

1. БИЛЕТ

1°

1.1. ПРИВЕСТИ формулировку теоремы о ранге.

1.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ задачу на условный экстремум.

1.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Лебега о мажорируемой сходимости.

1.4. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие равномерной сходимости интеграла, зависящего от параметра.

2°

1.5. ЗАДАЧА. Будет ли конус $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$ двумерным многообразием?

1.6. ЗАДАЧА. Пусть уравнение $f(x, y, z, v) = 1$ определяет четыре неявные функции: $x(y, z, v)$, $y(z, v, x)$, $z(v, x, y)$, $v(x, y, z)$. Доказать, что

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 1.$$

1.7. ДОКАЗАТЬ. Если $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$ при $n \rightarrow \infty$.

3°

1.8. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать свойства элементарного интеграла.

1.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ определения гамма и бета функций Эйлера. Найти области определения. Доказать формулы понижения и формулу Эйлера — Гаусса.

1.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о замене переменной в интеграле Лебега.

2. БИЛЕТ

1°

2.1. ПРИВЕСТИ условия, гарантирующие такую же гладкость обратного отображения, что и исходное отображение.

2.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу Тейлора для функций многих переменных.

2.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Фубини.

2.4. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о непрерывности интеграла, зависящего от параметра.

2°

2.5. ЗАДАЧА. Проверить, что гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ есть двумерное многообразие.

2.6. ЗАДАЧА. Преобразовать уравнение

$$(x - z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

приняв x за функцию, а y и z — за независимые переменные.

2.7. ДОКАЗАТЬ. Если $f \in L_1(\mathbb{X})$, то $|f| \in L_1(\mathbb{X})$.

3°

2.8. ДОКАЗАТЬ. Из принципа исчерпывания вытекает элементарная теорема Беппо Леви для ступенчатых функций.

2.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о строении множества, определяемого невырожденной системой уравнений в пространстве $\mathbb{R}^n$.

2.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о достаточных условиях условного экстремума.

3. БИЛЕТ

1°

3.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие дифференциалов высших порядков.

3.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ принцип множителей Лагранжа (необходимое условие условного экстремума).

3.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Тонелли.

3.4. ПРИВЕСТИ формулу Стирлинга.

2°

3.5. ЗАДАЧА. Какая из кривых

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 0, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 = 1$$

не является многообразием? Почему?

3.6. ЗАДАЧА. Преобразовать уравнение

$$(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

приняв x за функцию, а $u = y - z$, $v = y + z$ — за независимые переменные.

3.7. ДОКАЗАТЬ. Если f — интегрируемая функция, а g совпадает с f почти всюду, то g — также интегрируемая функция.

3°

3.8. СФОРМУЛИРОВАТЬ доказать свойства функций, интегрируемых по Лебегу.

3.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о выпрямляющем диффеоморфизме.

3.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о равенстве смешанных производных.

4. БИЛЕТ

1°

4.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ правило вычисления дифференциалов высших порядков.

4.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие криволинейной системы координат в пространстве.

4.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Беппо Леви.

4.4. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о дифференцировании интеграла по параметру и написать формулу Лейбница.

2°

4.5. ЗАДАЧА. Матрица A порядка $n \times n$ имеет ранг r . Найти размерность многообразия $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$.

4.6. ЗАДАЧА. Преобразовать уравнение

$$(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

приняв x за функцию, а $u = y - z$, $v = y + z$ — за независимые переменные.

4.7. ДОКАЗАТЬ. Если $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонная функция, то f — измеримая функция (относительно меры Лебега).

3°

4.8. ПРИВЕСТИ свойства множеств нулевой меры и доказать их.

4.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о независимости касательного пространства от выбора параметризации.

4.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать формулу Тейлора.

5. БИЛЕТ

1°

5.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ достаточные условия функциональной зависимости системы функций.

5.2. ВОПРОС. Как найти базис нормального пространства в заданной точке многообразия, задаваемого системой уравнений.

