

1. БИЛЕТ

1°

1.1. ОПРЕДЕЛИТЬ форму Гаусса в n -мерном пространстве.

1.2. ОПРЕДЕЛИТЬ интеграл от формы первой степени в $\mathbb{R}^n$ и привести его свойства.

1.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие индуцированной ориентации края многообразия.

1.4. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие внешней дифференциальной формы степени $r \geq 0$ на открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$.

2°

1.5. ДОКАЗАТЬ, что тригонометрический ряд функции $f \in L_1(-\pi, \pi)$ можно интегрировать почленно, т. е. если $a_0 = 0$, то $\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. (Здесь a_0 — коэффициент разложения первообразной в ряд Фурье.)

1.6. ДОКАЗАТЬ, что полиномы плотны в $L_2[a, b]$.

1.7. ДОКАЗАТЬ, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f * \delta_h(x) = f(x_0)$, где δ_h — Δ -образная последовательность и f — локально интегрируемая на $(-\infty, \infty)$ функция, непрерывная в точке x_0 .

1.8. ДОКАЗАТЬ, что ряд $\sum (a_n^2 + b_n^2)n^2$ сходится, если a_n, b_n — коэффициенты Фурье 2π -периодической функции $f \in C^1(R)$.

3°

1.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему Лебега о дифференцировании монотонной функции.

1.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о равенстве внешних мер Хаусдорфа и Лебега в R^n .

1.11. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему Лебега о дифференцировании интеграла. А именно, следствия 1 и 2 теоремы об оценке интеграла верхней производной от квазиаддитивной функции.

1.12. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать формулу коплощади.

2. БИЛЕТ

1°

2.1. ПРИВЕСТИ условие независимости интеграла от выбора пути, соединяющего данные точки.

2.2. ОПРЕДЕЛИТЬ интегрирование по k -мерной цепи.

2.3. ПРИВЕСТИ значение интеграла от формы Гаусса по всевозможным $(n-1)$ -мерным сферам в $\mathbb{R}^n$.

2.4. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение ориентации многообразия.

2°

2.5. Выразите коэффициенты Фурье функции, через коэффициенты Фурье её производной.

2.6. ДОКАЗАТЬ, что свертка $g * f$ ограничена и непрерывна, если $f \in L_1(-\infty, \infty)$, а g измерима и ограничена.

2.7. ДОКАЗАТЬ, что для любого параллелепипеда $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_k, b_k]$ найдётся такая последовательность $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$, что $\|f_n - \chi_T\|_{L_1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

2.8. ДОКАЗАТЬ, что $\int_0^\pi f^2(x) dx \leq \int_0^\pi (f'(x))^2 dx$, если $f \in C^1(\mathbb{R})$ — 2π -периодическая функция и $f(0) = f(\pi) = 0$.

3°

2.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему о представлении монотонной функции в виде суммы трех монотонных функций: дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярной.

2.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему Лебега о восстановлении абсолютно непрерывной функции по ее производной.

2.11. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать изодиаметрическое неравенство.

2.12. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о восстановлении абсолютно непрерывной меры по ее производной.

3. БИЛЕТ

1°

3.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение функции ограниченной вариации.

3.2. ПРИВЕСТИ определение верхней и нижней производной квазиаддитивной функции множества.

3.3. ПРИВЕСТИ определение внешней меры.

3.4. ПРИВЕСТИ формулу интеграла Лебега в обобщённой полярной (сферической) системе координат.

2°

3.5 Пусть $\omega_1, \dots, \omega_k$ дифференциальные 1-формы в R^n , $k < n$, $\Omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ и $d\Omega = \lambda \wedge \Omega$, где λ — некоторая 1-форма. Докажите, что $d\omega_i \wedge \Omega = 0$ для всех i .

3.6 Задайте функцией ориентацию многообразия $M = \{(x, y, z) \mid z = xy\}$.

3.7 Пусть S — сфера в R^3 с центром в точке 0, $C \subset S$ — замкнутый контур класса C^1 , $\bar{n}(x)$ — вектор нормали к C касательный к S , $\bar{r} = (x, y, z)$. Докажите, что $\int_C \bar{n}(x) \times \bar{r} dH^1 = 0$.

3.8 Пусть $\varphi : U \subset R^m \rightarrow R^n$ — постоянное отображение, ω^k — дифференциальная k -форма в R^n . Докажите, что $\varphi^* \omega^k \equiv 0$.

