

1. ВНЕШНИЕ МЕРЫ И ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть $\mathbb{X}$ — произвольное множество, а $2^{\mathbb{X}}$ — совокупность всех его подмножеств.

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $\mu : 2^{\mathbb{X}} \rightarrow [0, +\infty]$ называется *внешней мерой* на $\mathbb{X}$, если

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$,
- 2) $\mu(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$ для любых множеств $A, A_i \in 2^{\mathbb{X}}$, $i \in \mathbb{N}$, таких, что $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

Второе свойство называют свойством *счетной полуаддитивности* внешней меры.

1.2. СВОЙСТВО. *Внешняя мера всегда монотонна, т. е. $\mu(A) \leq \mu(B)$ для всех множеств $A, B \in 2^{\mathbb{X}}$ таких, что $A \subset B$.*

Это утверждение вытекает из свойств внешней меры, если положить $B = A_1$, а $A_i = \emptyset$ для всех $i > 1$.

1.3. ПРИМЕР. Пусть $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$ — множество с мерой. Всякому множеству $A \in 2^{\mathbb{X}}$ соответствует интегральная норма $\|\chi_A\|$ его характеристической функции χ_A . В силу свойств интегральной нормы соответствие

$$2^{\mathbb{X}} \ni A \mapsto \|\chi_A\| \quad (1.1)$$

обладает свойствами внешней меры. (ПРОВЕРИТЬ!)

Приведенный пример показывает как мера, определенная первоначально лишь на элементах дробящейся системы, может быть продолжена до внешней меры, определенной уже на всех подмножествах из $\mathbb{X}$.

1.4. ПРИМЕР. Напомним, что Лебег применял другой способ расширения меры до внешней, отличный от приведенного в примере 1.3. Известно, что совокупность k -мерных сегментов в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, образует дробящуюся систему. Если $T = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_k, b_k \rangle$ — k -мерный сегмент, то его k -мерная мера Лебега равна $|T| = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i)$. Лебег определял *внешнюю меру* $|\cdot|^*$ на произвольном подмножестве A

евклидова пространства $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, равенством

$$|A|^* = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} |T_i| : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i \right\}, \quad (1.2)$$

где нижняя грань берется по всем объединениям $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i \supset A$ k -мерных сегментов T_i . Можно проверить, что внешняя мера Лебега $|A|^*$ множества A совпадает с интегральной нормой характеристической функции χ_A множества A :

$$|A|^* = \int_{\mathbb{R}^k}^* \chi_A dx = \|\chi_A\|.$$

Мы установим это совпадение в общем случае.

1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$ — множество с мерой. Для любого множества $A \in 2^{\mathbb{X}}$ введем внешнюю меру Лебега

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} |T_i| : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i \right\}, \quad (1.3)$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям $\{P_i \in \mathcal{S}\}_{i \in \mathbb{N}}$ множества A счетными наборами элементов из $\mathcal{S}$; если такого покрытия не найдется, то полагаем $\mu^*(A) = +\infty$.

1.6. СВОЙСТВО. Величина $\mu^*(\cdot)$ монотонна относительно включения множеств, т. е. $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ для всех множеств $A, B \in 2^{\mathbb{X}}$ таких, что $A \subset B$.

Неравенство $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ вытекает непосредственно из определения величины $\mu^*(\cdot)$.

1.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$ — множество с мерой. Тогда для всякого множества $A \in 2^{\mathbb{X}}$

- 1) справедливо равенство $\|\chi_A\| = \mu^*(A)$;
- 2) существует измеримое множество $B \supset A$, удовлетворяющее равенству: $\mu(B) = \mu^*(A)$.

Напомним, что множество B измеримо, если его характеристическая функция χ_B измерима, т. е. является пределом сходящейся к ней почти всюду последовательности ступенчатых функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо доказать, что

$$\|\chi_A\| = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\mathbb{X}} \int \varphi_n(x) d\mu = \mu^*(A), \quad (1.4)$$

где нижняя грань берется по всем монотонно возрастающим последовательностям неотрицательных ступенчатых функций таким, что $\sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(x) \geq \chi_A(x)$ для всех $x \in \mathbb{X}$.

1) Докажем в (1.4) неравенство " $\leq$ " при условии, что правая часть конечна. Рассмотрим для этого произвольное покрытие $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i$ множества A и определим последовательность $\{\varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ступенчатых функций следующим образом: $\varphi_n = \sum_{i=1}^n \chi_{P_i}$. Очевидно $\varphi_n \geq 0$, последовательность φ_n монотонно возрастает,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(x) \geq \chi_A(x) \quad \text{и} \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(P_i) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{X}} \varphi_n(x) d\mu.$$

Отсюда $\|\chi_A\| \leq \mu^*(A)$, так как в определении $\|\chi_A\|$ нижняя грань формально берется по более широкой совокупности возрастающих последовательностей ступенчатых функций.

2) В доказательстве обратного неравенства будем применять следующее свойство.

1.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть дано пространство с мерой $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$ и множество $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, где $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n$ — возрастающая последовательность множеств, каждое из которых есть объединение конечной совокупности множеств из дробящейся системы $\mathcal{S}$. Тогда

$$\mu^*(D) \leq \mu(D) \quad (1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки соотношения $\mu^*(D) \leq \mu(D)$ следует принять во внимание, что множество D_1 является объединением конечной дизъюнктивной совокупности элементов из $\mathcal{S}$. Далее для любого $n \geq 1$ дополнение $D_{n+1} \setminus D_n$ можно представить в виде объединения конечной дизъюнктивной совокупности элементов из $\mathcal{S}$. Отсюда по индукции можно получить представление множества

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = D_1 \cup (D_2 \setminus D_1) \cup \dots \cup (D_{n+1} \setminus D_n) \cup \dots$$

в виде объединения не более чем счетной дизъюнктивной совокупности $\mathcal{B}$ элементов из $\mathcal{S}$ такое, что каждое множество D_n является объединением конечной дизъюнктивной совокупности множеств из $\mathcal{B}$. Тогда, используя свойство перестановочности абсолютно сходящегося ряда, получаем

$$\mu^*(D) \leq \sum_{T \in \mathcal{B}} \mu(T) = \mu(D).$$

Неравенство " $\geq$ " в соотношении (1.4) достаточно доказать в предположении $\|\chi_A\| < \infty$.

Фиксируем произвольное натуральное число $l > 1$. По определению интегральной нормы существует монотонно возрастающая последовательность $\{\varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, неотрицательных ступенчатых функций такая, что

$$\sup_n \varphi_n(x) \geq \chi_A(x) \quad \text{и} \quad \sup_n \int_{\mathbb{X}} \varphi_n d\mu = \sup_n \|\varphi_n\| \leq \|\chi_A\| + l^{-1}.$$

Определим множества $A_{l,n} = \{x \in \mathbb{X} : \varphi_n(x) \geq 1 - l^{-1}\}$. По неравенству Чебышёва имеем оценку

$$\mu(A_{l,n}) = \|\chi_{A_{l,n}}\| \leq \frac{\|\varphi_n\|}{1 - l^{-1}} \leq \frac{\|\chi_A\| + l^{-1}}{1 - l^{-1}} = \|\chi_A\| + O(l^{-1}).$$

Так как последовательность φ_n монотонно возрастает, то $A_{l,n} \subset A_{l,n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Учитывая вышесказанные свойства, получаем

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{l,n} = B_l, \\ \mu^*(A) \leq \mu^*(B_l) \leq \mu(B_l) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{l,n}) \leq \|\chi_A\| + O(l^{-1}). \quad (1.6)$$

Неравенство $\mu^*(A) \leq \mu^*(B_l)$ сформулировано в свойстве 1.6, а неравенство $\mu^*(B_l) \leq \mu(B_l)$ вытекает из предложения 1.8, если положить в нем $D = B_l$, $D_n = A_{l,n}$. Равенство $\mu(B_l) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{l,n})$ вытекает из свойства счетной аддитивности меры μ .

Так как $l \geq 2$ — произвольное натуральное число, то равенство $\|\chi_A\| = \mu^*(A)$ доказано.

Положим теперь $B = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} B_l$. Тогда очевидно, B — измеримое мно-

жество. Кроме того, имеем включения

$$A \subset B \subset \bigcap_{k=1}^l B_k \subset B_l.$$

Отсюда и из (1.6) выводим

$$\mu^*(A) = \|\chi_A\| \leq \|\chi_B\| = \mu(B) \leq \mu(B_l) \leq \|\chi_A\| + O(l^{-1}).$$

Так как $l \geq 2$ — произвольное число, то равенство $\mu^*(A) = \mu(B)$ установлено. Предложение доказано.

Отметим разницу в обозначениях: символ $\mu^*(A)$ обозначает внешнюю меру множества A , в то время как символ $\mu(A)$ обозначает меру измеримого множества A . Ясно, что $\mu^*(A) = \mu(A)$, если множество A измеримо, однако, это равенство не имеет никакого смысла, если множество A неизмеримо. Это соглашение контрастирует с применением символа $\mathcal{H}$ для вводимой ниже внешней меры Хаусдорфа, так как он один и тот же как для измеримого, так и для неизмеримого множества.

Пусть $(\mathbb{X}, d)$ — метрическое пространство. Если $A \subset \mathbb{X}$, то его диаметр $\text{diam } A$ равен $\sup_{x,y} \{d(x, y) : x, y \in A\}$.

1.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для $k \geq 0$, $\delta \in (0, \infty]$ и $A \subset \mathbb{X}$ определим

$$\mathcal{H}_\delta^k(A) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } E_i)^k : \text{diam } E_i < \delta, A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \right\},$$

где $\omega_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$, а нижняя грань берется по всем счетным покрытиям множества A . Если множество A нельзя покрыть счетной совокупностью множеств указанного вида, то полагаем $\mathcal{H}_\delta^k(A) = \infty$. Величина

$$\mathcal{H}^k(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^k(A)$$

называется (*внешней*) *мерой Хаусдорфа* множества A .

1.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Так как при $\delta_1 < \delta_2$ нижняя грань берется по более узкому множеству, то $\mathcal{H}_{\delta_1}^k(A) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^k(A)$ и, следовательно, всегда существует предел

$$\mathcal{H}^k(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^k(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^k(A),$$

поскольку $\mathcal{H}_\delta^k(A)$ не убывает при уменьшении δ . Таким образом, мера Хаусдорфа определена для любого множества $A \subset \mathbb{X}$.

1.11. ТЕОРЕМА. $\mathcal{H}_\delta^k$ и $\mathcal{H}^k$ — внешние меры для любого $k \geq 0$ и для любого $\delta \in (0, \infty]$.

Более того, $\mathcal{H}^k$ — борелевская мера, т. е. все борелевские множества измеримы относительно внешней меры $\mathcal{H}^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\delta \in (0, \infty]$ и $k \geq 0$. Рассмотрим множества $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\{E_i^j\}$, $i, j \in \mathbb{N}$, — покрытие A_j счетным набором множеств E_i^j такое, что

$$\text{diam } E_i^j < \delta \quad \text{и} \quad \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } E_i^j)^k \leq \mathcal{H}_\delta^k(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$$

для всех $i, j \in \mathbb{N}$. Тогда совокупность $\{E_i^j\}$, $i, j \in \mathbb{N}$, образует счетное покрытие A , и, следовательно,

$$\mathcal{H}_\delta^k(A) \leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } E_i^j)^k \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^k(A_j) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем

$$\mathcal{H}_\delta^k(A) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^k(A_j).$$

Таким образом, $\mathcal{H}_\delta^k$ — внешняя мера. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получаем, что $\mathcal{H}^k$ — также внешняя мера.

1.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть μ — внешняя мера, определенная на подмножествах из $\mathbb{X}$. Множество $A \subset \mathbb{X}$ называется μ -измеримым по Каратеодори (относительно μ), если

$$\mu(F) = \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A)$$

для всех множеств $F \subset \mathbb{X}$.

1.13. ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку для любых двух множеств $F, A \subset \mathbb{X}$ справедливо равенство $F = (F \cap A) \cup (F \setminus A)$, то в силу счетной полуаддитивности внешней меры μ всегда выполнено неравенство $\mu(F) \leq \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A)$. Поэтому для того, чтобы доказать измеримость множества A , достаточно проверить выполнение неравенства $\mu(F) \geq \mu(F \cap A) + \mu(F \setminus A)$ для всех $F \subset \mathbb{X}$.

1.14. ЗАДАЧА. Показать, что всякое множество нулевой меры внешней μ -меры μ -измеримо по Каратеодори.

Пусть $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$ — множество с мерой. Напомним, что множество $A \subset \mathbb{X}$ называется μ -измеримым по Лебегу, если его характеристическая функция измерима. Наша ближайшая цель — доказать, что измеримость множества по Лебегу в определенном некотором смысле эквивалентна измеримости по Каратеодори.

Для доказательства этого свойства, формулируемого ниже, нам понадобится одно свойство интегральной нормы. Пусть $A \subset \mathbb{X}$ — произвольное множество, интегральная норма характеристической функции которого конечна. Покажем, что для любой возрастающей последовательности $\{g_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, неотрицательных измеримых на $\mathbb{X}$ функций такой, что

$$\chi_A(x) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x)$$

для почти всех x , вытекает соотношение

$$\mu^*(A) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} g_i d\mu.$$

Достаточно рассмотреть случай, когда правая часть этого соотношения конечна. Действительно, полагая $g(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x)$, по теореме Беппо Леви имеем

$$\mu^*(A) = \|\chi_A\| \leq \|g\| = \int_{\mathbb{X}} g d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} g_i d\mu. \quad (1.7)$$

1.15. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $(\mathbb{X}, \mathcal{S}, \mu)$ — множество с мерой. Тогда

1) измеримость множества $A \subset \mathbb{X}$ по Лебегу влечет его μ^* -измеримость по Каратеодори;

2) если множество $A \subset \mathbb{X}$ конечной внешней меры μ^* -измеримо по Каратеодори, то оно измеримо также и по Лебегу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть A — произвольное измеримое по Лебегу множество, а $F \subset \mathbb{X}$ — некоторое множество, внешняя мера которого конечна. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая возрастающая последовательность неотрицательных ступенчатых функций φ_l , что

$$\chi_F(x) \leq \sup_{l \in \mathbb{N}} \varphi_l(x),$$

а

$$\sup_{l \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{X}} \varphi_l d\mu \leq \|\chi_F\| + \varepsilon.$$

Очевидно, что

$$\int_{\mathbb{X}} \varphi_l d\mu = \int_{\mathbb{X}} \varphi_l \cdot \chi_A d\mu + \int_{\mathbb{X}} \varphi_l \cdot (1 - \chi_A) d\mu.$$

Отсюда с учетом (1.7) имеем

$$\begin{aligned} \|\chi_F\| + \varepsilon &\geq \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} \varphi_l \cdot \chi_A d\mu + \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} \varphi_l \cdot (1 - \chi_A) d\mu \\ &\geq \|\chi_{F \cap A}\| + \|\chi_{F \setminus A}\|. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу произвольности ε получаем

$$\mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A)$$

для произвольного множества F . Если внешняя мера множества F равна ∞ , то последнее неравенство всегда справедливо. Таким образом, множество A μ^* -измеримо по Каратеодори.

2) Пусть теперь множество $A \subset \mathbb{X}$ имеет конечную внешнюю меру Лебега и μ^* -измеримо по Каратеодори, т. е.

$$\mu^*(F) = \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A)$$

для любого множества $F \subset \mathbb{X}$. Из предложения 1.7 вытекает, что $A \subset B$, где B — измеримое по Лебегу множество такое, что $\mu^*(A) = \mu(B)$ (напомним, $\mu(B) = \mu^*(B)$). Полагая $F = B$, получим $\mu^*(B) = \mu^*(A) + \mu^*(B \setminus A)$. Следовательно, внешняя мера множества $B \setminus A$ равна нулю. Напомним, что всякое множество нулевой внешней меры Лебега измеримо по Лебегу. Отсюда вытекает измеримость по Лебегу множества A , так как оно отличается от измеримого множества B лишь на множество меры нуль.

1.16. ЗАМЕЧАНИЕ. Второе утверждение предложения 1.15 справедливо также и для случая когда мера μ σ -конечна, т. е. $\mathbb{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где E_n — измеримое множество и $\mu(E_n) < \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Действительно, множество E_n μ^* -измеримо по Каратеодори для любого

$n \in \mathbb{N}$, и для любого μ^* -измеримого по Каратеодори множества $A \subset \mathbb{X}$ пересечение $A \cap E_n$ имеет конечную внешнюю меру Лебега. Тогда пересечение $A \cap E_n$ измеримо по Лебегу для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, будет измеримым по Лебегу и множество A , так как $\chi_A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A \cap E_n}(x)$, где $\chi_{A \cap E_n}(x)$ — измеримая функция.

В качестве частного случая предложения 1.15 получаем

1.17. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $(\mathbb{R}^k, \mathcal{S}^k, |\cdot|)$ — множество с мерой Лебега. Множество $A \subset \mathbb{R}^k$ $|\cdot|$ -измеримо по Каратеодори тогда и только тогда, когда оно измеримо по Лебегу.

1.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейство $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{X}}$ называется σ -алгеброй, если $\mathbb{X} \in \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ замкнуто относительно дополнения и счетного объединения, т. е.

- 1) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \setminus B \in \mathcal{F}$,
- 2) если $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Символ $\bigsqcup_i A_i$ используется далее для объединения дизъюнктивных множеств.

1.19. ТЕОРЕМА. Если μ — внешняя мера на совокупности $2^{\mathbb{X}}$, то совокупность μ -измеримых по Каратеодори множеств образует σ -алгебру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\mathbb{X}$ измеримо. Действительно, поскольку $F \cap \mathbb{X} = F$ и $F \setminus \mathbb{X} = \emptyset$, то $\mu(F) = \mu(F \cap \mathbb{X}) + \mu(F \setminus \mathbb{X})$ для любого множества $F \subset \mathbb{X}$.

2) Если A измеримо, то дополнение $A^c = \mathbb{X} \setminus A$ к A также измеримо. В самом деле, для произвольного множества $F \subset \mathbb{X}$ имеем

$$\begin{aligned} \mu(F \cap A^c) + \mu(F \setminus A^c) &= \mu(F \setminus A) + \mu(F \cap (A^c)^c) \\ &= \mu(F \setminus A) + \mu(F \cap A) = \mu(F). \end{aligned}$$

3) Пусть множества A и B измеримы. Тогда их объединение также

измеримо. Действительно,

$$\begin{aligned}
& \mu(F \cap (A \cup B)) + \mu(F \setminus (A \cup B)) \\
&= \mu(F \cap (A \cup B)) + \mu(F \cap (A \cup B)^c) \\
&= \mu((F \cap A) \cup (F \cap B)) + \mu(F \cap A^c \cap B^c) \\
&= \mu((F \cap A \cap B^c) \cup (F \cap A \cap B) \cup (F \cap A^c \cap B)) + \mu(F \cap A^c \cap B^c) \\
&\leq \mu(F \cap A \cap B^c) + \mu(F \cap A \cap B) + \mu(F \cap A^c \cap B) + \mu(F \cap A^c \cap B^c) \\
&= \mu(F \cap A) + \mu(F \cap A^c) = \mu(F).
\end{aligned}$$

Отсюда по индукции получаем, что объединение конечного числа измеримых множеств также измеримо.

Пусть теперь множества A_i , $i \in \mathbb{N}$, измеримы. Покажем, что

$$\mu\left(F \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) + \mu\left(F \cap \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)^c\right) \leq \mu(F).$$

Без ограничения общности считаем, что $\mu(F) < \infty$, а A_i — дизъюнктная система, так как в противном случае можно рассмотреть множества $B_j = A_j \setminus \bigcup_{i < j} A_i$, $B_1 = A_1$. Тогда $\{B_j : j \in \mathbb{N}\}$ — дизъюнктная система, причем $\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} B_j = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned}
& \mu\left(F \cap \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) + \mu\left(F \cap \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)^c\right) \\
&\leq \mu\left(F \cap \bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) + \mu\left(F \cap \left(\bigsqcup_{i > n} A_i\right)\right) + \mu\left(F \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right)^c\right) \\
&= \mu(F) + \mu\left(F \cap \left(\bigsqcup_{i > n} A_i\right)\right) \leq \mu(F) + \sum_{i > n} \mu(F \cap A_i).
\end{aligned}$$

Осталось показать, что $\sum_{i > n} \mu(F \cap A_i) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для этого

докажем, что $\sum_{i=1}^n \mu(F \cap A_i) \leq \mu(F)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\mu(F) &= \mu(F \cap A_1) + \mu(F \cap A_1^c) \\
&= \mu(F \cap A_1) + \mu((F \cap A_1^c) \cap A_2) + \mu((F \cap A_1^c) \cap A_2^c) \\
&= \mu(F \cap A_1) + \mu(F \cap A_2) + \mu(F \cap A_1^c \cap A_2^c) \\
&= \mu(F \cap A_1) + \mu(F \cap A_2) + \mu((F \cap A_1^c \cap A_2^c) \cap A_3) \\
&\quad + \mu((F \cap A_1^c \cap A_2^c) \cap A_3^c) = \dots
\end{aligned}$$

(Здесь использовано то, что $\mu((F \cap A_1^c) \cap A_2) = \mu(F \cap A_2)$ ввиду дизъюнктивности системы $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$).

По индукции получаем требуемое: $\mu(F) \geq \sum_{i=1}^n \mu(F \cap A_i)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $\sum_{i>n} \mu(F \cap A_i) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\mu\left(F \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) + \mu\left(F \cap \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)^c\right) \leq \mu(F)$$

для произвольного множества $F \subset \mathbb{X}$. Следовательно, измеримость объединения $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ доказана.

Таким образом, измеримые по Каратеодори множества образуют σ -алгебру, что и требовалось доказать.

1.20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Неотрицательная функция множества μ , определенная на некоторой σ -алгебре $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{X}}$ со значениями в $[0, \infty]$, называется *счетно-аддитивной функцией множества (или мерой) на $\mathcal{F}$* , если

- 1) μ монотонна: из $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{F}$, вытекает $\mu(A) \leq \mu(B)$;
- 2) $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$ для любой счетной дизъюнктивной системы множеств $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$.

