

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

С. К. Водопьянов, Д. В. Исангулова

ИСЧИСЛЕНИЕ ВНЕШНИХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ.
СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ

Учебное пособие

Новосибирск
2012

УДК 517.1+517.2

Водопьянов С. К., Исангулова Д. В. Исчисление внешних дифференциальных форм: Сборник задач и упражнений / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. 144 с.

В настоящем учебном пособии собраны основные теоретические положения и задачи по исчислению внешних дифференциальных форм. Эта тема соответствует программе 4-го семестра курса математического анализа, читаемого на механико-математическом факультете НГУ.

Учебное пособие предназначается для студентов и преподавателей математических и физических факультетов университетов, а также для всех интересующихся математическим анализом.

Рецензенты

д-р физ.-мат. наук М. Ю. Васильчик (НГТУ)
д-р физ.-мат. наук, проф. А. Е. Гутман (ИМ СО РАН),

Учебное пособие подготовлено в рамках реализации
Программы развития НИУ-НГУ

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457)

© Новосибирский государственный
университет, 2012
© С. К. Водопьянов,
Д. В. Исангулова, 2012

Содержание

1	Внешние дифференциальные 1-формы	7
1.1	ВНЕШНИЕ 1-ФОРМЫ.	7
1.2	ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ 1-ФОРМ. .	8
1.3	КООРДИНАТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ 1-ФОРМ.	8
1.4	ОПЕРАЦИЯ ПЕРЕНОСА.	11
1.5	ИНТЕГРИРОВАНИЕ 1-ФОРМ ВДОЛЬ ПУТЕЙ.	13
1.6	ИНТЕГРИРОВАНИЕ 1-ФОРМ ВДОЛЬ КРИВЫХ.	27
1.7	ФОРМУЛА ГРИНА.	28
2	Внешние дифференциальные 2-формы	41
2.1	ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ 2-ФОРМ. .	41
2.2	КООРДИНАТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ 2-ФОРМ.	41
2.3	ОПЕРАЦИЯ ПЕРЕНОСА.	41
2.4	ОРИЕНТАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ В $\mathbb{R}^3$	41
2.5	ИНТЕГРИРОВАНИЕ 2-ФОРМ ПО ПОВЕРХНОСТЯМ.	41
2.6	ФОРМУЛА СТОКСА ДЛЯ 1-ФОРМ В $\mathbb{R}^3$	45
2.7	ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО ДЛЯ 2-ФОРМ В $\mathbb{R}^3$	49
3	Полилинейные функции	57
3.1	СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА	57
3.2	ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ	58
3.3	ОРИЕНТАЦИЯ В $\mathbb{R}^n$	61
4	Внешние формы	65
4.1	ВНЕШНИЕ 2-ФОРМЫ.	65
4.2	ВНЕШНИЕ k -ФОРМЫ.	66
4.3	ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ 1-ФОРМ.	69
4.4	ВНЕШНИЕ ОДНОЧЛЕНЫ.	70
4.5	ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ.	73
4.6	ПОВЕДЕНИЕ ПРИ ОТОБРАЖЕНИЯХ.	76
5	Дифференцируемые многообразия	76
5.1	ОПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ В $\mathbb{R}^n$	76
5.2	ОРИЕНТАЦИЯ НА МНОГООБРАЗИИ.	85
6	Внешние дифференциальные k-формы	91
6.1	ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ПРИМЕРЫ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА.	91
6.2	ВНЕШНЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ И ЕГО СВОЙСТВА.	95

