

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КОЛЛОКВИУМУ 30 ОКТЯБРЯ,
СЕМЕСТР 1, ЧАСТЬ I

Аксиоматический подход к описанию множества действительных чисел.

1. СФОРМУЛИРОВАТЬ группу аксиом сложения.
2. СФОРМУЛИРОВАТЬ группу аксиом умножения.
3. СФОРМУЛИРОВАТЬ группу аксиом порядка.
4. СФОРМУЛИРОВАТЬ аксиому непрерывности.
5. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие промежутка числовой прямой.

Абсолютная величина числа.

6. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение абсолютной величины числа.
7. СФОРМУЛИРОВАТЬ неравенства треугольника для абсолютной величины числа.
8. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие расстояния между точками числовой прямой и его свойства.

Границы числовых множеств.

9. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие наибольшего элемента числового множества.
10. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие наименьшего элемента числового множества.
11. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие верхней границы числового множества.
12. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие нижней границы числового множества.
13. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие ограниченного числового множества.
14. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о существовании точной верхней границы непустого числового множества.
15. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о существовании точной верхней границы непустого числового множества.
16. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о существовании точной нижней границы непустого числового множества.
17. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о существовании точной нижней границы непустого числового множества.
18. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий точной верхней границы числового множества.
19. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ критерий точной верхней границы числового множества.
20. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий точной нижней границы числового множества.
21. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ критерий точной нижней границы числового множества.
22. ДОКАЗАТЬ, что точной верхней границей промежутка $\langle a, b \rangle$ является число b .

23. ДОКАЗАТЬ, что точной нижней границей промежутка $\langle a, b \rangle$ является число a .
24. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ соотношения между точными верхними границами вложенных числовых множеств.
25. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ соотношения между точными нижними границами вложенных числовых множеств.

Принцип математической индукции и его приложения

26. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие индуктивного множества.
27. СФОРМУЛИРОВАТЬ принцип математической индукции.
28. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ принцип математической индукции.
29. СФОРМУЛИРОВАТЬ принцип минимального числа для подмножеств целых чисел.
30. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ принцип минимального числа для подмножеств целых чисел.
31. СФОРМУЛИРОВАТЬ принцип максимального числа для подмножеств целых чисел.
32. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ принцип максимального числа для подмножеств целых чисел.
33. СФОРМУЛИРОВАТЬ неравенство Бернулли.
34. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ неравенство Бернулли.
35. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение геометрической прогрессии.
36. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ формулу для суммы геометрической прогрессии.
37. ПРИВЕСТИ И ДОКАЗАТЬ оценку суммы $\sum_{k=k_0}^m \frac{u^k}{k!}$ для $u > 0$, $k_0 < m$.
38. СФОРМУЛИРОВАТЬ бином Ньютона.
39. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ бином Ньютона.

Принцип Архимеда и следствия из него.

40. СФОРМУЛИРОВАТЬ принцип Архимеда.
41. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ принцип Архимеда.
42. ДОКАЗАТЬ неограниченность сверху совокупности целых чисел.
43. ДОКАЗАТЬ неограниченность снизу совокупности целых чисел.
44. ДОКАЗАТЬ, что если $x, y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ и $x > 0$, то существует натуральное n такое, что $y < nx$.
45. ДОКАЗАТЬ, что если $a \in \mathbb{R}$ — такое число, что $a \leq \frac{1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $a \leq 0$.
46. ДОКАЗАТЬ, что если $a \in \mathbb{R}$ — такое число, что $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $a = 0$.

47. ДОКАЗАТЬ, что если $x, y \in \mathbb{R}$ и $x > 0$, то существует единственное целое число p такое, что $(p - 1)x \leq y < px$.
48. ДОКАЗАТЬ свойство плотности совокупности рациональных чисел.
49. ДОКАЗАТЬ свойство плотности совокупности иррациональных чисел.
50. ДОКАЗАТЬ существование действительного числа $\alpha > 0$, квадрат которого равен 2: $\alpha^2 = 2$, и при этом $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Предел числовой последовательности

51. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение последовательности.
52. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение предела последовательности. ПРИВЕСТИ примеры сходящихся и расходящихся последовательностей.
53. ДОКАЗАТЬ, что предел сходящейся последовательности единствен.
54. ДОКАЗАТЬ: пусть даны две последовательности x_n и y_n . Если последовательность x_n сходится к числу $a \in \mathbb{R}$, а $x_n - y_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то последовательность y_n сходится и ее предел равен a .
55. ДОКАЗАТЬ: пусть даны несколько последовательностей $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}$, имеющие пределы $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ соответственно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется n_0 такое, что $|x_n^{(i)} - a_i| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$ одновременно для $i = 1, 2, \dots, k$.
56. СФОРМУЛИРОВАТЬ определения монотонно возрастающей и строго монотонно возрастающей последовательности.
57. СФОРМУЛИРОВАТЬ определения монотонно убывающей и строго монотонно убывающей последовательности.
58. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Вейерштрасса о сходимости монотонно возрастающей ограниченной последовательности.
59. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему Вейерштрасса о сходимости монотонно возрастающей ограниченной последовательности.
60. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Вейерштрасса о сходимости монотонно убывающей ограниченной последовательности.
61. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему Вейерштрасса о сходимости монотонно убывающей ограниченной последовательности.
62. ДОКАЖИТЕ: пусть даны две последовательности x_n, y_n , для которых существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Если $a < b$, то $x_n < y_n \mid_{n \rightarrow \infty}$.
63. ДОКАЖИТЕ: пусть даны две последовательности x_n, y_n , для которых существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Если $x_n \leq y_n \mid_{n \rightarrow \infty}$, то $a \leq b$.
64. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о пределе промежуточной последовательности.
65. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему о пределе промежуточной последовательности.

Предел и алгебраические операции.

66. ДОКАЗАТЬ, что сумма пределов равна пределу суммы.

67. ДОКАЗАТЬ, что разность пределов равна пределу разности.
68. ДОКАЗАТЬ, что произведение пределов равно пределу произведения.
69. ДОКАЗАТЬ, что обратная величина предела, не равного нулю, равна пределу последовательности обратных величин.
70. ДОКАЗАТЬ: если последовательность x_n сходится к числу $a \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$, последовательность y_n сходится к числу $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ при $n \rightarrow \infty$, то существует предел отношения последовательностей, равный отношению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Важные последовательности и их пределы

71. ДОКАЗАТЬ, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ для любой фиксированной степени $k \in \mathbb{N}$.
72. ДОКАЗАТЬ, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ для любого фиксированного числа q , $|q| < 1$.
73. ДОКАЗАТЬ, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda^n} = 0$ для любого фиксированного числа λ , $\lambda > 1$.
74. ДОКАЗАТЬ, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ для любого фиксированного числа $a > 0$.
75. ДОКАЗАТЬ, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
76. ДОКАЗАТЬ, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 0$ для любого фиксированного числа λ , $\lambda > 1$.
77. ДОКАЗАТЬ, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Частичные пределы последовательности.

78. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение частичного предела последовательности.
79. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Вейерштрасса о существовании частичного предела ограниченной последовательности.
80. ДОКАЗАТЬ, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k$ для ограниченной числовой последовательности $\{x_n\}$.
81. ДОКАЗАТЬ теорему Вейерштрасса о частичных пределах: существует подпоследовательность ограниченной последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к числу $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k$.
82. ДОКАЗАТЬ, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k$ для ограниченной числовой последовательности $\{x_n\}$.
83. ДОКАЗАТЬ теорему Вейерштрасса о частичных пределах: существует подпоследовательность ограниченной последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к числу $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k$.
84. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение верхнего предела числовой последовательности.
85. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение нижнего предела числовой последовательности.

Фундаментальные последовательности.

86. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие фундаментальной последовательности.
87. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий Коши для числовых последовательностей.
88. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ критерий Коши для числовых последовательностей.

Экспоненциальная функция.

89. ДОКАЗАТЬ, что существует предел последовательности $(1 + \frac{1}{n})^n$, равный числу Эйлера — Непера e .
90. ДОКАЗАТЬ, что существует предел последовательности $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, равный пределу
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n.$$
91. ОЦЕНИТЬ остаток R_n в представлении $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + R_n$.
92. ДОКАЗАТЬ иррациональность числа e .
93. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение экспоненциальной функции $\exp x$.
94. ДОКАЗАТЬ, что существует предел $\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ для всех $x \in \mathbb{R}$.
95. ДОКАЗАТЬ, что существует предел последовательности $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, равный пределу
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n.$$
96. ОЦЕНИТЬ остаток $R_n(x)$ в представлении экспоненциальной функции
$$\exp x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$
97. СФОРМУЛИРОВАТЬ основное свойство экспоненциальной функции.
98. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ основное свойство экспоненциальной функции.

Расширенная числовая прямая.

99. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие расширенной числовой прямой и порядка на ней.
100. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ свойство непрерывности на расширенной числовой прямой.
101. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие промежутка на расширенной числовой прямой.
102. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие точной верхней границы множества на расширенной числовой прямой.
103. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие точной нижней границы множества на расширенной числовой прямой.
104. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о существовании точной верхней границы множества на расширенной числовой прямой.
105. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему о существовании точной верхней границы множества на расширенной числовой прямой.

106. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о существовании точной нижней границы множества на расширенной числовой прямой.
107. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему о существовании точной нижней границы множества на расширенной числовой прямой.
108. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий точной верхней границы множества на расширенной числовой прямой.
109. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий точной нижней границы множества на расширенной числовой прямой.
110. ДОКАЗАТЬ: если множество $A \subset \mathbb{R}$ не ограничено сверху, то $\sup A = +\infty$.
111. ДОКАЗАТЬ: если множество $A \subset \mathbb{R}$ не ограничено снизу, то $\inf A = -\infty$.

Предел на расширенной числовой прямой.

112. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие последовательности, стремящейся к $+\infty$.
113. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие последовательности, стремящейся к $-\infty$.
114. ДОКАЗАТЬ, что предел сходящейся последовательности на расширенной числовой прямой единствен.
115. ДОКАЗАТЬ, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = +\infty$ для любого фиксированного числа $\lambda > 1$.
116. ДОКАЗАТЬ: даны две последовательности x_n и y_n . Пусть $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, а $|x_n - y_n| \leq L|n|$. Тогда существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$.
117. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о пределе монотонно возрастающей последовательности расширенной вещественной прямой.
118. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему о пределе монотонно возрастающей последовательности расширенной вещественной прямой.
119. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о пределе монотонно убывающей последовательности расширенной вещественной прямой.
120. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему о пределе монотонно убывающей последовательности расширенной вещественной прямой.
121. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о промежуточной последовательности на расширенной вещественной прямой.
122. ДОКАЗАТЬ: если x_n, y_n — две последовательности на расширенной числовой прямой, $x_n \leq y_n|_{n \rightarrow \infty}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$.
123. ДОКАЗАТЬ: если x_n, y_n — две последовательности на расширенной числовой прямой, $x_n \leq y_n|_{n \rightarrow \infty}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Алгебраические операции над пределами последовательностей на расширенной числовой прямой

124. ДОКАЗАТЬ: если x_n, y_n — две последовательности на расширенной числовой прямой, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty.$$

125. ДОКАЗАТЬ: если x_n, y_n — две последовательности на расширенной числовой прямой, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$, то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty.$$

126. ДОКАЗАТЬ: если x_n, y_n — две последовательности на расширенной числовой прямой, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n > 0$, то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = +\infty.$$

127. ДОКАЗАТЬ: если x_n, y_n — две последовательности на расширенной числовой прямой, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n < 0$, то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = -\infty.$$

128. ДОКАЗАТЬ: если x_n — последовательность на расширенной числовой прямой и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, то существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

129. ДОКАЗАТЬ: если x_n — последовательность на расширенной числовой прямой, $x_n > 0|_{n \rightarrow \infty}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, то существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.

Частичные пределы на расширенной числовой прямой

130. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о существовании частичного предела последовательности на расширенной вещественной прямой.

131. ДОКАЗАТЬ существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k$ для последовательности $\{x_n\}$ на расширенной вещественной прямой.

132. ДОКАЗАТЬ, что если последовательность $\{x_n\}$ на расширенной вещественной прямой не ограничена сверху, то существует подпоследовательность, сходящаяся к $+\infty$.

133. ДОКАЗАТЬ существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k$ для последовательности $\{x_n\}$ на расширенной вещественной прямой.

134. ДОКАЗАТЬ, что если последовательность $\{x_n\}$ на расширенной вещественной прямой не ограничена снизу, то существует подпоследовательность, сходящаяся к $-\infty$.

135. ДОКАЗАТЬ, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, а $\varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n \neq -\infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty$.

136. Пусть даны последовательности $\{x_n \in \mathbb{R}\}$ и $\{y_n \in \mathbb{R}\}$. ДОКАЗАТЬ, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

при условии, что сумма в правой части определена.

137. Пусть даны последовательности $\{x_n \in \mathbb{R}\}$ и $\{y_n \in \mathbb{R}\}$. ДОКАЗАТЬ, что

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n$$

при условии, что сумма в правой части определена.

138. Пусть дана последовательность $\{x_n \in \mathbb{R}\}$, $x_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. ДОКАЗАТЬ, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n}.$$

139. Пусть даны последовательности $\{x_n \in \mathbb{R}\}$ и $\{y_n \in \mathbb{R}\}$, $x_n, y_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

при условии, что произведение в правой части определено.

140. Пусть даны последовательности $\{x_n \in \mathbb{R}\}$ и $\{y_n \in \mathbb{R}\}$, $x_n, y_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

при условии, что произведение в правой части определено.