1.21. ТЕОРЕМА (СВОЙСТВА ИЗМЕРИМЫХ МНОЖЕСТВ). Пусть μ — внешняя мера на совокупности $2^{\mathbb{X}}$, $\{A_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, — последовательность μ -измеримых по Каратеодори множеств. Тогда

- 1) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ для дизъюнктивного набора множеств $\{A_i\}$.

Таким образом, внешняя мера счетно-аддитивна на совокупности μ -измеримых множеств.

- 2) Если $A_1 \subset \dots \subset A_i \subset A_{i+1} \dots$, то $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$.
- 3) Если $A_1 \supset \dots \supset A_i \supset A_{i+1} \dots$ и $\mu(A_l) < \infty$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, то $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Полагая в определении 1.12 $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A = A_1$, имеем $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \mu\left(\bigcup_{i>1} A_i\right)$. Отсюда по индукции полу-

чим $\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) + \mu\left(\bigsqcup_{i>n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Обратное неравенство вытекает из свойства счетной полуаддитивности.

2) Поскольку $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{i+1} \setminus A_i)\right)$, то из первого пункта следует $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{i+1} \setminus A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$, что и требовалось.

3) Это свойство вытекает из второго пункта, так как $A_1 \setminus A_i \subset A_1 \setminus A_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и поэтому $\mu(A_1) - \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_i)\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$.

1.22. ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что свойства 2 и 3 сформулированной теоремы справедливы для произвольной счетно-аддитивной функции множества (меры), определенной на некоторой σ -алгебре.

1.23. ЗАДАЧА. Привести контрпример к третьему пункту теоремы в случае, когда условие $\mu(A_l) < \infty$ не выполнено ни для какого $l \in \mathbb{N}$.

1.24. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $(\mathbb{X}, d)$ — метрическое пространство. Множества $A, B \subset \mathbb{X}$ называются *удаленными*, если

$$\text{dist}(A, B) = \inf_{x, y} \{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0.$$

1.25. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Внешняя мера μ *аддитивна на удаленных множествах*, если $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых двух удаленных множеств $A, B \subset \mathbb{X}$.

1.26. ЗАДАЧА. Показать, что внешняя мера Лебега аддитивна на удаленных множествах.

1.27. ПРИЗНАК КАРАТЕОДОРИ. Пусть $\mathbb{X}$ — метрическое пространство и внешняя мера μ является аддитивной на удаленных множествах. Тогда μ — борелевская мера, т. е. все борелевские множества μ -измеримы по Каратеодори. Другими словами, σ -алгебра μ -измеримых множеств содержит σ -алгебру борелевских множеств.

1.28. ЗАДАЧА. Доказать обратное к теореме 1.27 утверждение: всякая борелевская мера на метрическом пространстве $\mathbb{X}$ аддитивна на удаленных множествах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что все замкнутые множества μ -измеримы (тогда для произвольного борелевского множества это утверждение следует из теоремы 1.19).

Рассмотрим замкнутое множество C и докажем, что для всякого множества F справедливо неравенство

$$\mu(F) \geq \mu(F \cap C) + \mu(F \setminus C).$$

Если $\mu(F) = \infty$, то неравенство очевидно. Рассмотрим случай, когда $\mu(F) < \infty$.

Определим множества

$$D_0 = \{x \in \mathbb{X} : \text{dist}(x, C) > 1\}$$

и

$$D_n = \left\{x \in \mathbb{X} : \frac{1}{2^n} < \text{dist}(x, C) \leq \frac{1}{2^{n-1}}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Множества D_n , $n \in \mathbb{N}$, образуют дизъюнктную систему. Очевидно, что системы $\{D_{2j}\}$ и $\{D_{2j+1}\}$, $j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, состоят из удаленных множеств. Отсюда следует, что D_i и D_j удалены, если $|i - j| > 1$.

Для всех $m \in \mathbb{N}$ в силу включений

$$F \supset F \cap \bigsqcup_{j=0}^m D_{2j} \quad \text{и} \quad F \supset F \cap \bigsqcup_{j=0}^m D_{2j+1}$$

и монотонности меры справедливы неравенства

$$\mu(F) \geq \mu\left(F \cap \bigsqcup_{j=0}^m D_{2j}\right) \quad \text{и} \quad \mu(F) \geq \mu\left(F \cap \bigsqcup_{j=0}^m D_{2j+1}\right).$$

Далее, так как

$$F \cap \bigsqcup_{j=0}^m D_{2j} = \bigsqcup_{j=0}^m (F \cap D_{2j}) \quad \text{и} \quad F \cap \bigsqcup_{j=0}^m D_{2j+1} = \bigsqcup_{j=0}^m (F \cap D_{2j+1}),$$

по свойству аддитивности меры μ на удаленных множествах получаем

$$\mu\left(\bigsqcup_{j=0}^m (F \cap D_{2j})\right) = \sum_{j=0}^m \mu(F \cap D_{2j}) \leq \mu(F) < \infty$$

и

$$\mu\left(\bigsqcup_{j=0}^m (F \cap D_{2j+1})\right) = \sum_{j=0}^m \mu(F \cap D_{2j+1}) \leq \mu(F) < \infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \mu(F \cap D_j)$, члены которого неотрицательны, сходится, так как его частичные суммы ограничены сверху числом $2\mu(F)$.

Теперь заметим, что множества C и $\bigsqcup_{i=0}^m D_i$ удалены при любом $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что

$$\begin{aligned} \mu(F) &\geq \mu\left(\left(F \cap \bigsqcup_{j=0}^m D_j\right) \cup (F \cap C)\right) = \mu(F \cap C) + \mu\left(F \cap \bigsqcup_{j=0}^m D_j\right) \\ &\geq \mu(F \cap C) + \mu(F \cap C^c) - \sum_{j>m} \mu(F \cap D_j). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Действительно, так как $C^c = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} D_j = \bigsqcup_{j=0}^m D_j \cup \bigsqcup_{j>m} D_j$, то

$$\mu(F \cap C^c) \leq \mu\left(F \cap \bigsqcup_{j=0}^m D_j\right) + \sum_{j>m} \mu(F \cap D_j),$$

откуда и следует (1.8). Заметим, что левая часть (1.8) не зависит от m . Поскольку остаток $\sum_{j>m} \mu(F \cap D_j)$ может быть сделан сколь угодно малым при подходящем выборе m , то

$$\mu(F) \geq \mu(F \cap C) + \mu(F \cap C^c).$$

Совокупность всех борелевских множеств метрического пространства $\mathbb{X}$ будем обозначать символом $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.

1.29. ТЕОРЕМА ОБ ИСЧЕРПЫВАНИИ БОРЕЛЕВСКИХ МНОЖЕСТВ. Пусть $\mathbb{X}$ — метрическое пространство и $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{X}) \rightarrow [0, +\infty)$ — конечная счетно-аддитивная мера. Тогда для любого множества $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{X})$ выполняется утверждения:

- (1) $\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \text{ замкнуто и } C \subset A\}$ и
- (2) $\mu(A) = \inf\{\mu(C) : C \text{ открыто и } C \supset A\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим класс множеств

$$\mathcal{F} = \{B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{X}), \text{ } B \text{ и } B^c \text{ удовлетворяют свойству (1)}\}.$$

Заметим, что если множества B и B^c удовлетворяют свойству (1), то они удовлетворяют и свойству (2). Действительно, пусть $\mu(B) = \sup\{\mu(C) : C \text{ замкнуто и } C \subset B\}$. Тогда $B^c \subset C^c$. Поскольку мера конечна и аддитивна, то

$$\begin{aligned} \mu(B^c) &= \mu(\mathbb{X}) - \mu(B) = \mu(\mathbb{X}) - \sup\{\mu(C) : C \text{ замкнуто и } C \subset B\} \\ &= \inf\{\mu(A) : A \text{ открыто и } A \supset B^c\}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Случай с дополнением B^c рассматривается аналогично.

Очевидно, что все замкнутые множества $A \subset \mathbb{X}$ удовлетворяют свойству (1). Открытые множества также удовлетворяют (1): действительно, пусть A открыто. Тогда $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, где множество

$$K_n = \{x \in A : \text{dist}(x, A^c) \geq 1/n\}$$

замкнуто для всех $n \in \mathbb{N}$, $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \dots$, и

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(K_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(K_n)$$

по теореме 1.21. Следовательно, $\mathcal{F}$ содержит все открытые и замкнутые множества. Если мы докажем, что $\mathcal{F}$ — σ -алгебра, то, по определению, $\mathcal{F}$ совпадет с классом борелевских множеств.

1) Докажем, что $\mathcal{F}$ — алгебра, т. е. если $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$, то $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{F}$, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$ и $B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{F}$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдем такие замкнутые множества $C_1 \subset B_1$ и $C_2 \subset B_2$, что $\mu(B_i \setminus C_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Тогда из свойства $(B_1 \cup B_2) \setminus (C_1 \cup C_2) \subset (B_1 \setminus C_1) \cup (B_2 \setminus C_2)$ следует

$$\mu((B_1 \cup B_2) \setminus (C_1 \cup C_2)) \leq \mu(B_1 \setminus C_1) + \mu(B_2 \setminus C_2) < 2\varepsilon.$$

Значит, объединение $B_1 \cup B_2$ удовлетворяет свойству (1).

Аналогично, из свойства $(B_1 \cap B_2) \setminus (C_1 \cap C_2) \subset (B_1 \setminus C_1) \cup (B_2 \setminus C_2)$ получаем

$$\mu((B_1 \cap B_2) \setminus (C_1 \cap C_2)) \leq \mu(B_1 \setminus C_1) + \mu(B_2 \setminus C_2) < 2\varepsilon.$$

Следовательно, пересечение $B_1 \cap B_2$ удовлетворяет свойству (1).

Далее заметим, что $(B_1 \cap B_2)^c = B_1^c \cup B_2^c$ и $(B_1 \cup B_2)^c = B_1^c \cap B_2^c$. Отсюда в силу доказанного множества $(B_1 \cap B_2)^c = B_1^c \cup B_2^c$ и $(B_1 \cup B_2)^c = B_1^c \cap B_2^c$ также удовлетворяют свойству (1).

Следовательно, $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{F}$ и $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$.

Поскольку $B_1 \setminus B_2 = B_1 \cap B_2^c$ и $(B_1 \setminus B_2)^c = B_1^c \cup B_2$, то, в силу вышедоказанного, $B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{F}$.

2) Докажем теперь, что $\mathcal{F}$ является σ -алгеброй. Пусть $\{B_i\} \subset \mathcal{F}$ — произвольная счетная система множеств, и $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Без ограничения общности можно считать, что $\{B_i\}$ — дизъюнктная система, так как в противном случае можно рассмотреть множества $A_j = B_j \setminus \bigcup_{i < j} B_i$, $A_1 = B_1$. Тогда A_j — дизъюнктная система,

причем $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

В силу счетной аддитивности меры $\mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$. Поскольку каждое из множеств $B_i \in \mathcal{F}$, то для любого $i \in \mathbb{N}$ существует такое замкнутое множество $C_i \subset B_i$, что $\mu(B_i \setminus C_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Полагая $D_N = \bigsqcup_{i=1}^N C_i$, где N выбрано так, что $\sum_{i > N} \mu(B_i) < \varepsilon$, получаем

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i \setminus D_N\right) = \sum_{i=1}^N \mu(B_i \setminus C_i) + \sum_{i > N} \mu(B_i) < 2\varepsilon.$$

Так как D_N — замкнутое множество для любого N , то B удовлетворяет (1).

Остается показать, что B^c удовлетворяет (1). Заметим, что $B^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c$. Определим для каждого B_i^c замкнутое множество $E_i \subset B_i^c$ та-

кое, что $\mu(B_i^c \setminus E_i) \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$. Положим $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$. Тогда E — замкнутое

множество и $\mu\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c\right) \setminus E\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i^c \setminus E_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i^c \setminus E_i) \leq \varepsilon$.

Поэтому $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c = B^c$ удовлетворяет (1).

Таким образом, теорема доказана.

1.30. СЛЕДСТВИЕ. Если меры $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{X}) \rightarrow [0, +\infty)$, $\mu_1 : \mathcal{B}(\mathbb{X}) \rightarrow$

$[0, +\infty)$ конечны и счетно-аддитивны и $\mu(C) = \mu_1(C)$ для любого открытого или замкнутого множества C , то они совпадают на всех борелевских множествах.

1.31. СЛЕДСТВИЕ. Заключение теоремы верно и в случае, если мера $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{X}) \rightarrow [0, +\infty]$ σ -конечна, т. е. $\mathbb{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где $\mu(E_n) < \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (при этом мера произвольного множества может быть бесконечной). (ДОКАЖИТЕ!)

2. МЕРЫ ХАУСДОРФА

В этом разделе мы установим некоторые свойства меры Хаусдорфа.

Напомним определение 1.9 меры Хаусдорфа. Пусть $(\mathbb{X}, d)$ — метрическое пространство. Если $A \subset \mathbb{X}$, то его диаметр $\text{diam } A$ равен $\sup_{x,y} \{d(x, y) : x, y \in A\}$.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для $k \geq 0$, $\delta \in (0, \infty]$ и $A \subset \mathbb{X}$ определим

$$\mathcal{H}_{\delta}^k(A) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } E_i)^k : \text{diam } E_i < \delta, A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \right\},$$

где $\omega_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$, а нижняя грань берется по всем счетным покрытиям множества A . Если множество A нельзя покрыть счетной совокупностью множеств указанного вида, то полагаем $\mathcal{H}_{\delta}^k(A) = \infty$. Величина

$$\mathcal{H}^k(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^k(A)$$

называется (внешней) мерой Хаусдорфа множества A .

Чтобы доказать, что $\mathcal{H}^k$ — борелевская мера, мы докажем аддитивность меры $\mathcal{H}^k$ на удаленных множествах. Возьмем два удаленных множества A и B и $\delta < \frac{\text{dist}(A,B)}{4}$. По доказанному имеем

$$\mathcal{H}^k(A \cup B) \leq \mathcal{H}^k(A) + \mathcal{H}^k(B).$$

Предположим, что

$$A \cup B \subset \bigcup_{l \in \mathbb{N}} C_l$$

и $\text{diam } C_l < \delta$. Пусть $\mathcal{A} = \{C_j : C_j \cap A \neq \emptyset\}$ и $\mathcal{B} = \{C_i : C_i \cap B \neq \emptyset\}$. Заметим, что $A \subset \bigcup_{j, C_j \in \mathcal{A}} C_j$, $B \subset \bigcup_{i, C_i \in \mathcal{B}} C_i$ и $C_j \cap C_i = \emptyset$, если $C_j \in \mathcal{A}$ и $C_i \in \mathcal{B}$. Поэтому

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} (\text{diam } C_l)^k \geq \sum_{j, C_j \in \mathcal{A}} (\text{diam } C_j)^k + \sum_{i, C_i \in \mathcal{B}} (\text{diam } C_i)^k.$$

Отсюда получаем, что $\mathcal{H}_\delta^k(A \cup B) \geq \mathcal{H}_\delta^k(A) + \mathcal{H}_\delta^k(B)$, откуда при $\delta \rightarrow 0$ вытекает, что $\mathcal{H}^k$ аддитивна на удаленных множествах. По критерию Каратеодори 1.27 получаем, что все борелевские множества $\mathcal{H}^k$ -измеримы.

2.2. ТЕОРЕМА. $\mathcal{H}^k$ — регулярная внешняя мера Бореля, т. е. для любого множества $A \subset \mathbb{X}$ существует $B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ такое, что $B \supset A$ и $\mathcal{H}^k(B) = \mathcal{H}^k(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\text{diam } C = \text{diam } \overline{C}$ для всех $C \subset \mathbb{X}$. Поэтому

$$\mathcal{H}_\delta^k(A) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } C_i)^k : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i, \text{diam } C_i < \delta, C_i = \overline{C_i} \right\}.$$

Если $\mathcal{H}^k(A) = \infty$, то полагаем $B = \mathbb{X}$. Рассмотрим теперь $A \subset \mathbb{X}$ такое, что $\mathcal{H}^k(A) < \infty$. Тогда $\mathcal{H}_\delta^k(A) < \infty$ для всех $\delta > 0$. Для каждого $l \geq 1$ выберем замкнутые множества $\{C_i^l\}$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\text{diam } C_i^l \leq l^{-1}, \quad A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i^l \quad \text{и} \quad \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } C_i^l)^k \leq \mathcal{H}_{l^{-1}}^k(A) + l^{-1}.$$

Положим $A_l = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i^l$ и $B = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} A_l$. Тогда B — борелевское множество. Кроме того, $A \subset A_l$ для каждого $l \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $A \subset B$. При этом

$$\mathcal{H}_{l^{-1}}^k(B) \leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } C_i^l)^k \leq \mathcal{H}_{l^{-1}}^k(A) + l^{-1}.$$

Устремляя $l \rightarrow \infty$, получаем $\mathcal{H}^k(B) \leq \mathcal{H}^k(A)$. Так как $A \subset B$, то, в силу монотонности, $\mathcal{H}^k(A) \leq \mathcal{H}^k(B)$ и, следовательно, $\mathcal{H}^k(B) = \mathcal{H}^k(A)$.

2.3. ЗАДАЧА. Доказать, что $\mathcal{H}_\delta^k$ — регулярная мера Бореля.

2.4. ЗАДАЧА. Доказать, что если $\mathcal{H}^k$ -измеримое множество $A \subset \mathbb{X}$ имеет конечную меру: $\mathcal{H}^k(A) < \infty$, то существуют борелевские множества D и B такие, что $D \subset A \subset B$ и $\mathcal{H}^k(B \setminus D) = 0$.

2.5. СВОЙСТВА МЕРЫ ХАУСДОРФА.

1) $\mathcal{H}^0$ — считающая мера, т. е. значение $\mathcal{H}^0(A)$ равно количеству элементов в множестве A , если оно конечно, и равно ∞ , если A — бесконечное множество.

2) $\mathcal{H}^1 = |\cdot|^*$ на $\mathbb{R}$, где $|\cdot|^*$ — внешняя одномерная мера Лебега.

3) $\mathcal{H}^k \equiv 0$ на $\mathbb{R}^n$ для всех $k > n$.

4) $\mathcal{H}^k(\lambda A) = \lambda^k \mathcal{H}^k(A)$ для любого $\lambda > 0$.

5) $\mathcal{H}^k(L(A)) = \mathcal{H}^k(A)$ для любого изометрического отображения $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Заметим, что $\omega_0 = 1$. Отсюда получаем, что $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1$ для любого $a \in \mathbb{X}$, т. е., $\mathcal{H}^0$ — считающая мера.

2) Выберем $A \subset \mathbb{R}$ и $\delta > 0$. Так как $\frac{\omega_1}{2} = 1$, то для любого покрытия множества A счетной совокупностью множеств $\{C_j\}$ такой, что $\text{diam } C_j < \delta$ имеем покрытие множества A счетной совокупностью одномерных промежутков $\{T_j = [\inf C_j, \sup C_j]\}$, причем $\text{diam } C_j = |T_j| = \sup C_j - \inf C_j$. Отсюда

$$\begin{aligned} |A|^* &\leq \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} |T_i| : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam } C_i : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \right\} = \mathcal{H}_\delta^1(A). \end{aligned}$$

(Здесь нельзя поставить равенство, так как формально в определении внешней меры $|A|^*$ участвуют покрытия множества A одномерными промежутками произвольной длины.)

С другой стороны, пусть $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} T_j$ — произвольное покрытие множества A одномерными промежутками. Положим $I_l = [l\delta/4, (l+1)\delta/4)$, $l \in \mathbb{Z}$. Тогда непустое пересечение $T_j \cap I_l$ — промежуток, $\text{diam}(T_j \cap I_l) = |T_j \cap I_l| \leq \delta/2 < \delta$, $T_j = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} (T_j \cap I_l)$ и в силу счетной аддитивности меры

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \text{diam}(T_j \cap I_l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |T_j \cap I_l| = |T_j| = \text{diam } T_j.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |A|^* &= \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} |T_i| : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i \right\} = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam } T_i : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \text{diam}(T_j \cap I_l) : A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} T_j \right\} \geq \mathcal{H}_\delta^1(A). \end{aligned}$$

(Заметим, что, как и в предыдущем случае, равенство поставить нельзя.) Таким образом, $|A|^* = \mathcal{H}_\delta^1(A)$ для всех $\delta > 0$ и, следовательно, $|A|^* = \mathcal{H}^1(A)$ на $\mathbb{R}$.

3) Фиксируем натуральное число $m \geq 1$. Единичный куб Q в $\mathbb{R}^n$ раскладывается на m^n кубов со сторонами $\frac{1}{m}$ и диаметрами $\frac{\sqrt{n}}{m}$. Поэтому

$$\mathcal{H}_{\frac{\sqrt{n}}{m}}^k(Q) \leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i=1}^{m^n} \left(\frac{\sqrt{n}}{m} \right)^k = \frac{\omega_k}{2^k} n^{\frac{k}{2}} m^{n-k}.$$

Так как $\frac{\omega_k}{2^k} n^{\frac{k}{2}} m^{n-k} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, если $k > n$, то $\mathcal{H}^k(Q) = 0$. Следовательно, в силу счетной полуаддитивности, $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n) = 0$.

Свойства 4 и 5 очевидны: в первом из них диаметры множеств из покрытия изменяются λ раз, во втором — не меняются.

2.6. ЛЕММА. Пусть $A \subset \mathbb{X}$ и $\mathcal{H}_\delta^k(A) = 0$ для некоторого $0 < \delta \leq \infty$. Тогда $\mathcal{H}^k(A) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы очевидно при $k = 0$. Поэтому будем считать, что $k > 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существуют множества $\{C_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_j$ и

$$\frac{\omega_k}{2^k} \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{diam } C_j)^k \leq \varepsilon.$$

В частности, для каждого $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\text{diam } C_j \leq 2 \left(\frac{\varepsilon}{\omega_k} \right)^{\frac{1}{k}} = \eta(\varepsilon).$$

Поэтому $\mathcal{H}_{\eta(\varepsilon)}^k(A) \leq \varepsilon$. Так как $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $\mathcal{H}^k(A) = 0$.

