \dots, n$, справедливо неравенство

$$|A(u_1, \dots, u_n)| \leq |A| \cdot |u_1| \cdot \dots \cdot |u_n|. \quad (5.1.8)$$

В частности, для линейного оператора получаем

$$|Au| \leq |A| \cdot |u|. \quad (5.1.9)$$

Кроме того, из определения 5.6 следует, что если норма полилинейного оператора конечна, то она есть нижняя грань тех чисел M , для которых неравенство

$$|A(u_1, \dots, u_n)| \leq M \cdot |u_1| \cdot \dots \cdot |u_n| \quad (5.1.10)$$

выполнено при любых значениях $u_i \in \mathbb{X}_i$, $i = 1, \dots, n$.

5.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Полилинейный оператор $A : \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n \rightarrow \mathbb{Y}$ называется *ограниченным*, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что при любых значениях $u_1, \dots, u_n$ из пространств $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ соответственно справедливо неравенство (5.1.10).

Таким образом, ограниченными являются те и только те операторы, которые имеют конечную норму.

На основании соотношения (5.1.7) легко понять геометрический смысл нормы линейного оператора в знакомом случае $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. В этом случае единичная сфера пространства $\mathbb{R}^m$ переходит под действием преобразования A в некоторый эллипсоид в $\mathbb{R}^n$, центр которого совпадает с нулем в $\mathbb{R}^n$. Значит, норма A в данном случае просто наибольшая из полуосей этого эллипсоида.

С другой стороны, норму линейного оператора можно трактовать также как верхнюю грань коэффициентов растяжения векторов при данном отображении, что видно из первого равенства в (5.1.7).

5.2. ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Полилинейные операторы в конечномерных пространствах обладают следующим свойством.

5.14. СВОЙСТВО. Полилинейный оператор $A : \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n \rightarrow \mathbb{Y}$, действующий из произведения конечномерных нормированных пространств $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$, обладает следующими свойствами:

- A — ограниченный оператор,
- A — непрерывный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства а) в каждом из пространств $\mathbb{X}_i$ фиксируем базис $e_1^{(i)}, \dots, e_{l_i}^{(i)}$. Тогда вектор $u_{(i)} \in \mathbb{X}_i$ можно представить в этом базисе как

$$u_{(i)} = \sum_{j_i=1}^{l_i} u_{(i)}^{j_i} e_{j_i}^{(i)}.$$

Ввиду полилинейности оператора A имеем

$$\begin{aligned} A(u_{(1)}, \dots, u_{(n)}) &= A\left(\sum_{j_1=1}^{l_1} u_{(1)}^{j_1} e_{j_1}^{(1)}, \dots, \sum_{j_n=1}^{l_n} u_{(n)}^{j_n} e_{j_n}^{(n)}\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{l_1} \dots \sum_{j_n=1}^{l_n} u_{(1)}^{j_1} \cdot \dots \cdot u_{(n)}^{j_n} A(e_{j_1}^{(1)}, \dots, e_{j_n}^{(n)}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$|A(u_{(1)}, \dots, u_{(n)})| \leq M \cdot \sum_{j_1=1}^{l_1} \dots \sum_{j_n=1}^{l_n} |u_{(1)}^{j_1}| \cdot \dots \cdot |u_{(n)}^{j_n}|, \quad (5.2.11)$$

где $M = \max_{j_1, \dots, j_n} |A(e_{j_1}^{(1)}, \dots, e_{j_n}^{(n)})|$. В пространстве $\mathbb{X}_k$ рассмотрим норму $|v|_{k, \infty} = \sup_{j_k=1, \dots, l_k} |v^{j_k}|$. Поскольку в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, то $|v|_{k, \infty} \leq c_k |v|_{\mathbb{X}_k}$ для некоторой постоянной c_k . Следовательно, имеем $|u_{(k)}^{j_k}| \leq c_k |u_{(k)}|_{\mathbb{X}_k}$. Поэтому каждое слагаемое в сумме (5.2.11) не превосходит $c_1 \dots c_n \cdot |u_{(1)}|_{\mathbb{X}_1} \dots |u_{(n)}|_{\mathbb{X}_n}$. Окончательно получаем следующую оценку для нормы полилинейного отображения:

$$|A| \leq M \cdot l_1 \cdot \dots \cdot l_n \cdot c_1 \cdot \dots \cdot c_n = T. \quad (5.2.12)$$

Из ограниченности оператора A вытекает его непрерывность. В самом деле,

$$\begin{aligned} & A(u_1 + h_1, u_2 + h_2, \dots, u_n + h_n) - A(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= A(h_1, u_2, \dots, u_n) + \dots + A(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, h_n) \\ &+ A(h_1, h_2, u_3, \dots, u_n) + \dots + A(u_1, \dots, u_{n-2}, h_{n-1}, h_n) + \\ &\dots \dots \dots + A(h_1, \dots, h_n). \end{aligned}$$

Теперь в силу (5.2.12) получаем оценку

$$\begin{aligned} & |A(u_1 + h_1, u_2 + h_2, \dots, u_n + h_n) - A(u_1, u_2, \dots, u_n)| = \\ & \leq T \cdot (|h_1||u_2| \cdot \dots \cdot |u_n| + \dots + |u_1| \cdot |u_2| \cdot \dots \cdot |u_{n-1}||h_n| \\ & \quad + |h_1||h_2||u_3| \cdot \dots \cdot |u_n| + \dots + |u_1||u_2| \cdot \dots \cdot |h_{n-1}||h_n| + \\ & \quad \dots + |h_1| \cdot \dots \cdot |h_n|), \end{aligned}$$

из которой, очевидно, следует непрерывность полилинейного отображения A в любой точке $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n$. $\square$

Начиная с этого места, символом $\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$ будет обозначать совокупность всех полилинейных операторов, действующих из прямого произведения конечномерных нормированных пространств $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$. В частности, $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ есть множество всех линейных операторов из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$.

В множестве $\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$ вводится естественная структура линейного пространства:

$$(\alpha A + \beta B)(u_1, \dots, u_n) = \alpha A(u_1, \dots, u_n) + \beta B(u_1, \dots, u_n)$$

для скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Очевидно, если $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$, то $\alpha A + \beta B$ — также полилинейное отображение.

5.15. ЗАДАЧА. Проверить, что множество $\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$ с введенными операциями сложения и умножения на скаляр является векторным пространством.

Доказать, что оно конечномерное, если $\mathbb{Y}$ конечномерное, и найти его размерность, при условии если известны размерности всех участвующих пространств.

5.16. СВОЙСТВО. С нормой (5.1.1) векторное пространство

$$\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$$

полилинейных операторов является нормированным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что в силу свойства 5.14 норма $|A|$ любого оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$ — неотрицательное действительное число.

Неравенство (5.1.8) показывает, что

$$|A| = 0 \iff A = 0.$$

Далее, по определению нормы полилинейного оператора

$$\begin{aligned} |\lambda A| &= \sup_{\substack{u_1, \dots, u_n \\ u_i \neq 0}} \frac{(\lambda A)(u_1, \dots, u_n)}{|u_1| \cdot \dots \cdot |u_n|} = \\ &= \sup_{\substack{u_1, \dots, u_n \\ u_i \neq 0}} \frac{|\lambda| |A(u_1, \dots, u_n)|}{|u_1| \cdot \dots \cdot |u_n|} = |\lambda| |A|. \end{aligned}$$

Наконец, если $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$, то

$$\begin{aligned} |A + B| &= \sup_{\substack{u_1, \dots, u_n \\ u_i \neq 0}} \frac{|(A + B)(u_1, \dots, u_n)|}{|u_1| \cdot \dots \cdot |u_n|} = \\ &= \sup_{\substack{u_1, \dots, u_n \\ u_i \neq 0}} \frac{|A(u_1, \dots, u_n) + B(u_1, \dots, u_n)|}{|u_1| \cdot \dots \cdot |u_n|} \leq \\ &\leq \sup_{\substack{u_1, \dots, u_n \\ u_i \neq 0}} \frac{|A(u_1, \dots, u_n)|}{|u_1| \cdot \dots \cdot |u_n|} + \sup_{\substack{u_1, \dots, u_n \\ u_i \neq 0}} \frac{|B(u_1, \dots, u_n)|}{|u_1| \cdot \dots \cdot |u_n|} = |A| + |B|. \end{aligned}$$

□

Теперь символ $\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$ обозначает *пространство n -линейных операторов*, нормированное указанной *операторной нормой*. В частности, $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ — нормированное пространство линейных операторов, действующих из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$. Пространство $\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$ банахово, если $\mathbb{Y}$ банахово. В частности, оно всегда полное, когда $\mathbb{Y}$ конечномерное.

Сделаем к доказанному свойству следующее полезное дополнение: если $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ и $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$, а $B \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}; \mathbb{Z})$, то

$$|B \circ A| \leq |B| \cdot |A|.$$

В заключение остановимся на одном специальном замечании, относящемся к пространству полилинейных операторов, которое нам потребуется при рассмотрении дифференциалов высшего порядка.

5.17. Свойство. Между пространствами

$$\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_m; \mathcal{L}(\mathbb{X}_{m+1}, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})) \quad \text{и} \quad \mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$$

при любом $m \in \{1, \dots, n\}$ существует биекция, сохраняющая линейную структуру и норму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_m; \mathcal{L}(\mathbb{X}_{m+1}, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y}))$, т. е. $B(u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_{m+1}, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$.

Желаемый изоморфизм определяется формулой:

$$A(u_1, \dots, u_n) = B(u_1, \dots, u_m)(u_{m+1}, \dots, u_n). \quad (5.2.13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |B| &= \sup_{\substack{u_1, \dots, u_m \\ u_i \neq 0}} \frac{|B(u_1, \dots, u_m)|}{|u_1| \cdot \dots \cdot |u_m|} = \\ &= \sup_{\substack{u_1, \dots, u_m \\ u_i \neq 0}} \frac{\sup_{\substack{u_{m+1}, \dots, u_n \\ u_j \neq 0}} \frac{|B(u_1, \dots, u_m)(u_{m+1}, \dots, u_n)|}{|u_{m+1}| \cdot \dots \cdot |u_n|}}{|u_1| \cdot \dots \cdot |u_m|} = \\ &= \sup_{\substack{u_1, \dots, u_n \\ u_i \neq 0}} \frac{|A(u_1, \dots, u_n)|}{|u_1| \cdot \dots \cdot |u_n|} = |A|. \end{aligned}$$

ПРОВЕРИТЬ, что соотношение 5.2.13 задает изоморфизм рассматриваемых векторных пространств. Применяя n раз свойство (5.17), в частности, получаем, что пространство

$\mathcal{L}(\mathbb{X}_1; \mathcal{L}(\mathbb{X}_2; \dots, \mathcal{L}(\mathbb{X}_n; \mathbb{Y})) \dots)$ изоморфно пространству $\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$ n -линейных операторов. □

5.18. ЗАДАЧА. Докажите, что если $A : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ — линейный оператор, действующий из конечномерного нормированного пространства $\mathbb{X}$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$ (не обязательно конечномерное), то A — непрерывный оператор.

5.19. ЗАДАЧА. Докажите для полилинейного оператора утверждение, аналогичное сформулированному в предыдущей задаче.

5.20. ЗАДАЧА. Если $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$, а $B \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}; \mathbb{Z})$, то $B \circ A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Z})$.

5.21. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два линейных нормированных пространства называются *изоморфными*, если существует такой изоморфизм между ними, как линейными векторными пространствами, который вместе с ему обратным является непрерывным линейным оператором.

5.22. ЗАДАЧА. Покажите, что линейные нормированные пространства одинаковой конечной размерности изоморфны.

5.23. ЗАДАЧА. Покажите, что в бесконечномерном случае предыдущее утверждение перестает быть верным.

5.24. ЗАДАЧА. Пусть $A : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ — линейное преобразование евклидова n -мерного пространства, $A^* : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ — сопряженное к нему преобразование. Покажите, что:

а) все собственные значения оператора $A \circ A^* : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ неотрицательны;

б) если $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ — собственные значения оператора $A \circ A^*$, то $|A| = \sqrt{\lambda_n}$;

с) если оператор A имеет обратный $A^{-1} : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$, то $|A^{-1}| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$;

д) если (a_j^i) — матрица преобразования $A : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ в некотором базисе, то справедливы оценки

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n (a_j^i)^2} \leq |A| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (a_j^i)^2} \leq \sqrt{n} \cdot |A|.$$

5.25. ЗАДАЧА. Пусть $\mathbb{P}[x]$ — векторное пространство многочленов от переменной x с вещественными коэффициентами. Норму вектора $P \in \mathbb{P}[x]$ определим формулой

$$|P| = \sqrt{\int_0^1 P^2 dx}.$$

а) Ограничен ли в полученном пространстве оператор $D : \mathbb{P}[x] \rightarrow \mathbb{P}[x]$ дифференцирования $D(P(x)) = P'(x)$?

б) Найдите норму оператора $F : \mathbb{P}[x] \rightarrow \mathbb{P}[x]$ умножения на x : $(F(P(x))) = (x \cdot P(x))$.

5.26. ЗАДАЧА. На примере оператора проектирования в $\mathbb{R}^2$ покажите, что неравенство $|B \circ A| \leq |B| \cdot |A|$ может быть строгим.

6 ДИФФЕРЕНЦИАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Все рассматриваемые в этом и последующих разделах нормированные пространства предполагаются конечномерными.

6.1. ПРОИЗВОДНАЯ ВДОЛЬ ВЕКТОРА И ЕЕ СВОЙСТВА.

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — нормированные пространства над полем $\mathbb{R}$, а $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ — отображение окрестности точки $a \in U$. Производной отображения f в точке $a \in U$ вдоль вектора $h \in \mathbb{X}$ назовем предел

$$D_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t},$$

если этот предел в $\mathbb{Y}$ существует.

Непосредственно проверяется, что

$$D_{\lambda h} f(a) = \lambda D_h f(a) \quad \text{для } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (6.1.1)$$

Из определения 6.1 видно также, что значение $D_h f(a)$ производной отображения $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ по вектору есть элемент нормированного пространства $\mathbb{Y}$, и что если L — линейное непрерывное отображение $\mathbb{Y}$ в некоторое нормированное пространство $\mathbb{Z}$, то (ПРОВЕРИТЬ!)

$$D_h(L \circ f)(a) = D(L \circ f)(a)\langle h \rangle = L \circ Df(a)\langle h \rangle = L \circ D_h f(a). \quad (6.1.2)$$

Если $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, — базис в $\mathbb{X}$, то, как известно, частная производная $D_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ в точке a равна пределу частного отношения

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}, \quad \text{если он существует.}$$

Этому пределу соответствует дифференциал отображения $t \mapsto f(a + te_i)$ (как функции одной переменной), определенного в некоторой окрестности нуля, поскольку

$$f(a + te_i) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot t + o(t) \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (6.1.3)$$

6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — нормированные пространства, $U \subset \mathbb{X}$ — некоторое подмножество, $a \in U$ — внутренняя точка. Отображение $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ называется *дифференцируемым* в точке $a \in U$, если существует линейное отображение $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, для которого

$$f(a + h) - f(a) = L(h) + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0, \quad (6.2.4)$$

символ $o(h)$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|o(h)| < \varepsilon|h|$ для любого $h \in B(0, \delta)$.

Линейное отображение $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ называется *дифференциалом* отображения f в точке a и обозначается одним из следующих символов:

$$Df(a), \quad df(a), \quad f'(a). \quad (6.2.5)$$

6.3. ЗАДАЧА. Показать, что величина $\alpha(h) = o(h)$ при $h \rightarrow 0$ может записана в эквивалентной форме: $\alpha(h) = o(1)|h|$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

6.4. СВОЙСТВО. Если отображение $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ дифференцируемо во внутренней точке a множества $U \subset \mathbb{X}$, то его дифференциал L в этой точке единствен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, проверим единственность дифференциала. Пусть L_1 и L_2 — линейные отображения, удовлетворяющие соотношению (6.2.4), т. е.

$$f(x+h) - f(x) - L_1\langle h \rangle = \alpha_1(h), \quad (6.2.6)$$

$$f(x+h) - f(x) - L_2\langle h \rangle = \alpha_2(h), \quad (6.2.7)$$

где $\alpha_i(h) = o(h)$ при $h \rightarrow 0$, $(x+h) \in A$, $i = 1, 2$. Тогда, полагая $L = L_2 - L_1$ и $\alpha(h) = \alpha_2(h) - \alpha_1(h)$, после вычитания (6.2.6) из (6.2.7) получим

$$L\langle h \rangle = \alpha(h).$$

Здесь L — линейное относительно h отображение, а $\alpha(h) = o(h)$ при $h \rightarrow 0$, $x+h \in U$. Взяв вспомогательный числовой параметр λ , можно теперь записать, что

$$|L\langle h \rangle| = \frac{L(x)\langle \lambda h \rangle}{|\lambda|} = \frac{\alpha(x; \lambda h)}{|\lambda h|} |h| \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0.$$

Таким образом, $L(x)\langle h \rangle = 0$ при любом $h \neq 0$ (напомним, что x — внутренняя точка U). Поскольку $L\langle 0 \rangle = 0$, то мы показали, что при любом значении h имеет место равенство $L_1\langle h \rangle = L_2\langle h \rangle$. $\square$

Дифференциал отображения $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ в точке a обозначается символами $Df(a)$ (другие обозначения: $df(a)$ и $f'(a)$). Таким образом, дифференциал — это элемент пространства $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$. Значение дифференциала $Df(a)$ на векторе $v \in \mathbb{X}$ обозначается одним из символов

$$Df(a)\langle v \rangle, \quad df(a)\langle v \rangle \quad \text{и} \quad f'(a)\langle v \rangle.$$

6.5. ЗАДАЧА. Доказать, что условие (6.2.4) дифференцируемости эквивалентно условию

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - L(x - a)|}{|x - a|} = 0. \quad (6.2.8)$$

6.6. ЗАДАЧА. Если отображение $f : A \rightarrow \mathbb{Y}$ дифференцируемо в точке $a \in A$, то

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} = \sup_{|v|=1} |Df(a)\langle v \rangle| = |Df(a)|;$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} = \inf_{|v|=1} |Df(a)\langle v \rangle|;$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} = \inf_{|v|=1} |Df(a)\langle v \rangle| = |Df(a)^{-1}|^{-1}$, если линейное

отображение $Df(a)$ обратимо.

Если $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, то дифференцируемость отображения f в точке a эквивалентна существованию производной

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t} \in \mathbb{Y}. \quad (6.2.9)$$

В этом случае $Df(a)\langle v \rangle = v \cdot f'(a)$.

На приводимом ниже примере числовой функции мы видим, что наличие частных производных не гарантирует не только дифференцируемость функции, но даже ее непрерывность.

6.7. ПРИМЕР. Показать, что функция

$$\mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8} & \text{для } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{для } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

разрывна в точке $(0, 0)$ и имеет производную в $(0, 0)$ вдоль любого вектора $h \in \mathbb{R}^2$.

6.3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

6.3.1. ЛЕММА ОБ ОЦЕНКЕ ПРИРАЩЕНИЯ

Множество $H \subset \mathbb{R}^n$ называется n -мерным интервалом, если оно допускает представление

$$H = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n),$$

где (a_i, b_i) — конечные открытые промежутки в $\mathbb{R}$. Это означает, что H есть совокупность всех точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ таких, что $a_1 < x_1 < b_1$, $a_2 < x_2 < b_2$, $\dots$, $a_n < x_n < b_n$.

6.8. ЛЕММА. Пусть H есть n -мерный интервал. Предположим, что функция $f : H \rightarrow \mathbb{R}^m$ имеет частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ в каждой точке $x \in H$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$ и существует конечная постоянная M такая, что

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq M$$

для всех $x \in H$. Тогда для любых точек $p, q \in H$ выполняется неравенство

$$|f(q) - f(p)| \leq M\sqrt{n}|q - p|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$, где $a_i < b_i$ при каждом $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ и $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ две произвольные точки H . Тогда $a_i < p_i < b_i$, $a_i < q_i < b_i$ при каждом $i = 1, 2, \dots, n$. От точки p к точке q можно перейти в конечное число шагов, меняя на каждом шаге только одну координату точки, сначала первую координату, затем вторую и т.д. В результате получим некоторую конечную последовательность точек $p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(n)}$, где $p^{(0)} = p$, $p^{(1)} = (q_1, p_2, \dots, p_n)$ и, вообще, $p^{(k)} = (q_1, \dots, q_k, p_{k+1}, \dots, p_n)$ при $1 \leq k \leq n$. В частности, $p^{(n)} = q$. Точки $p^{(i)}$, очевидно, все принадлежат n -мерному интервалу H . Имеем

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= f(p^{(n)}) - f(p^{(0)}) = \\ &= [f(p^{(1)}) - f(p^{(0)})] + [f(p^{(2)}) - f(p^{(1)})] + \dots + [f(p^{(n)}) - f(p^{(n-1)})] \\ &= \sum_{i=1}^n [f(p^{(i)}) - f(p^{(i-1)})]. \end{aligned}$$

Отсюда выводим

$$|f(q) - f(p)| \leq \sum_{i=1}^n |f(p^{(i)}) - f(p^{(i-1)})|. \quad (6.3.10)$$

Докажем, что при каждом $i = 1, 2, \dots, n$ имеем неравенство

$$|f(p^{(i)}) - f(p^{(i-1)})| \leq M|q_i - p_i|. \quad (6.3.11)$$

Для $t \in (a_i, b_i)$ положим $g_i(t) = f(q_1, \dots, q_{i-1}, t, p_{i+1}, \dots, p_n)$. Тогда $g_i(p_i) = f(p^{(i-1)})$, $g_i(q_i) = f(p^{(i)})$ и, значит,

$$g_i(q_i) - g_i(p_i) = f(p^{(i)}) - f(p^{(i-1)}).$$

Функция $g_i(t)$ дифференцируема в каждой точке отрезка (a_i, b_i) . При этом

$$g_i'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(q_1, \dots, q_{i-1}, t, p_{i+1}, \dots, p_n).$$

Из условий леммы следует, что для всех $t \in (a_i, b_i)$ имеет место неравенство $|g_i'(t)| \leq M$. Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях заключаем

$$|g_i(q_i) - g_i(p_i)| \leq M|q_i - p_i|,$$

т. е. $|f(p^{(i)}) - f(p^{(i-1)})| \leq M|q_i - p_i|$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$ и неравенство (6.3.11) тем самым доказано. Подставляя оценку (6.3.11) в правую часть неравенства (6.3.10) получаем

$$|f(q) - f(p)| \leq M \sum_{i=1}^n |q_i - p_i|.$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского к векторам

$$u = (1, 1, \dots, 1), \quad v = (|q_1 - p_1|, |q_2 - p_2|, \dots, |q_n - p_n|)$$

находим

$$\sum_{i=1}^n |q_i - p_i| = \langle u, v \rangle \leq |u||v| = \sqrt{n}|q - p|,$$

и, значит,

$$|f(q) - f(p)| \leq M\sqrt{n}|q - p|,$$

что и требовалось доказать.

