

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ 4-ГО СЕМЕСТРА

Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра.
Критерий Коши равномерной сходимости.
Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости.
Теоремы о предельном переходе по параметру, непрерывности по параметру, дифференцируемости по параметру (правило Лейбница), интегрируемости по параметру интегралов зависящих от параметра.
Определение бесконечного произведения.
Признаки сходимости.
Определение внешней меры. Примеры.
Определение измеримости по Каратеодори.
Связь с измеримостью по Лебегу.
Свойства измеримых подмножеств.
Критерий Каратеодори измеримости борелевских множеств в метрическом пр-ве.
Меры Хаусдорфа. Свойства меры Хаусдорфа.
Теорема о регулярности меры Хаусдорфа. Размерность по Хаусдорфу.
Изодиаметрическое неравенство.
Связь между мерами Хаусдорфа и Лебега.
Лемма о локальном искажении меры (определитель Грама как элемент площади поверхности).
Формула площади.
Длина кривой, площадь графика функции.
Мера Хаусдорфа на многообразии.
Площадь поверхности вращения.
Формула коплощади.
Интеграл Лебега в полярной системе координат.
Внешние дифференциальные формы первой степени.
Интегрирование форм первой степени. Свойства интеграла. Примеры.
Формула Грина.
Условие независимости интеграла от выбора пути, соединяющего данные точки.
Примеры.
Понятие внешней дифференциальной формы степени $r \geq 0$ на открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$.
Форма Гаусса.
Операции над дифференциальными формами.
Координатное представление дифференциальных форм.
Внешнее произведение дифференциальных форм и его свойства.
Внешний дифференциал и его свойства.
Первая теорема Пуанкаре.
Гладкие отображения открытых множеств пространства $\mathbb{R}^n$ и индуцированные ими преобразования внешних форм (операция переноса).
Понятие ориентации k -мерного многообразия в $\mathbb{R}^n$.
Индуцированная ориентация края.
Определение k -мерного куска.
 k -мерная сингулярная цепь.
Граница k -мерной сингулярной цепи.
Интегрирование по k -мерной сингулярной цепи.
Формула Стокса — Пуанкаре.

Понятие интеграла внешней формы по ориентированному дифференцируемому многообразию.

Определение интеграла внешней формы на многообразии. Корректность определения.

Признак интегрируемости.

Свойства интеграла.

Теорема Стокса на многообразиях.

Векторные поля и дифференциальные формы. Основные понятия векторного анализа.

Точные и замкнутые формы.

Понятие звездной области.

Вторая теорема Пуанкаре.

Интеграл от формы Гаусса.

Теорема о пленке.

Теорема Брауэра о неподвижной точке.

Понятие свертки и ее свойства.

Определение Δ -образной последовательности. Примеры.

Лемма о равномерном приближении.

Аппроксимационная теорема Вейерштрасса.

Равномерное приближение непрерывной функции тригонометрическими многочленами.

Теорема о непрерывности сдвига в $L_1(\mathbb{R}^k)$.

Теорема об аппроксимации единицы.

Средние по Стеклову и Соболеву (свертка функций с ядром Соболева или Стеклова).

Гладкость средних функций с гладким ядром.

Теорема о плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ в $L_1(\mathbb{R}^k)$.

Определение тригонометрической системы функций. Ее свойства.

Коэффициенты Фурье функции относительно тригонометрической системы.

Лемма Римана — Лебега.

Ядро Дирихле, его свойства.

Принцип локализации.

Условие Дини. Примеры.

Теорема о сходимости ряда Фурье в точке. Примеры.

Лемма о дифференцировании ряда Фурье.

Изопериметрическое свойство круга.

Определение преобразования Фурье и интеграла Фурье.

Свойства преобразования Фурье. Примеры.

Достаточные условия представимости функции ее интегралом Фурье.

Гладкость функции и скорость убывания ее преобразования Фурье.

Пространство быстроубывающих функций (свойства).

Формула обращения.

Равенство Парсеваля.

Преобразование Фурье и свертка.

ОЦЕНИВАНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМ.

3 Критерий Коши равномерной сходимости интегралов.

4 Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости.

3 Теорема о предельном переходе по параметру в равномерно сходящемся интеграле.

3 Теорема о непрерывности по параметру равномерно сходящегося интеграла.

- 4 Теорема о дифференцируемости по параметру равномерно сходящегося интеграла (правило Лейбница).
- 3 Теорема об интегрируемости по параметру равномерно сходящегося интеграла.
- 3 Признаки сходимости бесконечного произведения.
- 4 Доказательство связи измеримости по Каратеодори с измеримостью по Лебегу.
- 5 Теорема о том, что совокупность μ -измеримых по Каратеодори множеств образует σ -алгебру.
- 5 Теорема о свойствах внешней меры на σ -алгебре измеримых множеств.
- 5 Критерий Каратеодори измеримости борелевских множеств в метрическом пространстве.
- 4 Доказательство свойств меры Хаусдорфа.
- 4 Теорема о регулярности меры Хаусдорфа.
- 5 Изодиаметрическое неравенство.
- 4 Связь между мерами Хаусдорфа и Лебега.
- 4 Лемма о локальном искажении меры (определитель Грама как элемент площади поверхности).
- 5 Формула площади.
- 3 Длина кривой, площадь графика функции.
- 3 Площадь поверхности вращения.
- 5 Формула коплощади (регулярный случай).
- 3 Интеграл Лебега в полярной системе координат.
- 5 Доказательство формулы Грина.
- 4 Условие независимости интеграла от выбора пути, соединяющего данные точки.
- 3 Доказательство перестановочности внешнего дифференцирования и операции переноса дифференциальных форм.
- 3 Первая теорема Пуанкаре.
- 3 Доказательство корректности определения индуцированной ориентации края.
- 5 Формула Стокса — Пуанкаре для интеграла внешней формы по k -мерной сингулярной цепи.
- 4 Корректность определения интеграла внешней формы на многообразии.
- 5 Формула Стокса для для интеграла внешней формы на многообразии.
- 5 Вторая теорема Пуанкаре.
- 3 Интеграл от формы Гаусса.
- 4 Теорема о пленке.
- 5 Теорема Брауэра о неподвижной точке.
- 3 Доказательство свойств свертки.
- 4 Лемма о равномерном приближении.
- 4 Аппроксимационная теорема Вейерштрасса.
- 4 Равномерное приближение непрерывной функции тригонометрическими многочленами.
- 5 Теорема о непрерывности сдвига в $L_1(\mathbb{R}^k)$.
- 5 Теорема об аппроксимации единицы.
- 4 Доказательство гладкости свертки функции с гладким ядром.
- 5 Теорема о плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ в $L_1(\mathbb{R}^k)$.
- 4 Лемма Римана — Лебега.
- 3 Доказательство свойств ядра Дирихле.
- 3 Доказательство принципа локализации.
- 5 Теорема о сходимости ряда Фурье в точке.
- 3 Лемма о дифференцировании ряда Фурье.
- 5 Изопериметрическое свойство круга.
- 3 Доказательство свойств преобразования Фурье.

- 5 Достаточные условия представимости функции ее интегралом Фурье.
- 4 Гладкость функции и скорость убывания ее преобразования Фурье.
- 4 Доказательство формулы обращения в пространстве быстроубывающих функций.
- 4 Доказательство равенства Парсеваля.
- 4 Доказательство связи между преобразованием Фурье и сверткой.