6.3	ПЕРЕНОС ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ k -ФОРМ.	96
7	Интегрирование дифференциальных форм по цепям	100
7.1	ИНТЕГРИРОВАНИЕ n -ФОРМ В $\mathbb{R}^n$	100
7.2	ИНТЕГРИРОВАНИЕ n -ФОРМ ПО ЦЕПЯМ. ГРАНИЦА ЦЕПИ. ФОРМУЛА СТОКСА — ПУАНКАРЕ.	101
7.3	ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ НА МНОГООБРАЗИЯХ. ФОРМУЛА СТОКСА.	112
8	Замкнутые и точные формы.	112
9	Элементы векторного анализа	118
9.1	ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ФОРМЫ В $\mathbb{R}^3$	118
9.2	ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ grad, rot и div	119
9.3	КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ В $\mathbb{R}^3$	121
9.4	ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ. . .	126
9.5	ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ	131
9	Элементы теории функций комплексного переменного	133

Предисловие

Пособие составлено и написано на основании многолетнего опыта чтения курса математического анализа студентам первого и второго годов обучения на механико-математическом факультете НГУ. Материал учебного пособия соответствует части курса математического анализа:

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

1. *Внешние дифференциальные формы первой степени.* Понятие интеграла от формы первой степени вдоль гладкого пути. Примеры. Условие независимости интеграла от выбора пути, соединяющего данные точки. Примеры. Координатное представление. Операция переноса, ее свойства. Интегрирование форм первой степени. Свойства интеграла. Формула Ньютона — Лейбница. Формула Грина.

2. *Понятие внешней дифференциальной формы степени $r \geq 0$ на открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$.* Примеры и их различные интерпретации, форма Гаусса. Операции над дифференциальными формами. Координатное представление внешних форм. Внешнее произведение дифференциальных форм и его свойства.

3. *Понятие дифференциала внешней формы.* Внешний дифференциал и его свойства. Первая теорема Пуанкаре.

4. *Гладкие отображения открытых множеств пространства $\mathbb{R}^n$ и индуцированные ими преобразования внешних форм.* Свойства операции переноса.

5. *Понятие ориентации k -мерного многообразия в $\mathbb{R}^n$.* Индуцированная ориентация края. Критерий ориентируемости дифференцируемого многообразия. Примеры.

7. *Интегрирование k -форм по k -мерным сингулярным цепям.* Определение k -мерного куска многообразия. Свойства. k -мерная цепь. Граница куба как k -мерная цепь. Граница цепи. Интегрирование по k -мерной цепи. Формула Стокса — Пуанкаре.

8. *Понятие интеграла внешней формы по ориентированному дифференцируемому многообразию.* Лемма о разбиении единицы. Определение интеграла. Корректность определения. Признак интегрируемости. Свойства интеграла. Интегральная формула Стокса.

9. *Векторные поля и дифференциальные формы.* Основные понятия векторного анализа.

10. *Точные и замкнутые формы.* Понятие звездной области. Лемма

Пуанкаре. Применения. Интеграл от формы Гаусса. Теорема о пленке. Теорема Брауэра о неподвижной точке.

По пособию,

после задачи 1.95 есть термин "одномерная цепь я не нашел соответствующего определения выше...может, плохо смотрел?

Задачи 1.124-1.138– любым способом искать 0-форму?

Стр.27– $(H)^1(\mathcal{S})$ -что за символ? С уважением, А.Грешнов

В пособии пункт 1.5 (стр. 13) это интегрирование по параметризованным путям. Однако серия задач в этом пункте (задачи 1.26 - 1.52 и дальше есть ещё), идут на интегрирование по кривым. Я полагаю, что эти задачи должны быть в следующем пункте.

Кроме того, на стр. 23 предлагается вычислить интеграл от замкнутой формы. Что такое замкнутая форма, объясняется только на странице 112.

В серии задач на стр. 25 предлагается восстановить функцию по дифференциалу. Как это сделать, нигде не объяснено.

На стр. 32 в формуле (13) стоит лишняя открывающая скобка.

На стр. 33 в задаче 1.158 предлагается найти дифференциал 1-формы. Что это такое, ещё не было определено.

1. Внешние дифференциальные 1-формы

1.1. ВНЕШНИЕ 1-ФОРМЫ.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное вещественное векторное пространство. Векторы этого пространства будем обозначать полужирными символами $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$.