6.3.2. ЛЕММА ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ

Пусть даны точка $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, и число $r > 0$. Положим

$$Q(a, r) = (a_1 - r, a_1 + r) \times (a_2 - r, a_2 + r) \times \dots \times (a_n - r, a_n + r).$$

Множество $Q(a, r)$ есть n -мерный интервал, который мы будем называть кубом с центром a и длиной ребра $2r$. (Очевидно $Q(a, r)$ — шар радиуса r с центром в точке a в метрике $|\cdot|_\infty$.)

Докажем предварительно следующее простое утверждение.

6.9. ЛЕММА. Для всякой точки $a \in \mathbb{R}^n$ и любого числа $r > 0$ имеют место включения

$$Q\left(a, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subset B(a, r) \subset Q(a, r). \quad (6.3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольно точку $x \in B(a, r)$. Имеем очевидно $|x_i - a_i| \leq |x - a| < r$ при каждом $i = 1, 2, \dots, n$ и, значит, $x_i \in (a_i - r, a_i + r)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, т. е. $x \in Q(a, r)$. Этим доказано правое включение в (6.3.12).

Пусть $x \in Q(a, \frac{r}{\sqrt{n}})$. Тогда имеем $|x_i - a_i| < \frac{r}{\sqrt{n}}$ при каждом $i = 1, 2, \dots, n$, откуда следует, что

$$|x - a| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} < \sqrt{n \frac{r^2}{n}} = r,$$

т. е. точка x принадлежит шару $B(a, r)$. Тем самым установлена справедливость второго включения и лемма доказана.

Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что даны функции $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $h : U \rightarrow \mathbb{R}$. Напомним, что согласно определению, данному ранее, выражение

$$f(x) = o(h(x)) \quad \text{при} \quad x \rightarrow a,$$

где $a \in U$, означает, что для всякого ε существует $\delta > 0$ такое, что если $0 < |x - a| < \delta$, то $|f(x)| \leq \varepsilon |h(x)|$. Предположим, что даны функции $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Запись

$$F(x) = \Phi(x) + o(h(x)) \quad \text{при} \quad x \rightarrow a$$

означает, что $F(x) - \Phi(x) = o(h(x))$ при $x \rightarrow a$.

Отметим здесь один простой факт, касающийся частных производных.

6.10. ЛЕММА. Пусть даны открытое множество U в пространстве $\mathbb{R}^n$ и функция $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Предположим, что u имеет в U частную производную $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Тогда, если для точки $a \in U$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = p,$$

то $p = \frac{\partial u}{\partial x_i}(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай, когда u есть вещественная функция. Общий случай очевидным образом сводится к этому рассмотрением компонент вектор функции.

Пусть $\delta_0 > 0$ таково, что шар $B(a, \delta_0)$ содержится в U . Положим $\psi(t) = (a + t\mathbf{e}_i)$. Для $t \in (-\delta_0, \delta_0)$ точка $a + t\mathbf{e}_i$ принадлежит шару

$B(a, \delta_0)$. Функция ψ дифференцируема в каждой точке $t \in (-\delta_0, \delta_0)$. При этом $\psi'(t) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(a + t\mathbf{e}_i)$. Отсюда следует, что ψ непрерывна в промежутке $(-\delta_0, \delta_0)$. В силу условия леммы существует предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi'(t) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x).$$

Рассмотрим дробь

$$\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t}.$$

Числитель и знаменатель этой дроби стремятся к нулю при $t \rightarrow 0$. Производная числителя есть $\psi'(t)$, производная знаменателя тождественно равна единице. При $t \rightarrow 0$ отношение этих производных стремится к пределу, равному p . Отсюда, в силу теоремы Лопиталя вытекает, что

$$p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t}.$$

Предел, стоящий здесь справа, есть не что иное как частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_i}(a)$ и тем самым лемма доказана.

Следующее утверждение называется леммой об интегрировании асимптотических соотношений.

6.11. ЛЕММА. Пусть даны открытое множество U в пространстве $\mathbb{R}^n$, и функция $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ такая, что в точке $a \in U$ имеем $v(a) = 0$. Предположим, что функция v имеет в U частные производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и существует $\lambda \geq 0$ такое, что

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = o(|x - a|^\lambda) \quad \text{при } x \rightarrow a$$

при каждом $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда $v(x) = o(|x - a|^{\lambda+1})$ при $x \rightarrow a$.

6.12. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\lambda = 0$, то условие леммы означает, что производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)$ стремятся к нулю при $x \rightarrow a$. В этом случае утверждается, что $v(x) = o(|x - a|)$ при $x \rightarrow a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть δ_0 таково, что шар $B(a, \delta_0)$ содержится в U . Из условий леммы следует, что частные производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)$ стремятся к нулю при $x \rightarrow a$. Значит, согласно лемме 6.10, все эти производные в точке a обращаются в нуль. Зададим произвольно числа $\varepsilon > 0$

и $\varepsilon_1 > 0$. В силу условия леммы при каждом $i = 1, 2, \dots, n$ найдется $\delta_i > 0$ такое, что если $|x - a| < \delta_i$, то

$$\left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right| \leq \varepsilon_1 |x - a|^\lambda. \quad (6.3.13)$$

Пусть $\gamma > 0$ — наименьшее из чисел $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Тогда, если точка $x \in \mathbb{R}^n$ такова, что $|x - a| < \gamma$, то $x \in U$ и для любого $i = 1, 2, \dots, n$ в выбранной точке x выполняется неравенство (6.3.13).

Положим $\delta = \gamma/2\sqrt{n}$. Возьмем произвольно точку $x \in U$ такую, что $0 < |x - a| < \delta$. Положим $l = |x - a|$. Пусть H есть n -мерный интервал $Q(a, 2l)$. Согласно лемме 6.9 имеем $Q(a, 2l) \supset B(a, 2l)$. Так как $|x - a| < 2l$, то $x \in B(a, 2l)$ и, значит, $x \in Q(a, 2l) = H$. Второе включение в (6.3.12) позволяет заключить, что

$$H \subset B(a, 2l\sqrt{n}) \subset B(a, 2\delta\sqrt{n}) = B(a, \gamma).$$

Таким образом, $H \subset B(a, \gamma)$ и, значит, для всякого $y \in H$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(y) \right| \leq \varepsilon_1 |y - a|^\lambda.$$

Так как $H \subset B(a, 2l\sqrt{n})$, то $|y - a| < 2l\sqrt{n}$ для всякого $y \in H$ и, значит,

$$\left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(y) \right| \leq 2^\lambda n^{\lambda/2} l^\lambda \varepsilon_1$$

для любого $y \in H$. Применяя лемму 6.8, получаем, что для всякого $y \in H$ имеет место неравенство

$$|v(y)| = |v(y) - v(a)| \leq 2^\lambda n^{\lambda/2} l^\lambda \varepsilon_1 \sqrt{n} |y - a|.$$

Полагая здесь $y = x$ и принимая во внимание, что $|x - a| = l$, приходим к неравенству

$$|v(x)| \leq 2^\lambda n^{(\lambda+1)/2} \varepsilon_1 |x - a|^{\lambda+1}. \quad (6.3.14)$$

Точка $x \in B(a, \delta)$ была взята произвольно. Из доказанного поэтому следует, что для всякого $x \in B(a, \delta)$, $x \neq a$, выполняется неравенство (6.3.14). Оно выполняется также и для $x = a$. Число ε_1 до сих пор было совершенно произвольно. Теперь выберем конкретное значение ε_1 , полагая

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2^\lambda n^{(\lambda+1)/2}}.$$

Тогда для всех $x \in B(a, \delta)$ будем иметь

$$|v(x)| \leq \varepsilon |x - a|^{\lambda+1}.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ лемма доказана.

6.13. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть U есть открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывна в точке $a \in U$. Тогда условие $f(x) = o(|x - a|^\lambda)$ при $x \rightarrow a$, где $\lambda \geq 0$, равносильно следующему: функция f допускает представление $f(x) = \sigma(x)|x - a|^\lambda$, где $\sigma(a) = 0$ и $\sigma(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $f(x) = o(|x - a|^\lambda)$ при $x \rightarrow a$. Положим $\sigma(x) = f(x)|x - a|^{-\lambda}$ при $x \neq a$ и $\sigma(a) = 0$. Так как функция f непрерывна в точке a , то $f(a) = 0$, откуда ясно, что равенство $f(x) = \sigma(x)|x - a|^\lambda$ выполняется для всех $x \in U$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и найдем по нему $\delta > 0$ такое, что если $0 < |x - a| < \delta$, то $|f(x)| \leq (\varepsilon/2)|x - a|^\lambda$. Для всякого $x \in U$ такого, что $0 < |x - a| < \delta$ будем иметь $|\sigma(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ этим доказано, что $\sigma(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$.

Обратно, пусть верно равенство $f(x) = \sigma(x)|x - a|^\lambda$, где $\sigma(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ и $\sigma(a) = 0$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. По нему найдется $\delta > 0$ такое, что если $0 < |x - a| < \delta$, то $|\sigma(x)| < \varepsilon$. Для всякого такого x , очевидно будем иметь $|f(x)| \leq \varepsilon|x - a|^\lambda$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это, согласно определению, означает, что $f(x) = o(|x - a|^\lambda)$ при $x \rightarrow a$.

6.3.3. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Как было показано ранее, существование частных производных во всех точках области определения функции не гарантирует даже её непрерывность и тем более дифференцируемость во всех точках её области определения. Здесь мы докажем, что если к производным функции предъявить некоторые дополнительные требования, то дифференцируемость функции в точке будет иметь место.

6.14. ТЕОРЕМА. Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ имеет в U все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Тогда, если эти производные непрерывны в точке $a \in U$, то функция f дифференцируема в этой точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Для $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ положим

$$v(x) = f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x - x_i).$$

Имеем $v(a) = 0$ и

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

в каждой точке $x \in U$. В частности, $\frac{\partial v}{\partial x_i}(a) = 0$ при каждом $i = 1, 2, \dots, n$. Так как по условию функция $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ непрерывна в точке a , то также и функция $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ непрерывна в этой точке, откуда следует, что $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = o(1)$ при $x \rightarrow a$.

Функция v удовлетворяет всем условиям леммы 2.3 для случая $\lambda = 0$ и, значит, согласно этой лемме, $v(x) = o(|x - a|)$ при $x \rightarrow a$. Это означает, что $v(x) = \sigma(x)|x - a|$, где $\sigma(a) = 0$ и $\sigma(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$. Пусть L есть линейное отображение

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$$

Тогда получаем

$$f(x) = f(a) + L(x - a) + v(x) = f(a) + L(x - a) + \sigma(x)|x - a|.$$

При этом $\sigma(a) = 0$ и $\sigma(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$. По определению это и означает, что функция f дифференцируема в точке a . Теорема доказана.

6.4. СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Сформулируем в этом разделе основные свойства дифференциала.

6.15. СВОЙСТВО. Дифференцирование является линейной операцией: если f и g — отображения из $U \subset \mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$, дифференцируемые в точке $a \in U$, то линейная комбинация $\alpha f + \beta g : U \rightarrow \mathbb{Y}$ дифференцируема в точке a и ее дифференциал равен линейной комбинации дифференциалов:

$$D(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha Df(a) + \beta Dg(a). \quad (6.4.15)$$

Если λ — постоянный скаляр, то функция $\lambda f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ дифференцируема в точке a , и ее дифференциал равен $\lambda Df(a)$.

Доказательство очевидно.

6.16. СВОЙСТВО. Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ — нормированные пространства, U — открытое множество в $\mathbb{X}$, V — открытое множество в $\mathbb{Y}$. Пусть отображение $f : U \rightarrow V$ дифференцируемо в точке $a \in U$, а отображение $g : V \rightarrow \mathbb{Z}$ дифференцируемо в точке $b = f(a) \in V$. Тогда композиция отображений $h = g \circ f : U \rightarrow \mathbb{Z}$ дифференцируема в точке a и дифференциал композиции равен композиции дифференциалов:

$$Dh(a) = Dg(b) \circ Df(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a). \quad (6.4.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия дифференцируемости имеем:

$$\begin{aligned} g(y) - g(b) &= Dg(b)\langle y - b \rangle + o(y - b) \quad \text{при } y \rightarrow b, \\ f(x) - f(a) &= Df(a)\langle x - a \rangle + o(x - a) \quad \text{при } x \rightarrow a. \end{aligned}$$

Произведем замену $y = f(x)$, $b = f(a)$ и подставим второе разложение в первое:

$$\begin{aligned} g(y) - g(b) &= g(f(x)) - g(f(a)) = (g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) \\ &= Dg(f(a))\langle f(x) - f(a) \rangle + o(f(x) - f(a)) = Dg(f(a))\langle Df(a)\langle x - a \rangle \rangle \\ &\quad + [Dg(f(a))\langle o(x - a) \rangle + o(Df(a)\langle x - a \rangle + o(x - a)))] \\ &= (Dg(f(a)) \circ Df(a))\langle x - a \rangle + o(x - a). \end{aligned}$$

Для доказательства последнего равенства требуется доказать, что выражение в квадратных скобках равно $o(x - a)$. Действительно, с учетом свойств $o(x - a) = o(1) \cdot (x - a)$ и $Dg(b)\langle x - a \rangle = O(1) \cdot (x - a)$ имеем

$$Dg(f(a))\langle o(x - a) \rangle = O(1) \cdot (o(x - a)) = O(1) \cdot o(1) \cdot (x - a) = o(x - a),$$

так как $Dg(f(a))$ — ограниченный линейный оператор. Далее

$$\begin{aligned} o(Df(a)\langle x - a \rangle + o(x - a)) &= o(1) \cdot (Df(a)(x - a) + o(x - a)) \\ &= o(1) \cdot (O(1) \cdot (x - a) + o(1) \cdot (x - a)) \\ &= (o(1) \cdot O(1) + o(1) \cdot o(1)) \cdot (x - a) \\ &= o(1) \cdot (x - a) = o(x - a), \end{aligned}$$

так как $Df(a)$ — ограниченный линейный оператор. □

6.17. СВОЙСТВО. Пусть f отображает какую-нибудь окрестность V точки $a \in \mathbb{X}$ гомеоморфно на окрестность W точки $f(a) \in \mathbb{Y}$. Если f дифференцируемо в точке a и $\det Df(a) \neq 0$, то обратное отображение f^{-1} дифференцируемо в точке $f(a)$ и $Df^{-1}(f(a)) = [Df(a)]^{-1}$.

Таким образом, дифференциал обратного отображения есть линейное отображение, обратное к дифференциалу исходного отображения в соответствующей точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу дифференцируемости функции f в точке a имеем

$$f(x) - f(a) = Df(a)\langle x - a \rangle + o(1)|x - a| \quad \text{при } x \rightarrow a. \quad (6.4.17)$$

Отсюда немедленно выводим, что

$$\varliminf_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} = \varliminf_{x \rightarrow a} \frac{|Df(a)\langle x - a \rangle|}{|x - a|} = \alpha > 0 \quad (6.4.18)$$

(в противном случае дифференциал $Df(a)$ вырожден.)

Введем обозначение $L = Df(a)$ и подействуем на левую и правую части равенства (6.4.17) линейным отображением L^{-1} . Полагая $y = f(x)$, $b = f(a)$, $x = f^{-1}(y)$, $a = f^{-1}(b)$, запишем

$$L^{-1}\langle y - b \rangle = f^{-1}(y) - f^{-1}(b) + |f^{-1}(y) - f^{-1}(b)|L^{-1}\langle o(1) \rangle \quad \text{при } y \rightarrow b.$$

Отсюда выводим

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(b) = L^{-1}\langle y - b \rangle - |f^{-1}(y) - f^{-1}(b)|L^{-1}\langle o(1) \rangle \quad \text{при } y \rightarrow b. \quad (6.4.19)$$

Для доказательства дифференцируемости отображения f^{-1} в точке b остается проверить, что

$$-|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)|L^{-1}\langle o(1) \rangle = o(1)|y - b| \quad \text{при } y \rightarrow b.$$

Последнее получаем из ограниченности оператора L^{-1} : $|L^{-1}\langle o(1) \rangle| \leq |L^{-1}||o(1)| = o(1)$; и соотношений (6.4.18):

$$\varliminf_{y \rightarrow b} \frac{|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)|}{|y - b|} = \varliminf_{x \rightarrow a} \frac{|x - a|}{|f(x) - f(a)|} = \frac{1}{\varliminf_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|}} = \frac{2}{\alpha} < \infty.$$

ВОПРОС: ГДЕ И КАКИМ ОБРАЗОМ ПРИМЕНЯЕТСЯ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ УСЛОВИЕ ГОМЕОМОРФНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ f ? □

6.18. ПРИМЕР. Если $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ — постоянное отображение окрестности $U \in \mathcal{N}(x)$ точки $x \in \mathbb{X}$, т. е. $f(U) = y_0 \in \mathbb{Y}$, то $Df(x) = 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в этом случае, очевидно,

$$f(x + h) - f(x) - 0\langle h \rangle = y_0 - y_0 = 0 = o(h).$$

□

6.19. ПРИМЕР. Если отображение $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ есть линейное отображение нормированного пространства $\mathbb{X}$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$, то $Df(x) = f \in \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ в любой точке $x \in \mathbb{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$f\langle x+h \rangle - f\langle x \rangle - f\langle h \rangle = f\langle x \rangle + f\langle h \rangle - f\langle x \rangle - f\langle h \rangle = 0.$$

□

6.20. ПРИМЕР. Из правила дифференцирования композиции отображений и результата примера (6.19) можно заключить, что если $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ — отображение окрестности $U \subset X$ точки $x \in \mathbb{X}$, дифференцируемое в x , а $A \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}; \mathbb{Z})$, то

$$D(A \circ f)(x) = A \circ Df(x).$$

Для числовых функций, когда $\mathbb{X} = \mathbb{Z} = \mathbb{R}$, это не что иное, как знакомая возможность вынесения постоянного множителя за знак дифференцирования.

6.21. ПРИМЕР. Пусть снова $U = U(x)$ — окрестность точки x нормированного пространства $\mathbb{X}$, и пусть

$$f : U \rightarrow \mathbb{Y} = \mathbb{Y}_1 \times \dots \times \mathbb{Y}_n —$$

отображение U в прямое произведение нормированных пространств $\mathbb{Y}_1, \dots, \mathbb{Y}_n$.

Задание такого отображения равносильно заданию n координатных отображений $f_i : U \rightarrow Y_i$, $i = 1, \dots, n$, связанных с f соотношением

$$x \mapsto f(x) = y = (y_1, \dots, y_n) = (f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

справедливым в любой точке U .

Если теперь в формуле (6.2.4) учесть, что

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (f_1(x+h) - f_1(x), \dots, f_n(x+h) - f_n(x)), \\ L\langle h \rangle &= (L_1(x)\langle h \rangle, \dots, L_n(x)\langle h \rangle), \\ \alpha(h) &= (\alpha_1(h), \dots, \alpha_n(h)), \end{aligned}$$

то со ссылкой на результаты примеров можно заключить, что рассматриваемое отображение f дифференцируемо в точке x тогда и только тогда, когда дифференцируемы все его компоненты $f_i : U \rightarrow Y_i$, $i = 1, \dots, n$, причем в случае дифференцируемости отображения f имеет место равенство

$$Df(x) = (Df_1(x), \dots, Df_n(x)).$$

Таким образом, установлено, что

$$\begin{aligned} DA(x)\langle h_1, \dots, h_n \rangle &= A'(x_1, \dots, x_n)\langle h_1, \dots, h_n \rangle \\ &= A(h_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + A(x_1, \dots, x_{n-1}, h_n) \end{aligned}$$

или, короче,

$$dA(x_1, \dots, x_n) = A(dx_1, \dots, x_n) + \dots + A(x_1, \dots, dx_n),$$

где dx_i — дифференциал линейного отображения

$$\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i \in \mathbb{X}_i.$$

В частности, если:

6.23. СВОЙСТВО. $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ — произведение n -числовых переменных, то

$$d(x_1 \cdot \dots \cdot x_n) = dx_1 \cdot \dots \cdot x_n + \dots + x_1 \cdot \dots \cdot dx_n;$$

6.24. СВОЙСТВО. (x_1, x_2) — скалярное произведение в $\mathbb{E}^n$, то

$$d(x_1, x_2) = (dx_1, x_2) + (x_1, dx_2);$$

6.25. СВОЙСТВО. $[x_1, x_2]$ — векторное произведение в E^3 , то

$$d[x_1, x_2] = [dx_1, x_2] + [x_1, dx_2];$$

6.26. СВОЙСТВО. (x_1, x_2, x_3) — смешанное произведение в E^3 , то

$$d(x_1, x_2, x_3) = (dx_1, x_2, x_3) + (x_1, dx_2, x_3) + (x_1, x_2, dx_3);$$

6.27. СВОЙСТВО. $\det(x_1, \dots, x_n)$ — определитель матрицы, составленной из координат n векторов $x_1, \dots, x_n$ n -мерного линейного пространства $\mathbb{X}$ с фиксированным в $\mathbb{X}$ базисом, то

$$d(\det(x_1, \dots, x_n)) = \det(dx_1, \dots, x_n) + \dots + \det(x_1, \dots, dx_n).$$

6.28. ПРИМЕР. Пусть U — подмножество $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$, состоящее из тех линейных непрерывных операторов $A : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, которые имеют непрерывные обратные операторы $A^{-1} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ (принадлежащие, $\mathcal{L}(\mathbb{Y}; \mathbb{X})$). Рассмотрим отображение

$$U \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}; \mathbb{X}),$$

состоящее в том, что каждому оператору $a \in U$ ставится в соответствие обратный к нему оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}; \mathbb{X})$.