2.7. ЛЕММА. Пусть $A \subset \mathbb{X}$ и $0 \leq k < t < \infty$.

1) Если $\mathcal{H}^k(A) < \infty$, то $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

2) Если $\mathcal{H}^t(A) > 0$, то $\mathcal{H}^k(A) = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\mathcal{H}^k(A) < \infty$. Фиксируем $\delta > 0$. Тогда существуют множества $\{C_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\text{diam } C_j < \delta$, $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_j$

и

$$\frac{\omega_k}{2^k} \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{diam } C_j)^k \leq \mathcal{H}_\delta^k(A) + 1 \leq \mathcal{H}^k(A) + 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^t(A) &\leq \frac{\omega_t}{2^t} \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{diam } C_j)^t \\ &= \frac{\omega_t}{\omega_k} 2^{k-t} \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\omega_k}{2^k} (\text{diam } C_j)^k (\text{diam } C_j)^{t-k} \leq \frac{\omega_t}{\omega_k} 2^{k-t} \delta^{t-k} (\mathcal{H}^k(A) + 1). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Устремляя $\delta \rightarrow 0$, получим $\mathcal{H}^t(A) = 0$. Утверждение 1 доказано. Утверждение 2 вытекает из соотношения (2.1).

2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Хаусдорфова размерность множества $A \subset \mathbb{X}$ определяется соотношением

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{s : 0 \leq s < \infty, \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

2.9. ЗАМЕЧАНИЕ. По определению размерности Хаусдорфа и по лемме 2.7 видно, что $s = \dim_{\mathcal{H}}(A)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}^t(A) = 0$ для всех $t > s$ и $\mathcal{H}^t(A) = \infty$ для всех $t < s$.

2.10. ТЕОРЕМА (ИЗОДИАМЕТРИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО). Пусть A — произвольное измеримое множество в $\mathbb{R}^k$. Тогда

$$|A|^* \leq \omega_k \left(\frac{\text{diam } A}{2} \right)^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно полагать, что A замкнуто (надо проверить, что $\text{diam } A = \text{diam } \bar{A}$, а $|A|^* \leq |\bar{A}|^* = |\bar{A}|$) и $\text{diam } A < \infty$. Фиксируем единичный вектор $e \in \mathbb{R}^k$. Тогда

$$\mathbb{R}^k = \mathbb{R}_e^{k-1} \oplus \{e\},$$

где $\mathbb{R}_e^{k-1}$ — ортогональное дополнение к $e \in \mathbb{R}^k$.

Обозначим символом $\Omega = P_e(A)$ проекцию множества A на $\mathbb{R}_e^{k-1}$. Далее, пусть

$$2h(x) = |A \cap L_x|_1, \quad x \in \Omega,$$

где L_x — прямая, проходящая через x в направлении e , а $|\cdot|_1$ — одномерная мера Лебега. По теореме Фубини получаем, что $h(x)$ интегрируема, а, значит, измерима, и

$$2 \int_{\Omega} h(x) dx = |A|.$$

(Здесь используется измеримость множества A . Поэтому по теореме Фубини имеем $|A| = \int_A \chi_A dz = \int_{\Omega} dx \int_{A \cap L_x} dy = 2 \int_{\Omega} h(x) dx$.)

Рассмотрим измеримое множество

$$S_e(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_e^{k-1} \times \mathbb{R} : x \in \Omega, |y| \leq h(x)\}.$$

Очевидно $|A| = |S_e(A)|$: действительно,

$$|A| = \int_{\Omega} dx \int_{A \cap L_x} dy = 2 \int_{\Omega} h(x) dx = |S_e(A)|.$$

Заметим, что $S_e(A)$ симметрично относительно гиперплоскости $\mathbb{R}_e^{k-1}$. Докажем, что $\text{diam } S_e(A) \leq \text{diam } A$, или

$$\begin{aligned} \text{diam } S_e(A) &= \sup_{x, x' \in \Omega} \sqrt{|x - x'|^2 + (h(x) + h(x'))^2} \\ &\leq \sup_{x, x' \in \Omega} \text{diam}((L_x \cap A) \cup (L_{x'} \cap A)) = \text{diam } A. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} b &= \sup(L_x \cap A), \quad a = \inf(L_x \cap A), \\ b' &= \sup(L_{x'} \cap A), \quad a' = \inf(L_{x'} \cap A). \end{aligned}$$

Без ограничения общности можно считать, что $b - a' \geq b' - a$. Поскольку по определению функции h

$$b' - a' \geq 2h(x') \quad \text{и} \quad b - a \geq 2h(x),$$

имеем $b - a' \geq h(x) + h(x')$ и поэтому

$$\begin{aligned} \text{diam}((L_x \cap A) \cup (L_{x'} \cap A)) &= \sqrt{|x - x'|^2 + |b - a'|^2} \\ &\geq \sqrt{|x - x'|^2 + (h(x) + h(x'))^2}. \end{aligned}$$

Возьмем ортонормированный базис $\{e_1, \dots, e_k\}$ в $\mathbb{R}^k$ и для множества $A \subset \mathbb{R}^k$ рассмотрим его симметризацию

$$S(A) = S_{e_1} \circ \dots \circ S_{e_k}(A).$$

Тогда

$$\text{diam } S(A) \leq \text{diam } A \quad \text{и} \quad |S(A)| = |A|.$$

Как было отмечено выше, $S_{e_k}(A)$ симметрично относительно гиперплоскости $\mathbb{R}_{e_k}^{k-1}$. Далее, множество $S_{e_{k-1}} \circ S_{e_k}(A)$ симметрично относительно гиперплоскости $\mathbb{R}_{e_{k-1}}^{k-1}$ и в нем сохраняется симметрия относительно гиперплоскости $\mathbb{R}_{e_k}^{k-1}$. Действительно, свойство симметрии множества $S_{e_k}(A)$ относительно гиперплоскости $\mathbb{R}_{e_k}^{k-1}$ эквивалентно тому, что если точка

$$(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) \in S_{e_k}(A), \quad \text{то} \quad (x_1, \dots, x_{k-1}, -x_k) \in S_{e_k}(A).$$

Отсюда для функции h , участвующей в построении множества $S_{e_{k-1}} \circ S_{e_k}(A)$ при $e = e_{k-1}$ имеем следующее свойство:

$$h(x_1, \dots, x_{k-2}, x_k) = h(x_1, \dots, x_{k-2}, -x_k).$$

Следовательно, если точка $(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k) \in S_{e_{k-1}} \circ S_{e_k}(A)$, то одновременно

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, -x_k) &\in S_{e_{k-1}} \circ S_{e_k}(A) \quad \text{и} \\ (x_1, \dots, x_{k-2}, -x_{k-1}, x_k) &\in S_{e_{k-1}} \circ S_{e_k}(A). \end{aligned}$$

Отсюда выводим

$$(x_1, \dots, x_{k-2}, -x_{k-1}, -x_k) \in S_{e_{k-1}} \circ S_{e_k}(A).$$

Рассуждая по индукции, окончательно получаем, что построенное множество $S(A)$ симметрично относительно гиперплоскостей

$$\mathbb{R}_{e_1}^{k-1}, \dots, \mathbb{R}_{e_k}^{k-1}.$$

Тогда $S(A)$ симметрично относительно начала координат, и каждому $x \in S(A)$ соответствует $-x \in S(A)$:

$$x \in S(A) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad -x \in S(A).$$

Отсюда для любого $x \in S(A)$ имеем

$$2|x| \leq \text{diam } S(A) \quad \text{и} \quad x \in B\left(0, \frac{\text{diam } S(A)}{2}\right).$$

Тогда и

$$S(A) \subset B\left(0, \frac{\text{diam } S(A)}{2}\right).$$

Из этого следует, что

$$|A| = |S(A)| \leq \omega_k \left(\frac{\text{diam } S(A)}{2} \right)^k \leq \omega_k \left(\frac{\text{diam } A}{2} \right)^k,$$

что и требовалось доказать.

2.11. ТЕОРЕМА О СОВПАДЕНИИ МЕР ЛЕБЕГА И ХАУСДОРФА. Для любого $B \subset \mathbb{R}^k$

$$|B|^* = \mathcal{H}^k(B).$$

(Здесь $|\cdot|^*$ — внешняя k -мерная мера Лебега.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как обе внешние меры — регулярные меры Бореля (см. теорему 2.2), то достаточно доказать совпадение мер для борелевского множества B . Будем считать, что B ограничено. Фиксируем $\delta > 0$ и пусть $B \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$, где $\text{diam } B_i < \delta$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда из изодиаметрического неравенства имеем

$$|B|^* \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |B_i|^* \leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } B_i)^k.$$

Отсюда, переходя к нижней грани по всем покрытиям, получаем

$$|B|^* \leq \mathcal{H}_\delta^k(B), \quad \delta > 0,$$

и, следовательно,

$$|B|^* \leq \mathcal{H}^k(B).$$

Докажем теперь неравенство в обратную сторону. Выберем открытое множество $A \supset B$ и $\delta > 0$. Определим систему

$$\mathcal{F} = \{\overline{B(x, r)} : x \in B, B(x, r) \subset A, 2r < \delta\}$$

замкнутых шаров, образующих покрытие Витали множества B . По теореме Витали можно выбрать не более чем счетную дизъюнктную подсистему $\{B(x_i, r_i)\} = \{B_i\}$ такую, что $|E|^* = 0$, где

$$E = B \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{B(x_i, r_i)}.$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\delta^k(B) &\leq \mathcal{H}_\delta^k\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{B_i}\right) + \mathcal{H}_\delta^k(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^k(\overline{B_i}) + \mathcal{H}_\delta^k(E) \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\omega_k}{2^k} (2r_i)^k + \mathcal{H}_\delta^k(E) = \sum_{i \in \mathbb{N}} |B_i| + \mathcal{H}_\delta^k(E) \leq |A| + \mathcal{H}_\delta^k(E).\end{aligned}$$

Отсюда $\mathcal{H}^k(B) \leq |A|$ и, следовательно, $\mathcal{H}^k(B) \leq |B|^*$, поскольку $\mathcal{H}_\delta^k(E) = 0$ (ПРОВЕРИТЬ!) и $|B|^* = \inf\{|A| : A \text{ открыто и } B \subset A\}$ в силу регулярности меры Лебега.

Таким образом, $|B|^* = \mathcal{H}^k(B)$.

2.12. ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 2.11 вытекает, что если в пространстве $\mathbb{R}^k$ фиксирована евклидова метрика $|\cdot|_2$, то $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^k) = k$. Отметим, что $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq k$ для любого $A \subset \mathbb{R}^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^k) = \infty$ в силу теоремы 2.11, а в силу свойств 2.5 меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^k) = 0$ для любого $s > k$.

2.13. ЗАДАЧА. Какова хаусдорфова размерность $\mathbb{R}^k$ с метрикой $d(x, y) = |\cdot|_2^\alpha$, где $\alpha \in (0, 1)$ — произвольное действительное число.

3. ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ

Множество $\mathbb{Z}^k$ точек в $\mathbb{R}^k$, имеющих целочисленные координаты, определяет разбиение $\mathcal{D}_0$ пространства $\mathbb{R}^k$ на кубы со стороной, равной единице. В предварительных рассуждениях мы будем считать, что эти кубы «замкнуты слева»: каждый куб $Q \in \mathcal{D}_0$ имеет вид

$$[s_1, s_1 + 1) \times [s_2, s_2 + 1) \times \dots \times [s_k, s_k + 1),$$

где $(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{Z}^k$. Кроме того, внутренность такого куба совпадает с некоторым шаром в метрике $|\cdot|_\infty$ радиуса $1/2$, центр которого расположен в точке $(s_1 + 1/2, s_2 + 1/2, \dots, s_k + 1/2)$. Очевидно, что $\mathcal{D}_0$ — дизъюнктивная система кубов и $\mathbb{R}^k = \bigcup_{Q \in \mathcal{D}_0} Q$.

Разбиение $\mathcal{D}_0$ определяет набор двоичных кубов

$$\mathcal{D}_n = 2^{-n} \mathcal{D}_0 = \{2^{-n} Q : Q \in \mathcal{D}_0\}$$

для любого $n \in \mathbb{Z}$. (Здесь $\lambda Q = \{\lambda x : x \in Q\}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ — произвольное положительное число.) Очевидно, что каждый куб $Q \in \mathcal{D}_n$ имеет вид

$$\left[\frac{s_1}{2^n}, \frac{s_1+1}{2^n} \right) \times \left[\frac{s_2}{2^n}, \frac{s_2+1}{2^n} \right) \times \dots \times \left[\frac{s_k}{2^n}, \frac{s_k+1}{2^n} \right),$$

где $(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{Z}^k$. Внутренность этого куба совпадает с некоторым шаром в метрике $|\cdot|_\infty$ радиуса $1/2^{n+1}$, центр которого расположен в точке $\left(\frac{2s_1+1}{2^{n+1}}, \frac{2s_2+1}{2^{n+1}}, \dots, \frac{2s_k+1}{2^{n+1}} \right)$. Очевидно, что $\mathcal{D}_n$ — дизъюнктивная система кубов и $\mathbb{R}^k = \bigcup_{Q \in \mathcal{D}_n} Q$.

3.1. СВОЙСТВО. Пусть $(\mathbb{R}^k, |\cdot|_\infty)$ — метрическое пространство, а $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество. Пусть $n_0 \in \mathbb{Z}$ — произвольное целое число такое, что $\{Q \in \mathcal{D}_{n_0} \mid \overline{Q} \subset \Omega\} \neq \emptyset$. Тогда для любого $n \geq n_0$ существует непустой набор $\mathcal{M}_n$ двоичных кубов, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $\mathcal{M}_n = \{Q \in \mathcal{D}_n : \overline{Q} \subset \Omega\}$;
- 2) множество $M_n = \bigcup_{Q \in \mathcal{M}_n} Q \subset \Omega$ борелевское;
- 3) $M_n \subset M_{n+1}$;
- 4) $\bigcup_{n \geq n_0} M_n = \Omega$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} |M_n| = |\Omega|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку Ω — открытое множество, то всегда возможен выбор такого n_0 , что, по крайней мере, один куб из $\mathcal{D}_{n_0}$ содержится в Ω . Требуемый набор $\mathcal{M}_n$ двоичных кубов при $n \geq n_0$ определяется условием 1. Так как каждый куб — борелевское множество, то и множество M_n также борелевское. Очевидно, каждый куб $Q \in \mathcal{M}_n$ разбивается на 2^k равных кубов, входящих в разбиение $\mathcal{D}_{n+1}$, а следовательно, и в $\mathcal{M}_{n+1}$. Отсюда получаем третье свойство. Для доказательства четвертого свойства возьмем точку $x \in \Omega$. Заметим, что если $n \geq n_0$ — такое число, что $\frac{1}{2^n} < \text{dist}(x, \partial\Omega)$, то двоичный куб из набора $\mathcal{D}_n$, которому принадлежит точка x , содержится в Ω вместе со своим замыканием и, следовательно, принадлежит набору $\mathcal{M}_n$. Последнее свойство вытекает из леммы 1.21.

3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (M_1, d_1) , (M_2, d_2) — метрические пространства. Отображение $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ называется *липшицевым*, если существует постоянная $L \in \mathbb{R}$, называемая *постоянной*

Липшица, такая, что

$$d_2(f(x), f(y)) \leq Ld_1(x, y)$$

для любых $x, y \in M_1$. Точная нижняя грань таких постоянных Липшица обозначается символом $\text{Lip}(f)$.

Отображение $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ называется *билипшицевым*, если существуют постоянные $0 < \underline{L}, \bar{L} < \infty$ такие, что

$$\underline{L}d_1(x, y) \leq d_2(f(x), f(y)) \leq \bar{L}d_1(x, y)$$

для любых $x, y \in M_1$.

Напомним, что обозначение $W \Subset U$, $U \subset \mathbb{R}^k$, мы применяем в том случае, когда множество U открыто, множество W ограничено и $\bar{W} \subset U$ (в этом случае говорят, что множество W *компактно вложено* в U). Множество W называется выпуклым, если вместе с двумя точками $x, y \in W$ множеству W принадлежит также и отрезок, соединяющий эти точки.

3.3. ПРИМЕР. Широкий класс липшицевых отображений можно описать следующим условием. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ принадлежит классу C^1 . Тогда для любого выпуклого множества $W \Subset U$ существует постоянная $M \in \mathbb{R}$, зависящая лишь от размерностей k и m , и такая, что

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

для всех точек $x, y \in W$. В качестве M можно взять $\sup_{\xi \in W} \|df(\xi)\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем сначала, что если коэффициенты $(m \times k)$ -матрицы $A(x)$, $x \in U$, — непрерывные функции в точке x_0 , то ее норма непрерывна в этой точке. Действительно, если $v = \sum_{i=1}^k v_i e_i$, где $\{e_i\}$ — ортонормированный базис, и евклидова норма $|v|$ не превосходит 1, то

$$|A(x)v| \leq \sum_{i=1}^k |v_i| |A(x)e_i| \leq |v| \sqrt{\sum_{i=1}^k |A(x)e_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m a_{ij}^2(x)}.$$

Следовательно, в силу произвольности v , $|v| \leq 1$, имеем

$$\|A(x)\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m a_{ij}^2(x)}.$$

Из последнего неравенства вытекает непрерывность нормы в точке x_0 , поскольку

$$\|A(x) - A(x_0)\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m |a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)|^2}.$$

Пусть $L = L(x, y)$, $x, y \in W$ — отрезок в W , соединяющий x и y , а $M = \sup_{\xi \in L} \|df(\xi)\|$. Пусть еще $\xi(t)$ — его натуральная параметризация: $\xi : [0, l] \rightarrow W$, $\xi(0) = x$, $\xi(l) = y$, $|\xi'(t)| = 1$ для всех $t \in (0, l)$. Тогда получаем следующее неравенство:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_0^{|x-y|} df(\xi(t)) dt \right| \leq \int_0^{|x-y|} \|df(\xi(t))\| dt \leq M \int_0^{|x-y|} dt.$$

3.4. ТЕОРЕМА. Пусть (M_1, d_1) , (M_2, d_2) — метрические пространства и $s \in [0, \infty)$.

1) Если $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ — липшицево отображение с постоянной Липшица L , то

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}^s(A)$$

для любого множества $A \subset M_1$.

2) Если $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ — билипшицево отображение с постоянными $\underline{L}$ и $\bar{L}$, то

$$\underline{L}^s \mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(f(A)) \leq \bar{L}^s \mathcal{H}^s(A)$$

для любого множества $A \subset M_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Фиксируем $\delta > 0$ и выбираем покрытие $\{E_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, множества A таким образом, что $\text{diam } E_i < \delta$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(E_i) \supset f(A)$. Из условия теоремы имеем, что $\text{diam } f(E_i) \leq$

$L \operatorname{diam} E_i$ (ПРОВЕРИТЬ), поэтому $\operatorname{diam} f(E_i) \leq L\delta$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Отсюда

$$\mathcal{H}_{L\delta}^s(f(A)) \leq \frac{\omega_s}{2^s} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\operatorname{diam} f(E_i))^s \leq \frac{\omega_s}{2^s} L^s \sum_{i \in \mathbb{N}} (\operatorname{diam} E_i)^s.$$

Переходя к нижней грани по всем покрытиям $\{E_i\}$ множества A , получаем

$$\mathcal{H}_{L\delta}^s(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

При $\delta \rightarrow 0$ имеем $\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}^s(A)$.

2) Доказывается аналогично случаю 1.

3.5. СЛЕДСТВИЕ. 1) Если $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ — липшицево отображение. Тогда из $\mathcal{H}^s(A) = 0$ следует $\mathcal{H}^s(f(A)) = 0$ для всех $A \subset M_1$.

2) Если $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ — билипшицево, то $\mathcal{H}^s(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}^s(f(A)) = 0$ для всех $A \subset M_1$.

Напомним разницу в обозначениях: символ $|A|^*$ обозначает внешнюю меру Лебега множества A , в то время как символ $|A|$ обозначает меру Лебега измеримого множества A . Ясно, что $|A|^* = |A|$, если множество A измеримо, однако, это равенство не имеет никакого смысла, если множество A неизмеримо. Это соглашение контрастирует с применением символа $\mathcal{H}^n$ для меры Хаусдорфа, так как он один и тот же как для измеримого, так и для неизмеримого множеств.

3.6. ЛЕММА. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, а отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ принадлежит классу C^1 , $k \leq m$. Тогда для любого компактного множества $K \subset U$ существует постоянная $L = L(K) \in \mathbb{R}$ такая, что

$$\mathcal{H}^k(f(A)) \leq L^k |A|^* \quad \text{для любого множества } A \subset K.$$

(Заметим, что в качестве постоянной L можно взять $\sup_{\xi \in K} \|df(\xi)\|$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу регулярности меры Хаусдорфа и меры Лебега достаточно доказать неравенство утверждения для борелевского множества $A \subset K$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ — такое число, что множество M_n из свойства 3.1, построенное по множеству U , содержит данное множество K и $M_n \subset U$,

т. е. $K \subset M_n \subset U$. Напомним, что M_n составлено из набора $\mathcal{M}_n$ кубов $Q \in \mathcal{D}_n$ таких, что $\overline{Q} \subset U$. На каждом таком кубе отображение f липшицево (см. пример 3.3). В качестве постоянной Липшица отображения f на любом их кубов $Q \in \mathcal{M}_n$ можно взять одно число $L_n = \sup_{\xi \in M_n} \|df(\xi)\| = \max_{\xi \in K} \|df(\xi)\| + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. По теореме 3.4 и теореме о совпадении мер Лебега и Хаусдорфа имеем

$$\mathcal{H}^k(f(A \cap Q)) \leq L_n^k |A \cap Q|$$

для любого куба $Q \in \mathcal{M}_n$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k(f(A)) &= \mathcal{H}^k(f(A \cap M_n)) = \sum_{Q \in \mathcal{M}_n} \mathcal{H}^k(f(A \cap Q)) \\ &\leq L_n^k \sum_{Q \in \mathcal{M}_n} \mathcal{H}^k(A \cap Q) = L_n^k \sum_{Q \in \mathcal{M}_n} |A \cap Q| = L_n^k |A|. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L$, то $\mathcal{H}^k(f(A)) \leq L^k |A|$.