5.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ свойство регулярности меры Лебега.

5.4. ПРИВЕСТИ формулу Кавальери — Лебега.

2°

5.5. ЗАДАЧА. Матрица A порядка $n \times n$ определяет отображение $f(x) = Ax + b$ пространства $\mathbb{R}^n$. Найти $Df(x_0)$ и $D^2f(x_0)$.

5.6. ЗАДАЧА. Преобразовать выражение

$$A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

приняв x за функцию, а $u = xz$, $v = yz$ — за независимые переменные.

5.7. ДОКАЗАТЬ. Если f — измеримая функция, то $\{x : f(x) \neq 0\}$ — измеримое множество.

3°

5.8. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать связь интеграла Лебега и интеграла Римана на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

5.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать необходимое условие условного экстремума.

5.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать Лебега о мажорируемой сходимости.

6. БИЛЕТ

1°

6.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие функциональной зависимости системы функций.

6.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение многообразия.

6.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ лемму Фату.

6.4. СФОРМУЛИРОВАТЬ признак интегрируемости Лебега.

2°

6.5. ЗАДАЧА. Будет ли совокупность точек, удовлетворяющих системе уравнений

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad 0 < a \leq b \leq c, \\ x + y + z = 0$$

многообразием? Если будет, то какова его размерность?

6.6. ЗАДАЧА. Преобразовать выражение

$$A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

полагая $x = uv$, $y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$.

6.7. ДОКАЗАТЬ. Если $f_1, \dots, f_n, \dots$ — последовательность измеримых функций, то $\inf\{f_1, \dots, f_n, \dots\}$ — измеримая функция.

3°

6.8. СФОРМУЛИРОВАТЬ измеримого множества и меры измеримого множества. Привести и доказать их свойства.

6.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о равенстве смешанных производных произвольного порядка, если для второго порядка теорема уже доказана.

6.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему Фубини.

7. БИЛЕТ

1°

7.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о неявных функциях.

7.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие градиента.

7.3. ПРИВЕСТИ условия интегрирования особенностей вида $|x|^p$ в $\mathbb{R}^k$ в окрестности 0 и ∞ .

7.4. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему об интегрировании интеграла по параметру.

2°

7.5. ЗАДАЧА. Будет ли пересечение двух эллипсоидов, отличное от точки, многообразием? Почему?

7.6. ЗАДАЧА. Перейти к новым переменным u, v, w , где $w = w(u, v)$, в следующем уравнении:

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z,$$

если $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $w = \ln z - (x + y)$.

7.7. ДОКАЗАТЬ. Функция f пренебрежима тогда и только тогда, когда $|f|$ — пренебрежимая функция.

3°

7.8. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать лемму о $\mathcal{N}$ -свойстве гладкого отображения.

7.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать аппроксимативное свойство многочлена Тейлора.

7.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать формулу Кавальери — Лебега.

8. БИЛЕТ

1°

8.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятия дробящейся системы и счетно-аддитивной меры.

8.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ основную лемму об искажении меры при гладком отображении.

8.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие интегральной нормы и ее свойства.

8.4. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о нормально сходящихся рядах.

2°

8.5. ВОПРОС. Почему к последовательности функций $f_n = n\chi_{(0, \frac{1}{n})}$, сходящейся к 0 почти всюду на $\mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$, не применима теорема Лебега?

8.6. ДОКАЗАТЬ. Если $f \in L_1(0, \infty)$, то $\int_{(0, y]} f dx \rightarrow \int_{(0, \infty)} f dx$ при $y \rightarrow \infty$.

8.7. ДОКАЗАТЬ. Если функция $f(x)$ измерима на $\mathbb{X}$, то функция $g(x, y) = f(x)$ измерима на $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, если $\mathbb{Y}$ измеримо.

3°

8.8. НАЙТИ значение интеграла Эйлера — Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

8.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о неявных функциях.

8.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о дифференцировании условно сходящегося интеграла, зависящего от параметра.