Доказываемое ниже утверждение позволяет ответить на вопрос о дифференцируемости этого отображения.

6.29. СВОЙСТВО. Если $\mathbb{X}$ — нормированное пространство и $A \in U$, то при любом $h \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ таком, что $|h| < |A^{-1}|^{-1}$ оператор $A+h$ также принадлежит U и справедливо соотношение

$$(A+h)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}hA^{-1} + o(h) \quad (6.4.20)$$

при $h \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$(A+h)^{-1} = (A(E+A^{-1}h))^{-1} = (E+A^{-1}h)^{-1}A^{-1} \quad (6.4.21)$$

то достаточно найти оператор $(E+A^{-1}h)^{-1}$, обратный к оператору $(E+A^{-1}h) \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}; \mathbb{X})$, где E — тождественное отображение пространства $\mathbb{X}$ на себя.

Пусть $\Delta = -A^{-1}h$. Заметим, что $|\Delta| \leq |A^{-1}| \cdot |h|$. Поэтому в силу сделанных относительно оператора h предположений можно считать, что $|\Delta| \leq q < 1$. Проверим теперь, что

$$(E - \Delta)^{-1} = E + \Delta + \Delta^2 + \dots + \Delta^n + \dots, \quad (6.4.22)$$

где ряд, стоящий справа, есть ряд, составленный из линейных операторов $\Delta^n = (\Delta \circ \dots \circ \Delta) \in \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X})$.

Ввиду полноты $\mathbb{X}$ линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X})$ является полным. Тогда сходимость указанного ряда, составленного из векторов этого пространства, немедленно вытекает из того, что $|\Delta^n| \leq |\Delta|^n \leq q^n$, и того, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} q^n$$

сходится, если $|q| < 1$ (см. задачу 1.2.3). Непосредственная проверка

$$\begin{aligned}(E + \Delta + \Delta^2 + \dots)(E - \Delta) &= \\ &= (E + \Delta + \Delta^2 + \dots) - (\Delta + \Delta^2 + \Delta^3 + \dots) = E\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(E - \Delta)(E + \Delta + \Delta^2 + \dots) &= \\ &= (E + \Delta + \Delta^2 + \dots) - (\Delta + \Delta^2 + \Delta^3 + \dots) = E\end{aligned}$$

показывает, что мы действительно нашли $(E - \Delta)^{-1}$. Стоит отметить, что свобода выполнения арифметических операций над рядами (перестановки членов!) в данном случае гарантируется абсолютной сходимостью (сходимостью по норме) рассматриваемых рядов.

Сопоставляя соотношения (6.4.21) и (6.4.22), заключаем, что при $|h| \leq |A^{-1}|^{-1}$

$$\begin{aligned}(A + h)^{-1} &= A^{-1} - A^{-1}hA^{-1} + (A^{-1}h)^2A^{-1} - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^n(A^{-1}h)^nA^{-1} + \dots \quad (6.4.23)\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n=2}^{\infty} (-A^{-1}h)^n A^{-1} \right| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} | -A^{-1}h|^n |A^{-1}| \leq \\ &\leq |A^{-1}|^3 |h|^2 \sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{|A^{-1}|^3}{1-q} |h|^2,\end{aligned}$$

то из (6.4.23), в частности, следует равенство (6.4.20).

Возвращаясь теперь к примеру (6.28), можно сказать, что в случае полного пространства $\mathbb{Y}$ рассматриваемое отображение $A \xrightarrow{f} A^{-1}$ заведомо дифференцируемо, причем

$$df(A)\langle h \rangle = d(A^{-1})\langle h \rangle = -A^{-1}hA^{-1}.$$

В частности, это означает, что если A — квадратная невырожденная матрица и A^{-1} — обратная к ней, то при возмущении матрицы A с помощью матрицы h с близкими к нулю элементами матрицу $(A + h)^{-1}$, обратную к возмущенной матрице $A + h$, можно в первом приближении находить по следующей формуле:

$$(A + h)^{-1} \approx A^{-1} - A^{-1}hA^{-1}.$$

Более точные формулы, очевидно, можно получить, исходя из равенства (6.4.23).

6.30. ПРИМЕР. Пусть $\mathbb{X}$ — нормированное пространство. Важное отображение

$$\exp : \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X})$$

определяется следующим образом:

$$\exp A = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots, \quad (6.4.24)$$

если $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X})$. Стоящий в (6.4.24) ряд сходится, так как $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X})$ — полное пространство и $|\frac{1}{n!}A^n| \leq \frac{|A|^n}{n!}$, а числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A|^n}{n!}$$

сходится.

Нетрудно проверить, что

$$\exp(A + h) = \exp A + L(A)\langle h \rangle + o(h) \quad (6.4.25)$$

при $h \rightarrow 0$, где

$$\begin{aligned} L(A)\langle h \rangle &= h + \frac{1}{2!}(Ah + hA) + \frac{1}{3!}(A^2h + AhA + hA^2) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!}(A^{n-1}h + A^{n-2}hA + \dots + AhA^{n-2} + hA^{n-1}) + \dots \end{aligned}$$

и $|L(A)| \leq \exp |A| = \exp |A|$, т. е. $L(A) \in (\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X}); \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X}))$.

Таким образом, отображение $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X}) \ni A \mapsto \exp A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X})$ дифференцируемо при любом значении A .

Заметим, что если операторы A и h коммутируют, т. е. $Ah = hA$, то, как видно из выражения для $L(A)\langle h \rangle$, в этом случае $L(A)\langle h \rangle = (\exp A)h$. В частности, для $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ вместо (6.4.25) вновь получаем

$$\exp(A + h) = \exp A + (\exp A)h + o(h). \quad (6.4.26)$$

6.5. ТЕОРЕМА О КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЯХ

Следующее утверждение называют формулой конечных приращений.

6.31. ТЕОРЕМА. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная вещественная функция, заданная на открытом множестве U нормированного пространства $\mathbb{X}$. Если отрезок $[x, x + h]$ целиком содержится в U и если отображение f дифференцируемо в каждой точке открытого интервала $(x, x + h)$, то

$$f(x + h) - f(x) = f'(x + \vartheta h)\langle h \rangle \in \mathbb{R}, \quad \text{где } 0 < \vartheta < 1. \quad (6.5.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\varphi : t \mapsto f(x + th)$ вещественного интервала $[0, 1]$ в $\mathbb{R}$. Это отображение является композицией отображения $t \mapsto x + th$ отрезка $[0, 1]$ в множество U и отображения f множества U в $\mathbb{R}$. Согласно теоремам о сложных функциях, φ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и дифференцируема на интервале $(0, 1)$, и ее производная вычисляется по формуле

$$\varphi'(t) = f'(x + th)\langle h \rangle \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $\varphi(1) - \varphi(0) = f(x + h) - f(x)$, для получения необходимого результата достаточно к функции φ на отрезке $[0, 1]$ применить классическую теорему Лагранжа.

Заметим, что формула вида (6.5.27) не может быть обобщена на отображения $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$, если размерность образа больше 1. Она не верна уже для комплексной функции вещественной переменной. Рассмотрим, например, комплексную функцию $x \mapsto e^{2i\pi x}$, определенную на отрезке $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Значения этой функции совпадают в точках $x = 0$ и $x = 1$. Если бы формула конечных приращений была верна в виде (6.5.27), то должна была бы существовать точка ϑ интервала $(0, 1)$, в которой производная рассматриваемой комплексной функции обращалась бы в нуль. Однако ее производная — функция $x \mapsto 2i\pi e^{2i\pi x}$ — нигде в нуль не обращается. $\square$

Приведем формулу конечных приращений для общего случая в форме, несколько отличной от предыдущей.

6.32. ТЕОРЕМА. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ — непрерывное отображение открытого множества U нормированного пространства $\mathbb{X}$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$. Если отрезок $[x, x + h]$ целиком содержится в U и если отображение f дифференцируемо в каждой точке открытого интервала $(x, x + h)$ и его норма не превосходит M , то справедливо неравенство

$$|f(x + h) - f(x)| \leq M|h|. \quad (6.5.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно докажем одну лемму.

6.33. ЛЕММА. Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Y}$ — отображение со значениями в нормированном пространстве $\mathbb{Y}$, $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественная функция на отрезке $[0, 1]$. Предположим, что функции f и g непрерывны на замкнутом отрезке $[0, 1]$ и дифференцируемы на открытом интервале $(0, 1)$. Если при этих условиях имеет место неравенство

$$|Df(x)| \leq g'(x) \quad \text{для } 0 < x < 1, \quad (6.5.29)$$

то справедливо также неравенство

$$|f(1) - f(0)| \leq g(1) - g(0). \quad (6.5.30)$$

Докажем эту лемму. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Обозначим через A_ε множество точек x интервала $[0, 1]$, для которых неравенство

$$|f(t) - f(0)| \leq g(t) - g(0) + \varepsilon t + \varepsilon$$

справедливо для всех $t \in [0, x]$. Функция

$$x \mapsto |f(x) - f(0)| - g(x) + g(0) - \varepsilon x - \varepsilon \quad (6.5.31)$$

непрерывна. Множество $A_\varepsilon \subset [0, 1]$ точек, в которых эта функция не положительна, замкнуто. В частности, A_ε содержит свою точную верхнюю грань β , которая тем самым является максимумом. Заметим, что β не может быть равной 0. В самом деле, точка $x = 0$ принадлежит множеству A_ε , так как функция (6.5.31) при $x = 0$ принимает значение $-\varepsilon < 0$. Из непрерывности f и g следует, что A_ε содержит некоторую окрестность нуля. Однако, неравенство $0 < \beta < 1$ также невозможно. Действительно, по определению производной, если $0 < \beta < 1$, то существует число $\delta_0 > 0$ такое, что при всех $\delta \in (0, \delta_0)$ справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} |f(\beta + \delta) - f(\beta)| &\leq |Df(\beta)|\delta + \frac{\varepsilon}{2}\delta \leq g'(\beta)\delta + \frac{\varepsilon}{2}\delta, \\ g(\beta + \delta) - g(\beta) &\geq g'(\beta)\delta - \frac{\varepsilon}{2}\delta. \end{aligned}$$

Из этих неравенств имеем

$$|f(\beta + \delta) - f(\beta)| \leq g(\beta + \delta) - g(\beta) + \varepsilon\delta.$$

Однако, поскольку $\beta \in A_\varepsilon$, то

$$|f(\beta) - f(0)| \leq g(\beta) - g(0) + \varepsilon\beta + \varepsilon, \quad (6.5.32)$$

и, следовательно, после сложения,

$$|f(\beta + \delta) - f(0)| \leq g(\beta + \delta) - g(0) + \varepsilon(\beta + \delta) + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\beta + \delta \in A_\varepsilon$ для любого $\delta \in [0, \delta_0)$. Последнее невозможно, поскольку β является максимумом для множества A_ε . Таким образом, $\beta = 1$. При этом (6.5.32) запишется в виде

$$|f(1) - f(0)| \leq g(1) - g(0) + 2\varepsilon.$$

Так как это неравенство справедливо при любом ε , отсюда следует справедливость неравенства (6.5.30), и лемма полностью доказана.

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Рассмотрим отображение $\varphi : t \mapsto f(x + th)$ отрезка $[0, 1]$ в $\mathbb{Y}$, введенное при доказательстве теоремы 6.31. Его производная записывается в виде

$$\varphi'(t) = Df(x + th)\langle h \rangle.$$

Отсюда вытекает, что в условиях теоремы норма этой производной не превосходит $M|h|$. Если теперь применить лемму, выбирая в качестве g линейную функцию $t \mapsto M|h|t$, то получим неравенство (6.5.28).

Теорема о конечных приращениях допускает следующее интересное дополнение.

6.34. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ — линейный ограниченный оператор. Тогда в условиях теоремы 6.32 справедливо неравенство

$$|f(x + h) - f(x) - Lh| \leq \omega|h|, \quad (6.5.33)$$

где ω — точная верхняя грань величины $|Df(\xi) - L|$ при ξ , изменяющемся в интервале $(x, x + h)$. Часто предполагают, что отображение f дифференцируемо по x , и тогда полагают $L = Df(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить теорему 6.32 к функции $\xi \mapsto f(\xi) - L\langle \xi x \rangle$, производная которой в точке ξ равна $Df(\xi) - L$. $\square$

6.35. СЛЕДСТВИЕ. Если $U \subset \mathbb{X}$ является открытым выпуклым множеством нормированного пространства $\mathbb{X}$ и если f — дифференцируемое отображение U в $\mathbb{Y}$, дифференциал которого в каждой точке U по норме не превосходит некоторой постоянной M , то функция f удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, равномерно непрерывна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из выпуклости множества U следует, что если u и v — любые две точки U , то весь отрезок $[u, v]$ принадлежит U . Следовательно, к нему можно применить формулу конечных приращений, и мы получим неравенство $|f(u) - f(v)| \leq M|u - v|$, что и доказывает следствие 6.35. $\square$

6.36. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ — дифференцируемое отображение нормированного пространства $\mathbb{X}$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$. Предположим, кроме того, что его дифференциал Df является равномерно непрерывным отображением пространства $\mathbb{X}$ в пространство $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$. При этих условиях функция

$$u \mapsto \frac{f(u+h) - f(u) - Df(u)\langle h \rangle}{|h|}$$

равномерно сходится к 0 при $h \neq 0$, стремящемся к 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предположения о равномерной непрерывности дифференциала $Df(u)$, по заданному $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\eta > 0$, что из неравенства $|u - v| \leq \eta$ будет следовать неравенство $|Df(u) - Df(v)| \leq \varepsilon$. Но тогда, как только $|h| \leq \eta$, величина ω , входящая в формулу (6.5.33), соответствующую $L = Df(x)$, будет по норме не больше ε , что и доказывает высказанное утверждение. $\square$

6.6. Координатная запись 1-го дифференциала

При конкретизации абстрактного определения дифференциала может быть удачно использовано понятие производной вдоль вектора.

Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — нормированные пространства над полем $\mathbb{R}$, а $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ — отображение окрестности точки $a \in U$. Определение производной отображения f в точке $a \in U$ вдоль вектора $h \in \mathbb{X}$ приведено в 6.1.

Непосредственно проверяется, что если отображение дифференцируемо в точке $a \in U$, то оно имеет в этой точке производную по любому вектору, причем

$$D_h f(a) = f'(a)\langle h \rangle. \quad (6.6.34)$$

В силу линейности дифференциала $Df(a)$ отображения f имеем

$$\begin{aligned} D_{\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2} f(a) &= f'(a)\langle \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 \rangle \\ &= \lambda_1 f'(a)\langle h_1 \rangle + \lambda_2 f'(a)\langle h_2 \rangle = \lambda_1 D_{h_1} f(a) + \lambda_2 D_{h_2} f(a). \end{aligned} \quad (6.6.35)$$

Из определения 6.1 видно также, что значение $D_h f(a)$ производной отображения $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ по вектору есть элемент нормированного пространства $\mathbb{Y}$, и что если L — линейное непрерывное отображение $\mathbb{Y}$ в некоторое нормированное пространство $\mathbb{Z}$, то

$$D_h(L \circ f)(a) = D(L \circ f)(a)\langle h \rangle = L \circ Df(a)\langle h \rangle = L \circ D_h f(a) \quad (6.6.36)$$

что совпадает с (6.1.2) (эти равенства можно вывести из теоремы о композиции дифференцируемых отображений). Если, частности, $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, — базис в $\mathbb{X}$, то в точке a определены частные производные функции f :

$$D_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = Df(a)\langle e_i \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}.$$

Если отображение f дифференцируемо в точке $a \in U$, то оно имеет в этой точке производную вдоль любого вектора $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$: причем

$$\begin{aligned} D_h f(a) &= Df(a)\langle h \rangle = Df(a)\left\langle \sum_{i=1}^n h_i e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n h_i Df(a)\langle e_i \rangle = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \end{aligned} \quad (6.6.37)$$

Заметим, что $h_i = dx_i\langle h \rangle$, где $x_i : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ — линейное отображение, определенное по правилу $\mathbb{X} \ni h \mapsto x_i(h) = h_i$. Таким образом, $dx_i \in \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{R})$.

Таким образом, из (6.6.37) вытекает

$$Df(a)\langle h \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i\langle h \rangle. \quad (6.6.38)$$

Равенство (6.6.38) можно записать в виде

$$Df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i. \quad (6.6.39)$$

Формула (6.6.39) выражает 1-ый дифференциал в координатах как линейную комбинацию линейных функций dx_i , $i = 1, \dots, n$, с коэффициентами из частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Формула (6.6.39) называется *координатной записью* 1-го дифференциала.

6.37. ЗАДАЧА. Доказать, что линейные функции dx_i , $i = 1, \dots, n$, линейно независимы в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{R})$, где n — размерность пространства $\mathbb{X}$.

6.7. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть $U \in \mathcal{N}(a)$ — окрестность точки $a \in \mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_m$ в прямом произведении нормированных пространств $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_m$ и пусть $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ отображение U в нормированное пространство $\mathbb{Y}$. В этом случае

$$y = f(x) = f(x_1, \dots, x_m), \quad (6.7.40)$$

и значит, фиксируя в (6.7.40) все переменные, кроме одной переменной $x_i \in \mathbb{X}_i$, положив $x_k = a_k$, $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$, мы получим функцию

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m) = f_i(x_i) = \varphi_i(x_i) \quad (6.7.41)$$

в некоторой окрестности U_i точки a_i пространства $\mathbb{X}_i$

6.38. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{Y}$ по отношению к исходному отображению (6.7.40) называют частным отображением по переменной x_i в точке $a \in \mathbb{X}$

6.39. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если отображение (6.7.41) дифференцируемо в точке $x_i = a_i$, то его производная в этой точке называется *частной производной* или *частным дифференциалом* отображения f в точке a по переменной x_i .

Эту частную производную обозначают обычно одним из символов

$$\partial_i f(a), \quad D_i f(a), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad f'_{x_i}(a).$$

В соответствии с этими определениями $D_i f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_i; \mathbb{Y})$.

Дифференциал $df(a)$ отображения (6.7.40) в точке a (если f дифференцируемо в точке a) в рассматриваемой ситуации называется полным дифференциалом, чтобы отличить его от частных дифференциалов по отдельным переменным.

6.40. ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенное выше понятие частной производной (по отношению к выделенному подпространству) следует рассматривать как расширение данного в предыдущем разделе понятия частной производной вдоль выделенного направления.

Отметим, что, повторив известные рассуждения, легко доказать, что и в общем случае справедливо следующее

6.41. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если отображение (6.7.40) дифференцируемо в точке $a = (a_1, \dots, a_m) \in X_1 \times \dots \times X_m = X$, то оно имеет в этой точке частные дифференциалы по каждой из переменных, причем полный дифференциал и частные дифференциалы связаны соотношением

$$df(a)\langle h \rangle = \partial_1 f(a)\langle h_1 \rangle + \dots + \partial_m f(a)\langle h_m \rangle \quad (6.7.42)$$

где $h = (h_1, \dots, h_m) \in T\mathbb{X}_1(a_1) \times \dots \times T\mathbb{X}_m(a_m) = T\mathbb{X}(a)$.

6.42. ЗАДАЧА. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ — нильпотентный оператор, т. е. существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $A^k = 0$. Покажите, что оператор $(E - A)^{-1}$ в этом случае имеет обратный, причем $(E - A)^{-1} = E + A + \dots + A^{k-1}$.

6.43. ЗАДАЧА. Пусть $D : \mathbb{P}[x] \rightarrow \mathbb{P}[x]$ — оператор дифференцирования на линейном пространстве $\mathbb{P}[x]$ полиномов. Заметив, что D — нильпотентный оператор, запишите оператор $\exp(aD)$, где $a \in \mathbb{R}$, и покажите, что $\exp(aD)(P(x)) = P(x + a) = T_a(P(x))$.

6.44. ЗАДАЧА. Запишите матрицы операторов $D : \mathbb{P}[x] \rightarrow \mathbb{P}[x]$ и $T_a : \mathbb{P}[x] \rightarrow \mathbb{P}[x]$ (из задачи (6.43)) в базисе $e_i = \frac{x^{n-i}}{(n-i)!}$, $1 \leq i \leq n$, пространства $\mathbb{P}[x]$ вещественных полиномов степени n от одной переменной.

6.45. ЗАДАЧА. а) Если $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X})$ и существует $B^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X})$, то $\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}(\exp A)B$.

б) Если $AB = BA$, то $\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B$.

с) Проверьте, что $\exp 0 = E$ и что $\exp A$ всегда имеет обратный оператор, причем $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.