3.7. СЛЕДСТВИЕ. Если $|W| = 0$, то и $\mathcal{H}^k(f(W)) = 0$.

Сформулируем алгебраическую лемму, используемую ниже.

3.8. ЛЕММА. Пусть $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, — линейное отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) отображение $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ инъективное;
- 2) $\text{rank } L = k$;
- 3) $\inf_{|v|=1} \|L(v)\| > 0$;
- 4) $\det(L^*L) > 0$.

3.9. ЛЕММА. Если $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, — линейное отображение, то

$$\mathcal{H}^k(L(A)) = \sqrt{\det(L^*L)} |A|$$

для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^k$ (здесь $|\cdot|$ — k -мерная мера Лебега).

Опишем геометрический смысл сформулированной теоремы. Величина $\det(L^*L)$ называется *определителем Грама* матрицы L . Если $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{R}^k$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^k$, а $a_1 = L(e_1), \dots, a_k = L(e_k) \in \mathbb{R}^m$ — их образы, то определитель Грама матрицы L равен квадрату объема k -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $a_1, \dots, a_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\text{rank } L < k$. Тогда, с одной стороны, $\det(L^*L) = 0$, а, с другой стороны, так как образ $L(\mathbb{R}^k)$ содержится в линейном подпространстве, размерность которого меньше k , то по свойству 2 меры Хаусдорфа (см. 2.5) имеем $\mathcal{H}^k(L(\mathbb{R}^k)) = 0$.

2) Пусть теперь $\text{rank } L = k$. Тогда $\dim L(\mathbb{R}^k) = k$. Рассмотрим такое ортогональное преобразование $O \in SO(m)$, что $(O \circ L)(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k \oplus \{0\}^{m-k}$. Поскольку ортогональное преобразование является изометрическим отображением, то из свойства 5 меры Хаусдорфа теоремы 2.5 вытекает ее инвариантность относительно ортогонального преобразования. Поэтому

$$\mathcal{H}^k((O \circ L)(A)) = \mathcal{H}^k(L(A)). \quad (3.1)$$

Обозначим $L' = O \circ L$. Легко видеть, что в силу выбора O матрица L' имеет вид

$$L' = \begin{pmatrix} Q & & \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где Q — квадратная $(k \times k)$ -матрица. Тогда L'^* имеет вид

$$L'^* = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ Q^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$|L'(A)| = |\det Q| \cdot |A|.$$

Так как $\det Q^* = \det Q$, то

$$|\det Q| = \sqrt{\det(Q^*Q)}.$$

Из равенств $Q^* \circ Q = L'^* \circ L' = L^* \circ O^* \circ O \circ L = L^* \circ L$, (3.1) и теоремы 2.11 получаем

$$\mathcal{H}^k(L(A)) = \mathcal{H}^k((O \circ L)(A)) = \mathcal{H}^k(Q(A)) = |Q(A)| = \sqrt{\det(L^*L)}|A|,$$

что и требовалось доказать.

3.10. ЛЕММА О КАСАТЕЛЬНОМ ОТОБРАЖЕНИИ. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, — инъективное отображение класса C^1 и $\text{rank } df(x) = k$ для всех точек $x \in U$. Пусть еще

$g(y) = f(x) + df(x)(y - x)$ — касательное отображение f в точке $x \in U$. Тогда

$$(1 - o(1))|g(y) - g(z)| \leq |f(y) - f(z)| \leq (1 + o(1))|g(y) - g(z)| \quad (3.2)$$

для точек $y, z \in Q(x, r)$, где $o(1)$ — неотрицательная величина и $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$.

Если $F \subset U$ — фиксированный компакт, то величина $o(1)$ равномерна на F при $r \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению $\text{rank } df(x) = k$ для всех точек $x \in U$. Фиксируем $x \in U$ и компакт $F \subset U$, содержащий точку x . Тогда $f(y) - f(z) = df(z)(y - z) + o(1)(y - z)$, где величина $o(1)$ равномерна на F при $r \rightarrow 0$. Очевидно имеем

$$\begin{aligned} f(y) - f(z) &= (df(z) - df(x))(y - z) + df(x)(y - z) + o(1)(y - z) \\ &= (df(z) - df(x))(y - z) + (g(y) - g(z)) + o(1)(y - z), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $g(y) = f(x) + df(x)(y - x)$ — касательное отображение f в точке $x \in U$, а величина $o(1)$ равномерна на F при $r \rightarrow 0$. Заметим, что $\|df(z) - df(x)\| = o(1)$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ равномерно на F .

Далее имеем $g(y) - g(z) = df(x)(y - z)$. Поскольку линейное отображение $df(x)$ взаимно однозначно, то в силу леммы 3.8 получаем

$$|y - z| \leq \|(df(x))^{-1}\| \cdot \|g(y) - g(z)\|,$$

где $(df(x))^{-1}$ — определенное на $df(x)(\mathbb{R}^k)$ отображение, обратное к $df(x)$.

Заметим, что для любого компактного множества $F \subset U$ имеем

$$\inf_{x \in F} \inf_{|v|=1} \|df(x)(v)\| \geq M = M(F) > 0.$$

Действительно, если $\inf_{x \in F} \inf_{|v|=1} \|df(x)(v)\| = 0$, то в силу непрерывности частных производных существует точка $x_0 \in F$ такая, что

$$\inf_{|v|=1} \|df(x_0)(v)\| = 0.$$

Тогда по лемме 3.8 $\text{rank } df(x_0) < k$, что противоречит условию.

Заметим теперь, что если функция

$$F \ni x \mapsto \inf_{|v|=1} \|df(x)(v)\|$$

ограничена снизу от нуля на F , то норма линейного отображения $(df(x))^{-1}$ не может быть сколь угодно большой для точек $x \in F$. Действительно, полагая $A = df(x)$, имеем

$$\|A^{-1}\| = \sup_{w \in A(\mathbb{R}^k) \setminus \{0\}} \frac{\|A^{-1}(w)\|}{\|w\|} = \sup_{v \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}} \frac{\|v\|}{\|A(v)\|} = \frac{1}{\inf_{\|v\|=1} \|A(v)\|} \leq \frac{1}{M}.$$

Поэтому $\sup_{x \in F} \|(df(x))^{-1}\| < M^{-1}$ на компактном множестве $F \subset U$.

Следовательно, с учетом вышесказанного и (3.3), получаем соотношение

$$f(y) - f(z) = g(y) - g(z) + o(1)(y - z).$$

Отсюда выводим правую часть неравенств (3.2)

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(z)\| &\leq \|g(y) - g(z)\| + o(1)\|y - z\| \\ &= \|g(y) - g(z)\| + o(1)\|g(y) - g(z)\| = (1 + o(1))\|g(y) - g(z)\|, \end{aligned}$$

и соотношение

$$\begin{aligned} \|g(y) - g(z)\| &\leq \|f(y) - f(z)\| + o(1)\|y - z\| \\ &\leq \|f(y) - f(z)\| + o(1)\|g(y) - g(z)\|, \end{aligned}$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ равномерно на F . Из последнего получаем левую часть неравенств (3.2):

$$(1 - o(1))\|g(y) - g(z)\| \leq \|f(y) - f(z)\|.$$

Лемма доказана.

3.11. ЛЕММА О ЛОКАЛЬНОМ ИСКАЖЕНИИ МЕРЫ. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, — инъективное отображение класса C^1 и $\text{rank } df(x) = k$ для всех точек $x \in U$. Тогда для любого $x \in U$ существует предел

$$\mathcal{J}(x, f) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\det(df^*(x)df(x))} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^k(f(Q(x, r)))}{|Q(x, r)|}. \quad (3.4)$$

Если $F \subset U$ — фиксированный компакт, то этот предел равномерен на F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению $\text{rank } df(x) = k$ для всех точек $x \in U$. Фиксируем $x \in U$. Положим $g(y) = f(x) + df(x)(y - x)$. Рассмотрим два метрических пространства:

$$\begin{aligned}(M_1, d_1) &= (Q(x, r), d_1(t, s) = |g(t) - g(s)| \text{ для } t, s \in Q(x, r)), \\ (M_2, d_2) &= (f(Q(x, r)), |\cdot|).\end{aligned}$$

В силу (3.2) отображение $f : Q(x, r) \rightarrow f(Q(x, r))$ является билипшицевым отображением метрических пространств (M_1, d_1) и (M_2, d_2) :

$$(1 - o(1))|g(y) - g(z)| \leq |f(y) - f(z)| \leq (1 + o(1))|g(y) - g(z)| \quad (3.5)$$

для точек $y, z \in Q(x, r)$, где $o(1) \rightarrow 0$ равномерно на фиксированном компакте $F \subset U$ при $r \rightarrow 0$.

Используя изометричность отображения

$$g : (M_1, d_1) \rightarrow (g(Q(x, r)), |\cdot|),$$

по теореме 3.4 получаем

$$\begin{aligned}(1 - o(1))^k \mathcal{H}^k(g(Q(x, r))) &\leq \mathcal{H}^k(f(Q(x, r))) \\ &\leq (1 + o(1))^k \mathcal{H}^k(g(Q(x, r))).\end{aligned}$$

Напомним, что $\mathcal{H}^k(g(Q(x, r))) = \mathcal{H}^k(df(x)(Q(x, r)))$, так как мера Хаусдорфа инвариантна при сдвиге (здесь применяется свойство 5 леммы 2.5, так как сдвиг — изометрическое преобразование).

Далее из леммы 3.9 вытекает

$$\begin{aligned}(1 - o(1))^k \sqrt{\det(df^*(x)df(x))} |Q(x, r)| &\leq \mathcal{H}^k(f(Q(x, r))) \\ &\leq (1 + o(1))^k \sqrt{\det(df^*(x)df(x))} |Q(x, r)|.\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}(1 - o(1))^k \sqrt{\det(df^*(x)df(x))} \\ \leq \frac{\mathcal{H}^k(f(Q(x, r)))}{|Q(x, r)|} \leq (1 + o(1))^k \sqrt{\det(df^*(x)df(x))}.\end{aligned}$$

Таким образом, доказано существование предела

$$\mathcal{J}(x, f) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^k(f(Q(x, r)))}{|Q(x, r)|} = \sqrt{\det(df^*(x)df(x))}.$$

Заметим, что этот предел равномерен на любом фиксированном компакте $F \subset U$.

3.12. ЛЕММА ОБ ОБРАЗЕ МНОЖЕСТВА ВЫРОЖДЕНИЯ. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, — отображение класса C^1 и $Z = \{x \in U : \text{rank } df(x) \leq n < k\}$. Тогда

$$\mathcal{H}^k(f(Z)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество $Z = \{x \in U : \text{rank } df(x) \leq k-1\}$ непусто. Исчерпаем U счетной совокупностью компактных подмножеств $F_0 \subset F_1 \subset \dots$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и $l \in \mathbb{N}$. Тогда в силу равномерной непрерывности $df : U \times \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^{k \times m}$ (мы здесь отождествляем дифференциал с его матрицей порядка $k \times m$) на F_l существует $r_0(F_l) < \text{dist}(F_l, \partial U)/2$ такое, что

$$|f(y) - [f(x) + df(x)(y - x)]| < \varepsilon r$$

для любых точек $x \in F_l$ и $y \in Q(x, r)$, где $r \in (0, r_0(F_l))$. Заметим, что куб $Q(x, r)$ лежит в $r_0(F_l)$ -окрестности V_l множества F_l и при этом $V_l \Subset U$. Следовательно, образ $f(Q(x, r))$ любого куба $Q(x, r)$, $x \in F_l$, $r < r_0(F_l)$, лежит в εr -окрестности множества $\{f(x) + df(x)(Q(0, r))\}$. Заметим, что образ $df(x)(Q(0, r))$, $x \in Z \cap F_l$, является частью $k-1$ -мерной плоскости и имеет линейный размер $O(r)$, где O не зависит от $x \in F_l$, т. е. $\text{diam}(df(x)(Q(0, r))) \leq C_l r$, где C_l не зависит от выбора точки $x \in F_l$, так как частные производные отображения f ограничены на F_l . Поэтому εr -окрестность множества $\{f(x) + df(x)(Q(0, r))\}$ содержится в не более чем $O(\frac{r^{k-1}}{\varepsilon^{k-1}r^{k-1}}) = O(\frac{1}{\varepsilon^{k-1}})$ равновеликих кубах, диаметр каждого из которых не превосходит εr . Отсюда для любого такого куба $Q(x, r)$ справедливо

$$\mathcal{H}_{\varepsilon r}^k(f(Q(x, r))) = O((\varepsilon r)^k) O\left(\frac{1}{\varepsilon^{k-1}}\right) = O(\varepsilon r^k) = \varepsilon O(|Q(x, r)|),$$

где O равномерное на F_l . Покроем множество $Z \cap F_l$ дизъюнктными двоичными кубами $\{Q_i\}$ так, чтобы $F_l \cap Q_i \neq \emptyset$ для всех i и диаметр каждого из них не превосходил $\rho < r_0(F_l)/2$. Если $x_i \in F_l \cap Q_i$ — произвольная точка, то $Q_i \subset Q(x_i, r_i)$, где r_i — такое число, что диаметр $Q(x_i, r_i)$ не превосходит двух диаметров Q_i (таким образом, $r_i \leq 2\rho < r_0(F_l)$). Тогда имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\varepsilon r}^k(f(Z \cap F_l)) &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{\varepsilon r}^k(f(Q_i)) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{\varepsilon r}^k(f(Q(x_i, r_i))) \\ &\leq \varepsilon \sum_{i \in \mathbb{N}} O(|Q(x_i, r_i)|) \leq 2^k \varepsilon \sum_{i \in \mathbb{N}} O(|Q_i|) \leq 2^k \varepsilon C |V_l|. \end{aligned}$$

В силу произвола в выборе ε получаем $\mathcal{H}^k(f(Z \cap F_l)) = 0$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Для завершения доказательства остается применить теорему 1.21 (утверждение 2).

3.13. ЛЕММА. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $Z \subset U$ — множество нулевой меры, а $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная на $U \setminus Z$ функция. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x, r)|} \int_{Q(x, r)} g(y) dy = g(x) \quad (3.6)$$

для любой точки $x \in U \setminus Z$.

Если $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная на U функция, то сходимость в (3.6) будет равномерной на всяком компактном множестве $F \subset U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $x \in U \setminus Z$ — точка непрерывности функции g , то $|g(y) - g(x)| = o(1)$ при $U \setminus Z \ni y \rightarrow x$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{|Q(x, r)|} \int_{Q(x, r)} g(y) dy - g(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{|Q(x, r)|} \int_{Q(x, r)} (g(y) - g(x)) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{|Q(x, r) \setminus Z|} \int_{Q(x, r) \setminus Z} |g(y) - g(x)| dy = o(1) \quad (3.7) \end{aligned}$$

при $U \setminus Z \ni y \rightarrow x$.

Заметим, что по теореме Кантора всякая непрерывная на U функция $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ является равномерно непрерывной на любом компактном подмножестве $F \subset U$. Следовательно, правая часть $o(1)$ в (3.7) будет равномерной относительно $x \in F$.

Ниже мы используем свойства, сформулированные в следующем предложении.

3.14. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1) При непрерывном отображении:

а) прообраз открытого или замкнутого множеств соответственно открыт или замкнут;

б) образ компактного множества компактен;

с) образ и прообраз борелевского множества борелевские (следует из а) и б), т. к. борелевское множество может быть представлено в виде объединения и пересечения счетного набора компактных множеств).

2) При гомеоморфизме:

а) образ и прообраз открытого или замкнутого множеств соответственно открыты или замкнуты;

б) образ и прообраз компактного множества компактны;

с) образ и прообраз борелевского множества борелевские.

3.15. ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, а $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, — инъективное отображение класса C^1 . Пусть $Z = \{x : \mathcal{J}(x, f) = 0\}$. Тогда

1) множество $A \subset U \setminus Z$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда множество $f(A)$ будет $\mathcal{H}^k$ -измеримым по Каратеодори, и при этом справедливо равенство

$$\int_A \mathcal{J}(x, f) dx = \mathcal{H}^k(f(A)); \quad (3.8)$$

2) множество $S \subset f(U \setminus Z)$ имеет нулевую $\mathcal{H}^k$ -меру Хаусдорфа тогда и только тогда, когда $f^{-1}(S)$ имеет нулевую меру Лебега.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем справедливость равенства (3.8) для всякого открытого ограниченного множества $\Omega \Subset U$ (таким образом, $\overline{\Omega}$ — компакт). Образ $f(\Omega)$ является борелевским множеством, так как $f(\Omega)$ может быть представлено в виде счетного объединения компактных множеств (см. предложение 3.14). Следовательно, образ $f(\Omega)$ будет $\mathcal{H}^k$ -измеримым по Каратеодори, см. теорему 1.11. В каждой точке $x \in \overline{\Omega}$ одновременно имеем равномерный по $x \in \overline{\Omega}$ предел (3.4):

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^k(f(Q(x, r)))}{|Q(x, r)|} = \mathcal{J}(x, f),$$

и вытекающий из (3.6) равномерный по $x \in \overline{\Omega}$ предел

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x, r)|} \int_{Q(x, r)} \mathcal{J}(y, f) dy = \mathcal{J}(x, f).$$

Отсюда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $r_0 > 0$ такое, что в каждой

точке $x \in \Omega$ имеем

$$\left| \frac{\mathcal{H}^k(f(Q(x, r)))}{|Q(x, r)|} - \frac{1}{|Q(x, r)|} \int_{Q(x, r)} \mathcal{J}(y, f) dy \right| \leq \frac{1}{m} \quad (3.9)$$

для всех $r \in (0, r_0)$.

По свойству 3.1 для всех $n \geq n_0$, где $n_0 \in \mathbb{N}$ — некоторое число, существует непустой набор $\mathcal{M}_n$ двоичных кубов, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $\mathcal{M}_n = \{Q \in \mathcal{D}_n : \overline{Q} \subset \Omega\}$;
- 2) множество $M_n = \bigcup_{Q \in \mathcal{M}_n} Q \subset \Omega$ борелевское;
- 3) $M_n \subset M_{n+1}$;
- 4) $\bigcup_{n \geq n_0} M_n = \Omega$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} |M_n| = |\Omega|$.

В силу вышесказанного, оценка (3.9) выполняется для всех кубов $Q \in \mathcal{M}_n$, если только $\frac{1}{2^{n+1}} < r_0$.

Из формулы (3.9) для любого куба $Q \in \mathcal{M}_n$ при $\frac{1}{2^{n+1}} < r_0$ имеем

$$-\frac{|Q|}{m} \leq \mathcal{H}^k(f(Q)) - \int_Q \mathcal{J}(y, f) dy \leq \frac{|Q|}{m}. \quad (3.10)$$

Суммируя формулу (3.10) по всем кубам $Q \in \mathcal{M}_n$, получаем

$$-\frac{|\Omega|}{m} \leq -\frac{|M_n|}{m} \leq \mathcal{H}^k(f(M_n)) - \int_{M_n} \mathcal{J}(y, f) dy \leq \frac{|M_n|}{m} \leq \frac{|\Omega|}{m}. \quad (3.11)$$

Формула (3.11) справедлива для всех достаточно больших n , поэтому в ней возможен предельный переход при $n \rightarrow \infty$:

$$-\frac{|\Omega|}{m} \leq \mathcal{H}^k(f(\Omega)) - \int_{\Omega} \mathcal{J}(y, f) dy \leq \frac{|\Omega|}{m}. \quad (3.12)$$

Формула (3.12) справедлива для всех $m \in \mathbb{N}$, поэтому соотношение (3.8) для открытого множества указанного выше вида доказана.

Заметим, что произвольное открытое множество $\Omega \subset U$ представимо в виде объединения $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$, где открытое множество $\Omega_n = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \text{ и } |x|_{\infty} < n\}$ компактно вложено в Ω . Поскольку

для открытого множества Ω_n формула (3.8) уже доказана, то она распространяется и на множество Ω , так как $\mathcal{H}^k(f(\Omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^k(f(\Omega_n))$, а предельный переход в интеграле слева в случае $\sup_n \int_{\Omega_n} \mathcal{J}(x, f) dx < +\infty$ возможен по теореме Беппо Леви (в противном случае предел равен $+\infty$).

По лемме 2.11 мера Лебега — регулярная борелевская мера. Поэтому для всякого измеримого по Лебегу множества $A \subset U \setminus Z$ существует некоторое борелевское множество $\Omega_\sigma \supset A$, причем $\Omega_\sigma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$, где $\{\Omega_n \subset U\}$, $n \in \mathbb{N}$, — убывающая последовательность открытых множеств, а множество $S = \Omega_\sigma \setminus A$ имеет нулевую меру Лебега. Тогда равенство (3.8) можно распространить на произвольные измеримые по Лебегу множества $A \subset U \setminus Z$. Действительно, $\Omega_\sigma = A \cup S$. Поэтому $\mathcal{H}^k(f(\Omega_\sigma)) \leq \mathcal{H}^k(f(A)) + \mathcal{H}^k(f(S)) = \mathcal{H}^k(f(A))$, так как отображение f обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина (см. следствие 3.7). Заметим при этом, что множество $f(A)$ $\mathcal{H}^k$ -измеримо по Каратеодори.

