

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Программа 4 семестра

ИНТЕГРАЛ ОТ ПАРАМЕТРА В РАМКАХ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

1. *Предельный переход под знаком интеграла.* Непрерывность функций, представимых интегралами с параметром. Теоремы о дифференцировании и интегрировании интегралов по параметру.
2. *Гамма- и бета-функции Эйлера.* Область определения, формулы понижения, формула Эйлера—Гаусса, формула дополнения, связь между эйлеровыми функциями.
3. *Объём шара в $\mathbb{R}^n$.*
4. *Формула Стирлинга.*

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

5. *Понятие равномерной интегрируемости семейства функций.* Критерий Коши—Больцано равномерной интегрируемости, мажорантный признак, признаки Дирихле и Абеля.
6. *Предельный переход под знаком интеграла.* Непрерывности функций, представимых интегралами, зависящими от параметра. Теоремы о дифференцировании по параметру и интегрировании интегралов по параметру.

РАЗНОЕ

7. *Бесконечные произведения.* Признаки сходимости. Формула Валлиса.
8. *Δ -образные последовательности.* Понятие свертки и ее свойства. Определение Δ -образной последовательности. Примеры. Лемма о равномерном приближении. Аппроксимационная теорема Вейерштрасса. Равномерное приближение непрерывной функции тригонометрическими многочленами.
9. *Теорема об аппроксимации единицы.* Теорема о непрерывности сдвига в $L_1(\mathbb{R}^k)$. Теорема об аппроксимации единицы. Средние по Стеклову и Соболеву (свертка функций с ядром Соболева или Стеклова). Гладкость средних функций с гладким ядром. Теорема о плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ в $L_1(\mathbb{R}^k)$.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА k -МЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

10. Внешние меры (примеры: внешняя мера Лебега, мера Хаусдорфа). Мера Хаусдорфа как борелевская мера. Измеримость по Каратеодори. Связь с измеримостью по Лебегу. Теорема о том, что совокупность μ -измеримых по Каратеодори множеств образует σ -алгебру. Теорема о свойствах внешней меры на σ -алгебре измеримых множеств. Признак Каратеодори о борелевской мере.

Теорема об исчерпывании борелевских множеств. Свойства меры Хаусдорфа. Изодиаметрическое неравенство. Теорема о совпадении мер Лебега и Хаусдорфа. Формула площади: лемма о касательном отображении, лемма о локальном искажении меры, лемма об образе множества вырождения. Длина кривой, площадь графика функции. Мера на многообразии. Площадь поверхности вращения. Формула замены переменной для интегрируемых и измеримых функций. Интеграл Лебега в полярной системе координат. Элементарная формула площади (регулярный случай).

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

11. *Внешние дифференциальные формы первой степени.* Понятие интеграла от формы первой степени вдоль гладкого пути. Примеры. Условие независимости интеграла от выбора пути, соединяющего данные точки. Примеры. Координатное представление. Операция переноса, ее свойства. Интегрирование форм первой степени. Свойства интеграла. Формула Ньютона—Лейбница. Формула Грина.
12. *Понятие внешней дифференциальной формы степени $r \geq 0$ на открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$.* Примеры и их различные интерпретации, форма Гаусса. Операции над дифференциальными формами. Координатное представление внешних форм. Внешнее произведение дифференциальных форм и его свойства.
13. *Понятие дифференциала внешней формы.* Внешний дифференциал и его свойства. Первая теорема Пуанкаре.
14. *Гладкие отображения открытых множеств пространства $\mathbb{R}^n$ и индуцированные ими преобразования внешних форм.* Свойства операции переноса.
15. *Понятие ориентации k -мерного многообразия в $\mathbb{R}^n$.* Индуцированная ориентация края. Критерий ориентируемости дифференцируемого многообразия. Примеры.
16. *Интегрирование k -форм по k -мерным сингулярным цепям.* Определение k -мерного куска многообразия. Свойства. k -мерная цепь. Граница куба как k -мерная цепь. Граница цепи. Интегрирование по k -мерной цепи. Формула Стокса—Пуанкаре.
17. *Понятие интеграла внешней формы по ориентированному дифференцируемому многообразию.* Лемма о разбиении единицы. Определение интеграла. Корректность определения. Признак интегрируемости. Свойства интеграла. Интегральная формула Стокса.
18. *Векторные поля и дифференциальные формы.* Основные понятия векторного анализа.
19. *Точные и замкнутые формы.* Понятие звездной области. Лемма Пуанкаре. Применения. Интеграл от формы Гаусса. Теорема о пленке. Теорема Брауэра о неподвижной точке.

20. *Определение ряда Фурье и поточечная сходимость ряда Фурье.* Определение тригонометрического ряда Фурье. Примеры. Лемма Римана—Лебега. Ядро Дирихле, его свойства. Принцип локализации. Условие Дини. Примеры. Достаточное условие сходимости ряда в точке. Примеры. Формула $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$. Изопериметрическое свойство круга.
21. *Преобразование Фурье.* Определение преобразования Фурье и интеграла Фурье. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье и свертка. Примеры. Инъективность преобразования Фурье. Достаточные условия представимости функции ее интегралом Фурье. Гладкость функции и скорость убывания ее преобразования Фурье. Пространство быстроубывающих функций (свойства). Формула обращения. Равенство Парсеваля. Преобразование Фурье и решение дифференциальных уравнений.

Рекомендуемая литература

- [Б] Берс Л. *Математический анализ*. Т. 1–2. М.: Высшая школа, 1975.
- [В1] Водопьянов С. К. *Дифференцирование*.
- [В2] Водопьянов С. К. *Интегрирование по Лебегу*.
- [З] Зорич В. А. *Математический анализ*. Т. 1–2. М.: Наука, 1981.
- [Д] Дьедонне Ж. *Современный анализ*. М.: Мир, 1964.
- [Н] Никольский С. М. *Курс математического анализа*. М.: Наука, 1975.
- [Р] Решетняк Ю. Г. *Курс математического анализа*. Новосибирск: Изд-во Института математики, Ч. 1, 1999; Ч. 2, 2000.
- [Ру] Рудин У. *Основы математического анализа*. М.: Мир, 1976.
- [С] Спивак М. *Математический анализ на многообразиях*. М.: Мир, 1971.
- [Ф] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1–3. М.: Наука, 1969.
- [Ш] Шведов И. А. *Учебные пособия и методические указания по математическому анализу* для студентов НГУ, изданные в разные годы Новосибирским госуниверситетом (см. каталог в библиотеке НГУ).

Литература, рекомендуемая для работы на семинарах

1. Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе*. — М.: Мир, 1967.
2. Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. — М.: Наука, 1977.
3. Кудрявцев Л. Д. и др. *Сборник задач по математическому анализу*. — Санкт-Петербург: Кристалл, 1994.
4. Решетняк Ю. Г. *Сборник задач по курсу математического анализа*. — Новосибирск: изд. НГУ, 1979.

Программу составил профессор

С. К. Водопьянов