3°

3.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ лемму о гладкости средних функций с гладким ядром (о дифференцируемости свёртки).

3.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать лемму Римана — Лебега.

3.11. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему Дини о достаточном условии сходимости ряда Фурье в точке.

3.12. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать (в $\mathbb{R}^2$) изопериметрическое свойство шара.

4. БИЛЕТ

1°

4.1. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Жордана о разложении функции ограниченной вариации.

4.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение абсолютно непрерывной функции.

4.3. ПРИВЕСТИ определение меры Хаусдорфа.

4.4. ПРИВЕСТИ формулы для вычисления длины кривой и площади графика функции.

2°

4.5 Пусть $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ — отображение класса C^2 . Докажите равенство $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$.

4.6. ДОКАЗАТЬ, что $\varphi^*(\omega \wedge \tau) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\tau$.

4.7 Задайте функцией ориентацию многообразия $M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

4.8 Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$ — открытое множество и ∂U — дифференцируемое многообразие. Докажите равенство $\int_{\partial U} \langle \bar{n}, \bar{a} \rangle dH^2 = 0$, где $\bar{n}(x)$ — внешняя нормаль к ∂U , $\bar{a}$ — постоянный вектор.

3°

4.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему о плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ в $L_1(\mathbb{R}^k)$.

4.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о полноте тригонометрической системы в $L_2[-\pi, \pi]$.

4.11. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теоремы о равномерном приближении непрерывной функции обыкновенными и тригонометрическими полиномами.

4.12. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему об аппроксимации единицы и лемму о разбиении единицы.

5. БИЛЕТ

1°

5.1. Привести определение Δ -образной последовательности.

5.2. Привести определение полной системы и условия полноты ортогональной системы в полном пространстве.

5.3. Сформулировать принцип локализации.

5.4. Привести равенство Парсеваля.

2°

5.5. Доказать, что монотонная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию.

5.6. Доказать, что внешняя мера Хаусдорфа аддитивна на удалённых множествах.

5.7. Доказать, что множества A и $f(A)$ имеют одинаковую размерность по Хаусдорфу, если отображение f — билипшицево.

5.8. Доказать, что $H^{k-1}(\partial B(0, 1)) = kH^k(B(0, 1))$, где $B(0, 1)$ — единичный шар в $\mathbb{R}^k$.

3°

5.9. Сформулировать и доказать первую теорему Пуанкаре.

5.10. Привести вычисление интеграла от формы Гаусса в $\mathbb{R}^k$ по $(k-1)$ -мерному гладкому многообразию.

5.11. Сформулировать и доказать формулу Стокса — Пуанкаре для k -мерной цепи.

5.12. Сформулировать и доказать элементарную формулу Ньютона — Лейбница — Грина — Гаусса — Остроградского — Стокса.

6. БИЛЕТ

1°

6.1. ПРИВЕСТИ определение коэффициентов Фурье относительно ортогональной системы в пространстве со скалярным произведением.

6.2. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о непрерывности сдвига в $L_1(\mathbb{R}^k)$.

6.3. СФОРМУЛИРОВАТЬ достаточное условие сходимости ряда Фурье в точке.

6.4. ПРИВЕСТИ определение свертки и ее свойства.

2°

6.5. ДОКАЗАТЬ, что выпуклая функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является абсолютно непрерывной.

6.6 Пусть B — единичный открытый шар в R^n . Докажите, что найдётся счётный набор непересекающихся замкнутых шаров $B_i \subset B$ такой, что $|B \setminus (\bigcup_i B_i)| = 0$.

6.7 Пусть $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ — единичная сфера в R^3 . Найдите $H^1(S)$, $H^2(S)$, $H^3(S)$.

6.8. ДОКАЗАТЬ, что площадь графика Γ функции $f : U \subset R^k \rightarrow R$ класса C^1 можно вычислить по формуле $H^k(\Gamma) = \int_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2} dx$.

3°

6.9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать формулу Грина.

6.10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ лемму об ориентации края многообразия.

6.11. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать лемму о разбиении единицы и обобщенную интегральную теорему Стокса для интеграла внешней формы по ориентированному многообразию с краем.

6.12. СФОРМУЛИРОВАТЬ и доказать теорему о пленке и теорему Брауэра.