Если $S \subset f(U)$ — множество нулевой $\mathcal{H}^k$ -меры, то по теоремам 2.2 и 2.11 существует борелевское множество $W_\sigma \supset S$ такое, что $\mathcal{H}^k(W_\sigma) = 0$. При этом по теореме 1.29

$$W_\sigma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n,$$

где $W_1 \supset W_2 \supset \dots \supset W_n \supset \dots$ — убывающая последовательность открытых множеств. Для любого W_n имеем

$$\int_{f^{-1}(W_n)} \mathcal{J}(x, f) dx = \mathcal{H}^k(W_n).$$

Так как $\mathcal{H}^k(W_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\int_{f^{-1}(W_\sigma)} \mathcal{J}(x, f) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{f^{-1}(W_n)} \mathcal{J}(x, f) dx = 0.$$

Поэтому $\mathcal{J}(x, f) = 0$ почти всюду на множестве $f^{-1}(W_\sigma)$, а следовательно, и на множестве $f^{-1}(S)$.

Отсюда вытекает, что если множество $f(A)$, $A \subset U \setminus Z$, $\mathcal{H}^k$ -измеримо по Каратеодори, то множество A измеримо по Лебегу. Действительно, пусть $F_\delta \subset f(A)$ — борелевское множество такое, что $\mathcal{H}^k(F_\delta) =$

$\mathcal{H}^k(f(A))$ и при этом

$$F_\delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n,$$

где $F_1 \subset F_2 \subset \dots F_n \dots \subset f(A)$ — возрастающая последовательность замкнутых множеств (см. теорему 1.29). Для любого $n \in \mathbb{N}$ прообраз $f^{-1}(F_n)$ — замкнутое множество (см. 3.14), поэтому $K_\delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(F_n)$ — борелевское множество; при этом $f^{-1}(F_\delta) = K_\delta$. Поскольку $A \setminus K_\delta = f^{-1}(f(A) \setminus F_\delta)$, то из $\mathcal{H}^k(f(A) \setminus F_\delta) = 0$ вытекает, что $\mathcal{J}(x, f) = 0$ почти всюду на множестве $A \setminus K_\delta$. Следовательно, $|A \setminus K_\delta| = 0$, так как по условию $\mathcal{J}(x, f) > 0$ на множестве A . Таким образом, множество A отличается от борелевского множества K_δ на множество $A \setminus K_\delta$ нулевой меры Лебега, и поэтому измеримо по Лебегу.

Формула площади доказана.

3.16. ЗАДАЧА. Проверить соотношение, применяемое в (3.11): а именно, что $\bigcup_{Q \in M_n} f(Q) = f(M_n)$.

3.17. ЗАДАЧА. В условиях теоремы 3.15 множество $A \subset U \setminus Z$ имеет нулевую меру Лебега тогда и только тогда, когда множество $f(A)$ имеет нулевую $\mathcal{H}^k$ -меру.

3.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Совокупность $(\mathbb{X}, \Xi, \mathcal{H}^k)$, где Ξ — σ -алгебра $\mathcal{H}^k$ -измеримых множеств (она же и дробящаяся система), образует множество с мерой. Функция $u : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{E}$ называется $\mathcal{H}^k$ -интегрируемой на $\mathbb{X}$, если она интегрируема по $\mathcal{H}^k$ -мере Хаусдорфа на множестве с мерой $(\mathbb{X}, \Xi, \mathcal{H}^k)$. Совокупность $\mathcal{H}^k$ -интегрируемых на $\mathbb{X}$ функций будем обозначать символом $\mathcal{L}_1(\mathbb{X}; \mathbb{E})$.

Заметим, что на пространстве $\mathbb{R}^k$ интегрируемость по $\mathcal{H}^k$ -мере Хаусдорфа совпадает с интегрируемостью по Лебегу.

3.19. ФОРМУЛА ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество и $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, — инъективное отображение класса C^1 . Функция $u : f(U) \rightarrow \mathbb{E}$ (здесь $\mathbb{E}$ может быть произвольным банаховым пространством) $\mathcal{H}^k$ -интегрируема на $f(U)$ тогда и только тогда, когда функция $U \ni x \mapsto$

$u(f(x))\mathcal{J}(x, f) \in \mathbb{E}$ интегрируема по Лебегу на U , и при этом

$$\int_U u(f(x))\mathcal{J}(x, f) dx = \int_{f(U)} u(y) d\mathcal{H}^k(y). \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при $k = m$ сформулированная теорема совпадает с уже доказанной формулой замены переменной в интеграле Лебега.

Пусть $u \in \mathcal{L}_1(f(U), \mathbb{E})$ и последовательность $\varphi_n \in \text{Step}(f(U); \mathbb{E})$ такова, что

$$\|u - \varphi_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

и $\varphi_n(y) \rightarrow u(y)$ при $n \rightarrow \infty$ за исключением некоторого множества $S \subset f(U)$ нулевой $\mathcal{H}^k$ -меры (интегральная норма тоже берется относительно меры $\mathcal{H}^k$). По теореме 2.2 можно считать, что все дизъюнктные элементы дробящейся системы Ξ , на которых сосредоточена ступенчатая функция $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, являются борелевскими. Из (3.8) вытекает

$$\int_U \chi_P(f(x))\mathcal{J}(x, f) dx = \int_{f^{-1}(P)} \mathcal{J}(x, f) dx = \mathcal{H}^k(P) = \int_{f(U)} \chi_P(y) d\mathcal{H}^k(y) \quad (3.14)$$

для любого борелевского множества $P \subset f(U)$ (так как прообраз борелевского множества является борелевским, см. 3.14). Следовательно, формула (3.13) справедлива для любой ступенчатой функции $\varphi_n \in \text{Step}(f(U); \mathbb{E})$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_U \varphi_n(f(x))\mathcal{J}(x, f) dx = \int_{f(U)} \varphi_n(y) d\mathcal{H}^k(y). \quad (3.15)$$

Из (3.15) имеем равенство

$$\int_U |\varphi_n(f(x)) - \varphi_l(f(x))|\mathcal{J}(x, f) dx = \int_{f(U)} |\varphi_n(y) - \varphi_l(y)| d\mathcal{H}^k(y),$$

из которого вытекает, что последовательность $\varphi_n(f(x))\mathcal{J}(x, f)$ является фундаментальной в $\mathcal{L}_1(U; \mathbb{E})$. Так как $\mathcal{J}(x, f) = 0$ для почти всех точек $x \in f^{-1}(S)$ (см. 3.15), то в силу выбора последовательности φ_n

$$\varphi_n(f(x))\mathcal{J}(x, f) \rightarrow u(f(x))\mathcal{J}(x, f)$$

в почти всех точках $x \in U$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, предел последовательности $\{\varphi_n(f(x))\mathcal{J}(x, f)\}$ в $\mathcal{L}_1(U; \mathbb{E})$ равен $u(f(x))\mathcal{J}(x, f)$ почти всюду (поскольку всякая последовательность, сходящаяся в $\mathcal{L}_1$ к некоторой функции, содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к той же функции поточечно). Переходя в (3.15) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем равенство (3.13).

Пусть теперь функция $u : f(U) \rightarrow \mathbb{E}$ такова, что функция $U \ni x \mapsto u(f(x))\mathcal{J}(x, f)$ интегрируема по Лебегу на U . Тогда существует последовательность ступенчатых функций $\varphi_n \in \text{Step}(\mathbb{R}^k; \mathbb{E})$ такая, что

$$\|u(f(\cdot))\mathcal{J}(\cdot, f) - \varphi_n(\cdot)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

и $\varphi_n(x) \rightarrow u(f(x))\mathcal{J}(x, f)$ при $n \rightarrow \infty$ за исключением некоторого множества $S \subset U$ нулевой меры Лебега.

Положим $Z = \{x \in U : \mathcal{J}(x, f) = 0\}$ и рассмотрим произвольное компактное множество $A \subset U \setminus Z$. Поскольку

$$0 < \alpha = \inf_{x \in A} \mathcal{J}(x, f) \quad \text{и} \quad \beta = \sup_{x \in A} \mathcal{J}(x, f) < \infty$$

(см. 3.14), то последовательность функций $\varphi_n(x)\mathcal{J}^{-1}(x, f)$ сходится почти всюду к функции $u(f(x))$ на A при $n \rightarrow \infty$, а также

$$\int_A |\varphi_n(x)\mathcal{J}^{-1}(x, f) - u(f(x))| dx \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, так как

$$\int_A |\varphi_n(x)\mathcal{J}^{-1}(x, f) - u(f(x))| dx \leq \alpha^{-1} \int_A |\varphi_n(x) - u(f(x))\mathcal{J}(x, f)| dx$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что по теореме 3.15 каждая из функций

$$f(A) \ni y \mapsto \varphi_n(f^{-1}(y))\mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y), f)$$

(отображение f^{-1} существует, т. к. f инъективно) $\mathcal{H}^k$ -измерима на $f(A)$, так как $\varphi_n(f^{-1}(y))$ — ступенчатая функция, а $\mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y), f)$ — непрерывная ограниченная функция.

Более того, из теоремы 3.15 следует

$$\int_A \varphi_n(x)\mathcal{J}(x, f) dx = \int_{f(A)} \varphi_n(f^{-1}(y)) d\mathcal{H}^k(y). \quad (3.16)$$

Положим $y = f(x)$. Тогда, применяя (3.16), получаем

$$\begin{aligned} \int_A \varphi_n(x) dx &= \int_A \varphi_n(f^{-1}(f(x))) \mathcal{J}(x, f) \mathcal{J}^{-1}((f^{-1}(f(x))), f) dx \\ &= \int_{f(A)} \varphi_n(f^{-1}(y)) \mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y), f) d\mathcal{H}^k(y). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\varphi(f^{-1}(y)) \mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y), f)$$

$\mathcal{H}^k$ -интегрируема на $f(A)$.

Таким образом, в силу доказанного

$$\int_A \varphi_n(x) dx = \int_{f(A)} \varphi_n(f^{-1}(y)) \mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y), f) d\mathcal{H}^k(y)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда

$$\begin{aligned} &\int_A |\varphi_n(x) - \varphi_l(x)| dx \\ &= \int_{f(A)} |\varphi_n(f^{-1}(y)) \mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y), f) - \varphi_l(f^{-1}(y)) \mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y), f)| d\mathcal{H}^k(y), \end{aligned}$$

и поэтому последовательность функций

$$\varphi_n(f^{-1}(y)) \mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y), f) : f(A) \rightarrow \mathbb{E}$$

является фундаментальной на множестве с мерой $(f(A), \Xi, \mathcal{H}^k)$. Заметим, что предел этой последовательности в $\mathcal{L}_1(f(A); \mathbb{E})$ почти всюду совпадает с ее поточечным пределом при $n \rightarrow \infty$. Поскольку отображение f обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина, то $\varphi_n(f^{-1}(y)) \mathcal{J}^{-1}(f^{-1}(y), f)$ сходится $\mathcal{H}^k$ -почти всюду на $f(A)$ к функции $u(y)$. Таким образом, доказана $\mathcal{H}^k$ -интегрируемость функции $u(y)$ на множестве $f(A)$ и равенство

$$\int_A u(f(x)) \mathcal{J}(x, f) dx = \int_{f(A)} u(y) d\mathcal{H}^k(y).$$

Если теперь $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots \subset U \setminus Z$ — исчерпывание множества $U \setminus Z$ компактными множествами: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = U \setminus Z$, то (с учетом $\mathcal{H}^k(f(Z)) = 0$) получаем

$$\begin{aligned} \int_{f(U)} u(y) d\mathcal{H}^k(y) &= \int_{f(U \setminus Z)} u(y) d\mathcal{H}^k(y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{f(A_n)} u(y) d\mathcal{H}^k(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} u(f(x)) \mathcal{J}(x, f) dx \\ &= \int_{U \setminus Z} u(f(x)) \mathcal{J}(x, f) dx = \int_U u(f(x)) \mathcal{J}(x, f) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{H}^k$ -интегрируемость функции $u : f(U) \rightarrow \mathbb{E}$ доказана, а вместе с нею доказана и формула замены переменной.

Из доказанной теоремы 3.19 так же, как и при $k = m$, вытекает

3.20. ФОРМУЛА ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛЯ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество и $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, — инъективное отображение класса C^1 . Неотрицательная функция $u : f(U) \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{H}^k$ -измерима на $f(U)$ тогда и только тогда, когда функция $U \ni x \mapsto u(f(x)) \mathcal{J}(x, f) \in [0, \infty]$ измерима по Лебегу на U , и при этом

$$\int_U u(f(x)) \mathcal{J}(x, f) dx = \int_{f(U)} u(y) d\mathcal{H}^k(y). \quad (3.17)$$

4. ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ

4.1. ДЛИНА КРИВОЙ. Пусть $[a, b]$ — отрезок из $\mathbb{R}$, $f = (f_1, \dots, f_m) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — инъективное отображение класса $C^1([a, b])$, а $f([a, b]) = \gamma$. Тогда $\mathcal{H}^1(\gamma) = l(\gamma)$, где $l(\gamma)$ — длина кривой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, в этом случае

$$df(t) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dt}(t) \\ \dots \\ \frac{df_m}{dt}(t) \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\mathcal{J}(t, f) = \sqrt{\det(df^*(t)df(t))} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{df_i}{dt}(t)\right)^2}.$$

По формуле площади получаем

$$\mathcal{H}^1(\gamma) = \int_{[a,b]} \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{df_i}{dt}(t)\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{df_i}{dt}(t)\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Заметим, что длина кривой $l(\gamma)$ гладкой кривой γ выражается такой же формулой, поэтому $\mathcal{H}^1(\gamma) = l(\gamma)$.

4.2. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^2$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ — инъективное отображение класса $C^1(U)$. Тогда двумерная площадь поверхности $f(U)$ выражается формулой

$$\mathcal{H}^2(f(U)) = \iint_U \sqrt{E(x_1, x_2)G(x_1, x_2) - F^2(x_1, x_2)} dx_1 dx_2,$$

где

$$\begin{aligned} E(x_1, x_2) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right), \\ G(x_1, x_2) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right), \\ F(x_1, x_2) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, в этом случае

$$df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Отсюда прямое вычисление дает

$$df^*(x)df(x) = \begin{pmatrix} E(x_1, x_2) & F(x_1, x_2) \\ F(x_1, x_2) & G(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\det(df^*(x)df(x)) = E(x_1, x_2)G(x_1, x_2) - F^2(x_1, x_2)$. Далее остается только применить формулу площади.

4.3. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ГРАФИКА ФУНКЦИИ. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — отображение класса $C^1(U)$, $\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{k+1}, x \in U\}$ — график функции f . Тогда k -мерная площадь поверхности графика функции f выражается формулой

$$\mathcal{H}^k(\Gamma) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx,$$

где $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства формулы рассмотрим отображение $g : U \rightarrow \Gamma$, такое, что $g(x) = (x, f(x))$. Отсюда получаем, что

$$dg(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \dots & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix}.$$

Для вычисления $\det(dg^*(x)dg(x))$ применим доказываемую ниже теорему 4.4. Получим $\det(dg^*(x)dg(x)) = 1 + |\nabla f|^2$. Далее остается только применить формулу площади.

4.4. ТЕОРЕМА БИНЕ — КОШИ. Для любой матрицы L вида

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$n \leq m$, верно равенство

$$\det(L^*L) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq m} \left(\det \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & & \dots \\ a_{i_n 1} & \dots & a_{i_n n} \end{pmatrix} \right)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $m = n$ теорема вытекает из соотношения $\det L = \det L^*$. Докажем теорему только в случае, когда $n = m - 1$. Ее геометрический смысл в этом случае состоит в том, что квадрат объема n -мерного параллелепипеда в $\mathbb{R}^{n+1}$ равен сумме квадратов n -мерных объемов его проекций на n -мерные координатные подпространства (обобщение теоремы Пифагора).

Пусть $n = 2$, $m = 3$, векторы $a = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$ и $b = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ — столбцы матрицы L , e_1, e_2 и e_3 — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, и

$$w = a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & a_{11} & a_{12} \\ e_2 & a_{21} & a_{22} \\ e_3 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} e_3$$

Известно, что длина вектора w равна площади параллелограмма $V(a, b)$, натянутого на векторы a и b , а сам w ортогонален a и b . Если на получившиеся 3 вектора w, a и b натянуть 3-мерный параллелепипед $V(w, a, b)$, то его объем будет равен

$$|V(w, a, b)| = \begin{vmatrix} w_1 & a_{11} & a_{12} \\ w_2 & a_{21} & a_{22} \\ w_3 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (w, w) = |w|^2 = V^2(a, b) = \det(L^* L).$$

(Последнее равенство следует из свойств векторного произведения.) Отсюда вытекает равенство

$$\det(L^* L) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \left(\det \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} \end{pmatrix} \right)^2.$$

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть $e_1, \dots, e_{n+1}$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим определитель

$$w = \begin{vmatrix} e_1 & & & \\ \dots & a_1 & \dots & a_n \\ e_{n+1} & & & \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} A_i e_i,$$

где a_i — столбцы матрицы L , A_i — коэффициенты в разложении определителя по первому столбцу. Вектор $w = (A_1, \dots, A_{n+1})$ является аналогом векторного произведения $a_1 \times \dots \times a_n$ векторов $a_1, \dots, a_n$.

Заметим, что $|w|^2 = (w, w) = \sum_{i=1}^{n+1} A_i^2$ и что вектор w ортогонален каждому a_i , $i = 1, \dots, n$. (При подстановке в матрицу какого-либо столбца a_i , $i = 1, \dots, n$, вместо $e_1, \dots, e_{n+1}$ получим определитель, равный нулю.) Отсюда получаем, что объем параллелепипеда $V(w, a_1, \dots, a_n)$, натянутого на векторы $w, a_1, \dots, a_n$, с одной стороны, равен

$$|V(w, a_1, \dots, a_n)| = |\det(w, a_1, \dots, a_n)| = (w, w) = |w|^2,$$

а с другой —

$$|V(w, a_1, \dots, a_n)| = |w| \cdot V(a_1, \dots, a_n),$$

где $V(a_1, \dots, a_n)$ — $(n-1)$ -мерный объем параллелепипеда, натянутого на векторы $a_1, \dots, a_n$. Отсюда имеем равенство $V(a_1, \dots, a_n) = |w|$. Заметим, что объем параллелепипеда $V(a_1, \dots, a_n)$ равен $\sqrt{\det(L^*L)}$, так как, полагая $\eta = \frac{w}{|w|}$, имеем

$$\begin{aligned} V^2(a_1, \dots, a_n) &= |V(\eta, a_1, \dots, a_n)| \cdot |V(\eta, a_1, \dots, a_n)| \\ &= \det(\eta, a_1, \dots, a_n)^* \cdot \det(\eta, a_1, \dots, a_n) \\ &= \det((\eta, a_1, \dots, a_n)^* \cdot (\eta, a_1, \dots, a_n)) = \det(L^*L), \end{aligned}$$

где $(\eta, a_1, \dots, a_n)^*$ — матрица, сопряженная матрице $(\eta, a_1, \dots, a_n)$ (здесь при подсчете следует учесть, что вектор η ортогонален каждому из векторов $a_1, \dots, a_n$, и $(\eta, \eta) = 1$). Поэтому

$$\det(L^*L) = |w|^2 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n+1} \left(\det \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & & \dots \\ a_{i_n 1} & \dots & a_{i_n n} \end{pmatrix} \right)^2.$$

4.5. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ.

$$\sigma_{k-1} = \omega_k \cdot k,$$

где σ_{k-1} — площадь единичной k -мерной сферы, ω_k — объем k -мерного единичного шара.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сферу $S_R = S(0, R) \subset \mathbb{R}^k$ радиуса R , ограничивающую шар $B(0, R) \subset \mathbb{R}^k$. Заметим, что $\mathcal{H}^{k-1}(S_R) = R^{k-1} \cdot \mathcal{H}^{k-1}(S_1)$. Посчитаем меру кольца $A_{R,1} = B(0, R) \setminus B(0, 1)$ при $R > 1$:

$$|A_{R,1}| = \int_{A_{R,1}} dx = |B(0, R)| - |B(0, 1)| = \omega_k(R^k - 1). \quad (4.1)$$

Теперь посчитаем меру этого же кольца, используя формулу замены переменной. Рассмотрим отображение f , заданное следующим обра-

ЗОМ:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_1 \\ x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ \vdots \\ x_{k-1} = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{k-2} \cos \varphi_{k-1} \\ x_k = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{k-2} \sin \varphi_{k-1}, \end{cases}$$

$1 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi_i \leq \pi$, $i = 1, \dots, k-2$, $0 \leq \varphi_{k-1} \leq 2\pi$. Тогда по формуле замены переменной объем кольца будет равен

$$\iint_{[1,R] \times \Omega} J(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}; f) dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{k-1}.$$

(Здесь множество

$$\Omega = \{\omega = (\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}) : \varphi_i \in [0, \pi], i = 1, \dots, k-2, \varphi_{k-1} \in [0, 2\pi]\}.)$$

Заметим, что все векторы $\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}$ лежат в касательном пространстве к сфере, а $\frac{\partial f}{\partial r}$ ортогонален ей и длина этого вектора равна 1. Из геометрического смысла якобиана (объем параллелепипеда), видно, что $J(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}; f) = \mathcal{J}(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}; f(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}))$ при каждом фиксированном r в любой точке $(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}) \in \Omega$, так как «высота» параллелепипеда, натянутого на векторы $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \varphi_{k-1}}$, равна 1. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} |A_{R,1}| &= \iint_{[1,R] \times \Omega} J(r, \omega; f) dr d\omega = \int_1^R dr \int_{\Omega} \mathcal{J}(\omega; f(r, \cdot)) d\omega \\ &= \int_1^R \mathcal{H}^{k-1}(S(0, r)) dr = \sigma_{k-1} \int_1^R r^{k-1} dr = \frac{\sigma_{k-1}}{k} (R^k - 1), \end{aligned}$$

так как по формуле площади

$$\mathcal{H}^{k-1}(S(0, r)) = \int_{\Omega} \mathcal{J}(\omega; f(r, \cdot)) d\omega \quad \text{для любого } r \in [1, R].$$

Сравнивая полученный результат с равенством (4.1), имеем $\sigma_{k-1} = \omega_k \cdot k$.