6.46. ЗАДАЧА. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X})$. Рассмотрим отображение $\varphi_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X})$, определяемое соответствием $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA) \in \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X})$. Покажите, что:

а) Отображение φ_A непрерывно;

б) φ_A есть гомоморфизм $\mathbb{R}$ как аддитивной группы в мультипликативную группу обратимых операторов $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X})$;

6.47. ЗАДАЧА. Проверьте, что:

а) Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, то $\exp \lambda_1, \dots, \exp \lambda_n$ суть собственные значения оператора $\exp A$.

б) $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$, где $\operatorname{tr} A$ — след оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$.

в) Если $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, то $\det(\exp A) > 0$.

г) Если A^* — транспонированная по отношению к матрице $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ матрица, а $\bar{A}$ — матрица из комплексно сопряженных (по отношению к элементам A) элементов, то $(\exp A)^* = \exp A^*$ и $\overline{\exp A} = \exp \bar{A}$.

е) Матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

не является матрицей вида $\exp A$, какова бы ни была квадратная матрица A второго порядка.

6.48. ЗАДАЧА. Напомним, что множество, наделенное одновременно структурой группы и структурой топологического пространства, называется *топологической* или *непрерывной* группой, если групповая операция непрерывна в указанной топологии; если же групповая операция дифференцируема, то топологическая группа называется группой Ли (группа Ли — это группа G , наделенная структурой дифференцируемого многообразия так, что отображение $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ является дифференцируемым отображением $G \times G$ в G).

Алгебра Ли — это линейное пространство $\mathbb{X}$ с антикоммутативной билинейной операцией $[\cdot, \cdot] : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, удовлетворяющей тождеству Якоби: $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ для любых векторов $a, b, c \in \mathbb{X}$. Группы и алгебры Ли тесно связаны между собой и важную роль в осуществлении этой связи играет отображение $\exp$ (см. задачу (6.42)).

Примером алгебры Ли может служить ориентированное евклидово пространство E^3 с операцией векторного произведения его векторов. Обозначим пока эту алгебру Ли через LA_1 .

Покажите, что вещественные кососимметрические матрицы порядка 3 образуют алгебру Ли (обозначим ее LA_2), если произведение матриц A и B определить соотношением $[A, B] = AB - BA$.

6.8. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА ОБ ОДНОРОДНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Множество U называется коническим, если оно удовлетворяет следующему условию: для всякой точки $x \in U$ и любого $t > 0$ точка tx принадлежит U . Пусть U — открытое коническое множество. Функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ называется однородной степени r , где r — вещественное число, если для всякой точки

$x \in U$ и любого $t > 0$ выполняется равенство

$$f(tx) = t^r f(x).$$

Следующая теорема доказана Эйлером.

6.49. ТЕОРЕМА. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ — открытое коническое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, имеющая непрерывные частные производные первого порядка. Тогда для того, чтобы функция f была однородной степени r необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in U$ выполнялось равенство:

$$rf(x) = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x). \quad (6.8.43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, f — однородная степени r функция с непрерывными частными производными. Возьмем произвольно точку $x \in U$. Тогда для любого $t \in (0, \infty)$ имеем:

$$f(tx) = t^r f(x).$$

Дифференцируя обе части этого равенства по t получим:

$$rt^{r-1}f(x) = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx).$$

Полагая здесь $t = 1$ приходим к равенству

$$rf(x) = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x).$$

Необходимость условия теоремы тем самым доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Предположим, что функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ с непрерывными частными производными такова, что для всех $x \in U$ выполняется равенство

$$rf(x) = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x).$$

Возьмем произвольно точку $x \in U$ и для $t > 0$ положим $\varphi(t) = f(tx)$. Тогда для всех $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n tx_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx) \\ &= r \frac{1}{t} f(tx) = r\varphi(t). \end{aligned} \quad (6.8.44)$$

В случае, если $r = 0$, отсюда следует, что $\varphi'(t) = 0$ для всех $t > 0$ и, значит, функция φ постоянна на промежутке $(0, \infty)$. В частности, получаем, что

$$f(tx) = \varphi(t) = \varphi(1) = f(x),$$

то есть f — однородная функция степени 0.

Пусть $r \neq 0$. Тогда из равенства (6.8.44) следует, что $t\varphi'(t) = r\varphi(t)$. Отсюда получаем

$$0 = \frac{\varphi'(t)}{t^r} - \frac{r\varphi(t)}{t^{r+1}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\varphi(t)}{t^r} \right).$$

Это позволяет заключить, что функция

$$t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t^r}$$

постоянная в промежутке $(0, \infty)$. В частности, получаем, что

$$\frac{\varphi(t)}{t^r} = \varphi(1)$$

для всех $t > 0$, то есть $\varphi(t) = f(tx) = t^r f(x)$ для всех $t > 0$. Теорема, тем самым, доказана. $\square$

7 ВТОРОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ — отображение открытого множества $U \subset \mathbb{X}$ нормированного пространства $\mathbb{X}$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$. Если это отображение дифференцируемо во всех точках U , то в каждой точке $x \in U$ определен дифференциал $Df(x)$. Таким образом, Df является отображением, определенным на U со значениями в векторном нормированном пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$: $Df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$. Естественно изучить, будет ли в свою очередь дифференцируемым это отображение. Если это так, то его дифференциал в точке $a \in U$, обозначаемый символом $D^2f(a)$, будет элементом пространства $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y}))$. Если второй дифференциал существует во всех точках U , то определено отображение $D^2f : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y}))$: каждой точке $x \in U$ сопоставлен второй дифференциал $D^2f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y}))$.

Пусть теперь u — некоторый вектор из $\mathbb{X}$. По определению второго дифференциала $D^2f(a)\langle u \rangle$ является элементом $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$, т. е. линейным

отображением $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$. Если взять другой вектор $v \in \mathbb{X}$, то можно говорить о значении $(D^2 f(a)\langle u \rangle)\langle v \rangle$, которое будет вектором $\mathbb{Y}$. Таким образом, паре векторов $(u, v) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ сопоставлен элемент $(D^2 f(a)\langle u \rangle)\langle v \rangle \in \mathbb{Y}$. Заметим, что соответствие

$$\mathbb{X} \times \mathbb{X} \ni (u, v) \mapsto D^2 f(a)\langle u, v \rangle = (D^2 f(a)\langle u \rangle)\langle v \rangle \quad (7.1.1)$$

является линейным по каждому из аргументов, т. е. является билинейной формой.

Заметим, что

$$D^2 f(a)\langle u \rangle = D(Df(x))|_{x=a}\langle u \rangle = D_u(Df(x))|_{x=a}. \quad (7.1.2)$$

Поэтому из (7.1.1) и (7.1.2) имеем

$$\begin{aligned} D^2 f(a)\langle u, v \rangle &= (D^2 f(a)\langle u \rangle)\langle v \rangle = D_u(Df(x))|_{x=a}\langle v \rangle \\ &= D_u(Df(x)\langle v \rangle)|_{x=a} = D_u(Df(x)\langle v \rangle)|_{x=a}. \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

С другой стороны, $Df(x)\langle v \rangle$ — это $D_v f(x)$, поэтому правая часть (7.1.3) существует и равна $(D_u(D_v f))(a)$.

Окончательно, если существует $D^2 f(a)$, то существует $(D_u(D_v f))(a)$ и

$$D^2 f(a)\langle u, v \rangle = (D^2 f(a)\langle u \rangle)\langle v \rangle = (D_u(D_v f))(a). \quad (7.1.4)$$

Правую часть называют также частной производной второго порядка $D_u D_v f(a)$ (конечно, при частном дифференцировании $D_u D_v$ сначала вычисляют частную производную D_v , а затем частную производную D_u).

В вышеприведенных рассуждениях применяется следующее отождествление: линейному отображению $\mathbb{X}$ в $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ соответствует билинейное отображение $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$. Согласно определению этого отождествления, линейному отображению A пространства $\mathbb{X}$ в $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ ставится в соответствие билинейное отображение Q пространства $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$, определенное равенством

$$Q(u, v) = (A\langle u \rangle)\langle v \rangle. \quad (7.1.5)$$

Второй дифференциал рассматривается именно в форме (7.1.5). Именно по этой причине выражение $(D^2 f(a)\langle u \rangle)\langle v \rangle$ может быть записано в виде $D^2 f(a)\langle u, v \rangle$, и $D^2 f(a)$ становится элементом пространства $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X}; \mathbb{Y})$ или $\mathcal{L}(\mathbb{X}^2; \mathbb{Y})$ билинейных отображений $\mathbb{X} \times \mathbb{X} = \mathbb{X}^2$ в $\mathbb{Y}$.

Учитывая вышесказанное, мы приходим к следующему утверждению.

7.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $D^2f(x)$ существует для всех $x \in U$, то $D^2f : x \rightarrow D^2f(x)$ является функцией, определенной на $U \subset \mathbb{X}$, со значениями в $\mathcal{L}(\mathbb{X}^2; \mathbb{Y})$. При этом (7.1.4) принимает вид

$$D^2f(a)\langle u, v \rangle = D_u D_v f(a), \quad (7.1.6)$$

где правая часть существует, если только существует левая, т. е. существует $D^2f(a)$.

7.2. СИММЕТРИЧНОСТЬ ВТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

7.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Билинейное отображение Q произведения $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ в векторное пространство $\mathbb{Z}$ называется симметричным, если мы имеем равенство

$$Q(u, v) = Q(v, u)$$

для любых $u, v \in \mathbb{X}$,

7.3. ТЕОРЕМА. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ — отображение открытого множества U нормированного пространства $\mathbb{X}$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$. Предположим, что оно имеет второй дифференциал $D^2f(a)$ в точке $a \in U$. Тогда $D^2f(a)$ является билинейным симметричным отображением $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$:

$$D^2f(a)\langle u, v \rangle = D^2f(a)\langle v, u \rangle. \quad (7.2.7)$$

Если $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, то, выбирая в качестве u и v векторы стандартного базиса, получаем соотношение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a). \quad (7.2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем доказательство на три этапа.

1-ЫЙ ШАГ. Здесь мы докажем, что если отображение f дважды дифференцируемо в точке a , то

$$\lim_{u, v \rightarrow 0} \frac{|f(a + u + v) - f(a + u) - f(a + v) + f(a) - D^2f(a)\langle v, u \rangle|}{(|u| + |v|)^2} = 0. \quad (7.2.9)$$

Без ограничения общности можно полагать $a = 0$. По заданному $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|Df(x) - Df(0) - D^2f(0)\langle x \rangle| < \varepsilon|x| \quad \text{для } x \in B(0, 2\delta).$$

Для $u, v \in B(0, \delta)$ положим

$$g_v(u) = f(u + v) - f(u) - f(v) + f(0) - (D^2 f(0)\langle v \rangle)\langle u \rangle,$$

и, фиксируя значение параметра v , найдем дифференциал отображения g_v по переменной u :

$$\begin{aligned} Dg_v(u) &= Df(u + v) - Df(u) - D^2 f(0)\langle v \rangle \\ &= [Df(u + v) - Df(0) - D^2 f(0)\langle u + v \rangle] \\ &\quad - [Df(u) - Df(0) - D^2 f(0)\langle u \rangle]. \end{aligned}$$

Заметим, что при данном выборе u, v имеем $u + v \in B(0, 2\delta)$ и поэтому

$$|Dg_v\langle u \rangle| \leq \varepsilon|u + v| + \varepsilon|u| \leq 2\varepsilon(|u| + |v|). \quad (7.2.10)$$

По теореме о конечных приращениях с учетом того, что шар $B(0, 2\delta)$ — выпуклое множество и $g_v(0) = 0$, из (7.2.10) выводим

$$|g_v(u)| \leq 2\varepsilon(|u| + |v|)|u| \leq 2\varepsilon(|u| + |v|)^2.$$

2-ОЙ ШАГ. Из доказанного на предыдущем шаге получаем, как следствие, что $D^2 f(a)$ является симметрической билинейной формой. Действительно, из доказанного выше равенства (7.2.9) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{D^2 f(a)\langle v, u \rangle}{(|u| + |v|)^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D^2 f(a)\langle tv, tu \rangle}{(|tu| + |tv|)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D^2 f(a)\langle tu, tv \rangle}{(|tv| + |tu|)^2} = \frac{D^2 f(a)\langle u, v \rangle}{(|v| + |u|)^2} \end{aligned}$$

для $|u| + |v| \neq 0$.

3-ИЙ ШАГ. Равенство (7.2.8) — прямое следствие (7.1.6) и (7.2.7). $\square$

8 ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫСШИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ И ИХ СВОЙСТВА

Теперь мы по индукции обобщим понятие первого дифференциала и рассмотрим дифференциалы произвольных порядков. Для этого обозначим

$$D^0 f = f, \quad D^1 f = Df,$$

вместо «дифференцируемое» будем говорить «один раз дифференцируемое», и нормируем векторное пространство всех m -линейных отображений из $\mathbb{X}^m = \underbrace{\mathbb{X} \times \dots \times \mathbb{X}}_{m \text{ раз}}$ в $\mathbb{Y}$, полагая для $L \in \mathcal{L}(\mathbb{X}^m; \mathbb{Y})$

$$|L| = \sup\{L(v_1, \dots, v_m) : v_i \in \mathbb{X}, \text{ и } |v_i| \leq 1 \text{ для } i = 1, \dots, m\}.$$

8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В случае $k > 2$ будем говорить, что отображение $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$, где $U \subset \mathbb{X}$ — открытое множество, является k раз дифференцируемым в точке a , если f дифференцируемо $k - 1$ раз в каждой точке некоторой окрестности точки a и функция $D^{k-1}f$ со значениями в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{X}^{k-1}; \mathbb{Y})$ $(k - 1)$ -линейных отображений из $\mathbb{X}^{k-1}$ в $\mathbb{Y}$ дифференцируема в точке a . В этом случае k -ый дифференциал в точке a — это k -линейное отображение $D^k f(a) : \mathbb{X}^k \rightarrow \mathbb{Y}$, задаваемое формулой

$$D^k f(a)\langle v_1, \dots, v_k \rangle = (D(D^{k-1}f)(a)\langle v_1 \rangle)\langle v_2, \dots, v_k \rangle \quad (8.1.1)$$

для любых $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{X}$.

8.2. ЗАДАЧА. С помощью индукции по q проверить (предложение (7.1)—база индукции), что

$$D^{q+p}(a)\langle v_1, \dots, v_{q+p} \rangle = (D^q(D^p f)(a)\langle v_1, \dots, v_q \rangle)\langle v_{q+1}, \dots, v_{q+p} \rangle$$

для любых $v_1, \dots, v_{q+p} \in \mathbb{X}$.

По индукции доказывается также

8.3. СВОЙСТВО. Если для отображения $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$, $U \subset \mathbb{X}$, существует $D^k f(a)$, то существует $D_{v_1} D_{v_2} \dots D_{v_k} f(a) \in \mathbb{Y}$ и

$$D^k f(a)\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = D_{v_1} D_{v_2} \dots D_{v_k} f(a) \in \mathbb{Y}. \quad (8.1.2)$$

8.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. k -Линейное отображение L пространства $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \dots \times \mathbb{X} = \mathbb{X}^k$ в пространство $\mathbb{Y}$ называется симметричным, если для любой системы векторов $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{X}$ справедливо равенство

$$L(v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, \dots, v_{\sigma_k}) = L(v_1, v_2, \dots, v_k) \quad (8.1.3)$$

при любой перестановке $\sigma : m \rightarrow \sigma_m$ множества $\{1, 2, \dots, k\}$.

Теорема 7.3 теперь может быть обобщена на производные производных порядков:

8.5. ТЕОРЕМА. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ — отображение открытого множества U нормированного пространства $\mathbb{X}$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$ имеет k -ый дифференциал $D^k f(a)$ в точке $a \in U$. Тогда $D^k f(a)$ является симметричным отображением $\mathbb{X}^k$ в $\mathbb{Y}$, т. е. для любой перестановки σ множества $\{1, 2, \dots, k\}$ и любой системы векторов $(v_1, v_2, \dots, v_k) \in \mathbb{X}^k$ имеют место равенства

$$D^k f(a)(v_1, v_2, \dots, v_k) = D^k f(a)(v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, \dots, v_{\sigma_k}), \quad (8.1.4)$$

$$D_{v_1} D_{v_2} \dots D_{v_k} f(a) = D_{v_{\sigma_1}} D_{v_{\sigma_2}} \dots D_{v_{\sigma_k}} f(a). \quad (8.1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема была доказана для производных второго порядка. Предположим, что она справедлива для производных порядка $\leq k-1$, и докажем ее для производных порядка $k \geq 3$. Предположим вначале, что $\sigma_1 = 1$ и что σ переставляет только числа $2, 3, \dots, k$. Тогда функции $D_{v_2} \dots D_{v_k} f$ и $D_{v_{\sigma_2}} \dots D_{v_{\sigma_k}} f$, определенные в U , со значениями в $\mathbb{Y}$ по предположению индукции совпадают. Следовательно, и их производные в точке a вдоль вектора $v_1 = v_{\sigma_1}$ одинаковы и мы имеем равенства (8.1.4) и (8.1.5). Предположим теперь, что $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, и что σ сохраняет каждое из чисел $3, 4, \dots, k$. Тогда $D_{v_3} \dots D_{v_k} f = D_{v_{\sigma_3}} \dots D_{v_{\sigma_k}} f$ является функцией, определенной в U и имеющей первую производную всюду и вторую производную в точке a . Следовательно, к ней можно применить теорему 7.3 относительно производных вдоль v_1 и v_2 и вновь получить (8.1.4) и (8.1.5).

Так как каждая перестановка чисел $\{1, 2, \dots, k\}$ является композицией перестановок этих двух типов (это очевидно, если $\sigma_1 = 1$; в любой перестановке можно от $1, 2, \dots, k$ перейти к $1, \sigma_1, \dots, k$, затем от $1, \sigma_1, \dots, k$ к $\sigma_1, 1, \dots, k$ и, наконец, от $\sigma_1, 1, \dots, k$ к $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$), то теорема будет справедливой и в общем случае. $\square$

8.6. ПРИМЕР. В примере (6.22) показано, что непрерывный m -линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_m; \mathbb{Y})$, действующий из произведения $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_m$ линейных нормированных пространств в линейное нормированное пространство $\mathbb{Y}$, дифференцируем и его дифференциал равен

$$\begin{aligned} DA(x)\langle h_1, \dots, h_m \rangle &= A'(x_1, \dots, x_m)\langle h_1, \dots, h_m \rangle \\ &= A(h_1, x_2, \dots, x_m) + \dots + A(x_1, \dots, x_{m-1}, h_m) \end{aligned} \quad (8.1.6)$$

(здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $(h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_m$).

В случае $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_2 = \dots = \mathbb{X}_m = \mathbb{X}$ и симметрического оператора A

из (8.1.6) при $\bar{x} = (\underbrace{x, x, \dots, x}_{m \text{ аргументов}}) \in \mathbb{X}^m$ и $h \in \mathbb{X}$ получаем, что

$$DA(\bar{x})\langle \underbrace{h, h, \dots, h}_{m \text{ аргументов}} \rangle = mA\langle \underbrace{x, x, \dots, x}_{m-1 \text{ аргументов}}, h \rangle.$$

Значит, функция $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, определяемая условием

$$\mathbb{X} \ni x \mapsto F(x) = A(\underbrace{x, x, \dots, x}_{m \text{ аргументов}}),$$

дифференцируема и

$$F'(x)\langle h \rangle = mA\langle \underbrace{x, x, \dots, x}_{m-1 \text{ раз}}, h \rangle.$$

Следовательно, дифференциал $F'(x)$ можно записать в виде

$$F'(x) = mA\langle \underbrace{x, x, \dots, x}_{m-1 \text{ раз}}, \cdot \rangle \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}).$$

В частности, если отображение $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ имеет во внутренней точке $a \in U$ дифференциал порядка m , то функция

$$F(h) = D^m f(a)\langle \underbrace{h, h, \dots, h}_{m \text{ аргументов}} \rangle$$

дифференцируема по h и

$$F'(h) = mD^m f(a)\langle \underbrace{h, h, \dots, h}_{m-1 \text{ раз}}, \cdot \rangle. \quad (8.1.7)$$

8.2. КООРДИНАТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ. МУЛЬТИИНДЕКСНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с неотрицательными целочисленными координатами называется n -мерным мультииндексом. Далее мы будем использовать следующие обозначения:

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ для нормы мультииндекса;

$\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$, $0! = 1$;

для вектора $h \in \mathbb{X}$ с координатами $h_1, \dots, h_n$ в фиксированном базисе $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{X}$ полагаем $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot h_n^{\alpha_n}$.

8.7. ЗАДАЧА. Показать, что в мультииндексных обозначениях формула (5.1.5) может быть записана как (с n вместо m и m вместо n)

$$\begin{aligned} & (u_1 + u_2 + \dots + u_n)^m \\ &= \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m} \frac{m!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!} u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot u_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} u^\alpha. \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

Для отображения, имеющего дифференциал порядка m в точке a , выражение $D^\alpha f(a)$ обозначает его частную производную порядка $|\alpha|$:

$$D^\alpha f(a) = \underbrace{D_{e_n} \dots D_{e_n}}_{\alpha_n \text{ раз}} \dots \underbrace{D_{e_1} \dots D_{e_1}}_{\alpha_1 \text{ раз}} f(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial h_n^{\alpha_n} \dots \partial h_1^{\alpha_1}}(a).$$

8.8. ТЕОРЕМА. Пусть в конечномерном нормированном пространстве $\mathbb{X}$ выбрана система координат $e_1, \dots, e_n$, и вектор $h \in \mathbb{X}$ имеет координаты $h_1, \dots, h_n$. Пусть еще $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ — отображение открытого множества U нормированного пространства $\mathbb{X}$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$ имеет m -ый дифференциал $D^m f(a)$ в точке $a \in U$.