Внешней формой степени 1 (или, короче, *1-формой*) называется линейная функция $\omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ от вектора:

$$\omega\langle\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v}\rangle = \lambda_1\omega\langle\mathbf{u}\rangle + \lambda_2\omega\langle\mathbf{v}\rangle \quad \text{для всех } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Множество всех 1-форм превращается в вещественное векторное пространство, если определить сумму форм формулой

$$(\omega_1 + \omega_2)\langle\mathbf{u}\rangle = \omega_1\langle\mathbf{u}\rangle + \omega_2\langle\mathbf{u}\rangle,$$

а умножение на число — формулой

$$(\lambda\omega)\langle\mathbf{u}\rangle = \lambda\omega\langle\mathbf{u}\rangle.$$

Пространство 1-форм на $\mathbb{R}^n$ называется *сопряженным пространством* и обозначается либо символом $(\mathbb{R}^n)^*$, либо символом $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$.

- 1.1. Пусть в $\mathbb{R}^n$ выбрана линейная система координат $(x_1, \dots, x_n)$. Каждая координатная функция x_i сама является 1-формой: $x_i\langle\mathbf{u}\rangle$ — i -ая компонента вектора $\mathbf{u}$ в выбранной системе координат. Докажите, что каждая 1-форма ω имеет вид

$$\omega = a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

- 1.2. Докажите, что пространство $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ 1-форм на $\mathbb{R}^n$ конечномерно и найдите его размерность.
- 1.3. Докажите, что работа A однородного силового поля F на перемещении $\mathbf{u}$ есть 1-форма от $\mathbf{u}$.

УКАЗАНИЕ: Из физических соображений $A = (F, \mathbf{u})$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение.

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ 1-ФОРМ.

Говорят, что на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ задана $\mathbb{E}$ -значная *дифференциальная форма первой степени* (короче — 1-форма), если каждой точке $x \in U$ и каждому вектору $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ сопоставлен элемент $\omega(x)\langle \mathbf{v} \rangle$ некоторого *нормированного пространства* $\mathbb{E}$ над полем $\mathbb{R}$, причём функция $\omega(x)\langle \mathbf{v} \rangle$ линейна по векторной переменной $\mathbf{v}$. Элемент $\omega(x)\langle \mathbf{v} \rangle$ называют значением формы ω в точке x на векторе $\mathbf{v}$. Другими словами, дифференциальная 1-форма — это отображение $\omega: U \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{E})$.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$. Множество всех $\mathbb{E}$ -значных 1-форм на множестве U обозначим символом $\mathcal{F}^1(U, \mathbb{E})$, а множество всех $\mathbb{E}$ -значных функций на U будем обозначать символом $\mathcal{F}^0(U, \mathbb{E})$, иногда называя его элементы 0-формами.

Суммой двух 1-форм $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{F}^1(U, \mathbb{E})$ называется 1-форма $\omega \in \mathcal{F}^1(U, \mathbb{E})$, определяемая как $\omega(x)\langle \mathbf{v} \rangle = \omega_1(x)\langle \mathbf{v} \rangle + \omega_2(x)\langle \mathbf{v} \rangle$ для каждой точки $x \in U$ и любого вектора $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Коротко пишут $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

1.4. Доказать, что совокупности $\mathcal{F}^0(U, \mathbb{E})$ и $\mathcal{F}^1(U, \mathbb{E})$ с введенными операциями поточечного сложения и умножения на число суть векторные пространства.

Говорят, что 1-форма $\omega \in \mathcal{F}^1(U, \mathbb{E})$ является произведением функции $f \in \mathcal{F}^0(U, \mathbb{R})$ и 1-формы $\beta \in \mathcal{F}^1(U, \mathbb{E})$ и пишут $\omega = \alpha \cdot \beta$, если $\omega(x)\langle \mathbf{v} \rangle = \alpha(x)\beta(x)\langle \mathbf{v} \rangle$ для каждой точки $x \in U$ и любого $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

1.3. КООРДИНАТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ 1-ФОРМ.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — линейные координаты в $\mathbb{R}^n$, определяемые по выбранному базису $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Напомним, что функция $x_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ сопоставляет каждой точке $a \in \mathbb{R}^n$ её i -ую координату, а ее дифференциал dx_i сопоставляет каждому вектору $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ его i -ую координату v_i . В частности, $dx_i\langle \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$.