4.6. ЗАДАЧА. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$ — k -мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$, а $\mathcal{H}^k \llcorner \mathcal{M}$ — k -мерная мера Хаусдорфа на $\mathcal{M}$. Написать формулу площади в некоторой фиксированной системе координат $\varphi : U \rightarrow V$, где U, V — открытые множества в $\mathbb{R}^m$, такой, что $\varphi(U \cap \mathcal{M}) = \{V : x_{k+1} = \dots = x_m = 0\}$

УКАЗАНИЕ: Рассмотреть параметризацию

$$\psi = \varphi^{-1} : \{V : x_{k+1} = \dots = x_m = 0\} \rightarrow U \cap \mathcal{M}$$

многообразия $\mathcal{M}$ и применить формулу площади к отображению $\psi : W \rightarrow \mathcal{M} \cap U$, где

$$W = \{x \in V : x_{k+1} = \dots = x_m = 0\} \subset \mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}_{m-k}\}.$$

Множество $A \subset \mathcal{M} \cap U$ будет $\mathcal{H}^k \llcorner \mathcal{M}$ -измеримым по Каратеодори тогда и только тогда, когда множество $\varphi(A)$ измеримо по Лебегу, и при этом справедливо равенство

$$\mathcal{H}^k(A) = \int_{\varphi(A)} \mathcal{J}(x, \psi) dx = \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(d\psi^*(x)d\psi(x))} dx.$$

4.7. ЗАДАЧА. 1) Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — k -мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ с k -мерной мерой Хаусдорфа $\mathcal{H}^k \llcorner \mathcal{M}$ на $\mathcal{M}$, а $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^l$ — m -мерное многообразие в $\mathbb{R}^l$ с m -мерной мерой Хаусдорфа $\mathcal{H}^m \llcorner \mathcal{N}$ на $\mathcal{N}$, $k \leq m$. Определить якобиан $\mathcal{J}(x, f)$, $x \in \mathcal{M}$, отображения $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ класса C^1 и написать соответствующую формулу площади: *множество $A \subset \mathcal{M}$ $\mathcal{H}^k \llcorner \mathcal{M}$ -измеримо по Каратеодори тогда и только тогда, когда множество $f(A) \subset \mathcal{N}$ $\mathcal{H}^k$ -измеримо по Каратеодори, и при этом справедливо равенство*

$$\mathcal{H}^k(f(A)) = \int_A \mathcal{J}(x, f) d\mathcal{H}^k(x).$$

$$2) \text{ Показать, что } \mathcal{J}(x, f) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^k(f(B(x, r) \cap \mathcal{M}))}{\mathcal{H}^k(B(x, r) \cap \mathcal{M})}.$$

УКАЗАНИЕ. Рассмотреть в качестве характеристики $\mathcal{J}(x, f)$ искажения мер величину $\sqrt{\det(df(x)^*df(x))}$, где $df(x) : \mathbb{T}\mathcal{M}_x \rightarrow \mathbb{T}\mathcal{N}_{f(x)}$ — дифференциал отображения $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. Перейти в локальные системы координат, свести задачу к теореме 3.15, а затем дважды применить формулу площади.

4.8. ЗАДАЧА. Ко всем приведенным в этом разделе формулам площади написать и доказать соответствующие формулы замены переменной. Например, интеграл Лебега в полярной системе координат: функция $u \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^k, \mathbb{E})$ тогда и только тогда, когда функция u $\mathcal{H}^{k-1}$ -интегрируема на S_r для почти всех $r \in (0, \infty)$ и

$$\int_{\mathbb{R}^k} u(x) dx = \int_0^\infty r^{k-1} dr \int_{S_1} u(r\omega) d\mathcal{H}^{k-1}(\omega) = \int_0^\infty dr \int_{S_r} u(\omega) d\mathcal{H}^{k-1}(\omega). \quad (4.2)$$

5. ФОРМУЛА КОПЛОЩАДИ

5.1. ФОРМУЛА КОПЛОЩАДИ. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, а $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса C^1 . Пусть еще $f : U \rightarrow \mathbb{E}$ — измеримая функция, где $\mathbb{E}$ — произвольное банахово пространство. Тогда, если $f(x)|\nabla\varphi(x)|$ интегрируема, то справедлива формула

$$\int_U f(x)|\nabla\varphi(x)| dx = \int_{-\infty}^\infty dt \int_{\varphi^{-1}(t)} f(u) d\mathcal{H}^{k-1}(u).$$

5.2. ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда $\varphi = x_i$ — координатная функция, то мы получаем теорему Фубини ($\varphi^{-1}(x_i)$ — гиперплоскость; $\mathcal{H}^{k-1}$ — $(k-1)$ -мерная мера Лебега на ней).

5.3. ЗАДАЧА. Применяя формулу коплощади к функции $\varphi(x) = |x|$, где $|x|$ — евклидова норма, получить формулу (4.2).

Мы получим доказательство теоремы 5.1 как частный случай формулируемой ниже теоремы 6.3.

6. ФОРМУЛА КОПЛОЩАДИ (m -МЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

6.1. ЛЕММА. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_m$ и $\theta_1, \dots, \theta_m$ — k -мерные векторы, лежащие в одном m -мерном подпространстве $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^k$, $m \leq k$. Тогда произведение объемов m -мерных параллелепипедов, натянутых на эти

векторы, вычисляется по формуле

$$V_\xi \cdot V_\theta = \left| \det \begin{pmatrix} \langle \xi_1, \theta_1 \rangle & \cdots & \langle \xi_1, \theta_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \xi_m, \theta_1 \rangle & \cdots & \langle \xi_m, \theta_m \rangle \end{pmatrix} \right|. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$$

$(m \times k)$ -матрицу, в которой векторы записаны как строки, а через

$$\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$$

— $(k \times m)$ -матрицу, где векторы записаны как столбцы. Напомним, что $\mathbb{L}$ — m -мерное подпространство. Рассмотрим ортогональное преобразование $O \in SO(k)$ такое, что $O(\mathbb{L}) = \mathbb{R}^m \oplus \{0\}^{k-m}$. Тогда $O(\xi_j) \in \mathbb{R}^m \oplus \{0\}^{k-m}$ для всех $j = 1, \dots, m$ и поэтому

$$O \cdot \Xi^* = \begin{pmatrix} \xi^* \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где ξ^* — $(m \times m)$ -матрица. Кроме того,

$$(O \cdot \Xi^*)^* = \Xi \cdot O^* = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \xi & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как оба набора векторов лежат в одном подпространстве, то

$$O \cdot \Theta = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где θ — $(m \times m)$ -матрица, а

$$\Theta^* \cdot O^* = \begin{pmatrix} & 0 & \vdots & 0 \\ \theta^* & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \vdots & 0 \\ & & & \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$V_\xi = \sqrt{\det(\Xi \cdot \Xi^*)} = \sqrt{\det(\Xi \cdot O \cdot O^* \cdot \Xi^*)} = \sqrt{\det(\xi \cdot \xi^*)} = |\det(\xi)|$$

и аналогично

$$V_\theta = \sqrt{\det(\Theta^* \cdot \Theta)} = \sqrt{\det(\Theta^* \cdot O^* \cdot O \cdot \Theta)} = \sqrt{\det(\theta^* \cdot \theta)} = |\det(\theta)|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} V_\xi \cdot V_\theta &= \sqrt{\det(\xi^* \cdot \xi)} \cdot \sqrt{\det(\theta \cdot \theta^*)} \\ &= |\det(\xi)| \cdot |\det(\theta)| = |\det(\xi \cdot \theta)| \\ &= |\det(\Xi \cdot O^* \cdot O \cdot \Theta)| = |\det(\Xi \cdot \Theta)| = (6.1). \end{aligned}$$

6.2. СЛЕДСТВИЕ. *Объемы параллелепипедов, натянутых на векторы базиса и кобазиса некоторого m -мерного подпространства $\mathbb{R}^k$, $m \leq k$, обратно пропорциональны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\xi_1, \dots, \xi_m$ и $\theta_1, \dots, \theta_m$ — соответственно базис и кобазис m -мерного подпространства $\mathbb{L}$, т. е. $\langle \xi_i, \theta_j \rangle = \delta_{ij}$. Тогда

$$V_\xi \cdot V_\theta = \left| \det \begin{pmatrix} \langle \xi_1, \theta_1 \rangle & \cdots & \langle \xi_1, \theta_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \xi_m, \theta_1 \rangle & \cdots & \langle \xi_m, \theta_m \rangle \end{pmatrix} \right| = \det(E) = 1. \quad (6.2)$$

6.3. ФОРМУЛА КОПЛОЩАДИ (m -МЕРНЫЙ СЛУЧАЙ). Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, а $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq k$, — функция класса C^1 . Пусть еще $f : U \rightarrow \mathbb{E}$ — измеримая функция, где $\mathbb{E}$ — произвольное банахово пространство. Тогда если $f(x) \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}$ интегрируема, то справедлива формула

$$\int_U f(x) \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))} dx = \int_{\mathbb{R}^m} ds \int_{\varphi^{-1}(s)} f(u) d\mathcal{H}^{k-m}(u). \quad (6.3)$$

6.4. ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда $\varphi(x) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ — проекция на m -мерную плоскость $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^k$, то мы получаем теорему Фубини ($\varphi^{-1}(s)$ — $(k-m)$ -мерная плоскость, а $\mathcal{H}^{k-m}$ — $(k-m)$ -мерная мера Лебега на ней).

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

6.5. ЛЕММА. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, а $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq k$, — отображение класса C^1 . Пусть еще $f : U \rightarrow \mathbb{E}$ — измеримая функция, и отображение $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, заданное как

$$(x_1, \dots, x_k) \xrightarrow{g} (x_1, \dots, x_{k-m}, \varphi(x)),$$

является диффеоморфизмом на некотором открытом множестве $V \subset U$. Тогда, если $f(x)\sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}$ интегрируема, то справедлива формула

$$\int_V f(x)\sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))} dx = \int_{\mathbb{R}^m} ds \int_{\varphi^{-1}(s) \cap V} f(u) d\mathcal{H}^{k-m}(u). \quad (6.4)$$

6.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Величина

$$\mathcal{J}_m(x, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}$$

равна объему m -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $\nabla\varphi_1, \dots, \nabla\varphi_m$. Мы будем ее также называть коэффициентом коплощадки. Она характеризует искажение меры в ортогональном к поверхности $\varphi^{-1}(s)$ направлении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение g имеет следующую структуру:

$$\varphi^{-1}(s) \ni x = (x_1, \dots, x_k) \xrightarrow{g} (x_1, \dots, x_{k-m}, s).$$

Обозначим через $W = g(V)$ образ V при отображении g , а символом $\mathbb{R}_s^{k-m} = \{z \in \mathbb{R}^k : z = (y, s), y \in \mathbb{R}^{k-m}\}$ — сечение $\{z_{k-m+l} = s_l, l = 1, \dots, m\}$. Рассмотрим действие g^{-1} на множестве $W \cap \mathbb{R}_s^{k-m}$. Легко заметить, что

$$\varphi^{-1}(s) \cap V = \{x \in V : \varphi(x) = s\} = g^{-1}(W \cap \mathbb{R}_s^{k-m}). \quad (6.5)$$

По формуле замены переменной и теореме Фубини получаем

$$\begin{aligned} \int_V f(x) \mathcal{J}_m(x, \varphi) dx &= \int_W f(g^{-1}(z)) \mathcal{J}_m(g^{-1}(z), \varphi) |J(z, g^{-1})| dz \\ &= \int_{\text{Pr}_{\mathbb{R}^m} W} ds \int_{W \cap \mathbb{R}_s^{k-m}} f(g^{-1}(y, s)) \mathcal{J}_m(g^{-1}(y, s), \varphi) |J((y, s), g^{-1})| dy, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $z = (y, s)$, а $dy = dy_1 \dots dy_{k-m}$.

Фиксируем $s \in \text{Pr}_{\mathbb{R}^m} W$ и рассмотрим векторы

$$b_i(x) = dg^{-1}(z)(e_i), \quad i = 1, \dots, k - m,$$

составляющие базис касательной плоскости $\mathbb{T}_x$ к $(k - m)$ -мерному многообразию $\varphi^{-1}(s)$ в точке $x = g^{-1}(z)$ (см. (6.5)) (здесь $e_i, i = 1, \dots, k - m$, — векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^k$). Поскольку $\mathbb{R}^k = \mathbb{T}_x \oplus \mathbb{N}_x$, где $\mathbb{N}_x$ — нормальное пространство к $(k - m)$ -мерному многообразию $\varphi^{-1}(s)$ в точке $x = g^{-1}(z)$, то векторы

$$h_j(x) = dg^{-1}(z)(e_{k-m+j}), \quad j = 1, \dots, m,$$

можно разложить на касательную и нормальную составляющую:

$$h_j(x) = h_j^t(x) + h_j^n(x), \quad \text{где } h_j^t(x) \in \mathbb{T}_x, \text{ а } h_j^n(x) \in \mathbb{N}_x, \quad j = 1, \dots, m.$$

Запишем матрицу оператора $dg^{-1}(z)$ в виде $(b(x); h(x))$, где

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_{k-m}(x)) — (k \times (k - m))\text{-матрица,}$$

в которой координаты вектора $b_i(x)$ расположены в виде столбца, а

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x)) — (k \times m)\text{-матрица,}$$

в которой в виде столбца расположены координаты вектора $h_j(x)$. Очевидно

$$h(x) = h^t(x) + h^n(x) = (h_1^t(x), \dots, h_m^t(x)) + (h_1^n(x), \dots, h_m^n(x)).$$

Отсюда $\det(dg^{-1}) = \det(b(x); h(x)) = \det(b(x); h^n(x))$. Тогда, опуская для краткости аргумент x , имеем

$$\begin{aligned} |J(z, g^{-1})| &= \sqrt{\det(dg^{-1*}(z) dg^{-1}(z))} = \sqrt{\det((b; h^n)^*(b; h^n))} \\ &= \sqrt{\det(b^* b)} \sqrt{\det((h^n)^* h^n)} = \mathcal{J}(z, g^{-1}) \sqrt{\det((h^n)^* h^n)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Подставляя в (6.6) полученное равенство (6.7) для модуля якобиана, получаем:

$$\begin{aligned} \int_V f(x) \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))} dx &= \\ &= \int_{\text{Pr}_{\mathbb{R}^m} W} ds \int_{W \cap \mathbb{R}_s^{k-m}} f(g^{-1}(z)) \mathcal{J}(z, g^{-1}) M(z) dy, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $z = (y, s)$, $dy = dy_1 \dots dy_{k-m}$, а

$$M(z) = \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))} \sqrt{\det((h^n(x))^* h^n(x))}, \quad x = g^{-1}(z).$$

Применим теперь следствие 6.2 леммы 6.1, чтобы показать $M(z) = 1$ для всех z . Действительно, $g \circ g^{-1} = I$ — тождественное отображение, получаем $\varphi_j(g^{-1}(z)) = z_{k-m+j}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \delta_{jl} &= \frac{\partial}{\partial z_{k-m+l}} \varphi_j(g^{-1}(z)) = \sum_{r=1}^k \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r}(g^{-1}(z)) \frac{\partial g_r^{-1}}{\partial z_{k-m+l}}(z) \\ &= \langle \nabla \varphi_j(x), dg^{-1}(z)(e_{k-m+l}) \rangle = \langle \nabla \varphi_j(x), h_l(x) \rangle = \langle \nabla \varphi_j(x), h_l^n(x) \rangle, \end{aligned}$$

поскольку $\nabla \varphi_j(x) \in \mathbb{N}_x$ и поэтому $\langle \nabla \varphi_j(x), h_l^t(x) \rangle = 0$, $j, l = 1, \dots, m$. Совокупность векторов

$$\nabla \varphi_l(x), \quad l = 1, \dots, m, \quad x = g^{-1}(z),$$

линейно независима в нормальном пространстве $\mathbb{N}_x$, так как линейное отображение $d\varphi(x)$ имеет максимальный ранг. Следовательно, эта же совокупность векторов является базисом нормального пространства $\mathbb{N}_x$. Тогда совокупность векторов $h_j^n(x)$, $j = 1, \dots, m$, является кобазисом в $\mathbb{N}_x$.

Окончательно из (6.8) по формуле площади получаем

$$\begin{aligned} \int_V f(x) \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))} dx &= \\ &= \int_{\text{Pr}_{\mathbb{R}^m} W} ds \int_{W \cap \mathbb{R}_s^{k-m}} f(g^{-1}(z)) \mathcal{J}(z, g^{-1}) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} ds \int_{\varphi^{-1}(s) \cap V} f(u) d\mathcal{H}^{k-m}(u). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.3. Обозначим через

$$Z = \{x \in U : \det(d\varphi(x)d\varphi^*(x)) = 0\}.$$

Известно, что $x \in Z$ тогда и только тогда, когда $\text{rank } d\varphi(x) < m$. Рассмотрим открытое множество $\Omega = U \setminus Z$. Для любого $x \in \Omega$ существует $r_0(x)$ такое, что $\text{rank } d\varphi(y) = m$ для всякого $y \in Q(x, r_0(x))$.

Заметим, что, если $x \in \Omega$, то $\text{rank } d\varphi(x) = m$ и, следовательно, существуют $i_1, \dots, i_m$ такие, что

$$\text{rank } d\varphi(x) = \text{rank} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_1}}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_m}}(x) \right) = m.$$

(Здесь вектор $\frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_j}}$ записывается как столбец.)

Поэтому

$$\text{rank } d\varphi(y) = \text{rank} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_1}}(y), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_m}}(y) \right) = m$$

для всех y из некоторого шара $Q(x, r_1(x)) \subset \Omega$, $r_1(x) \leq r_0(x)$.

Рассмотрим отображение $g : Q(x, r_1(x)) \rightarrow \mathbb{R}^k$, заданное следующим образом:

$$Q(x, r_1(x)) \ni x = (x_1, \dots, x_k) \xrightarrow{g} (x_1, \dots, x_{i_1-1}, \varphi_1(x), x_{i_1+1}, \dots, x_{i_m-1}, \varphi_m(x), x_{i_m+1}, \dots, x_k),$$

где на i_j -ом месте вместо x_{i_j} стоит координатная функция φ_j отображения $\varphi(x)$, $j = 1, \dots, m$. Отображение g непрерывно дифференцируемо и якобиан $J(x, g)$ невырожден в точке x . Поэтому по теореме об обратной функции отображение g является диффеоморфизмом в некотором кубе $Q(x, r(x))$, $r(x) \leq r_1(x)$.

Фиксируем компактную область $\omega \Subset \Omega$. Открытые кубы $\{Q(x, r(x)) : x \in \bar{\omega}\}$ образуют открытое покрытие множества $\bar{\omega}$. Выберем из него конечное подпокрытие $\{Q(x_i, r_i) : x_i \in \bar{\omega}\}$, $i = 1, \dots, I$. Для достаточно большого n система двоичных кубов $\mathcal{M}_n = \{Q \in \mathcal{D}_n : \bar{Q} \subset \omega\}$ обладает следующим свойством: для любого двоичного куба $Q \in \mathcal{M}_n$ найдется куб $Q(x_i, r_i)$ такой, что $\bar{Q} \subset Q(x_i, r_i)$.

Покажем, что для любого куба $Q \in \mathcal{M}_n$ верно

$$\int_Q f(x) \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))} dx = \int_{\mathbb{R}^m} ds \int_{\varphi^{-1}(s) \cap Q} f(u) d\mathcal{H}^{k-m}(u). \quad (6.9)$$

Действительно, фиксируем $Q \in \mathcal{M}_n$, куб $Q_i = Q(x_i, r_i) \supset Q$. Допустим, что

$$\text{rank } d\varphi(y) = \text{rank} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_{k-m+1}}(y), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(y) \right) = m$$

для всех $y \in Q_i$. Определим отображение g :

$$Q_i \ni x = (x_1, \dots, x_k) \xrightarrow{g} (x_1, \dots, x_{k-m}, \varphi(x)),$$

где «часть $\varphi(x)$ » составлена из координатных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ таким образом, чтобы g было диффеоморфизмом на Q_i . Тогда равенство (6.9) следует из формулы (6.4) при $U = Q_i$ и $f = \chi_Q f$.

Просуммируем равенство (6.9) по всем $Q \in \mathcal{M}_n$. Получим (напомним, что $M_n = \bigcup_{Q \in \mathcal{M}_n} Q$)

$$\begin{aligned} \int_{M_n} f(x) \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))} dx &= \int_{\bigcup_{Q \in \mathcal{M}_n} Q} f(x) \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))} dx \\ &= \sum_{Q \in \mathcal{M}_n} \int_{\mathbb{R}^m} ds \int_{\varphi^{-1}(s) \cap Q} f(u) d\mathcal{H}^{k-m}(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} ds \int_{\varphi^{-1}(s) \cap M_n} f(u) d\mathcal{H}^{k-m}(u). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем (ОБОСНОВАТЬ ПЕРЕХОД)

$$\int_{\omega} f(x) \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))} dx = \int_{\mathbb{R}^m} ds \int_{\varphi^{-1}(s) \cap \omega} f(u) d\mathcal{H}^{k-m}(u). \quad (6.10)$$

Переходя к пределу в (6.10) по последовательности компактно вложенных областей $\omega_1 \Subset \omega_2 \Subset \dots \Subset \Omega$, исчерпывающей Ω : $\Omega = \bigcup_l \omega_l$, получаем (6.10) с Ω вместо ω .

Для окончания доказательства формулы (6.3) остается показать, что

$$\int_{\mathbb{R}^m} ds \int_{\varphi^{-1}(s) \cap Z} d\mathcal{H}^{k-m}(u) = 0. \quad (6.11)$$

Доказательство соотношения (6.11) легко выводится из приводимого ниже неравенства Эйленберга.