Тогда значение дифференциала $D^m f(a)$ на m векторах $h, \dots, h$ можно записать в виде

$$D^m f(a) \langle \underbrace{h, h, \dots, h}_{m \text{ аргументов}} \rangle = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha. \quad (8.2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии со свойством (8.3) значение дифференциала $D^m f(a)$ на m векторах $h, \dots, h$ равно

$$D^m f(a) \langle h, h, \dots, h \rangle = \underbrace{D_h D_h \dots D_h}_{m \text{ раз}} f(a) \in \mathbb{Y}. \quad (8.2.10)$$

Из равенства (6.6.37) имеем

$$D_h f(a) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \quad (8.2.11)$$

С учетом (8.2.10) и (8.2.11) значение дифференциала $D^m f(a)$ на m векторах $h, \dots, h$ можно записать в виде

$$D^m f(a) \langle h, h, \dots, h \rangle = \sum_{j_1, \dots, j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_m} \partial x_{j_{m-1}} \dots \partial x_{j_1}}(a) h_{j_1} h_{j_2} \dots h_{j_m} \in \mathbb{Y}. \quad (8.2.12)$$

В этой формуле индексы $j_1, j_2, \dots, j_m$ принимают независимо друг от друга всевозможные значения из множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Объединим между собой все наборы индексов $j_1, j_2, \dots, j_m$, у которых α_1 индексов равны 1, α_2 индексов равны 2, $\dots$, α_n индексов равны n . В сумме (8.2.12) они дадут слагаемые, которые в силу равенства смешанных производных равны между собой: их общее значение можно записать в виде элемента

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f(a) h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \dots h_n^{\alpha_n} \in \mathbb{Y}. \quad (8.2.13)$$

Слагаемых этого вида имеется столько, сколько существует отображений j множества $\{1, 2, \dots, m\}$ в множество $\{1, 2, \dots, n\}$, где $\{1\}$ имеет прообраз, состоящий из α_1 элементов, $\{2\}$ — из α_2 элементов, $\dots$, $\{n\}$ — из α_n элементов, причем $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$. Это число γ_α называется числом «перестановок с повторениями» n объектов $\{1, 2, \dots, n\}$, где объект 1 берется α_1 раз, объект 2 берется α_2 раз, $\dots$, объект n берется α_n раз. Существуют разные способы вычисления этого числа. Нетрудно видеть, что γ_α равно коэффициенту при h^α в разложении $(h_1 + h_2 + \dots + h_n)^m$ (см. (8.2.8) с h вместо u):

$$\gamma_\alpha = \frac{m!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!} = \frac{m!}{\alpha!}. \quad (8.2.14)$$

С учетом (8.2.12), (8.2.13) и (8.2.14) формула (8.2.9) доказана. $\square$

8.9. ЗАМЕЧАНИЕ. Из формулы (8.2.12) видно, что между соседними дифференциалами есть простое ключевое соотношение:

$$\begin{aligned} & D^m f(a) \langle \underbrace{h, h, \dots, h}_{m \text{ аргументов}} \rangle \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_m} \partial x_{j_{m-1}} \dots \partial x_{j_1}}(a) h_{j_1} h_{j_2} \dots h_{j_m} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_{m-1}=1}^n \left[\sum_{j_m=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{j_m}} \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{j_{m-1}} \dots \partial x_{j_1}} \right) (a) h_{j_m} \right] h_{j_1} \dots h_{j_{m-1}} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_{m-1}=1}^n \left[D \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{j_{m-1}} \dots \partial x_{j_1}} \right) (a) \langle h \rangle \right] h_{j_1} \dots h_{j_{m-1}}. \end{aligned} \quad (8.2.15)$$

При $m = 1$ первый дифференциал может быть записан в виде (6.6.39). Чтобы в аналогичном виде записать дифференциал порядка m рассмот-

рим следующую систему базисных m -однородных функций: для мультииндекса α порядка m определим m -однородные функции:

$$dx^\alpha(h) = h^\alpha. \quad (8.2.16)$$

В этих обозначениях дифференциал (8.2.9) порядка m можно записать в виде:

$$D^m f(a) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha f(a) dx^\alpha. \quad (8.2.17)$$

Отсюда и формул (8.2.15) и (6.6.39) получаем следующее рекуррентное правило вычисления дифференциала:

$$D^m f(a) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha f(a) dx^\alpha = \sum_{|\alpha|=m-1} \frac{(m-1)!}{\alpha!} D(D^\alpha f)(a) dx^\alpha. \quad (8.2.18)$$

9 ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

9.1. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ

9.1. ТЕОРЕМА. Если отображение $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ окрестности $U = U(x)$ точки x нормированного пространства $\mathbb{X}$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$ таково, что f имеет в U дифференциал до порядка $m-1$ включительно, а в самой точке x имеет дифференциал $D^m f(x)$, то

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \frac{Df(x)}{1!} \langle h \rangle + \dots + \frac{D^m f(x)}{m!} \underbrace{\langle h, h, \dots, h \rangle}_{m \text{ аргументов}} + o(|h|^m) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{D^k f(x)}{k!} \underbrace{\langle h, h, \dots, h \rangle}_{k \text{ аргументов}} + o(1)|h|^m \quad (9.1.1) \end{aligned}$$

при $h \rightarrow 0$.

Равенство (9.1.1) есть одна из разновидностей формулы Тейлора, написанной на сей раз уже для достаточно общих классов отображений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулу Тейлора (9.1.1) по индукции.

При $m=1$ она верна в силу определения $Df(x)$. Пусть формула (9.1.1) верна для любого отображения дифференцируемого в точке x

$m - 1 \in N$ раз. Тогда на основании теоремы 6.32 о конечных приращениях, формулы (8.1.7) и сделанного предположения индукции получаем

$$\begin{aligned} & \left| f(x+h) - (f(x) + Df(x)\langle h \rangle + \dots + \frac{D^m f(x)}{m!} \underbrace{\langle h, h, \dots, h \rangle}_{m \text{ аргументов}}) \right| \\ & \leq \sup_{0 < \theta < 1} \left| Df(x + \theta h) - \left(Df(x) + D^2 f(x)\langle \theta h, \cdot \rangle + \dots \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{D^m f(x)}{(m-1)!} \underbrace{\langle \theta h, \theta h, \dots, \theta h, \cdot \rangle}_{m-1 \text{ аргумент}} \right) \right| |h| = o(|\theta h|^{m-1})|h| = o(|h|^m) \quad (9.1.2) \end{aligned}$$

при $h \rightarrow 0$. □

Мы не останавливаемся здесь на других, иногда весьма полезных, вариантах формулы Тейлора.

9.2. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА В КООРДИНАТАХ

Фиксируем в конечномерном нормированном пространстве $\mathbb{X}$ базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Из теоремы 9.1 и 8.8 непосредственно выводим следующее утверждение.

9.2. ТЕОРЕМА. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ — отображение открытого множества U нормированного пространства $\mathbb{X}$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$ имеет m -ый дифференциал $D^m f(a)$ в точке $a \in U$, а вектор $h \in \mathbb{X}$ имеет координаты $h_1, \dots, h_n$.

Тогда полиномиальную часть степени не выше m , входящую в правую часть формулы (9.1.1), можно записать в виде,

$$\sum_{k=0}^m \frac{D^k f(x)}{k!} \underbrace{\langle h, h, \dots, h \rangle}_{k \text{ аргументов}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha.$$

Таким образом, формула Тейлора принимает следующий вид:

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^n). \quad (9.2.3)$$

9.3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛИНОМА ТЕЙЛОРА

Фиксируем в конечномерном нормированном пространстве $\mathbb{X}$ базис $e_1, e_2, \dots, e_n$.

9.3. ТЕОРЕМА. Если $f : U \rightarrow \mathbb{Y}$ — отображение открытого множества U нормированного пространства $\mathbb{X}$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$ имеет m -ый дифференциал $D^m f(a)$ в точке $a \in U$ и найдены такие элементы $c_\alpha \in \mathbb{Y}$, что

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{c_\alpha}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^n) \quad \text{при } \mathbb{X} \ni h \rightarrow 0,$$

то имеют место равенства

$$c_\alpha = D^\alpha f(a) \quad \text{для всех } |\alpha| \leq m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $b_\alpha = D^\alpha f(a) - c_\alpha$ для всех $|\alpha| \leq m$. Тогда, составляя разность, можно убедиться, что норма полинома

$$Q(h) = \sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha h^\alpha$$

(с векторными коэффициентами) относительно $h_1, h_2, \dots, h_n$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $|h|$, при h , стремящемся к 0. Полагая $h = tX$, получаем полином $P(t) = Q(tX)$ степени не выше m , который при $t \rightarrow 0$ является величиной $o(t^m)$. С помощью индукции можно убедиться в том, что $P \equiv 0$. В частности, $P(1) = Q(X) = 0$, а так как $X \in \mathbb{X}$ — произвольный вектор, то $Q \equiv 0$. Но у тождественно равного нулю полинома все коэффициенты равны нулю, чем и заканчивается доказательство теоремы. $\square$

9.4. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА К ИЗУЧЕНИЮ МАКСИМУМОВ И МИНИМУМОВ

9.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть f — вещественнозначная функция, определенная на множестве U нормированного пространства $\mathbb{X}$. Говорят, что f имеет в точке $a \in U$ *локальный максимум*, если существует некоторая окрестность V точки $a \in U$ такая, что сужение f на $U \cap V$ имеет в точке a максимум, т. е. если для любой точки $x \in U \cap V$ имеет место неравенство $f(x) \leq f(a)$. Локальный максимум называют *строгим*, если можно выбрать V таким образом, чтобы для $x \neq a$ из $U \cap V$ имело место строгое неравенство $f(x) < f(a)$.

Аналогичное определение дается для локального минимума и строгого локального минимума.

Конечно, максимум функции f , т. е. ее абсолютный максимум, является одновременно и относительным максимумом, в то время как противоположное утверждение, вообще говоря, не верно.

Говорят, что функция f имеет в точке a *экстремум*, если она имеет в этой точке локальный максимум или локальный минимум.

Используя формулу Тейлора, укажем необходимые, а также достаточные дифференциальные условия внутреннего локального экстремума вещественнозначной функции, определенной на некотором открытом множестве нормированного пространства. Как мы увидим, эти условия аналогичны уже известным нам дифференциальным условиям экстремума вещественнозначной функции вещественного переменного.

9.5. ТЕОРЕМА. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, определенная на открытом множестве U нормированного пространства $\mathbb{X}$ и имеющая в окрестности некоторой точки $x \in U$ дифференциалы до порядка $k - 1 \geq 1$ включительно, а также дифференциал $D^k f(x)$ порядка k в самой точке x . Если

$$Df(x) = 0, \dots, D^{k-1}f(x) = 0, \quad D^k f(x) \neq 0,$$

то для того, чтобы x была точкой экстремума функции f необходимо, чтобы k было четно, а форма $D^k f(x) \underbrace{\langle h, \dots, h \rangle}_k$ была полуопределенной (т. е. не может принимать значения разных знаков); достаточно, чтобы форма $D^k f(x) \underbrace{\langle h, \dots, h \rangle}_k$ на единичной сфере $|h| = 1$ не обращалась в нуль; при этом, если на этой сфере

$$D^k f(x) \underbrace{\langle h, \dots, h \rangle}_k > 0,$$

то x — точка локального минимума, а если

$$D^k f(x) \underbrace{\langle h, \dots, h \rangle}_k < 0,$$

то x — точка локального максимума.

9.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Форма $D^k f(x) \underbrace{\langle h, \dots, h \rangle}_k$ полуопределена, когда она не может принимать значения разных знаков, хотя при некоторых значениях $h \neq 0$ она может обращаться в нуль.

Равенство $D^k f(x) = 0$, как обычно, понимается в том смысле, что $D^k f(x) \underbrace{\langle h, \dots, h \rangle}_k = 0$ для любого вектора h .

9.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Если форма $D^k f(x) \underbrace{\langle h, \dots, h \rangle}_k$ знакопостоянна, то она отграничена от нуля в том смысле, что

$$D^k f(x) \underbrace{\langle h, \dots, h \rangle}_k \geq \delta \quad \text{или} \quad D^k f(x) \underbrace{\langle h, \dots, h \rangle}_k \leq -\delta$$

для всех h , $|h| = 1$. Оптимальной постоянной $\delta \neq 0$ в первом (втором) случае является минимальное (максимальное) значение функции $\mathbb{X} \ni h \mapsto D^k f(x) \underbrace{\langle h, \dots, h \rangle}_k$ на компактном множестве $S = \{x \in \mathbb{X} : |x| = 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства рассмотрим тейлоровское разложение (9.1.1) функции f в окрестности точки x . Сделанные предположения позволяют записать, что

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{k!} D^k f(x) \underbrace{\langle h, \dots, h \rangle}_k + \alpha(h) |h|^k,$$

где $\alpha(h)$ — вещественнозначная функция, причем $\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Докажем сначала необходимые условия. Поскольку $D^k f(x) \neq 0$, найдется вектор $h_0 \neq 0$, на котором $D^k f(x) \underbrace{\langle h_0, \dots, h_0 \rangle}_k \neq 0$. Тогда при значениях вещественного параметра t , достаточно близких к нулю, имеем

$$\begin{aligned} f(x + th_0) - f(x) &= \frac{1}{k!} D^k f(x) \underbrace{\langle th_0, \dots, th_0 \rangle}_k + \alpha(th_0) |th_0|^k \\ &= \left(\frac{1}{k!} D^k f(x) \underbrace{\langle h_0, \dots, h_0 \rangle}_k + \alpha(th_0) |h_0|^k \right) t^k. \end{aligned}$$

Заключенное в круглые скобки выражение имеет тот же знак, что и $D^k f(x) \underbrace{\langle h_0, \dots, h_0 \rangle}_k$ при достаточно малом t . Для того чтобы x была точкой экстремума, необходимо, чтобы левая (а значит, и правая) часть последнего равенства не меняла знака при изменении знака t . Но это возможно лишь в случае четного k .

Проведенное рассуждение показывает, что если x — точка экстремума, то знак разности $f(x + th_0) - f(x)$ при достаточно малых значениях t совпадает со знаком $D^k f(x) \underbrace{\langle h_0, \dots, h_0 \rangle}_k$, и, следовательно, в этом случае не может быть двух векторов h_0, h_1 , на которых бы форма $D^k f(x)$ принимала значения разных знаков.

Перейдем к доказательству достаточных условий экстремума. Для определенности рассмотрим случай, когда

$$D^k f(x) \underbrace{\langle h, \dots, h \rangle}_k > 0$$

при $|h| = 1$. Тогда на основании замечания (9.7) имеем

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= \frac{1}{k!} D^k f(x) \underbrace{\langle th, \dots, th \rangle}_k + \alpha(h) |h|^k \\ &= \left(\frac{1}{k!} D^k f(x) \underbrace{\left\langle \frac{h}{|h|}, \dots, \frac{h}{|h|} \right\rangle}_k + \alpha(h) \right) |h|^k \geq \left(\frac{1}{k!} \delta + \alpha(h) \right) |h|^k. \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, последний член неравенства положителен для всех достаточно близких к нулю векторов $h \neq 0$. Таким образом, для всех таких векторов h

$$f(x + h) - f(x) > 0,$$

т. е. x — точка строгого локального минимума. Аналогично проверяется достаточное условие строгого локального максимума. $\square$

9.5. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ f ДВУХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ x, y

При исследовании такой функции на экстремум надо прежде всего найти точки, в которых частные производные $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ равны нулю. Пусть (a, b) — такая точка. Рассмотрим теперь разложение функции f по формуле Тейлора по степеням $x - a = u$ и $y - b = v$. Это разложение начинается с

$$\frac{1}{2} (ru^2 + 2suv + tv^2) \tag{9.5.4}$$

где $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ и $q = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

1-й СЛУЧАЙ: $rt - s^2 > 0$, r (и t) < 0 . Квадратичная форма (9.5.4) в этом случае отрицательно определенная, а, значит, f имеет в точке (a, b) строгий относительный максимум.

2-й СЛУЧАЙ: $rt - s^2 > 0$, r (и t) > 0 . Функция f имеет в точке (a, b) строгий относительный минимум.

3-й СЛУЧАЙ: $rt - s^2 < 0$. Квадратичная форма (9.5.4) принимает значения разных знаков, и, следовательно, мы имеем дело с *седлом*. Уравнение $ru^2 + 2suv + tv^2 = 0$ задает две прямые D и D' на плоскости $\mathbb{R}^2$, определяющие 4 попарно вертикальных угла. Обозначим их по порядку обхода через (1), (2), (3), (4). Предположим, например, что рассматриваемая квадратичная форма > 0 в углах (1) и (3) и < 0 в углах (2) и (4).

Пусть угол (1) определен в полярных координатах неравенствами $\rho \geq 0$ и $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Тогда каждый угол $\alpha' \leq \varphi \leq \beta'$, где $\alpha' > \alpha$ и $\beta' > \beta$, пересекает «единичную сферу» из $\mathbb{R}^2$, т. е. окружность, по компактной дуге, на которой квадратичная форма имеет минимум $\delta > 0$. Следовательно, существует такое число $\varepsilon > 0$, что если положить $x = a + \rho \cos \varphi$, $y = b + \rho \sin \varphi$, $\rho > 0$, $\alpha' \leq \varphi \leq \beta'$, то для $0 < \rho \leq \varepsilon$ имеет место неравенство $f(x, y) > f(a, b)$.

Однако это число ε зависит от α' и β' . Поэтому невозможно, не привлекая к изучению дифференциалы функции f порядков > 2 в точке (a, b) , делать какие-либо выводы при ρ , стремящемся к 0, если одновременно с этим φ стремится к α или β . Тот же результат имеет место в угле (3). В углах (2) и (4) имеет место аналогичный результат, но с заменой неравенства $f(x, y) > f(a, b)$ на $f(x, y) < f(a, b)$.

Области плоскости $\mathbb{R}^2$, у которых $f(x, y) > f(a, b)$ и $f(x, y) < f(a, b)$, разделены кривой $f(x, y) = f(a, b)$. Эта кривая в точке (a, b) имеет две ветви, касательные соответственно к D и D' . Однако, не привлекая к рассмотрению дифференциалы функции f порядков > 2 в точке (a, b) , невозможно сказать, в каком из углов находятся эти кривые.

4-й СЛУЧАЙ: $rt - s^2 = 0$, r или $t < 0$. Квадратичная форма равна квадрату некоторой линейной формы $\neq 0$, взятому с противоположным знаком. Она < 0 , но обращается в нуль на некоторой прямой D . Пусть $\varphi = \varphi_0 + k\pi$ — полярный угол этой прямой. Если $x = a + \rho \cos \varphi$, $y = b + \rho \sin \varphi$, $\rho \leq 0$, $\alpha' \leq \varphi \leq \beta'$, где α' и β' фиксированы, $\alpha' > \varphi_0$ и $\beta' < \varphi_0 + \pi$, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что для $0 < \rho \leq \varepsilon$ имеет место неравенство $f(x, y) < f(a, b)$. Аналогичный результат справедлив для $\alpha' > \varphi_0 + \pi$, $\beta' < \varphi_0 + 2\pi$.

К сказанному ничего добавить нельзя. В частности, без привлечения дифференциалов порядков > 2 нельзя сказать, имеет или нет функция

f в точке (a, b) относительный максимум.

5-й СЛУЧАЙ: $rt - s^2 = 0$, r или $t > 0$. Результат аналогичен предыдущему, надо только заменить $f(x, y) < f(a, b)$ на $f(x, y) > f(a, b)$.

6-й СЛУЧАЙ: $r = s = t = 0$. Без привлечения дифференциалов функции f в точке (a, b) порядка > 2 никакого вывода о поведении функции f в точке (a, b) сделать невозможно.

9.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Проведенные исследования показывают, что различных вариантов поведения функции более одной переменной значительно больше, чем это имеет место для функции одной переменной.

9.6. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА К ИЗУЧЕНИЮ РАСПОЛОЖЕНИЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПО ОТНОШЕНИЮ К КАСАТЕЛЬНОЙ ГИПЕРПЛОСКОСТИ

9.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть f — дифференцируемая вещественная функция, определенная на $U \subset \mathbb{X}$. Тогда $y = f(x)$ является уравнением дифференцируемого многообразия пространства $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$. Такое многообразие называют дифференцируемой гиперповерхностью. Ее касательная гиперплоскость в точке $A = (a, f(a))$ определяется уравнением $y - b = Df(a)(x - a)$. Расположение гиперповерхности по отношению к касательной гиперплоскости в окрестности точки A определяется знаком разности

$$f(x) - f(a) - Df(a)(x - a) \quad (9.6.5)$$

для x , близких к a .

Заметим, что отображение $x \rightarrow f(x) - Df(a)(x - a)$ является дифференцируемой вещественной функцией, дифференциал которой в точке a равен нулю. Все сводится к тому, чтобы выяснить, имеет ли эта функция в точке a экстремум какого-нибудь типа или седло. Тем самым мы возвращаемся к теореме 9.5. В силу приведенного выше заключения, наличие седла является обстоятельством частым, а не исключительным и, следовательно, кроме случая одномерного $\mathbb{X}$, гиперповерхность обычно пересекает свою касательную гиперплоскость, даже если $D^2f(a) \neq 0$. В частном случае функции f двух переменных x, y поверхность локально расположена с одной стороны от касательной плоскости, если $rt - s^2 > 0$, и пересекает ее, если $rt - s^2 \leq 0$.

10 ПОТОЧЕЧНАЯ И РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТИ

В этой главе термин «функция» употребляется для обозначения отображения вида $f : X \rightarrow E$, где $X \subset \mathbb{R}^s$, а E — банахово пространство

с нормой $|\cdot|$ над полем $\Lambda \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Для первого чтения можно предполагать, что $s = 1$, а $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, или $\mathbb{E} = \mathbb{C}$, т. е. функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), где $X \subset \mathbb{R}$ — это простейшая модельная ситуация.