Каждую 1-форму $\omega \in \mathcal{F}^1(U, \mathbb{E})$ можно и притом лишь одним образом представить в виде

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i,$$

где $a_i \in \mathcal{F}^0(U, \mathbb{E})$. При этом для любого $x \in U$ и любого $j \in \{1, \dots, n\}$ справедливо $a_j(x) = \omega(x)\langle \mathbf{e}_j \rangle$.

Действительно, если $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$, то

$$\omega(x)\langle \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \omega(x)\langle \mathbf{e}_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i(x) v_i = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i \langle \mathbf{v} \rangle.$$

Функции a_i , участвующие в этом представлении, называются *коэффициентами формы* ω (относительно выбранной системы координат).

Если все коэффициенты формы ω суть функции класса C^r на открытом множестве U , то будем говорить, что ω — форма класса $C^r(U)$ на U .

1.5. Если функция f дифференцируема на множестве $U \in \mathbb{R}^n$, то её дифференциал

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$$

представляет собой дифференциальную 1-форму на множестве U .

Простейшая задача теории уравнений в частных производных — восстановить функцию f по её дифференциалу.

Допустим, что заданы гладкая функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, точка $p \in U$ и для каждой точки $x \in U$ выбран гладкий путь $\varphi_x : [a, b] \rightarrow U$, соединяющий точку p с точкой x . Тогда имеем $\frac{d}{dt} f(\varphi_x(t)) = df(\varphi_x(t))\langle \varphi'_x(t) \rangle$. Отсюда по формуле Ньютона — Лейбница выводим

$$f(x) = f(p) + \int_a^b df(\varphi_x(t))\langle \varphi'_x(t) \rangle dt. \quad (1)$$

Таким образом, если мы хотим найти функцию, дифференциал которой есть заданная 1-форма, то следует воспользоваться формулой (1). Опасность, которую следует избегать, состоит в том, что значение интеграла в (1) может зависеть от пути. Следовательно, для решения этой задачи необходимо знать, по крайней мере, условия, гарантирующие, что функция f определяется формулой (1) корректно с точностью до постоянной (в качестве контрпримера можно взять приведенную ниже форму (3)).

Пусть в области $U \subset \mathbb{R}^n$ задано векторное поле $w : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Определим вещественную дифференциальную форму α_w в этой области равенством $\omega_w^1(x)\langle \mathbf{v} \rangle = \langle w(x), \mathbf{v} \rangle$ и назовём её *элементом работы* векторного поля w на перемещении $\mathbf{v}$.

Пусть в области U физического пространства имеется непрерывное силовое поле w . Это означает, что на материальную частицу, попавшую в точку $x \in U$, действует сила $w(x)$. Предположим, что область U снабжена прямоугольной системой координат и, кроме того, выбрана какая-либо система единиц измерения физических величин. Это позволяет считать рассматриваемую область частью пространства $\mathbb{R}^3$, а силовое поле w — векторным полем. Пусть в области U перемещается какая-то материальная частица, причём её движение описывается гладкой функцией $\varphi : [a, b] \rightarrow U$. Из физических соображений можно считать, что локально работа, произведённая полем на участке $[t, t + \Delta t]$, приближенно равна $\langle w(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \cdot \Delta t + o(\Delta t)$, где o равномерно относительно $t \in [a, b]$. Кроме того, естественно считать работу аддитивной функцией промежутка области определения.