6.7. ЛЕММА. Пусть W — ограниченная область в $\mathbb{R}^k$, $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица с постоянной $\text{Lip}(\psi)$. Пусть еще $A \subset W$ — измеримое по Лебегу множество такое, что $|A| < \infty$, $m \leq k$. Тогда справедлива следующая оценка

$$\int_{\mathbb{R}^m}^* \mathcal{H}^{k-m}(A \cap \psi^{-1}(s)) ds \leq (\text{Lip}(\psi))^m \frac{\omega_{k-m}\omega_m}{\omega_k} |A|. \quad (6.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ существует семейство замкнутых шаров $\{B_i^j\}$, $i \in \mathbb{N}$, такое, что

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^j, \quad \text{diam } B_i^j \leq \frac{1}{j}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |B_i^j| \leq |A| + \frac{1}{j}.$$

Определим функции

$$g_i^j = \omega_{k-m} \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2} \right)^{k-m} \chi_{\psi(B_i^j)}.$$

В силу непрерывности отображения ψ множества $\psi(B_i^j)$ измеримы в $\mathbb{R}^m$, а вместе с ними измеримы также и функции g_i^j . Заметим, что для всех $s \in \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство

$$\mathcal{H}_{1/j}^{k-m}(A \cap \psi^{-1}(s)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} g_i^j(s).$$

По лемме Фату и изодиаметрическому неравенству находим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m}^* \mathcal{H}^{k-m}(\psi^{-1}(s) \cap A) ds &\leq \int_{\mathbb{R}^m}^* \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{1/j}^{k-m}(\psi^{-1}(s) \cap A) ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m}^* \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} g_i^j(s) ds \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m}^* \sum_{i=1}^{\infty} g_i^j(s) ds \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{k-m} \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2} \right)^{k-m} |\psi(B_i^j)| \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{k-m} \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2} \right)^{k-m} \omega_m \left(\frac{\text{diam } \psi(B_i^j)}{2} \right)^m \\ &\leq \frac{\omega_{k-m}\omega_m}{\omega_k} (\text{Lip}(\psi))^m \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |B_i^j| \\ &\leq \frac{\omega_{k-m}\omega_m}{\omega_k} (\text{Lip}(\psi))^m |A| \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство Эйленберга (6.12) доказано.

6.8. ЛЕММА. Пусть W — ограниченная область в $\mathbb{R}^l$, $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение класса $C^1(W)$, имеющее $\text{rank}(d\psi(x)) = m$ и удовлетворяющее условию Липшица с постоянной $\text{Lip}(\psi)$. Пусть еще $A \subset W$ — $\mathcal{H}^k$ -измеримое множество такое, что $\mathcal{H}^k(A) < \infty$, $m \leq k \leq l$. Тогда справедлива следующая оценка

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{k-m}(\psi^{-1}(s) \cap A) d\mathcal{H}^m(s) \leq (\text{Lip}(\psi))^m \frac{\omega_{k-m}\omega_m}{\omega_k} \mathcal{H}^k(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что функция

$$\mathbb{R}^m \ni s \mapsto \mathcal{H}^{k-m}(\psi^{-1}(s) \cap A) \quad (6.13)$$

$\mathcal{H}^m$ -измерима. В силу задачи 2.4 достаточно рассмотреть случай компактного множества A . Далее, если A компактно и $t > 0$, то

$$\{s \in \mathbb{R}^m : \mathcal{H}^{k-m}(\psi^{-1}(s) \cap A) \leq t\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j,$$

где множество V_j состоит из всех таких точек $s \in \mathbb{R}^m$, что множество $\psi^{-1}(s) \cap A$ имеет конечное открытое покрытие P такое, что

$$\text{diam } E_i \leq \frac{1}{j} \quad \text{для всех } E_i \in P \quad \text{и} \quad \frac{\omega_{k-m}}{2^{k-m}} \sum_{E_i \in P} (\text{diam } E_i)^{k-m} < t + \frac{1}{j}.$$

Нетрудно проверить, что каждое множество V_j открыто в $\mathbb{R}^m$. (ПОЧЕМУ?)

Фиксируем $j \in \mathbb{N}$. По определению меры $\mathcal{H}_{\frac{1}{j}}^k(A)$ существует система множеств $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ такая, что $\text{diam } E_i < \frac{1}{j}$, $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ и

$$\frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } E_i)^k \leq \mathcal{H}_{\frac{1}{j}}^k(A) + \frac{1}{j} \leq \mathcal{H}^k(A) + \frac{1}{j}.$$

Без ограничения общности можно считать, что все множества E_i компактны.

Рассмотрим отображение $\psi|_{E_i}$. Тогда

$$\psi|_{E_i}^{-1}(y) \cap A = \psi^{-1}(y) \cap A \cap E_i$$

и

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{j}}^{k-m}(\psi^{-1}(y) \cap A \cap E_i) \leq \frac{\omega_{k-m}}{2^{k-m}} (\text{diam } E_i)^{k-m}$$

для всех $y \in \psi(E_i)$ и $i \in \mathbb{N}$. В силу изодиаметрического неравенства (см. теорему 2.10) и липшицевости отображения ψ имеем

$$\mathcal{H}^m(\psi(E_i)) \leq \frac{\omega_m}{2^m} (\text{diam } \psi(E_i))^m \leq \frac{\omega_m (\text{Lip}(\psi))^m}{2^m} (\text{diam } E_i)^m.$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m}^* \mathcal{H}_{\frac{1}{j}}^{k-m}(\psi^{-1}(s) \cap A) d\mathcal{H}^m(s) \\ \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m}^* \mathcal{H}_{\frac{1}{j}}^{k-m}(\psi^{-1}(s) \cap A \cap E_i) d\mathcal{H}^m(s) \\ \leq \frac{\omega_{k-m}}{2^{k-m}} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } E_i)^{k-m} \mathcal{H}^m(\psi(E_i)) \\ \leq \frac{\omega_{k-m} \omega_m (\text{Lip}(\psi))^m}{2^k} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } E_i)^k \\ \leq \frac{\omega_{k-m} \omega_m (\text{Lip}(\psi))^m}{\omega_k} \left(\mathcal{H}^k(A) + \frac{1}{j} \right). \end{aligned}$$

Положим $g_j(s) = \mathcal{H}_{\frac{1}{j}}^{k-m}(\psi^{-1}(s))$ и докажем, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m}^* g_j(s) d\mathcal{H}^m(s) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{k-m}(\psi^{-1}(s) \cap A) d\mathcal{H}^m(s). \quad (6.14)$$

Действительно, с одной стороны $g_j(s) \rightarrow \mathcal{H}^{k-m}(\psi^{-1}(s) \cap A)$ при $j \rightarrow \infty$ для всех $s \in \mathbb{R}^m$, а, с другой стороны, функция (6.13) измерима. По определению интегральной нормы существуют измеримые функции $h_j(s)$ такие, что (ПОЧЕМУ?)

$$\begin{aligned} g_j(s) \leq h_j(s) \leq \mathcal{H}^{k-m}(\psi^{-1}(s) \cap A) \quad \text{и} \\ \int_{\mathbb{R}^m} h_j(s) d\mathcal{H}^m(s) \leq \int_{\mathbb{R}^m}^* g_j(s) d\mathcal{H}^m(s) + \frac{1}{j} \quad \text{для всех } j. \end{aligned}$$

Отсюда $\lim_{j \rightarrow \infty} h_j(s) = \mathcal{H}^{k-m}(\psi^{-1}(s) \cap A)$ для всех $s \in \mathbb{R}^m$ и

$$\int_{\mathbb{R}^m}^* g_j(s) d\mathcal{H}^m(s) \leq \int_{\mathbb{R}^m} h_j(s) d\mathcal{H}^m(s) \leq \int_{\mathbb{R}^m}^* g_j(s) d\mathcal{H}^m(s) + \frac{1}{j}.$$

По лемме Фату получаем (6.14). (ОБОСНОВАТЬ!)

6.9. ЗАДАЧА. В условиях леммы 6.8 множество

$$\psi^{-1}(s) \cap A$$

$\mathcal{H}^{k-m}$ -измеримо для $\mathcal{H}^m$ -почти всех $s \in \mathbb{R}^m$.

Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, а $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq k$, — отображение класса C^1 . Обозначим символом Z множество вырождения

$$\{x \in U : \det(d\varphi(x)d\varphi^*(x)) = 0\} = \{x \in U : \text{rank}(d\varphi(x)) < m\}.$$

6.10. ЛЕММА. Для отображения $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^k$, $m \leq k$, класса C^1 справедливо равенство (6.11):

$$\int_{\mathbb{R}^m} ds \int_{\varphi^{-1}(s) \cap Z} d\mathcal{H}^{k-m}(u) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать лемму для произвольной компактно вложенной области $\omega \Subset U$ и отображения $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq k$, класса C^1 . Заметим, что множество Z замкнуто как множество нулей непрерывной функции $\mathcal{J}_m(x, \varphi) = \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим отображения $\psi : \omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, определенные следующим образом

$$\psi(x, s) = \varphi(x) + \varepsilon s, \quad \pi(x, s) = s, \quad x \in \mathbb{R}^k, s \in \mathbb{R}^m,$$

Из этих определений следует, что

- 1) ψ — липшицево отображение, и $\text{Lip}(\psi) = \text{Lip}(\varphi) + \varepsilon$;
- 2) $d\psi(x, s) = (d\varphi(x); \varepsilon E)_{(k+m) \times m}$, где E — единичная $(m \times m)$ -матрица;
- 3) $d\psi(x, s)(v, w) = d\varphi(x)v + \varepsilon w$, $v \in \mathbb{R}^k$, $w \in \mathbb{R}^m$;
- 4) $\text{rank}(d\psi(x, s)) = m$ для всех $(x, s) \in U \times \mathbb{R}^m$;
- 5) $\mathcal{J}_m(\psi, (x, s)) = \sqrt{\det(d\psi(x, s)d\psi^*(x, s))} = \sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x) + \varepsilon^2 E)}$.

Из липшицевости отображения ψ , равенства $\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x)) = 0$ в точках множества Z , и 1), 5) вытекает

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_m((x, s), \psi)^2 &= \det(d\psi(x, s)d\psi^*(x, s)) \\ &\leq \varepsilon^{2m} + \varepsilon^{2(m-1)}(\text{Lip}(\varphi) + \varepsilon)^2 + \dots + \varepsilon^2(\text{Lip}(\varphi) + \varepsilon)^{2(m-1)} + 0,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\mathcal{J}_m((x, s), \psi) = \sqrt{\det(d\psi(x, s)d\psi^*(x, s))} \leq \varepsilon m(\text{Lip}(\varphi) + \varepsilon)^{m-1}.$$

Отсюда и из леммы 6.8 имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon m(\text{Lip}(\varphi) + \varepsilon)^{m-1} \omega_m \mathcal{H}^k(Z) &\geq \int_{Z \times B(0,1)} \mathcal{J}_m((x, s), \psi) dx ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} dy \int_{\psi^{-1}(y) \cap (Z \times B(0,1))} d\mathcal{H}^k(u) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^m} c dy \int_{\mathbb{R}^m} dw \int_{\pi^{-1}(w) \cap \psi^{-1}(y) \cap (Z \times B(0,1))} d\mathcal{H}^{k-m}(u),\end{aligned}$$

где $c = \frac{\omega_k}{\omega_{k-m}\omega_m}$. Заметим, что

$$\pi^{-1}(w) \cap \psi^{-1}(y) \cap (Z \times B(0,1)) = \varphi^{-1}(y - \varepsilon w) \cap Z.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} c dy \int_{\mathbb{R}^m} dw \int_{\pi^{-1}(w) \cap \psi^{-1}(y) \cap (Z \times B(0,1))} d\mathcal{H}^{k-m}(u) \\ = c \int_{\mathbb{R}^m} dy \int_{B(0,1)} d\mathcal{H}^m(w) \int_{\varphi^{-1}(y - \varepsilon w) \cap Z} d\mathcal{H}^{k-m}(u).\end{aligned}$$

Применяя замену $s = y - \varepsilon w$ и теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned}
c \int_{\mathbb{R}^m} dy \int_{B(0,1)} d\mathcal{H}^m(w) \int_{\varphi^{-1}(y-\varepsilon w) \cap Z} d\mathcal{H}^{k-m}(u) \\
= c \int_{\mathbb{R}^m} ds \int_{B(0,1)} d\mathcal{H}^m(w) \int_{\varphi^{-1}(s) \cap Z} d\mathcal{H}^{k-m}(u) \\
= c \int_{B(0,1)} d\mathcal{H}^m(w) \int_{\mathbb{R}^m} ds \int_{\varphi^{-1}(s) \cap Z} d\mathcal{H}^{k-m}(u) \\
= c\omega_m \int_{\mathbb{R}^m} ds \int_{\varphi^{-1}(s) \cap Z} d\mathcal{H}^{k-m}(u).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}^m} ds \int_{\varphi^{-1}(s) \cap Z} d\mathcal{H}^{k-m}(u) \leq \varepsilon m (\text{Lip}(\varphi) + \varepsilon)^{m-1} \frac{\omega_{k-m}\omega_m}{\omega_k} \mathcal{H}^k(Z)$$

для всякого $\varepsilon > 0$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^m} ds \int_{\varphi^{-1}(s) \cap Z} d\mathcal{H}^{k-m}(u) = 0.$$

6.11. ЗАДАЧА. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — k -мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ с k -мерной мерой Хаусдорфа $\mathcal{H}^k \llcorner \mathcal{M}$ на $\mathcal{M}$, а $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^l$ — m -мерное многообразие в $\mathbb{R}^l$ с m -мерной мерой Хаусдорфа $\mathcal{H}^m \llcorner \mathcal{N}$ на $\mathcal{N}$, $k \geq m$. Определить коэффициент коплощади $\mathcal{J}_m(x, \varphi)$, $x \in \mathcal{M}$, отображения $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ класса C^1 и написать соответствующую формулу коплощади.

Пусть $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{E}$ — измеримая функция, где $\mathbb{E}$ — произвольное банахово пространство. Тогда если $f(x) \mathcal{J}_m(x, \varphi) \mathcal{H}^k$ -интегрируема на $\mathcal{M}$, то справедлива формула

$$\int_{\mathcal{M}} f(x) \mathcal{J}_m(x, \varphi) dx = \int_{\mathcal{N}} d\mathcal{H}^m(s) \int_{\varphi^{-1}(s)} f(u) d\mathcal{H}^{k-m}(u). \quad (6.15)$$

УКАЗАНИЕ. Рассмотреть в качестве коэффициента коплощади $\mathcal{J}_m(x, \varphi)$ величину $\sqrt{\det(d\varphi(x)d\varphi^*(x))}$, где $d\varphi(x) : \mathbb{T}\mathcal{M}_x \rightarrow \mathbb{T}\mathcal{N}_{f(x)}$ — дифференциал отображения $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. Перейти в локальные системы

координат, свести задачу к теореме 6.3, а затем дважды применить формулу площади.

СХЕМА РЕШЕНИЯ. Пусть (U, ψ) и (V, χ) — локальные параметризации $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ такие, что суперпозиция $\xi = \chi^{-1} \circ \varphi \circ \psi$ имеет смысл. Обозначим $y = \psi^{-1}(x)$. Рассмотрим в качестве коэффициента коплощади $J_m(x, \varphi)$ величину $\frac{\sqrt{\det(d(\varphi \circ \psi(y))d(\varphi \circ \psi)^*(y))}}{\mathcal{J}_m(\psi, y)}$. Применяя формулу площади, имеем $\mathcal{J}_m(\xi) \cdot \mathcal{J}(\chi) = \mathcal{J}_m(\varphi \circ \psi)$. Переходя в локальные системы координат, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\psi(U)} \mathcal{J}_m(\varphi) d\mathcal{H}^k &= \int_U \frac{\mathcal{J}_m(\varphi \circ \psi)}{\mathcal{J}_m(\psi)} \mathcal{J}(\psi) d\mathcal{H}^k \\ &= \int_U \mathcal{J}_m(\varphi \circ \psi) \mathcal{J}_{k-m}(\psi) d\mathcal{H}^k = \int_U \mathcal{J}_{k-m}(\psi) \mathcal{J}(\chi) \mathcal{J}_m(\xi) d\mathcal{H}^k \end{aligned}$$

и применяем формулу коплощади к отображению ξ . Рассмотрим случай, когда множество вырождения коэффициента коплощади Z пусто. Заметим, что величина $\mathcal{J}_{k-m}(\psi, y)$ — якобиан отображения множества уровня $\psi|_{(\varphi \circ \psi)^{-1}(\varphi(x))}$. Тогда, применяя два раза формулу площади, получаем требуемый результат.

Общий случай, когда $Z \neq \emptyset$, переходом к локальным координатам рассматривается аналогично ситуации $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$.

7. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРЕМА ГРИНА — ГАУССА — ОСТРОГРАДСКОГО — СТОКСА

В системе координат $(x_1, \dots, x_n)$ форму $\omega \in \mathcal{F}_r^k(U)$ степени k на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ класса C^r можно записать в следующем виде:

$$\omega(x) = \sum_J a_J(x) dx_J, \quad (7.1)$$

где $a_J \in C(U)$, суммирование идет по всем наборам J упорядоченных натуральных символов $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, а $dx_J = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

Операция *внешнего дифференцирования* в координатах $(x_1, \dots, x_n)$ определяется как

$$d\omega(x) = \sum_J da_J(x) \wedge dx_J, \quad (7.2)$$

где $da_J(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_J}{\partial x_i} dx_i$ — первый дифференциал функции a_J .

7.1. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ.

1) Если $\omega \in \mathcal{F}_r^k(U)$, то $d\omega \in \mathcal{F}_{r-1}^{k+1}(U)$, $r \geq 1$.

2) $d(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 d\omega_1 + \lambda_2 d\omega_2$.

3) $d(\omega^k \wedge \omega^l) = d\omega^k \wedge \omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge d\omega^l$.

4) $d^2\omega = d(d\omega) = 0$ (формула Пуанкаре).

5) $df^* = f^*d$.

6) Операция внешнего дифференцирования не зависит от выбора системы координат.

7) Если ω форма степени k на n -мерном многообразии $\mathcal{M}$, (U, φ) — локальная система координат в окрестности точки $x \in \mathcal{M}$, то для векторов $\xi_1, \dots, \xi_{k+1} \in \mathbb{T}\mathcal{M}_x$ определим

$$d\omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) \stackrel{\text{def}}{=} d(\varphi^{-1*}\omega)(\varphi_*\xi_1, \dots, \varphi_*\xi_{k+1}). \quad (7.3)$$

Напомним, что $\varphi_*\xi_i = D\varphi(x)(\xi_i)$.

ПРОВЕРИТЬ, что операция внешнего дифференцирования не зависит от выбора системы координат.

Совершенство и гармония формулы

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega \quad (7.4)$$

столь очевидны, что оправданы все усилия, чтобы придать смысл всем входящим в нее объектам. Если $\mathcal{M}$ — это отрезок $[a, b]$, в котором указано, что точка, например, a начальная, а точка b конечная, $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса C^1 , dF — ее дифференциал, то известная формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

имеет следующую интерпретацию:

$$\int_{\mathcal{M}} dF = \int_a^b f(x) dx, \quad \text{а} \quad \int_{\partial\mathcal{M}} F = F(b) - F(a),$$

где $\partial\mathcal{M}$ — это край многообразия $\mathcal{M}$, на котором индуцирована ориентация: "+" в точке b и "-" в точке a .

Пусть теперь граница ∂U ограниченного открытого множества U — гладкое многообразие размерности $n - 1$. Таким образом, $\mathcal{M} = \overline{U}$ — многообразие с краем. Фиксируем ориентацию в $\mathbb{R}^n$ и базис $e_1, \dots, e_n$, согласованный с ориентацией. Тогда в системе координат $(x_1, \dots, x_n)$ n -форма ω на $\mathcal{M}$ может быть записана в виде $\omega(x) = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Определим в этом случае интеграл от ω по ориентированному многообразию $\mathcal{M}$ как интеграл от функции f по множеству U :

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \int_U f(x) dx.$$

Посмотрим как можно получить то же самое значение интеграла от формы в другой системе координат, имея в виду проверить впоследствии корректность определения интеграла от формы. Пусть задана другая система координат $(y_1, \dots, y_n)$, $y = \varphi(x)$, $\varphi : U \rightarrow W$ — диффеоморфизм, а $\psi = \varphi^{-1}$, обратный у нему. По формуле замены переменных выводим

$$\begin{aligned} \int_U f(x) dx &= \int_W f(\psi(y)) |\det D(\psi)(y)| dy \\ &= \text{sign}(\det D(\psi)(\cdot)) \int_W \psi^* \omega. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Поскольку ψ — диффеоморфизм, знак $\det D(\psi)(y)$ всегда постоянный: $+1$, если диффеоморфизм сохраняет ориентацию, и -1 , если он ее обращает. Таким образом, соотношения (7.5) мотивируют следующий вывод: *для системы координат, сохраняющей ориентацию, определение*

$$\int_{\mathcal{M}} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_W \psi^* \omega \quad (7.6)$$

корректно, т. е. не зависит от выбора системы координат, согласованной с первоначальной.

Если ориентация на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ определяется ориентацией пространства $\mathbb{R}^n$, то определение ориентации произвольного многообразия требует некоторой формализации. Для объяснения

подхода рассмотрим в каждой точке $x \in U$ касательное пространство TU_x , которое каноническим образом можно отождествить с $\mathbb{R}^n$: для этого надо «прикрепить» в каждой точке x экземпляр пространства $\mathbb{R}^n$, которое параллельно сдвигается так, чтобы точка 0 совпала с точкой x . Как известно, ориентация на $\mathbb{R}^n$ — это фиксированный класс эквивалентности базисов, которые мы объявляем «положительными».¹ Понятно, что при параллельном сдвиге векторов базиса пространства $\mathbb{R}^n$ из точки 0 в точку x его ориентация не меняется и, тем самым, базис в TU_x , полученный параллельным переносом из базиса пространства $\mathbb{R}^n$, определяет ориентацию в TU_x , которая согласована с ориентацией в соседних точках. Таким образом, каждому базису в TU_x можно сопоставить значение $+1$ или -1 в зависимости от того, согласован он с выбранной ориентацией или нет. Таким образом, мы получаем функцию

$$\theta : (x; \langle v_1, \dots, v_n \rangle) \mapsto \{-1, +1\}, \quad \langle v_1, \dots, v_n \rangle \text{ — базис в } TU_x, \quad (7.7)$$

которая обладает одним очевидным свойством: функция θ непрерывна при непрерывной деформации, так как при таком процессе мы не можем без разрыва поменять ориентацию на противоположную. Формализация выражения «непрерывная деформация базиса» может быть реализована следующим образом.