В этом разделе мы рассмотрим один из ключевых вопросов математического анализа: *если последовательность функций $f_n(x)$ поточечно сходится к функции $f(x)$ на множестве S :*

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{для всех } x \in S,$$

то при каких условиях справедливы следующие три утверждения:

- 1) $\lim_{x \rightarrow p|S} f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow p|S} f(x)$;
- 2) $f'_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(x)$;
- 3) $\int_S f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_S f(x) dx$.

Как показывают следующие примеры, потребуется специальное внимание, чтобы ответить на эти вопросы.

10.1. ПРИМЕРЫ. 1. Пусть $f_n(x) = \arctan nx$. Тогда

$$f_n(x) \rightarrow \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x|_{n \rightarrow \infty}.$$

Здесь нарушены формулы 1 и 2. Все функции f_n дифференцируемы, в то время как их поточечный предел f даже не является непрерывной функцией.

2. Пусть $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan nx$. Тогда $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

Однако $f'_n(0) = 1$ при любом $n > 0$. Здесь нарушена формула 2.

3. «Набегающая волна». Пусть $f_n(x) = n \sin nx$ при $x \in [0, \pi/n]$ и $f_n(x) = 0$ при $x \notin [0, \pi/n]$. В этом случае $f_n(x) \rightarrow 0$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. В то же время $\int_0^{2\pi} f_n(x) dx = 2$ при любом $n \in \mathbb{N}$ — не выполнена формула 3.

10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИЗНАКИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ

Согласно метрическому определению сходимости, последовательность функций $f_n(x)$ поточечно сходится на множестве S к функции $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in S$ найдется число $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\text{для всех } n \geq m \text{ верно неравенство } |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

10.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что последовательность функций $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ *равномерно* по x из S (на множестве S) при $n \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что

для всех $n \geq m$ и всех $x \in S$ верно неравенство $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

В этом случае функцию f будем называть *равномерным* пределом последовательности функций f_n и будем писать

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty, x \in S} f(x),$$

опуская приписки вида $n \rightarrow \infty$ или $x \in S$ или переменную x в тех случаях, когда это не вредит пониманию текста.

Равномерная сходимост влечёт поточечную, но не наоборот (см. примеры 1 и 3).

10.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что ряд функций $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ равномерно сходится на множестве S , если последовательность частичных сумм

$$P_k = \sum_{n=1}^k g_n(x)$$

этого ряда равномерно на S сходится к некоторой функции $g : S \rightarrow \mathbb{E}$. В этом случае функцию $g(x)$ называют равномерной суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$.

10.4. КРИТЕРИЙ КОШИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ. Последовательность функций f_n равномерно сходится на множестве S к некоторой функции тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему условию Коши равномерной сходимости: для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $m \in \mathbb{N}$ такое, что

для всех $k, l \geq m$ и всех $x \in S$ верно неравенство $|f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. По определению имеется такой номер m , что $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для каждого $x \in S$ при любом $n \geq m$. Для всех таких $x \in S$ и номеров $k, l \geq m$ имеем $|f_k(x) - f_l(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть выполнено условие Коши. Тогда для всякого $x \in S$ последовательность точек $f_n(x) \in \mathbb{E}$ фундаментальная. Так как пространство $\mathbb{E}$ полное, то она сходится к некоторой точке $f(x) \in \mathbb{E}$. Покажем, что $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty, x \in S} f(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и m — такой номер, что для всех $k, l \geq m$ и для всех $x \in S$ выполняется $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$. Перейдя к пределу при $l \rightarrow \infty$, будем иметь

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{для всех } k \geq m \text{ и всех } x \in S.$$

Обозначим символом $\mathcal{F}(X, \mathbb{E})$ совокупность всевозможных $\mathbb{E}$ -значных функций, определенных на множестве X , и имеющих конечную величину

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Число $\|f\|$ называют *супремум-нормой* функции f , а число $\|f - g\|$ — *равномерным отклонением* f от g .

Векторное пространство функций $\mathcal{F}(X, \mathbb{E})$ будем считать снабженным супремум-нормой. Это пространство является нормированным векторным пространством.

10.5. ЗАДАЧИ. Здесь все функции суть элементы пространства $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X, E)$.

1. Свойства супремум-нормы:

1) $\|f\| \in [0, \infty)$ и $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = 0 \in \mathcal{F}(X, \mathbb{E})$;

2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$;

3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

2. $f_n \rightrightarrows f$ тогда и только тогда, когда $\|f - f_n\| \rightarrow 0$.

3. Условие Коши равномерной сходимости 10.4 равносильно утверждению: для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\text{для всех } k, l \geq m \text{ выполняется неравенство } \|f_k - f_l\| < \varepsilon.$$

10.6. СЛЕДСТВИЕ. Пространство $\mathcal{F}(X, \mathbb{E})$ полное (относительно супремум-нормы).

10.7. КРИТЕРИЙ КОШИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА. Ряд функций

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

сходится равномерно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\text{для всех } k, l \geq m \text{ верно неравенство } \left\| \sum_{n=k}^l f_n \right\| \leq \varepsilon.$$

10.8. ПРИЗНАК ВЕЙЕРШТРАССА РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА. Ряд функций, мажорируемый суммируемым числовым рядом, равномерно суммируем: если для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ функций $f_k \in \mathcal{F}(X, \mathbb{E})$ найдется сходящийся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ такой, что при любом $k \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\|f_k\| \leq a_k, \quad (10.1.1)$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на X . Стало быть, если $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$,

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится равномерно.

10.9. ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенство (10.1.1) равносильно следующему: $|f_k(x)| \leq a_k$ для всех $x \in X$ и всех $k \in \mathbb{N}$.

10.10. ПРИЗНАК ДИРИХЛЕ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА. Если на множестве X

D1) последовательность вещественных функций $\{u_n(x) \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})\}$, $n \in \mathbb{N}$, убывая, равномерно стремится к нулю, а

D2) частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ функций $v_n \in \mathcal{F}(X, \mathbb{E})$ равномерно ограничены,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ равномерно сходится на множестве X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы имеем $b_k(x) - b_{k-1}(x) \geq 0$ для всех $k \geq 1$, и $\left| \sum_{j=0}^k v_j(x) \right| \leq L < \infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $x \in X$.

Покажем, что для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$$

выполняется критерий Коши 10.7 равномерной сходимости. Для оценки суммы $\sum_{k=p}^q u_n(x)v_n(x)$, где $0 \leq p \leq q$, применим метод суммирования

Абеля. Полагая $A_k(x) = \sum_{j=0}^k v_j(x)$, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=p}^q u_n(x)v_n(x) \right| \\ & \leq \sum_{k=p}^{q-1} |A_k(x)| \cdot |u_k(x) - u_{k+1}(x)| + |A_q(x)| \cdot |u_q(x)| + |A_{p-1}(x)| \cdot |u_p(x)| \\ & \leq L \left(\sum_{k=p}^{q-1} (u_k(x) - u_{k+1}(x)) + u_q(x) + u_p(x) \right) = 2Lu_p(x). \quad (10.1.2) \end{aligned}$$

Так как $u_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty, x \in X]{} 0$ при $p \rightarrow \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$, существует n_0 такое, что верно неравенство $|u_p(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2L}$ для всех $p \geq n_0$ и всех $x \in X$. Тогда для всех $q \geq p \geq n_0$ из (10.1.2) выводим

$$\left| \sum_{k=p}^q v_k u_k \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ выполняется критерий Коши 10.7 равномерной сходимости.

В качестве следствия мы получаем

10.11. ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ. *Знакопеременный ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k(x), \quad (10.1.3)$$

в котором последовательность $\{u_k(x)\}$ монотонно убывая стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, сходится равномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, полагаем $v_k = (-1)^k$ в признаке Дирихле 10.10. Тогда очевидно выполняются условия $\mathcal{D}1$ и $\mathcal{D}2$ признака Дирихле 10.10 и поэтому ряд (10.1.3) сходится равномерно.

10.12. ПРИЗНАК АБЕЛЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА. Если на множестве X

A1) последовательность вещественных функций $\{u_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$, равномерно ограничена и монотонна для каждого $x \in X$, а

A2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходится равномерно,
то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$$

равномерно сходится на множестве X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности будем предполагать, что $u_k(x)$ монотонно убывает и $|u_k(x)| \leq K$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $u_k(x) - u_{k+1}(x) \geq 0$ для всех $k \geq 1$.

Покажем, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ выполняется критерий Коши 10.7 равномерной сходимости. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для оценки суммы $\sum_{k=p}^q u_k(x)v_k(x)$, где $0 < p \leq q$, применим метод суммирования Абеля. Так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)$ сходится равномерно, существует l такое, что для любого $k \geq l$ будем иметь $|A_k(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}$, где $A_k(x) = \sum_{j=l}^k v_j(x)$. Отсюда для $l \leq p \leq q$ выводим

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=p}^q v_k(x)u_k(x) \right| \\ & \leq \sum_{k=p}^{q-1} |A_k(x)| \cdot |u_k(x) - u_{k+1}(x)| + |A_q(x)| \cdot |u_q(x)| + |A_{p-1}(x)| \cdot |u_p(x)| \\ & < \frac{\varepsilon}{4K} \cdot \left| \sum_{k=p}^{q-1} (u_k(x) - u_{k+1}(x)) + |u_q(x)| + |u_p(x)| \right| \\ & = \frac{\varepsilon}{4K} \cdot 4u_p(x) \leq \varepsilon. \quad (10.1.4) \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $q \geq p \geq l$ из (10.1.4) получаем

$$\left| \sum_{k=p}^q u_k(x)v_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ выполняется критерий Коши 10.7 равномерной сходимости.

10.13. ТЕОРЕМА ДИНИ. *Если последовательность непрерывных вещественных функций на компактном пространстве K , возрастая, поточечно сходится к непрерывной функции, то сходится она равномерно на K .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$, $g_n = f - f_n$ и $U_n = \{x \in K : g_n(x) < \varepsilon\}$. Так как каждая функция g_n непрерывна, то каждое множество U_n открыто в пространстве K . (Почему?) Так как последовательность функций g_n , убывая, стремится к нулю, то последовательность множеств U_n , возрастая, покрывает компакт K . Значит, в силу принципа Бореля — Лебега имеется конечная подпоследовательность множеств $U_{n_1}, \dots, U_{n_j}$, покрывающая K . Следовательно, U_{n_j} покрывает все K , т. е. $\varepsilon > g_{n_j}(x) \geq g_n(x) = f(x) - f_n(x) \geq 0$ для всех $n \geq n_j$ и всех $x \in K$.

Существенность условий теоремы выявляет пример «набегающей волны».

10.2. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ АНАЛИЗА

10.14. ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЕ ПРЕДЕЛОВ.

Пусть последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}(S, \mathbb{E})$, $n \in \mathbb{N}$, такова, что

$$1) f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty | x \in S} g(x);$$

2) для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место сходимость $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow p | S} z_n$ (p — предельная точка множества S).

Тогда в пространстве значений $\mathbb{E}$ имеется такой элемент z , что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z = \lim_{x \rightarrow p} g(x)$. Тем самым

$$z = \lim_{x \rightarrow p} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow p} f_n(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно условию 1 и критерию Коши, имеется такой номер m , что для каждого $x \in S$ для любых $k, l \geq m$ верно $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$. Переход к пределу при $x \rightarrow p | S$ даст неравенство $|z_k - z_l| \leq \varepsilon$. Значит, последовательность $z_n \in \mathbb{E}$ удовлетворяет условию Коши и потому в банаховом пространстве $\mathbb{E}$ есть точка $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Поскольку $f_n \rightrightarrows g$, а $z_n \rightarrow z$, то имеется такой номер i , что $|z_i - z| < \frac{\varepsilon}{3}$, а $|g(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $x \in S$.

Так как $f_i(x) \xrightarrow{x \rightarrow p|S} z_i$, то у точки p есть такая окрестность U , что $|f_i(x) - z_i| < \frac{\varepsilon}{3}$ для любой точки $x \in U \cap S \setminus \{p\}$. Следовательно, для каждой такой точки имеем

$$|g(x) - z| \leq |g(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - z_i| + |z_i - z| < \varepsilon.$$

Значит, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow p|S} z$.

10.15. СЛЕДСТВИЕ. *Равномерный предел непрерывных функций непрерывен: если последовательность функций $f_n : X \rightarrow \mathbb{E}$, непрерывных в точке $p \in X$ равномерно сходится к функции f , то функция f непрерывна в точке $p \in X$.*

10.16. СЛЕДСТВИЕ. *Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна.*

10.17. СЛЕДСТВИЕ. *Пространство $C(X, \mathbb{E})$ непрерывных $\mathbb{E}$ -значных функций на пространстве X , снабженное супремум-нормой, полное.*

10.18. ТЕОРЕМА ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ РАВНОМЕРНОГО ПРЕДЕЛА. *Если на ограниченном отрезке $[a, b]$ последовательность интегрируемых по Риману функций $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ равномерно сходится к функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$, то функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ интегрируема, и*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x f(t) dt$$

для всех $x \in [a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что предельная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ интегрируема по Риману. Заметим, что функция f ограничена:

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x)| \leq 1 + \sup_{x \in [a, b]} |f_i(x)| < \infty,$$

где i — такой индекс, что $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_i(x)| \leq 1$. Пусть $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$, где Σ_i — множество нулевой меры, вне которого функция f_i непрерывна. В

точках множества $X = [a, b] \setminus \Sigma$ функция f_i непрерывна, $i \in \mathbb{N}$, поэтому равномерный предел f последовательности f_n непрерывен на X . Так как множество Σ имеет меру нуль, функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ интегрируема по Риману по признаку интегрируемости Лебега.

Пусть $\varepsilon > 0$ и m — такой номер, что

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{|b - a|} \quad \text{для всех } n \geq m \text{ и всех } t \in [a, b].$$

Отсюда в силу свойства ограниченности интеграла имеем

$$\left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^x f_n(t) dt \right| = \int_a^x |f(t) - f_n(t)| dt \leq \int_a^x \frac{\varepsilon}{|b - a|} dt \leq \varepsilon$$

для всех $n \geq m$ и всех $x \in [a, b]$.

Для неограниченной области интегрирования такая теорема неверна.

10.19. ПРИМЕР. «Расползающаяся куча». Последовательность функций $f_n(x) = \left(\arctan \frac{x}{n}\right)' = \frac{n}{n^2 + x^2}$ сходится к нулю равномерно на $\mathbb{R}$, в то время как $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) dt = \pi$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

10.20. ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЕ ПРОИЗВОДНЫХ. Пусть функции $f_0, \dots, f_n, \dots$ дифференцируемы на ограниченном выпуклом открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^s$, причем

- 1) последовательность Df_n равномерно на X сходится к некоторой функции g ;
- 2) имеется такая точка $p \in X$, что последовательность $f_n(p)$ имеет предел в $\mathbb{E}$.

Тогда последовательность f_n равномерно сходится на X к некоторой дифференцируемой функции f , причем $Df(x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что X есть интервал числовой прямой. Для каждой пары номеров $k, l \in \mathbb{N}$ положим $f_{k,l} = f_k - f_l$, $s_{k,l} = \|Df_k - Df_l\| = \|Df_{k,l}\|$, и пусть $\delta = 1 + \text{diam } X$.

1^{ый} ШАГ. Согласно лагранжевой оценке приращения, для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство $|f_{k,l}(x) - f_{k,l}(y)| \leq s_{k,l}|x - y|$.

2^{ой} ШАГ. Исходя из первого и второго условий теоремы, для каждого $\varepsilon > 0$ отметим такой номер m_ε , что для любых номеров $k, l > m_\varepsilon$ имеют место неравенства $s_{k,l} \leq \frac{\varepsilon}{2\delta}$ и $|f_{k,l}(p)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

3ий шаг. Для любых $k, l > m_\varepsilon$ и любой точки $x \in X$ из 1го и 2го шагов получаем неравенство

$$|f_{k,l}(x)| = |f_{k,l}(x) - f_{k,l}(p) + f_{k,l}(p)| \leq s_{k,l}|x - p| + \frac{\varepsilon}{2} \leq s_{k,l}\delta + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, последовательность функций f_n удовлетворяет равномерному условию Коши на X и потому равномерно сходится к некоторой функции f .

4ый шаг. Пусть q — произвольная точка области X . Поскольку каждая функция f_n дифференцируема в точке q , то

$$f_n(x) = f_n(q) + Df_n(q) \cdot (x - q) + \alpha_n(x)|x - q|,$$

где α_n — функция, непрерывная в точке q и равная нулю в этой точке.

Пусть α — функция, определяемая следующими условиями

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(q) - g(q) \cdot (x - q)}{|x - q|}, & \text{если } x \neq q, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как $f_n(x) \rightarrow f(x)$, а $Df_n(q) \rightarrow g(q)$, то $\alpha_n(x) \rightarrow \alpha(x)$. Покажем, что последовательность функций α_n удовлетворяет равномерному условию Коши. Пусть $\varepsilon > 0$. Используя оценки 1го и 2го шагов, для любых $k, l > m$ и любой точки $x \in X$ получаем

$$\begin{aligned} |\alpha_k(x) - \alpha_l(x)| &= \frac{|f_{k,l}(x) - f_{k,l}(q) - Df_{k,l}(q) \cdot (x - q)|}{|x - q|} \\ &\leq \frac{(s_{k,l} + s_{k,l})|x - q|}{|x - q|} = \frac{\varepsilon}{\delta}. \end{aligned} \quad (10.2.5)$$

Следовательно, последовательность α_n сходится к функции α равномерно и потому эта функция непрерывна в точке q . Поскольку

$$f(x) = f(q) + g(q) \cdot (x - q) + \alpha(x)|x - q|$$

и $\alpha(q) = 0$, то функция f дифференцируема в точке q , причем $Df(q) = g(q)$.

Доказательство справедливо и в общем случае, если считать, что

$$|x - y| = |x - y|_1 = \sum_{i=1}^s |x_i - y_i|; |Df_n(x)| = \max(|D_1 f_n(x)|_{\mathbb{E}}, \dots, |D_s f_n(x)|_{\mathbb{E}}).$$

10.21. ТЕОРЕМА О СУММЕ РЯДА ПРОИЗВОДНЫХ. Пусть функции $g_0, \dots, g_n, \dots$ дифференцируемы на ограниченном выпуклом открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^s$, причем

1) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} Dg_n(x)$ равномерно сходится на X ;

2) множество X содержит точку p такую, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(p)$ сходится.

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ равномерно сходится на X , причем его сумма на X дифференцируема, и справедлива формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} Dg_n(x) = D \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x).$$

10.3. ПРИМЕНЕНИЯ

В этом разделе $\mathbb{E}$ — банахово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

10.3.1. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

10.22. ТЕОРЕМА АБЕЛЯ. Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \text{где } c_n \in \mathbb{E},$$

сходится, то степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

переменной t равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$ и, стало быть, его сумма непрерывна на этом отрезке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$ и m — номер такой, что для любых номеров $k, l > m$ верно $\left| \sum_{n=k}^l c_n \right| \leq \varepsilon$. Поскольку $t \in [0, 1]$, $t^0 \geq \dots \geq t^n \geq \dots$, то для ряда (10.22) выполнены условия теоремы 10.12 (в которой $X = [0, 1]$, $u_n(x) = t^n$, $v_n(x) \equiv c_n$).

Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{10.3.6}$$

— произвольный степенной ряд, где $a_n \in \mathbb{E}$, $z = x + iy$, x, y — стандартные координаты в $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Число

$$\rho = \sup \{ r \in \mathbb{R}_+ : \text{последовательность } |a_n| r^n \text{ ограничена} \}$$

будем называть *радиусом круга сходимости* ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, а множество $\mathcal{O}_\rho = \{z : |z| < \rho\}$ — *кругом сходимости* этого ряда. Объяснение такой терминологии дает следующий фундаментальный факт.

10.23. ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА. *Степенной ряд (10.3.6) сходится абсолютно при любом $z \in \mathcal{O}_\rho$. Более того, ряд (10.3.6) равномерно сходится на любом круге $\mathcal{O}_r$, $r < \rho$. Если же $|z| > \rho$, то ряд (10.3.6) расходящийся.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|z| > \rho$, то последовательность $|a_n||z^n|$ не ограничена и, значит, последовательность $a_n z^n$ не стремится к нулю.

Пусть $r \in (0, \rho)$, а $s \in (r, \rho)$. По определению числа ρ найдется число $h < \infty$ такое, что $|a_n|s^n \leq h$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда для каждого $z \in \mathcal{O}_r$ получаем

$$|a_n z^n| = |a_n| s^n \frac{|z^n|}{s^n} \leq |a_n| s^n \left(\frac{r}{s}\right)^n \leq h \left(\frac{r}{s}\right)^n.$$

Так как геометрическая прогрессия $\left(\frac{r}{s}\right)^n$ сходится, то, согласно признаку Вейерштрасса, ряд (10.3.6) равномерно сходится в круге $\mathcal{O}_r$.

Из этой же оценки следует, что $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \infty$. Остается заметить, что каждая точка $z \in \mathcal{O}_\rho$ лежит в некотором круге $\mathcal{O}_r$, где $r < \rho$.

10.24. ТЕОРЕМА О СУММЕ СТЕПЕННОГО РЯДА. *Функция*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

дифференцируема внутри круга сходимости $\mathcal{O}_\rho$ и для каждой точки $z = x + iy$ этого круга справедливы формулы

$$df(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right) dz, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Частные производные функции $\alpha_n(z) = a_n(x + iy)^n$ таковы:

$$\frac{\partial \alpha_n(z)}{\partial x} = n a_n z^{n-1}, \quad \frac{\partial \alpha_n(z)}{\partial y} = i n a_n z^{n-1}.$$

2. Радиус ρ_1 круга сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ равен радиусу ρ круга сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$. Действительно, пусть $r \in (0, \rho)$, $s \in$

(r, ρ) и $h \in \mathbb{R}_+$ таково, что $|a_n|s^n \leq h$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для $z \in \mathcal{O}_r$ имеем

$$|a_n n z^{n-1}| \leq |a_n| s^n \frac{n}{s} \left(\frac{r}{s}\right)^n \leq h \frac{n}{s} \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно, $\rho_1 \geq \rho$. Обратное неравенство очевидно.