- 1.6. Применяя вышесформулированные физические постулаты доказать, что работа, произведённая силовым векторным полем $w : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ при указанном перемещении рассматриваемой частицы выражается формулой

$$A_w(\varphi) = \int_a^b \omega_w^1(\varphi(t)) \langle \varphi'(t) \rangle dt.$$

- 1.7. Найти координатное представление 1-формы ω_w^1 .
- 1.8. Для каждой вещественной 1-формы ω на U имеется ровно одно векторное поле $w : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $\omega = \omega_w^1$.

Определим дифференциальную форму σ на плоскости $\mathbb{R}^2$ формулой

$$\sigma(x) \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} \det(x, \mathbf{v}). \quad (2)$$

Эту форму естественно назвать *элементом площади* сектора по следующей причине: если $z : [a < b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — движение с положительной угловой скоростью, то, как известно, в полярных координатах (r, φ) площадь углового сектора $AS = \bigcup_t [0, z(t)]$ задаётся формулой

$$|AS|_2 = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

- 1.9. Найти координатное представление 1-формы σ .
- 1.10. Доказать, что при сформулированных предположениях площадь углового сектора $AS = \bigcup_t [0, z(t)]$ можно найти также по формуле

$$|AS|_2 = \int_a^b \sigma(z(t)) \langle z'(t) \rangle dt.$$

Формой Гаусса на плоскости $\mathbb{R}^2$ (элементом угла поворота) называют дифференциальную форму $d\theta$, задаваемую формулой

$$d\theta(z) \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\det(z, \mathbf{v})}{|z|^2}. \quad (3)$$

- 1.11. Доказать, что форма Гаусса в декартовых координатах на плоскости $\mathbb{R}^2$ может быть записана в виде

$$d\theta(z) = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

где $z = (x, y)$.

- 1.12. Доказать, что форма Гаусса на плоскости $\mathbb{R}^2$ без неотрицательной части оси абсцисс может быть представлена как

$$d\theta(z) = d\varphi,$$

где φ — полярный угол точки $z = (x, y)$, $r = |z|$ — полярный радиус, а $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

- 1.13. Для каждой точки x ориентированного пространства $\mathbb{R}^3$ и вектора $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ положим $\nu(x) \langle \mathbf{v} \rangle = x \times \mathbf{v}$. Чему равно значение $\nu(\mathbf{e}_3) \langle \mathbf{e}_1 \rangle$?

- 1.14. Найти координатное представление 1-формы ν задачи 13.

1.4. ОПЕРАЦИЯ ПЕРЕНОСА.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : U \rightarrow V$ — гладкое отображение и $k \in \{0, 1\}$. Каждой k -форме ω на множестве V , $k = 0, 1$, сопоставим k -форму $\varphi^* \omega$, определяемую следующим образом:

если $k = 0$, то положим $\varphi^* \omega = \omega \circ \varphi$;

если же $k = 1$, то для каждой точки $x \in U$ и любого вектора $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ положим $\varphi^* \omega(x) \langle \mathbf{v} \rangle = \omega(\varphi(x)) \langle d\varphi(x) \langle \mathbf{v} \rangle \rangle$.

Тем самым задано отображение

$$\varphi^* : \mathcal{F}^k(V, \mathbb{E}) \rightarrow \mathcal{F}^k(U, \mathbb{E}),$$

называемое *операцией переноса* (замены переменных).

1.15. Доказать свойства операции переноса:

1) *Аддитивность*: $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2$ для любых форм $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{F}^k(V, \mathbb{E})$, $k = 0, 1$,

2) *Мультипликативность*: если $\omega = \alpha \cdot \beta$, то $\varphi^*\omega = \varphi^*\alpha \varphi^*\beta$.

3) *Закон композиции*: $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, т. е. $(\psi \circ \varphi)^*\omega = \varphi^*(\psi^*\omega)$ для любых гладких отображений $\varphi : U \rightarrow V$, $\psi : V \rightarrow W \subset \mathbb{R}^q$ и формы $\omega \in \mathcal{F}^k(W, \mathbb{E})$, $k \in \{0, 1\}$.