Фиксируем многообразие $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^l$ размерности $n \leq l$ и рассмотрим совокупность всех базисов в касательном пространстве этого многообразия во всех его точках:

$$\mathcal{BM} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} \langle v_1, \dots, v_n \rangle, \quad \text{где } \langle v_1, \dots, v_n \rangle \text{ — базис в } T\mathcal{M}_x. \quad (7.8)$$

Так как $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^l$, а $T\mathcal{M}_x$ изоморфно $\mathbb{R}^n$, то $\mathcal{BM}$ естественным образом вкладывается в $\mathbb{R}^l \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ раз}}$:

$$(x; \langle v_1, \dots, v_n \rangle) \mapsto (x, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^l \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ раз}}.$$

¹Здесь следует отметить, что с математической точки зрения нет никакого канонического правила считать данный базис положительным или отрицательным, а есть лишь способ — знак определителя матрицы перехода от одного базиса к другому — сказать, что два базиса сориентированы одинаково или противоположно. Употребляемые иногда правила: «против часовой стрелки» или «правило буравчика», пришли в математику из физики, где такой выбор ориентации имеет физический смысл.

Мы индуцируем на $\mathcal{BM}$ метрику из объемлющего пространства. Таким образом, $\mathcal{BM}$ становится метрическим пространством и, следовательно, определено понятие «близости» между базисами в различных касательных пространствах.

7.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ориентацией* на $\mathcal{M}$ называется всякая непрерывная функция

$$\theta : \mathcal{BM} \rightarrow \{-1, +1\},$$

нечетная по каждой векторной переменной:

$$\theta(x; \langle \varepsilon_1 v_1, \dots, \varepsilon_n v_n \rangle) = \varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_n \theta(x; \langle v_1, \dots, v_n \rangle)$$

для всех $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}$.

7.3. ПРИМЕР. 1) 0-мерное многообразие состоит из конечного набора точек, каждой из них сопоставляется значение либо -1 , либо $+1$.

2) Любая дуга ориентируема (ФОРМАЛИЗОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ).

3) $\theta(x; \langle v_1, \dots, v_n \rangle) = \text{sign det}(v_1, \dots, v_n)$ — стандартная ориентация на $\mathbb{R}^n$.

4) $\theta(x; \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle) = \text{sign det}(x, v_1, \dots, v_{n-1})$ — стандартная ориентация единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

5) $f = (f_1, \dots, f_{n-k}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ — отображение класса C^1 такое, что $\text{rank } Df(x) = n - k$ во всех точках $x \in f^{-1}(0)$. Тогда $f^{-1}(0)$ — многообразие размерности k и его ориентация определяется по правилу

$$\theta(x; \langle v_1, \dots, v_k \rangle) = \text{sign det}(\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-k}(x), v_1, \dots, v_k),$$

где $x \in \mathcal{M}$, $v_1, \dots, v_k \in T\mathcal{M}_x$, а $\nabla f_i(x)$ — градиент координатной функции f_i .

7.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многообразие $\mathcal{M}$, $\dim \mathcal{M} = k$, называется *ориентированным*, если на нем задана ориентация θ .

Базис $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ в $T\mathcal{M}_x$ называется *ориентированным положительно* (отрицательно), если $\theta(x; \langle v_1, \dots, v_k \rangle) > 0$ ($\theta(x; \langle v_1, \dots, v_k \rangle) < 0$).

Диффеоморфизм $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ двух ориентированных многообразий сохраняет ориентацию, если дифференциал $Df(x)$ переводит базисы касательного пространства $T\mathcal{M}_x$ в базисы касательного пространства $T\mathcal{M}_{f(x)}$ того же наименования.

7.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^l$ — n -мерное многообразие с краем $\partial\mathcal{M}$, и θ — ориентация на $\mathcal{M}$. *Индукцированная ориентация* θ' края $\partial\mathcal{M}$ определяется по следующему правилу. В точке $x \in \partial\mathcal{M}$ возьмем вектор $v(x) \in T\mathcal{M}_x$, направленный наружу: если $v(x) = \dot{\gamma}(0)$, где $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^l$, $\gamma(0) = x$, — гладкая кривая, то $\gamma(\langle -\sigma, 0 \rangle) \subset \mathcal{M}$ для некоторого $\sigma > 0$. Определим индуцированную ориентацию края как функцию

$$\theta'(x; \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle) = \theta(x; \langle v(x), v_1, \dots, v_{n-1} \rangle) \quad (7.9)$$

для $v_1, \dots, v_{n-1} \in T\partial\mathcal{M}_x$.

7.6. ЗАДАЧА. Доказать, что индуцированная ориентация определена корректно, т. е. не зависит от выбора вектора $v(x)$, направленного наружу.

УКАЗАНИЕ. Рассмотреть в точке $x \in T\partial\mathcal{M}_x$ два вектора $v(x)$ и $w(x)$, направленных наружу, и показать, что любой вектор $v_t(x) = tv(x) + (1-t)w(x)$, $t \in [0, 1]$, также направлен наружу. Тогда в силу непрерывности функции θ получаем

$$\theta(x; \langle v(x), v_1, \dots, v_{n-1} \rangle) = \theta(x; \langle w(x), v_1, \dots, v_{n-1} \rangle),$$

что и доказывает корректность определения.

7.7. ЗАДАЧА. Доказать, замкнутый шар $B = \overline{B(0, 1)} \subset \mathbb{R}^n$ — n -мерное многообразие с краем, его край — сфера $S = S(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ и индуцированная ориентация края совпадает со стандартной ориентацией сферы.

7.8. ЗАДАЧА. Пусть задано n -мерное компактное ориентированное многообразие $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ с краем, теоретико-множественная граница которого совпадает с краем $\partial\mathcal{M}$. Тогда существует функция $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^1 , по крайней мере, такая, что

- 1) $g^{-1}(0) = \partial\mathcal{M}$,
- 2) $\nabla g(x) \neq 0$ в точках $x \in \partial\mathcal{M}$,
- 3) $g < 0$ на $\mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}$ и
- 4) $g > 0$ вне $\mathcal{M}$.

Предположим теперь, что край $\partial\mathcal{M}$ многообразия $\mathcal{M}$ — это поверхность уровня функции $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^1 такой, что

- 1) $g^{-1}(0) = \partial\mathcal{M}$,
- 2) $\nabla g(x) \neq 0$ в точках $x \in \partial\mathcal{M}$,
- 3) $g < 0$ на $\mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}$ и
- 4) $g > 0$ вне $\mathcal{M}$.

Таким образом, градиент $\nabla g(x)$ перпендикулярен касательной плоскости $T\partial\mathcal{M}_x$, и направлен вне многообразия $\mathcal{M}$. В силу непрерывности градиент $\nabla g(x)$ будет также отличным от нуля и в некоторой окрестности многообразия $\partial\mathcal{M}$. Тогда для отрицательных t , достаточно близких к нулю, имеем

$$\mathcal{M}_t \stackrel{\text{def}}{=} \{x : g(x) < t, \nabla g(x) \neq 0 \text{ для } g(x) = t\} \subset \mathcal{M},$$

причем граница $\partial\mathcal{M}_t$ — многообразие размерности $n - 1$.

Рассмотрим на $\mathcal{M}$ внешнюю форму ω степени $n - 1$ класса $\mathcal{F}_1^{n-1}$. Имеем

$$d((g - t)\omega) = dg \wedge \omega + (g - t)d\omega. \quad (7.10)$$

Поскольку $(g - t)\omega$ равно нулю на $\partial\mathcal{M}_t$, то по теореме Фубини получаем

$$\int_{\mathcal{M}_t} d((g - t)\omega) = 0. \quad (7.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАВЕНСТВА (7.11). Имеем форму ω степени $n - 1$, коэффициенты которой непрерывно дифференцируемы во внутренних точках компактной области $U \Subset \mathbb{R}^n$ непрерывны вплоть до границы и равны нулю на границе. Надо доказать, что для такой формы

$$\int_U d\omega = 0.$$

Заметим, что если $\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$, то

$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\int_U \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(x) dx = 0 \quad (7.12)$$

для любого фиксированного $i = 1, \dots, n$. По теореме Фубини имеем

$$\int_U \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\text{Pr}_i U} dy \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(y, x_i) dx_i,$$

где $x = (y, x_i)$, $\text{Pr}_i(x) = y$ — проектирование вдоль i -ой компоненты. Для проверки (7.12) достаточно доказать, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(y, x_i) dx_i = 0 \quad (7.13)$$

для $(n-1)$ -почти всех $y \in \text{Pr}_i U$. Фиксируем y и рассмотрим пересечение $V = \{x_i : (y, x_i) \in U\} \subset \mathbb{R}$. Это пересечение открыто и поэтому представимо в виде объединения не более чем счетной совокупности дизъюнктивных интервалов: $V = \bigcup_j (\alpha_j, \beta_j)$. Поскольку

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(y, x_i) dx_i = \sum_j \int_{(\alpha_j, \beta_j)} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(y, x_i) dx_i,$$

то для проверки (7.13) достаточно применить формулу Ньютона — Лейбница к каждому слагаемому:

$$\int_{(\alpha_j, \beta_j)} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(y, x_i) dx_i = a_i(\beta_j) - a_i(\alpha_j) = 0,$$

поскольку $a_i(\beta_j) = a_i(\alpha_j) = 0$. $\square$

Из (7.10) и (7.11) выводим

$$\int_{\mathcal{M}} dg \wedge \omega = - \int_{\mathcal{M}} g d\omega = - \int_{\mathcal{M}} (g - t) d\omega - t \int_{\mathcal{M}} d\omega$$

и

$$\int_{\mathcal{M}_t} dg \wedge \omega = - \int_{\mathcal{M}_t} (g - t) d\omega.$$

Вычитая из верхнего равенства нижнее, получаем

$$\int_{\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_t} dg \wedge \omega = - \int_{\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_t} (g - t) d\omega - t \int_{\mathcal{M}} d\omega. \quad (7.14)$$

Запишем форму ω в следующем виде:

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Тогда

$$dg \wedge \omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Преобразуем левую часть (7.14) по формуле коплощади

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M} \setminus M_t} dg \wedge \omega &= \int_{g^{-1}(t,0)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) a_i(x) dx = \\ &= \int_t^0 ds \int_{g^{-1}(s)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) a_i(x) \frac{d\mathcal{H}^{n-1}(x)}{|\nabla g(x)|} \quad (7.15) \end{aligned}$$

($|\nabla g(x)|$ не равен нулю на $\mathcal{M} \setminus M_t$ при t достаточно близком к 0). Обозначая символом

$$\eta(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_n(x)) = |\nabla g(x)|^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \right)$$

нормированный градиент, из (7.14) и (7.15) получаем (ПРОВЕРИТЬ!)

$$-\frac{1}{t} \int_t^0 ds \int_{g^{-1}(s)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) a_i(x) \frac{d\mathcal{H}^{n-1}(x)}{|\nabla g(x)|} = \int_{\mathcal{M}} d\omega + \frac{1}{t} \int_{\mathcal{M} \setminus M_t} (g - t) d\omega.$$

Переходя в последней формуле к пределу при $t \rightarrow -0$, имеем (ПРОВЕРИТЬ!)

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{g^{-1}(0)} \sum_{i=1}^n \eta_i(x) a_i(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x). \quad (7.16)$$

Равенство (7.16) мотивирует следующее определение интеграла от формы ω по многообразию $\partial\mathcal{M}$:

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \omega = \int_{g^{-1}(0)} \sum_{i=1}^n \eta_i(x) a_i(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \quad (7.17)$$

при условии, что нормаль к краю $\partial\mathcal{M}$ многообразия $\mathcal{M}$ направлена наружу.

Посмотрим как вычислять правую часть равенства (7.17). Рассмотрим в точке $x \in \partial\mathcal{M}$ некоторую локальную систему координат (U, φ) такую, что

- 1) $\varphi : U \rightarrow W$ — диффеоморфизм,
- 2) $\varphi(U \cap \partial \mathcal{M}) = W \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$,
- 3) $\varphi(U \cap \mathcal{M}) = W \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}$ и
- 4) $\varphi(x) = 0$.

Ориентируем пространство $\mathbb{R}^{n-1}$ так, чтобы базис $e_1, \dots, e_{n-1}$, согласованный с ориентацией $\mathbb{R}^{n-1}$, обладал следующим свойством: *базис*

$$e_n, e_1, \dots, e_{n-1}$$

ориентирован как $\mathbb{R}^n$. Такая ориентация $\mathbb{R}^{n-1}$ совпадает с *индуцированной* из $\mathbb{R}^n$. Мотивировка такого определения состоит в том, чтобы вектор $D\varphi^{-1}(0)(e_n)$ был направлен в тоже полупространство, что и $\eta(x)$ при условии, что $\det D\varphi^{-1}(0) > 0$. Обозначая $\psi = \varphi^{-1}$ получаем следующую формулу для вычисления

$$\begin{aligned} & \int_{U \cap \partial \mathcal{M}} \sum_{i=1}^n \eta_i(u) a_i(u) d\mathcal{H}^{n-1}(u) \\ &= \int_{\varphi(U \cap \partial \mathcal{M})} \sum_{i=1}^n \eta_i(\psi(w)) a_i(\psi(w)) \sqrt{\det D\psi^*(w) D\psi(w)} dw. \quad (7.18) \end{aligned}$$

Координаты вектора нормали $\eta_i(\psi(w))$ находятся как алгебраические дополнения $A_1, \dots, A_n$ к элементам $e_1, \dots, e_n$ в символическом определителе

$$\det \begin{pmatrix} e_1 & \frac{\partial \psi_1}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial w_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ e_i & \frac{\partial \psi_i}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial \psi_i}{\partial w_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ e_n & \frac{\partial \psi_n}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial w_{n-1}} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n A_i e_i,$$

которые необходимо ортонормировать: $\eta_i(\psi(w)) = A_i / \sqrt{A_1^2 + \dots + A_n^2}$. Заметим, что по теореме Бине — Коши (см. теорему 4.4)

$$\sqrt{A_1^2 + \dots + A_n^2} = \sqrt{\det D\psi^*(w) D\psi(w)}.$$

Кроме того, можно проверить (ПРОВЕРИТЬ!)

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i A_i(w) a_i(\psi(w)) dw_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dw_i} \wedge \dots \wedge dw_{n-1} = \psi^* \omega.$$

Таким образом, при выбранном направлении нормали мы получаем две возможности для вычисления интеграла формы ω на окрестности $U \cap \partial\mathcal{M}$ многообразия $\partial\mathcal{M}$ в координатах, согласованных с ориентацией:

$$\int_{U \cap \partial\mathcal{M}} \omega = \int_{U \cap \partial\mathcal{M}} \sum_{i=1}^n \eta_i(x) a_i(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{\varphi(U \cap \partial\mathcal{M})} \psi^* \omega. \quad (7.19)$$

Из формулы (7.19) имеем следующий замечательный вывод: *интеграл в правой части формулы (7.19) не зависит от выбора системы координат*. Следовательно, правая часть формулы (7.19) может быть взята за определение формы по многообразию:

7.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если ω — непрерывная форма степени k на k -мерном ориентированном многообразии $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}^n$, то в системе координат (U, φ) , согласованной с ориентацией

$$\int_{U \cap \partial\mathcal{M}} \omega = \int_{\varphi(U \cap \partial\mathcal{M})} \psi^* \omega. \quad (7.20)$$

Система координат (U, φ) согласована с ориентацией если дифференциал $d\varphi(x)|_{T\mathcal{M}_x}$ положительные базисы в $T\mathcal{M}_x$ переводит в положительные базисы в $T\mathcal{R}_x^k$.

Последний интеграл в формуле (7.19) имеет следующий геометрический смысл в случае $\omega = a_1(x)dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$, $\varphi(U \cap \partial\mathcal{M}) = V \subset \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(U \cap \partial\mathcal{M})} \psi^* \omega &= \sum_{Q \in \mathcal{D}_l} \int_{Q \cap V \neq \emptyset} a_1(\psi(y)) \psi^*(dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{Q \in \mathcal{D}_l} a_1(\psi(y_Q)) (dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n)(\psi^*(t_Q e_1), \dots, \psi^*(t_Q e_{n-1}))) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{Q \in \mathcal{D}_l} a_1(\psi(y_Q)) OV(\text{Pr}_1 D\psi(y_Q)(Q)), \end{aligned}$$

где двоичный куб $Q \in \mathcal{D}_l$ натягивается на векторы $(t_Q e_1, \dots, t_Q e_{n-1})$ с началом в точке y_Q , $D\psi(y_Q)(Q)$ — образ куба Q при линейном отображении $D\psi(y_Q)$, Pr_1 — проекция вдоль первой координаты, OV — ориентированный объем. Так что $OV(\text{Pr}_1 D\psi(y_Q)(Q))$ — ориентированный объем проекции параллелепипеда $D\psi(y_Q)(Q)$ на $(n-1)$ -мерную плоскость вдоль первой координаты.

Подведем итог вышеприведенных аргументов. Доказана

7.10. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРЕМА ГРИНА — ГАУССА — ОСТРОГРАДСКОГО — СТОКСА. Для компактного n -мерного ориентированного многообразия $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ с краем $\partial\mathcal{M}$, на котором фиксирована индуцированная ориентация, и формы $\omega \in \mathcal{F}_1^{n-1}(\mathcal{M})$ справедлива формула 7.4:

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega.$$

7.11. ЗАДАЧА. Доказать ОБОБЩЕННУЮ ТЕОРЕМУ СТОКСА: для компактного k -мерного ориентированного многообразия $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ с краем $\partial\mathcal{M}$, на котором фиксирована индуцированная ориентация, и формы $\omega \in \mathcal{F}_1^{k-1}(\mathcal{M})$ справедлива формула 7.4:

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega.$$

УКАЗАНИЕ: Использовать разбиение единицы.

7.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — $(n-1)$ -мерное многообразие, на котором задано непрерывное поле единичного вектора нормали $\eta(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_n(x))$. Внешняя форма

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \eta_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

заданная на $\mathcal{M}$ называется *формой объема*.

7.13. ЗАДАЧА. Вывести из (7.19), что

$$\int_{U \cap \partial\mathcal{M}} \omega = \int_{U \cap \partial\mathcal{M}} d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \mathcal{H}^{n-1}(U \cap \partial\mathcal{M}).$$

7.14. ЗАДАЧА. Проверить, что сфере $S(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ форма объема ω , найденная по вектору внешней нормали, совпадает с формой Гаусса θ : для векторов $v_1, \dots, v_{n-1} \in TS_x$ имеем

$$\omega(x) \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle = \det(x, v_1, \dots, v_{n-1}) = \theta(x) \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle.$$

8. ВТОРАЯ ЛЕММА ПУАНКАРЕ

Предположим, что $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ — форма первой степени на $\mathbb{R}^n$, оказавшаяся равной $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Очевидно, можно считать, что $f(0) = 0$. Заметим, что

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) \cdot x_i dt.$$

Это наводит на мысль, что для отыскания f по заданному ω следует рассмотреть функцию $I\omega$, определяемую равенством

$$I\omega(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) \cdot x_i dt.$$

Заметим, что для того, чтобы определение $I\omega$ имело смысл, нужно лишь, чтобы ω было определено на открытом множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, обладающим тем свойством, что вместе со всяким $x \in A$ весь прямолинейный отрезок, соединяющий 0 и x , содержится в A . Такое открытое множество называется *звездным* относительно 0. Довольно сложное вычисление показывает, что (на звездном открытом множестве) равенство $\omega = d(I\omega)$ действительно имеет место, лишь бы ω удовлетворяло необходимому условию $d\omega = 0$. Это вычисление, равно как и $I\omega$, можно значительно обобщить.

8.1. ТЕОРЕМА. *Всякая замкнутая форма на открытом множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, звездном относительно 0, точна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы определим функцию I , относящую всякой форме l -й степени некоторую форму $(l-1)$ -й степени (для каждого l) так, что $I(0) = 0$ и $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$ для всякой формы ω . При $d\omega = 0$ будем иметь тогда $\omega = d(I\omega)$. Пусть

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_l} \omega_{i_1, \dots, i_l} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l}.$$

Так как A звездно, то можно положить

$$I\omega(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{\alpha=1}^l (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_l}.$$

Тождество $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$ доказывается прямым вычислением. Используя правило Лейбница, имеем

$$\begin{aligned} d(I\omega) = l \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_l} \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} + \\ \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{j=1}^n (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^l \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_{i_1, \dots, i_l})(tx) dt \right) \times \\ x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_l}. \end{aligned}$$

(Почему вместо t^{l-1} появилось t^l ?) С другой стороны,

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_{i_1, \dots, i_l}) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l}$$

и, применяя I к форме $(l+1)$ -й степени $d\omega$, получаем

$$\begin{aligned} I(d\omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^l \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_{i_1, \dots, i_l})(tx) dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} \\ - \sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^l (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^l \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_{i_1, \dots, i_l})(tx) dt \right) \times \\ x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_l}. \end{aligned}$$

При сложении полученных выражений тройные суммы взаимно уничтожаются и мы будем иметь

$$\begin{aligned}
I(d\omega) + d(I\omega) &= \sum_{i_1 < \dots < i_l} l \cdot \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} + \\
&\sum_{i_1 < \dots < i_l} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_{i_1, \dots, i_l})(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} = \\
&\sum_{i_1 < \dots < i_l} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} [t^l \omega_{i_1, \dots, i_l}(tx)] dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} = \\
&\sum_{i_1 < \dots < i_l} \omega_{i_1, \dots, i_l} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} = \omega.
\end{aligned}$$