3. Согласно пп. 1, 2 доказательства, и теореме о круге сходимости ряды производных, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \alpha_n(z)}{\partial x}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \alpha_n(z)}{\partial y}$ равномерно сходятся в любом круге $\mathcal{O}_r$, $r < \rho$. По теореме о сумме ряда производных функция f дифференцируема в каждом таком круге и

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

Отсюда

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z)dy = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}(dx + idy) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} dz.$$

10.25. СЛЕДСТВИЕ. Сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема внутри круга сходимости этого ряда.

Формулу $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$ называют *уравнением Коши — Римана*.

11 ТЕОРЕМА О ЛОКАЛЬНОМ ДИФФЕОМОРФИЗМЕ

Предположим, что функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируема на открытом множестве, содержащем точку $x_0 \in [a, b]$, и $f'(x_0) \neq 0$. Если $f'(x_0) \neq 0$, то существует такой открытый интервал V , содержащий x_0 , что $f'(x) > 0$ для всех $x \in V$. Таким образом, f возрастает на V , а потому взаимно однозначна и имеет непрерывную обратную функцию f^{-1} , определенную на некотором открытом интервале W , содержащем $f(x_0)$. Кроме того, нетрудно показать, что f^{-1} дифференцируема и

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad (11.0.1)$$

для всех $y \in W$. Аналогичные рассуждения для высших размерностей значительно сложнее, но результат, формулируемый ниже в теореме об обратной функции, весьма важен для приложений анализа.

11.1. ТЕОРЕМА. Предположим, что на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ определено непрерывно дифференцируемое отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, и $\det Df(a) \neq 0$ в некоторой точке $a \in U$. Тогда существуют открытое множество V , содержащее a , и открытое множество W , содержащее $f(a)$, такие, что отображение $f : V \rightarrow W$ имеет непрерывное обратное отображение $f^{-1} : W \rightarrow V$, которое непрерывно дифференцируемо и для всех $y \in W$ удовлетворяет соотношению

$$Df^{-1}(y) = [Df(f^{-1}(y))]^{-1}. \quad (11.0.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следующее утверждение представляет независимый интерес и мы сформулируем его как отдельное свойство.

11.2. ЛЕММА. Если $f \in \mathcal{C}^1(U)$ и $\det Df(a) \neq 0$ в некоторой точке $a \in U$, то f отображает некоторую окрестность точки a гомеоморфно на окрестность точки $f(a)$.

Чтобы доказать это, заметим, что $Df(a)$ — изоморфизм пространства $\mathbb{X}$ на $\mathbb{Y}$. Далее можно заменить f на $Df(a)^{-1} \circ f$ и поэтому принять $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$, $Df(a) = I_{\mathbb{X}}$, а также $a = f(a) = 0$. Тогда отображение

$$g = f - I_{\mathbb{X}} \quad (11.0.3)$$

принадлежит классу $\mathcal{C}^1(U)$ и для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|Dg(x)| = |Df(x) - x| \leq \varepsilon \quad \text{для } x \in B(0, \delta).$$

Отсюда следует (см. следствие 6.35), что для любых $u, v \in B(0, \delta)$ выполняются неравенства

$$|g(u) - g(v)| \leq \varepsilon |u - v| \quad (11.0.4)$$

и

$$\begin{aligned} |f(u) - f(v)| &\geq |u - v + g(u) - g(v)| \\ &\geq |u - v| - |g(u) - g(v)| \\ &\geq |u - v| - \varepsilon |u - v| = (1 - \varepsilon) |u - v|. \end{aligned} \quad (11.0.5)$$

Фиксируем произвольную точку $y \in B(0, \delta(1 - \varepsilon))$ и докажем, что существует единственная точка $u \in B(0, \delta)$ такая, что

$$f(x) = y. \quad (11.0.6)$$

Заметим, что ввиду (11.0.3) уравнение (11.0.6) можно записать в виде

$$x + g(x) = y \quad \text{или} \quad x = y - g(x). \quad (11.0.7)$$

Последнее уравнение по произвольной точке $u_0 \in B(0, \delta)$ позволяет по индукции определить последовательность

$$u_m = y - g(u_{m-1}), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Из этого определения имеем

$$\begin{aligned} |u_1| &= |y - g(u_0)| \leq |y| + |g(u_0)| \leq |y| + \varepsilon|u_0| < \delta(1 - \varepsilon) + \varepsilon\delta = \delta, \\ |u_2| &= |y - g(u_1)| \leq |y| + |g(u_1)| \leq |y| + \varepsilon|u_1| < \delta(1 - \varepsilon) + \varepsilon\delta = \delta, \\ &\dots\dots\dots, \\ |u_m| &= |y - g(u_{m-1})| \leq |y| + |g(u_{m-1})| \leq |y| + \varepsilon|u_{m-1}| < \delta. \end{aligned} \quad (11.0.8)$$

Поскольку $u_{m+1} - u_m = g(u_m) - g(u_{m-1})$, то применим условие Липшица (11.0.4) для проверки того, что

$$|u_{m+1} - u_m| \leq \varepsilon|u_m - u_{m-1}| \leq \dots \leq \varepsilon^m|u_1 - u_0| \leq 2\delta\varepsilon^m. \quad (11.0.9)$$

Из условия (11.0.9) немедленно получаем, что последовательность $\{u_m\}$ фундаментальная. Действительно, для произвольных чисел $m > l > 1$ с помощью (11.0.9) и неравенства треугольника выводим оценку

$$\begin{aligned} |u_{m+1} - u_l| &\leq |(u_{m+1} - u_m) + (u_m - u_{m-1}) + \dots + (u_{l+1} - u_l)| \\ &\leq |u_{m+1} - u_m| + |u_m - u_{m-1}| + \dots + |u_{l+1} - u_l| \\ &\leq 2\delta(\varepsilon^m + \varepsilon^{m-1} + \dots + \varepsilon^l) \leq \frac{2\delta\varepsilon^l}{1 - \varepsilon}. \end{aligned} \quad (11.0.10)$$

Так как правая часть (11.0.10) может быть сделана сколь угодно малой при подходящем выборе $l \in \mathbb{N}$, то таким образом продемонстрировано, что $\{u_m\}$ — последовательность Коши. Следовательно, существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = x.$$

Покажем, что $x \in B(0, \delta)$. Переходя в (11.0.8) к пределу при $m \rightarrow \infty$, из строгого неравенства $|u_m| < \delta$ получаем нестрогое: $|x| \leq \delta$. Далее, переходя в неравенствах $|u_m| \leq |y| + \varepsilon|u_{m-1}| < \delta$ к пределу при $m \rightarrow \infty$, приходим к соотношениям:

$$|x| \leq |y| + \varepsilon|x| < \delta(1 - \varepsilon) + \varepsilon\delta = \delta.$$

Следовательно, $|x| < \delta$. Более того, выполняется равенство $x = y - g(x)$ и, следовательно, (11.0.6).

Полагая $W = B(0, \delta(1 - \varepsilon))$, получаем, что $V = f^{-1}(W) \subset B(0, \delta)$ — открытое множество, а отображение $f : V \rightarrow W$ биективно. Кроме того, из неравенства (11.0.5) получаем, что обратное отображение $f^{-1} : W \rightarrow V$ непрерывно. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 11.1 остается показать, что $f^{-1} \in C^1(W)$. По построению открытого множества V имеем $Df(x) = I_{\mathbb{X}} - Dg(x)$, где $|Dg(x)| \leq \varepsilon < 1$. Поэтому оператор $Df(x)$ обратим (см. свойство 6.29) и, следовательно, отображение f^{-1} дифференцируемо в точке $y = f(x)$, причем его дифференциал $Df^{-1}(y)$ равен $[Df(f^{-1}(y))]^{-1}$ (см. свойство 6.17). Из последней формулы становится очевидным, что $Df^{-1} \in C(W)$. $\square$

11.3. ПРИМЕР. Пусть

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \left(x + (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, y + (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right),$$

$g(0) = 0$. Отображение $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дифференцируемо, $Dg(0) = E$. Однако его сужение $g : U \rightarrow g(U)$ на любую окрестность нуля необратимо. Какое условие теоремы не выполнено?

11.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f : U \rightarrow V$ двух открытых множеств называется C^r -диффеоморфизмом, $r = 0, 1, \dots, \infty$, если

- 1) $f : U \rightarrow V$ — биективное отображение;
- 2) $f : U \rightarrow V$ и $f^{-1} : V \rightarrow U$ — C^r -гладкие отображения.

C^0 -диффеоморфизмы называются *гомеоморфизмами*. (Здесь C^0 -гладкое отображение — просто непрерывное отображение.)

В новой терминологии теореме 11.1 формулируется короче: *Если на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ определено непрерывно дифференцируемое отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\det Df(a) \neq 0$ в некоторой точке $a \in U$, существуют открытое множество V , содержащее a и открытое множество W , содержащее $f(a)$, такие, что отображение $f : V \rightarrow W$ будет C^1 -диффеоморфизмом и для всех $y \in W$ имеем*

$$Df^{-1}(y) = [Df(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

Следующее утверждение иногда называют теоремой о гладком вложении области.

11.5. ТЕОРЕМА. Если $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — инъективное r -гладкое отображение открытого в $\mathbb{R}^n$ множества U и если его дифференциал $Dg(x)$ в каждой точке $x \in U$ обратим, то множество $g(U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, а отображение $g : U \rightarrow g(U)$ является C^r -диффеоморфизмом.

11.6. ПРИМЕР. **Функции $\exp z$ и $\ln z$ комплексной переменной.** Отображение $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ бесконечно гладкое, его дифференциал в каждой точке $z = x + iy \in \mathbb{C}$ вычисляется по формуле

$$d \exp z = e^z dz = e^z(dx + i dy)$$

и, стало быть, обратим. Однако, это отображение $2\pi i$ -периодично и поэтому необратимо. Оно лишь локально обратимо.

Каковы $\exp$ -образы вертикальных и горизонтальных прямых?

Пусть $U = \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[\subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ — горизонтальная открытая полоса, $V = \exp(U)$.

а) $V = \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 0, y = 0\}$ — плоскость с разрезом.

б) Отображение $\exp : U \rightarrow V$ является C^∞ -изоморфизмом. Обратное к нему отображение будем называться *главной ветвью логарифма* и обозначается привычным символом $\ln$. Если $z = re^{i\vartheta}$, $-\pi < \vartheta < \pi$, то $\ln z = \ln |z| + i\vartheta$.

в) Не существует непрерывного продолжения функции $\ln : V \rightarrow \mathbb{C}$ на множество $\mathbb{C}$.

12 НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть f — отображение множества $\mathcal{E}$ в множество $\mathcal{F}$. Тогда, если b — некоторая точка $\mathcal{F}$, можно поставить задачу отыскания множества тех x из $\mathcal{E}$, для которых $f(x) = b$, т. е. задачу отыскания прообраза $f^{-1}(\{b\})$. Поставленная задача называется задачей о решении уравнения $f(x) = b$. Пусть теперь f — отображение произведения множеств $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ в множество $\mathcal{C}$, и пусть c — некоторая точка множества $\mathcal{C}$. Рассмотрим уравнение

$$f(x, y) = c. \quad (12.0.1)$$

Может случиться, что для заданного x уравнение $f(x, y) = c$ относительно y имеет решение, и притом единственное, при любом заданном значении x . В таком случае это уравнение определяет y как некоторую функцию $g(x)$ переменной x . Эта функция называется неявной функцией, определенной предыдущим уравнением. Она характеризуется следующим свойством:

$$f(x, g(x)) = c. \quad (12.0.2)$$

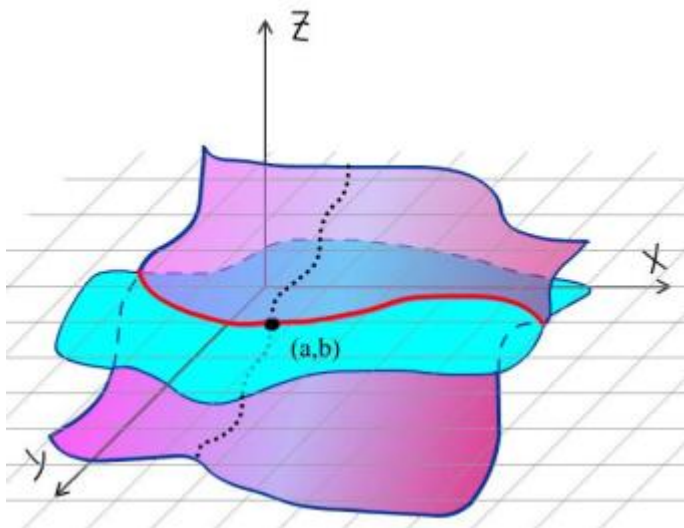


Рис. 1: Бирюзовая часть плоскости Oxy — область определения функции $z = f(x, y)$, фиолетовая поверхность — график функции f , красная линия на плоскости Oxy — график неявной функции $y = g(x)$.

Можно еще сказать, что для $(x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ соотношение (12.0.2) равносильно соотношению $y = g(x)$. Естественно, что такие счастливые совпадения случаются редко. Чаще всего для некоторых значений x решения относительно y не существует, для других же значений x имеется несколько решений, а то и бесконечное множество их. Мы изучим следующий частный случай: $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ — нормированные пространства. Имеется частное решение рассматриваемого уравнения: $x = a, y = b$. Предлагается выяснить, существует ли и притом единственно ли решение данного уравнения относительно y для x , достаточно близких к a , при условии, что это решение достаточно близко к b . Если это так, то можно будет определить неявную функцию $y = g(x)$, исходя из данного уравнения, по крайней мере в некоторой окрестности точки (a, b) . Геометрический смысл рассматриваемой задачи станет особенно понятным, если $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{Z} = \mathbb{R}$. В этом случае, уравнение $f(x, y) = 0$ определяет некоторую кривую в $\mathbb{R}^2$, и мы хотим выразить эту кривую в обычной форме, представив y как функцию от x , по крайней мере, в некоторой окрестности точки (a, b)

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенную равенством $f(x, y) =$

$x^2 + y^2 = 1$. Если точка (a, b) выбрана так, что $f(a, b) = 0$, причем $a \neq 1, -1$, то существуют такие открытые интервалы V и W , содержащие соответственно a и b , что для всякого $x \in V$ существует единственное $y \in W$, для которого $f(x, y) = 0$.

Поэтому можно определить функцию $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ условиями $g(x) \in W$ и $f(x, g(x)) = 0$ (если $b > 0$, то $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$). Для рассматриваемой нами функции f имеется еще одно число: $-b$, при котором $f(a, -b) = 0$. Так же, как и в предыдущем случае, существует такой интервал W_1 , содержащий $-b$, что если $x \in V$, то $f(x, g_1(x)) = 0$ для однозначно определенного $g_1(x) \in W_1$ (здесь $g_1(x) = -g(x) = \sqrt{1 - x^2}$). Обе функции g и g_1 дифференцируемы. Их называют *неявными функциями* , определенными уравнением $f(x, y) = 0$. При $a = 1$ или -1 невозможно найти ни одной такой функции g , определенной в открытом интервале, содержащем a .

Было бы желательно иметь простые условия, позволяющие решать, когда вообще можно найти такую функцию. В более общей постановке вопрос можно поставить так: пусть $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ и $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, причем $f(a_1, \dots, a_n, b) = 0$; когда для каждого $(x_1, \dots, x_n)$ вблизи $(a_1, \dots, a_n)$ можно найти единственное $y = y(x_1, \dots, x_n)$ вблизи b , для которого бы

$$f(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)) = 0?$$

Еще более общим образом можно задаться вопросом об условиях разрешимости системы уравнений, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$, относительно m неизвестных функций: пусть

$$f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,$$

причем

$$f_i(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Когда для каждого $(x_1, \dots, x_n)$ вблизи $(a_1, \dots, a_n)$ можно найти единственное

$$(y_1, \dots, y_m) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$$

вблизи $(b_1, \dots, b_m)$, удовлетворяющее уравнениям

$$f_i(x_1, \dots, x_n; y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)) = 0, \quad i = 1, \dots, m?$$

Ответ дает следующая теорема о неявной функции.

12.1. ТЕОРЕМА. *Предположим, что на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ определено непрерывно дифференцируемое отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$,*

$$U \ni (x; y) = (x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) \mapsto f(x; y) \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m,$$

и $f(a; b) = 0$, где $(a; b) \in U$ — некоторая точка, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Пусть $(m \times m)$ -матрица определяется выражением

$$M = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a; b) \right), \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (12.0.3)$$

Тогда если $\det M \neq 0$, то существуют открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$, содержащее a , и открытое множество $W \subset \mathbb{R}^m$, содержащее b , со следующим свойством: для всякого $x \in V$ имеется единственное $g(x) \in W$, для которого $f(x; g(x)) = 0$. При этом функция $g : V \rightarrow W$ дифференцируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ равенством $F(x; y) = (x; f(x, y))$. Тогда

$$\det DF(a; b) = \det \begin{pmatrix} I_{n \times n} & * \\ 0 & \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a; b) \end{pmatrix} = \det M \neq 0,$$

где $I_{n \times n}$ — единичная $(n \times n)$ -матрица. В силу теоремы (11.1), существуют открытое множество $T \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, содержащее точку $F(a; b) = (a; 0)$, и содержащее точку $(a; b)$ открытое множество в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, которое можно считать имеющим вид $V \times W \subset U$, такие, что функция $F : V \times W \rightarrow T$ имеет дифференцируемую обратную $h : T \rightarrow V \times W$.

Таким образом, h имеет вид $h(x; z) = (k_0(x, z); k(x, z))$, где k_0, k — некоторые дифференцируемые функции (поскольку F — дифференцируемая функция), а $(x; z) \in T \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$.

Ввиду $(h \circ F)(x; y) = (x; y)$, выводим

$$(h \circ F)(x; y) = h(x; f(x, y)) = (k_0(x, f(x, y)); k(x, f(x, y))) = (x; y).$$

Следовательно, имеем совпадения $k_0(x, f(x, y)) = x$ и $k(x, f(x, y)) = y$, где $x \in V$, $y \in W$. Отсюда, полагая $f(x, y) = z$, выводим, что h имеет вид

$$h(x; z) = (x; k(x, z)),$$

где $(x; z) \in T \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Пусть $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение, определенное равенством $\pi(x; z) = x$. Тогда $\pi \circ F = f$. Поэтому в точках $(x; z) \in T$ имеем

$$\begin{aligned} f(x; k(x, z)) &= f \circ h(x; z) = (\pi \circ F) \circ h(x; z) \\ &= \pi \circ (F \circ h)(x; z) = \pi \circ (Id)(x; z) = \pi(x; z) = x. \end{aligned} \quad (12.0.4)$$

Таким образом, $f(x; k(x, 0)) = 0$, т. е. можно положить

$$V \ni x \mapsto g(x) = k(x; 0) \in W.$$

□

Зная, что функция g дифференцируема, легко найти ее производную. Действительно, так как $f^i(x; g(x)) = 0$, то, дифференцируя обе части этого равенства по переменной x_j , $j = 1, \dots, n$, получаем

$$0 = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x; g(x)) + \sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y_l}(x; g(x)) \cdot \frac{\partial g_l}{\partial x_j}(x), \quad i = 1, \dots, m.$$

Поскольку $\det M \neq 0$, эта система уравнений относительно $\frac{\partial g^l}{\partial x_j}(x)$, $l = 1, \dots, m$, j фиксировано, разрешима. Ответ будет зависеть от значений $\frac{\partial f^i}{\partial y_j}(x; g(x))$, а поэтому и от $g(x)$. Но это неизбежно, так как уравнение $f(x; y)$ может иметь несколько решений.

При рассмотрении функции $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенной равенством $f(x; y) = x^2 + y^2 - 1$, было замечено, что уравнению $f(x; g(x)) = 0$ удовлетворяют две функции: $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ и $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Дифференцирование уравнения $f(x; g(x)) = 0$ дает здесь $\frac{\partial f}{\partial x}(x; g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x; g(x)) \cdot g'(x) = 0$, или $2x + 2g(x) \cdot g'(x) = 0$, т. е. $g'(x) = -\frac{x}{g(x)}$, а этому условию удовлетворяет и $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ и $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

12.1. Криволинейные системы координат и теоремы о выпрямлении

12.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Системой координат (картой)* класса $\mathcal{C}^r$ на открытом множестве $A \subset \mathbb{R}^k$ называется $\mathcal{C}^r$ -диффеоморфизм вида $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : A \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$. При этом числа $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ называются *координатами точки* $x \in A$ относительно координатной системы φ .

Сюръективные $\mathcal{C}^r$ -отображения вида $\psi : U \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}^k$ называются *параметризациями* множества A , а координаты точки $u = (u_1, \dots, u_k) \in U$ — параметрами точки $\psi(u)$.

Несколько обобщив метод доказательства теоремы 12.1, мы получим результат, который будет иметь важное значение в приложениях.