Если $\omega \in \mathcal{F}^0(Z, \mathbb{E})$, то рассматриваемая формула является иной формой закона ассоциативности для композиции: $\omega \circ (\psi \circ \varphi) = (\omega \circ \psi) \circ \varphi$.

4) *Перестановочность с дифференциалом*: $\varphi^*df = d\varphi^*f$ для каждой гладкой функции $f \in \mathcal{F}^0(V, \mathbb{E})$.

5) *Запись в координатах*: если преобразование φ задано формулами

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_m),$$

то для каждой формы $\omega(y) = \sum_{i=1}^n a_i(y) dy_i$ имеет место равенство

$$\varphi^*\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(\varphi(x)) d\varphi_i(x).$$

Иными словами: операция переноса форм, заданных в координатах, осуществляется формальной заменой переменных.

1.16. Пусть вектор $\mathbf{e}$ единичной длины определяет направление числовой прямой. Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$ можно записать в виде $\mathbf{v} = a\mathbf{e}$. Линейное соответствие $\mathbb{R}^1 \ni \mathbf{v} \rightarrow a$ называется *координатной функцией на $\mathbb{R}$* и обозначается символом $x: x \langle \mathbf{v} \rangle = a$. Всякая 1-форма ω на подмножестве числовой прямой имеет вид

$\omega(x) = f(x) dx$. Доказать, что формулу замены переменной под интегралом можно записать следующим образом:

$$\int_a^b \varphi^* \omega = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \omega.$$

1.17. Если ω — форма класса C^r , а φ — преобразование класса C^{r+1} , то $\varphi^* \omega$ является формой класса C^r .

1.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ 1-ФОРМ ВДОЛЬ ПУТЕЙ.

В этом разделе мы сосредоточим внимание на интегрировании 1-форм вдоль путей в евклидовых пространствах и многообразиях.

Известно, что для двух различных точек a и b на числовой прямой существует ровно две возможности: либо $a < b$, либо $b < a$. В первой случае говорят, что промежуток T числовой прямой с концами $a < b$ имеет положительную ориентацию: a — начало промежутка, а b — его конец. Во втором случае промежуток с началом в точке a , и с концом в точке b ориентирован отрицательно.

Непрерывно-дифференцируемое отображение $\gamma : T \rightarrow \mathcal{M}$ отрезка T в дифференцируемое многообразие $\mathcal{M}$ называется *параметризованным путем*. Если промежуток T ориентирован, то изменению параметра t от начальной точки a промежутка T к конечной точке b того же промежутка задает направление движения на параметризованном пути от точки $\gamma(a)$ к точке $\gamma(b)$. Параметризованный путь с заданной на нем ориентацией мы будем называть *ориентированным путем* (или сингулярным одномерным промежутком $c_1 = (T, \gamma, Or)$).

Тогда для 1-формы ω^1 на $\mathcal{M}$ определен интеграл

$$\int_{\gamma} \omega^1 = \int_{c_1} \omega^1 = \int_T \gamma^* \omega^1 = \int_a^b f(t) dt \quad (4)$$

по ориентированному пути $\gamma : T \rightarrow \mathcal{M}$, поскольку $\gamma^* \omega^1 = f(t) dt$.

1.18. Доказать, что если $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$, и форма

$$\omega^1 = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i, \text{ то}$$

$$\boxed{\int_{\gamma} \omega^1 = \sum_{i=1}^n \int_a^b a_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) dt.} \quad (5)$$

Написать частные случаи этой формулы для путей, заданных в $\mathbb{R}^2$

- 1) в явном виде как график функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,
- 2) в полярной системе координат $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \mapsto r(\varphi)$.

