

1. БИЛЕТ

1°

1.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие точной верхней и точной нижней границ числового множества.

1.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие окрестности точки и свойства окрестностей фиксированной точки.

1.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ арифметический критерий сходимости последовательности.

1.4. СФОРМУЛИРОВАТЬ дифференциальный признак монотонности функции.

2°

1.5. ЗАДАЧА. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2012^n}{n!} = 0.$$

1.6. ЗАДАЧА. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^{34} + e^x)}{\ln(x^{17} + e^{2012x})}.$$

1.7. ЗАДАЧА. Исследовать на дифференцируемость функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{при } |x| \leq 1, \\ |x| - 1 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

3°

1.8. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о счётности бесконечного подмножества счетного множества.

1.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать телескопический признак сходимости ряда.

1.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать дифференциальный признак выпуклости функции.

2. БИЛЕТ

1°

2.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ принцип математической индукции. Привести примеры утверждений, доказываемых с помощью принципа математической индукции.

2.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ топологическое определение предела в $\overline{\mathbb{R}}$ функции $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$.

2.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Ролля

2.4. СФОРМУЛИРОВАТЬ признак Коши сходимости ряда.

2°

2.5. ЗАДАЧА. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2012} q^n = 0$ при $|q| < 1$.

2.6. ЗАДАЧА. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}.$$

2.7. ЗАДАЧА. Показать, что производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная, а производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.

3°

2.8. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о существовании точной верхней и точной нижней границ непустого числового множества.

2.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о существовании производных высших порядков суммы, произведения и частного двух функций.

2.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

3. БИЛЕТ

1°

3.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ признак точной верхней и нижней граней.

3.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие предельной точки числового множества и его свойства.

3.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий Гейне существования предела.

3.4. СФОРМУЛИРОВАТЬ условия внутреннего экстремума функции: необходимое условие экстремума дифференцируемой функции, достаточные условия.

2°

3.5. ЗАДАЧА. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

3.6. ЗАДАЧА. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2012}}.$$

3.7. ЗАДАЧА. Определить область определения обратной функции $x = x(y)$ и найти ее производную, если

$$y = x + \ln x \quad (x > 0).$$

3°

3.8. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать свойство плотности совокупности рациональных чисел и совокупности иррациональных чисел.

3.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о пределе промежуточной функции.

3.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему Лагранжа о конечных приращениях.

4. БИЛЕТ

1°

4.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ аксиому непрерывности.

4.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие сходящегося ряда и свойства арифметических операций над рядами.

4.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о существовании непрерывной обратной функции.

4.4. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Коши о конечных приращениях.

2°

4.5. ЗАДАЧА. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1,$$

где $a > 0$.

4.6. ЗАДАЧА. Найти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right).$$

4.7. ЗАДАЧА. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет производную второго порядка в 0 и не имеет производной третьего порядка: $f \in \mathcal{D}^2(0)$, но $f \notin \mathcal{D}^3(0)$

3°

4.8. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему Ферма.

4.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать формулу Коши — Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.

4.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

5. БИЛЕТ

1°

5.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие точной верхней и точной нижней границ числового множества.

5.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие дифференциала.

5.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Вейерштрасса о непрерывных функциях на замкнутых промежутках.

5.4. ПРИВЕСТИ неравенства Юнга и Гёльдера.

2°

5.5. ЗАДАЧА. Построить график функции $f(x) = |2x - 1|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и найти $f^{-1}([-1, 2])$. Является ли f сюръекцией или инъекцией?

5.6. ЗАДАЧА. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2 \sin 3x} - \sqrt{1 - 4 \sin 7x}}{\sin 6x}$$

5.7. ЗАДАЧА. Доказать неравенство

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \quad \text{при } x, y \in \mathbb{R}.$$

3°

5.8. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о существовании точной верхней и точной нижней границ непустого числового множества.

5.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о пределе монотонной функции.

5.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о существовании непрерывной обратной функции.

6. БИЛЕТ

1°

6.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие наибольшего и наименьшего элемента числового множества.

6.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение производной.

6.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Больцано — Коши о промежуточных значениях.

6.4. ПРИВЕСТИ неравенство Минковского.

2°

6.5. ЗАДАЧА. Построить график функции $f(x) = x^2 + 1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и найти $f^{-1}([-1, 2])$. Является ли f сюръекцией или инъекцией?

6.6. ЗАДАЧА. Найти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arccotg} \frac{x}{x+1} \right).$$

6.7. ЗАДАЧА. Доказать неравенство

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad \text{при } x > 0.$$

3°

6.8. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать основное свойство экспоненциальной функции: $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

6.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать арифметический критерий сходимости функции.

6.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и форме Коши.

7. БИЛЕТ

1°

7.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ топологическое определение предела в $\overline{\mathbb{R}}$ функции $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$.

7.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие выпуклой функции.

7.3. ПРИВЕСТИ оценку для модуля разности экспоненциального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ и его частичной суммы.

7.4. СФОРМУЛИРОВАТЬ дифференциальный признак выпуклости функции.

2°

7.5. ЗАДАЧА. Найти все частичные пределы, верхний предел, нижний предел, инфимум и супремум последовательности

$$x_n = \frac{n^2}{4} + \frac{(-1)^n}{n}.$$

7.6. ЗАДАЧА. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 3x}}{\operatorname{tg} x^2}$$

7.7. ЗАДАЧА. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad \text{при } x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1.$$

3°

7.8. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о дифференцировании суперпозиции.

7.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о пределе функции и алгебраических операциях.

7.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать формулу Эйлера.

8. БИЛЕТ

1°

8.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ топологическое определение предела последовательности.

8.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение производных высших порядков.

8.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о пределе промежуточной последовательности.

8.4. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Вейерштрасса о частичных пределах.

2°

8.5. ЗАДАЧА. Доказать сходимость и найти предел последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

8.6. ЗАДАЧА. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - e^{\cos^2 x}}{\sin x^3 + \cos x - 1}$$

8.7. ЗАДАЧА. Доказать неравенства

$$\frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2 \quad \text{при } x \in \mathbb{R}.$$

3°

8.8. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о дифференцировании обратной функции.

8.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать признак Даламбера сходимости ряда.

8.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему Больцано — Коши о промежуточных значениях.