12.3. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА О ВЫПРЯМЛЕНИИ. *Предположим, что на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ определено непрерывно дифференцируемое отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p \leq n$, и $a \in U$. Если $f(a) = 0$ и $n \times p$ -матрица*

$Df(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a) \right)$ имеет ранг p , то существуют открытое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ и C^1 -диффеоморфизм $h : A \rightarrow h(A) \subset U$, $a \in h(A)$, такие, что

$$f \circ h(x_1, \dots, x_n) = (x_{n-p+1}, \dots, x_n).$$

Другими словами, в условиях теоремы найдется такая система координат (A, φ) в открытой окрестности точки a , в которой отображение f является проектированием $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^p$ (здесь $h = \varphi^{-1}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем рассматривать f как функцию из $U \subset \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^p$. Пусть M есть $(p \times p)$ -матрица $\frac{\partial f_j}{\partial x_{n-p+i}}(a)$, $1 \leq i, j \leq p$. Если $\det M \neq 0$, то мы находимся в ситуации, рассмотренной при доказательстве теоремы 12.1. В ней было доказано, что существует такой C^1 -диффеоморфизм h , что (см. (12.0.4))

$$f \circ h(x_1, \dots, x_n) = (x_{n-p+1}, \dots, x_n).$$

В общем же случае, поскольку матрица $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ имеет ранг p , найдутся такие индексы $l_1 < \dots < l_p$, что матрица $\frac{\partial f_j}{\partial x_{l_i}}$, $1 \leq j \leq p$, $i = l_1, \dots, l_p$, имеет ненулевой определитель. Пусть $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — функция, переставляющая переменные x_i так, что

$$g(x_1, \dots, x_n) = (\dots, x_{l_1}, \dots, x_{l_p}).$$

Тогда $f \circ g$ будет функцией уже рассмотренного типа. Тогда

$$((f \circ g) \circ k)(x_1, \dots, x_n) = (x_{n-p+1}, \dots, x_n)$$

для некоторого диффеоморфизма k . Искомой функцией будет $h = g \circ k$. $\square$

Введем обозначения. Пусть $n \geq 1$ и m — натуральные числа, причем $n < m$. Положим $m - n = k$. Произвольной точке $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ сопоставим точки

$$\pi_h(z) = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \pi_v(z) = (z_{n+1}, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^k.$$

Пространство $\mathbb{R}^m$ будем рассматривать как прямое произведение $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, отождествляя произвольную точку $z \in \mathbb{R}^m$ с парой (x, y) , где $x = \pi_h(z)$, $y = \pi_v(z)$. Таким образом, $x = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, а $y = (z_{n+1}, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^k$.

Для произвольной функции $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $A \subset \mathbb{R}^m$, её значение в точке $z = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$ мы будем обозначать символом $f(x, y)$.

12.4. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О ВЫПРЯМЛЕНИИ. Пусть U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ отображение класса $\mathcal{C}^r$. Предположим, что в точке $a \in U$ ранг отображения f равен n . Тогда $m \geq n$, существуют окрестность V точки $b = f(a) \in \mathbb{R}^m$ и $\mathcal{C}^r$ -диффеоморфизм $F : V \rightarrow F(V) \subset \mathbb{R}^m$ и число $\delta > 0$ такие, что если $|x - a| < \delta$, то $f(x) \in V$ и

$$\begin{cases} F[f(x)] = x & \text{в случае } m = n, \\ F[f(x)] = (x, 0) & \text{в случае } m > n. \end{cases}$$

Другими словами, в условиях теоремы найдется такая система координат (A, F) в открытой окрестности точки $b = f(a)$, в которой отображение $F \circ f$ является каноническим вложением $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. □

12.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Каноническим вложением $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ при $n \leq m$ называется линейное отображение, которое точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ сопоставляет точку $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что отображение f удовлетворяет условиям теоремы. Неравенство $m \geq n$ следует из того, что ранг отображения f в некоторой точке равен n . В случае $m = n$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 11.1 о локальном диффеоморфизме.

Будем далее считать, что $m > n$. Положим $m - n = k$ и представим $\mathbb{R}^m$ как декартово произведение:

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k.$$

Определим как указано выше проекцию

$$\pi_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

сопоставляя точке $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ точку $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, π_1 принадлежит классу $\mathcal{C}^p$ при любом $p \geq 1$. Пусть $W = \pi_h^{-1}(U)$. Множество W является открытым в $\mathbb{R}^m$.

Пусть $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и пусть $c = (a, 0)$ есть точка пространства $\mathbb{R}^m$ такая, что $c_i = a_i$ при $i = 1, 2, \dots, n$ и $c_i = 0$ при $i > n$ (другими словами $\pi_1(c) = a$).

Для $i = 1, 2, \dots, n$ положим

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = u_i.$$

В силу условия теоремы векторы u_i , $i = 1, 2, \dots, n$, линейно независимы. Согласно свойствам линейно независимых систем векторов, к векторам $u_1, u_2, \dots, u_n$ можно добавить векторы $u_{n+1}, \dots, u_m$ так, чтобы набор векторов

$$u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_m$$

был линейно независим в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Определим вспомогательное отображение $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$. Пусть (x, y) , $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$, — произвольная точка множества W . Полагаем

$$\Phi(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^k y_i u_{n+i}.$$

Отображение Φ , очевидно, принадлежит классу $\mathcal{C}^r$. Имеем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(x, y) = u_{n+j} \quad \text{при } j = 1, 2, \dots, k.$$

В частности, мы получаем, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(a, 0) = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(a, 0) = u_{n+j}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Так как векторы u_i , $i = 1, 2, \dots, m$, линейно независимы, то якобиан отображения Φ в точке $c = (a, 0)$ отличен от нуля. По теореме о локальном диффеоморфизме существует $\delta > 0$ такое, что шар $B(c, \delta)$ пространства $\mathbb{R}^m$ содержится в множестве W и ограничение отображения Φ на $B(c, \delta)$ представляет собой $\mathcal{C}^r$ -диффеоморфизм. Пусть $V = \Phi[B(c, \delta)]$ и $F : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ отображение, обратное к ограничению Φ на шаре $B(c, \delta)$.

Легко проверить, что $\pi_1(B(c, \delta)) = B(a, \delta) \subset U$. Действительно, пусть $x \in \mathbb{R}^n$ таково, что $|x - a| < \delta$. Тогда точка $z = (x, 0)$ принадлежит шару $B(c, \delta)$ в $\mathbb{R}^m$ и, значит, $z \in W$. Отсюда следует, что $x = \pi_1(z) \in U$. Мы получаем, следовательно, что образ $\pi_1(B(c, \delta))$ содержит шар $B(a, \delta) \subset U$.

С другой стороны, не может быть такого, чтобы $|\pi_h(z) - a| \geq \delta$ для точки $z \in B(c, \delta)$, так как очевидно норма $|z - c|$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ не меньше нормы $|\pi_h(z) - a|$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ (здесь рассматривается евклидова норма).

Для всякой точки $(x, y) \in B(c, \delta)$ выполняется равенство

$$F[\Phi(x, y)] = (x, y).$$

По определению имеем $\Phi(x, 0) = f(x)$. Отсюда получаем, что

$$F[f(x)] = F[\Phi(x, 0)] = (x, 0)$$

для всех $x \in B(a, \delta)$. Отображение F удовлетворяет, таким образом, всем требуемым условиям. $\square$

12.2. ТЕХНИКА ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ И ЗАМЕНЫ ФУНКЦИЙ

В этом разделе мы даем общий к решению задач в следующей общей формулировке.

12.6. ЗАДАЧА. Предположим, что задано уравнение в частных производных второго порядка относительно скалярной функции z двух скалярных переменных x и y :

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \quad (12.2.5)$$

Необходимо выполнить в нем одновременно замену переменных и замену функции по формулам

$$X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z). \quad (12.2.6)$$

Мы хотим узнать, как преобразуется рассматриваемое уравнение в частных производных при такой замене переменных.

Сформулированная задача законна лишь в том случае, когда (12.2.6) определяет $\mathcal{C}^2$ -диффеоморфизм некоторого открытого множества из $\mathbb{R}^3$ на открытое множество в $\mathbb{R}^3$ и поверхность $z = z(x, y)$, определяемая уравнением (12.2.5), преобразуется в поверхность $Z = Z(X, Y)$ так, что обе написанные функции принадлежат классу $\mathcal{C}^2$. Следуя обычному методу, надо выразить

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

как функции новых частных производных

$$P = \frac{\partial Z}{\partial X}, \quad Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}, \quad R = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}, \quad S = \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}, \quad T = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}.$$

1 шаг. Можно начать с производных первого порядка и затем перейти к вычислению производных второго порядка. Для производных первого порядка начинаем с соотношения

$$dZ = PdX + QdY,$$

заменяя dX , dY , dZ их дифференциальными выражениями, найденными из (12.2.6), и получая таким путем соотношение между dx , dy , dz . Это соотношение, представленное в виде $dz = pdx + qdy$, позволит выразить p и q через x , y , z , P , Q .

2 шаг. Дифференцируя полученное соотношение, затем находим dp как функцию от dx , dy , dz , dP , dQ . Заменяя dz , dP , dQ на $pdx + qdy$, $RdX + SdY$, $SdX + TdY$, затем p и q — их значениями, найденными на 1^{ом} шаге, dX и dY — их значениями, полученными из (12.2.6) (где dz должно быть заменено на $pdx + qdy$ с уже найденными p и q), мы выражаем dp как комбинацию dx и dy , которая, будучи представленной в виде $dp = rdx + sdy$, дает r и s как функции от x , y , z , P , Q , R , S , T . Точно так же вычисляется t . Полученные результаты подставляются в (12.2.5).

Полученное уравнение относительно P , Q , R , S , T содержит в действительности величины x , y , z , а не X , Y , Z . Поэтому, если эти переменные входят в уравнение, следует еще выразить (x, y, z) через (X, Y, Z) , решая систему уравнений (12.2.6).

12.7. ПРИМЕР. В уравнении

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(z \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (12.2.7)$$

положить

$$x = e^\xi, y = e^\eta, z = e^\zeta, \quad u = e^w, \quad \text{где} \quad w = w(\xi, \eta, \zeta). \quad (12.2.8)$$

1 шаг. Начинаем с соотношения

$$dw = \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial w}{\partial \zeta} d\zeta, \quad (12.2.9)$$

и находим соотношения между дифференциалами функций в (12.2.9):

$$\begin{aligned} dx &= e^\xi d\xi, & d\xi &= e^{-\xi} dx, \\ dy &= e^\eta d\eta, & d\eta &= e^{-\eta} dy, \\ dz &= e^\zeta d\zeta, & d\zeta &= e^{-\zeta} dz, \\ du &= e^w dw, & dw &= e^{-w} du. \end{aligned} \quad \text{отсюда имеем}$$

Подставляем полученные выражения для $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ и dw в (12.2.9):

$$du = \frac{\partial w}{\partial \xi} e^{w-\xi} dx + \frac{\partial w}{\partial \eta} e^{w-\eta} dy + \frac{\partial w}{\partial \zeta} e^{w-\zeta} dz. \quad (12.2.10)$$

Следовательно, из (12.2.10) выводим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi} e^{w-\xi}, \quad (12.2.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \eta} e^{w-\eta}, \quad (12.2.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial \zeta} e^{w-\zeta}. \quad (12.2.13)$$

Далее из (12.2.11)

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dz \quad (12.2.14)$$

$$\begin{aligned} &= e^{w-\xi} d\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial w}{\partial \xi} de^{w-\xi} \\ &= e^{w-\xi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} d\xi + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} d\eta + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} d\zeta \right) \\ &+ \frac{\partial w}{\partial \xi} e^{w-\xi} (dw - d\xi) \\ &= e^{w-\xi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} e^{-\xi} dx + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} e^{-\eta} dy + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} e^{-\zeta} dz \right) \end{aligned} \quad (12.2.15)$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial \xi} e^{w-\xi} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} e^{-\xi} dx + \frac{\partial w}{\partial \eta} e^{-\eta} dy + \frac{\partial w}{\partial \zeta} e^{-\zeta} dz \right) - e^{-\xi} dx \right). \quad (12.2.16)$$

Приравнявая выражения при dx , стоящие слева в (12.2.14) и справа в (12.2.15)–(12.2.16), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^{w-\xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} e^{-\xi} + \frac{\partial w}{\partial \xi} e^{w-\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} e^{-\xi} - \frac{\partial w}{\partial \xi} e^{w-\xi} e^{-\xi} \\ &= e^{w-2\xi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right). \end{aligned} \quad (12.2.17)$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{w-2\eta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial \eta} \right), \quad (12.2.18)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = e^{w-2\zeta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right). \quad (12.2.19)$$

Подставляя в (12.2.7) полученные выражения (12.2.17)–(12.2.19) для вторых производных, выражения (12.2.11)–(12.2.13) для первых произ-

водных, и (12.7) приходим к соотношению

$$\begin{aligned} e^w \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \\ = \left(e^w \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \left(e^w \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \left(e^w \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2, \end{aligned}$$

из которого выводим окончательный результат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \\ = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} + (e^w - 1) \left(\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

13 ТЕОРЕМА О РАНГЕ

13.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. n -Мерный открытый промежуток в $\mathbb{R}^n$ — это множество вида $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_j - a_j| < r_j\}$, $r_j \in (0, \infty)$, $j = 1, \dots, n$.

13.2. ТЕОРЕМА. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $k \geq 1$, т. е. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение класса C^k . Предположим, что ранг $Df(x)$ есть целое число r , не зависящее от точки $x \in \Omega$. Тогда существуют открытые окрестности $U \ni a$ и $V \ni b = f(a)$, n -мерный открытый промежуток Q в $\mathbb{R}^n$, m -мерный открытый промежуток Q' в $\mathbb{R}^m$ соответственно и C^k -диффеоморфизмы $u : Q \rightarrow U$, $u' : V \rightarrow Q'$ такие, что отображение $\varphi = u' \circ f \circ u$ имеет вид

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После выполнения подходящих сдвигов и перестановок координат в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ мы можем предполагать, что $a = 0$, $b = 0$ и что $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \neq 0$, $i, j = 1, \dots, r$.

1 ШАГ. Рассмотрим отображение $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое равенством

$$w(z) = (f_1(z), \dots, f_r(z), z_{r+1}, \dots, z_n),$$

где

$$f(z) = (f_1(z), \dots, f_r(z), \dots, f_n(z)).$$

Тогда $Dw(0)$ — невырожденное линейное отображение; следовательно, по теореме 11.1 об обратной функции, существуют окрестность $U \ni 0$ и n -мерный открытый промежуток Q в $\mathbb{R}^n$ такие, что $w : U \rightarrow Q$ есть C^k -диффеоморфизм. Пусть $u = (w|_U)^{-1}$. Очевидно,

$$f \circ u(x) = (x_1, \dots, x_r, \varphi_{r+1}(x), \dots, \varphi_m(x)),$$

где $\varphi_j \in C^k(Q)$, $j = r+1, \dots, m$. Если теперь $\psi = f \circ u$, то

$$\text{rank } D\psi(x) = r \quad \text{для } x \in Q,$$

и потому

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x) = 0 \quad \text{в точках } x \in Q, \text{ если } j, k > r.$$

Таким образом, φ_j не зависят от $x_{r+1}, \dots, x_m$.

2 ШАГ. Пусть теперь $Q = Q^r \times Q^{m-r}$, где Q^r, Q^{m-r} — открытые промежутки соответственно в $\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^{m-r}$. Пусть отображение

$$v : Q^r \times \mathbb{R}^{m-r} \rightarrow Q^r \times \mathbb{R}^{m-r}$$

определяется равенством

$$\begin{aligned} v(x_1, \dots, x_r, \dots, x_m) \\ = (x_1, \dots, x_r, x_{r+1} - \varphi_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots, x_m - \varphi_m(x_1, \dots, x_r)). \end{aligned} \quad (13.0.1)$$

Очевидно, что v есть C^k -диффеоморфизм. Пусть Q' — m -мерный открытый промежуток в $\mathbb{R}^m$, такой, что

$$v \circ \psi(Q) \subset Q' \subset Q^r \times \mathbb{R}^{m-r},$$

и пусть $V = v^{-1}(Q')$. Если мы положим $u' = v|_V$, то получим, что

$$u' \circ f \circ u(x_1, \dots, x_n) = u' \circ \psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0). \quad (13.0.2)$$

□

13.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Если в любой точке исходной окрестности $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ранг отображения $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ равен m , то точка $b = f(a)$, где $a \in \Omega$, является внутренней точкой множества $f(\Omega)$, т. е. содержится в $f(\Omega)$ вместе с некоторой своей окрестностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по доказанному отображение $\varphi = u' \circ f \circ u : V \rightarrow U$ в этом случае имеет вид

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_m),$$

поэтому образ окрестности точки $u_0 = u^{-1}(a)$ содержит некоторую окрестность точки $v_0 = u' \circ f \circ u(u_0)$.

Но отображения $u : Q \rightarrow U$, $u' : V \rightarrow Q'$ — диффеоморфизмы, поэтому они переводят внутренние точки во внутренние. Записывая теперь исходное отображение f в виде $f = u'^{-1} \circ (u' \circ f \circ u) \circ u^{-1}$, можем заключить, что точка $b = f(a)$ является внутренней точкой образа окрестности точки a . $\square$

13.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Если ранг отображения $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ в любой точке Ω равен k и $k < m$, то в некоторой окрестности точки $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ из (13.0.1) и (13.0.2) вытекает справедливость $m - k$ соотношений

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = g_i(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n)) \\ (i = k + 1, \dots, m). \quad (13.0.3)$$

Указанные соотношения выписаны в принятом нами предположении о том, что главный минор порядка k матрицы $Df(a)$ отличен от нуля т. е., что ранг k реализуется уже на наборе функций $f_1, \dots, f_k$. В противном случае можно было бы изменить нумерацию функций $f_1, \dots, f_m$ и снова иметь указанную ситуацию.

13.1. Зависимость функций

13.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что система непрерывных функций $f^i(x^1, \dots, x^n)$ ($i = 1, \dots, m$) является *функционально независимой* в окрестности точки $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, если для любой непрерывной функции $F(y^1, \dots, y^m)$, определенной в окрестности точки $y_0 = (y_0^1, \dots, y_0^m) = (f^1(x_0), \dots, f^m(x_0)) = f(x_0)$, соотношение

$$F(f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, f^m(x^1, \dots, x^n)) \equiv 0$$

в окрестности точки x_0 возможно только в случае, когда $F(y^1, \dots, y^m) \equiv 0$ в окрестности точки y_0 .

Линейная независимость, рассматривавшаяся в алгебре, есть независимость по отношению к линейным соотношениям

$$F(y^1, \dots, y^m) = \lambda_1 y^1 + \dots + \lambda_m y^m.$$

В случае линейной зависимости векторов один из них, очевидно, является линейной комбинацией остальных. Аналогичная ситуация имеет место и в отношении функциональной зависимости системы гладких функций.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} (x)$$

- 1) при $k = m$ система функционально независима в окрестности x_0 ;
- 2) при $k < m$ найдутся окрестность точки x_0 и такие k функций системы, пусть $f^1, \dots, f^k$, что остальные $m - k$ функций этой окрестности представляются в виде

где $g^i(y^1, \dots, y^k)$ — гладкие функции, определенные в окрестности точки $y_0 = (f^1(x_0), \dots, f^m(x_0))$ и зависящие только от k координат текущей точки $y = (y^1, \dots, y^m)$.

$$\begin{aligned} y^1 &= f^1(x^1, \dots, x^n), \\ &\vdots \\ y^m &= f^m(x^1, \dots, x^n) \end{aligned} \tag{13.1.4}$$
$$F(f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, f^m(x^1, \dots, x^n)) \equiv 0$$
$$F(f^1, \dots, f^m) \equiv 0$$

в окрестности точки y_0 . Этим первое утверждение доказано.

Если же $k < m$ и ранг k отображения реализуется уже на функциях $f^1, \dots, f^k$, то в силу замечания 13.4 к теореме о ранге найдутся такие окрестность точки $y_0 = f(x_0)$ и $m - k$ определённых в ней функций $g^i(y) = g^i(y^1, \dots, y^k)$ того же порядка гладкости, как и функции системы, что в некоторой окрестности точки x_0 будут выполнены соотношения (13.0.3). Этим доказано и второе утверждение.

Мы показали, что если $k < m$, то найдется $m - k$ специальных функций $F^i(y) = y^i - g^i(y^1, \dots, y^k)$ ($i = k + 1, \dots, m$) (см. (13.0.2)), устанавливающих соотношения

$$F^i(f^1(x), \dots, f^k(x), f^i(x)) \equiv 0 \quad (i = k + 1, \dots, m) \quad (\text{см. (13.0.3)})$$

между функциями системы $f^1, \dots, f^k, \dots, f^m$ в окрестности точки x_0 .
□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Берс Л. *Математический анализ*. Т. 1–2. М.: Высшая школа, 1975.
- [2] Зорич В. А. *Математический анализ*. Т. 1–2. М.: Наука, 1981.
- [3] Дьедонне Ж. *Современный анализ*. М.: Мир, 1964.
- [4] Никольский С. М. *Курс математического анализа*. М.: Наука, 1975.
- [5] Решетняк Ю. Г. *Курс математического анализа*. Новосибирск: Изд-во Института математики, Ч. 1, 1999; Ч. 2, 2000.
- [6] Рудин У. *Основы математического анализа*. М.: Мир, 1976.
- [7] Спивак М. *Математический анализ на многообразиях*. М.: Мир, 1971.
- [8] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1–3. М.: Наука, 1969.
- [9] Шведов И. А. *Учебные пособия и методические указания по математическому анализу для студентов НГУ*, изданные в разные годы Новосибирским госуниверситетом (см. каталог в библиотеке НГУ).

Литература, рекомендуемая для работы на семинарах

- [1] Водопьянов С. К., Исангулова Д. В. *Исчисление внешних дифференциальных форм. Сборник задач и упражнений*.
- [2] Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе*. — М.: Мир, 1967.
- [3] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. — М.: Наука, 1977.
- [4] Кудрявцев Л. Д. и др. *Сборник задач по математическому анализу*. — Санкт-Петербург: Кристалл, 1994.
- [5] Решетняк Ю. Г. *Сборник задач по курсу математического анализа*. — Новосибирск: изд. НГУ, 1979.