Классическая интерпретация. Классики представляли путь γ как цепочку направленных отрезков с началом $\gamma(t)$ и концом $\gamma(t) + \gamma'(t) \Delta t$, где Δt — «положительное» бесконечно малое приращение. Форма ω сопоставляет каждому такому отрезку значение

$$\omega(\gamma(t)) \langle \gamma'(t) \Delta t \rangle = \omega(\gamma(t)) \langle \gamma'(t) \rangle \Delta t.$$

Предел сумм полученной цепочки значений при измельчении Δt есть интеграл дифференциальной формы ω вдоль пути γ .

- 1.19. Доказать, что если коэффициенты 1-формы ω^1 — непрерывные функции, а $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкий путь, то интеграл 1-формы ω^1 по ориентированному пути $\gamma: T \rightarrow \mathcal{M}$ может быть представлен двумя способами:

а)

$$\int_{\gamma} \omega^1 = \sum_{i=1}^n \lim_{\text{diam } \mathcal{P} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m a_i(\gamma(t_{k-1})) \dot{\gamma}_i(t_{k-1}) \Delta t_k,$$

где $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $\text{diam } \mathcal{P} = \max_{k=1, \dots, m} \Delta t_k$;

б)

$$\int_{\gamma} \omega^1 = \sum_{i=1}^n \lim_{\text{diam } \mathcal{P} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m a_i(\gamma(t_{k-1})) (\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})),$$

где $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $\text{diam } \mathcal{P} = \max_{k=1, \dots, m} \Delta t_k$.

Напомним, что непрерывный путь $\gamma : T \rightarrow \mathcal{M}$ называют *кусочно-гладким*, если $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ и существуют такие точки $a = t_0 < \dots < t_q = b$, что путь $\gamma : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathcal{M}$ гладкий при любом i . Ограничения $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \rightarrow \mathcal{M}$ являются ориентированными путями (или определяют сингулярный одномерный промежуток $c_i = ([t_{i-1}, t_i], \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}, Or)$).

Говорят, что 1-форма ω , заданная на многообразии $\mathcal{M}$, интегрируема вдоль некоторого ориентированного кусочно-гладкого пути $\gamma : T \rightarrow \mathcal{M}$, если форма $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}^* \omega$ интегрируема на T . В этом случае *интегралом формы ω вдоль пути γ* называют величину

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^q \int_{c_i} \omega.$$

1.20. Доказать, что интеграл от 1-формы вдоль ориентированного кусочно-гладкого пути не зависит от способа разбиения отрезка T конечным набором точек.

1.21. Доказать признак интегрируемости: непрерывная на множестве $\mathcal{M}$ 1-форма интегрируема вдоль любого кусочно-гладкого пути $\gamma : T \rightarrow \mathcal{M}$.

1.22. Доказать свойства операции интегрирования 1-форм:

1) *Линейность*: если $\omega = \sum_{i=1}^q a_i \omega_i$, где $\omega_1, \dots, \omega_q$ — 1-формы, интегрируемые вдоль ориентированного пути γ , а $a_1, \dots, a_q$ — постоянные, то ω интегрируема вдоль γ и

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^q a_i \int_{\gamma} \omega_i.$$

Модулем формы $\omega = \sum_i a_i dx_i$ называется функция

$$U \ni x \mapsto |\omega(x)| = \sqrt{\sum_i |a_i(x)|^2}.$$

2) *Ограниченность*: 2.1) если форма $\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i$ интегрируема вдоль ориентированного простого (без самопересечений) пу-

ти $\gamma : T \rightarrow \mathcal{M}$ и $|\omega(x)| \leq C$ для всех $x \in \mathcal{M}$, то

$$\left| \int_{\gamma} \omega \right| \leq C \int_T |\gamma'(t)| dt \leq C \cdot \mathcal{H}^1(\gamma(T));$$

2.2) если форма $\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i$ интегрируема вдоль ориентированного пути $\gamma : T \rightarrow \mathcal{M}$ и $|\omega(x)| \leq C$ для всех $x \in \mathcal{M}$, то

$$\left| \int_{\gamma} \omega \right| \leq C \int_T |\gamma'(t)| dt \leq C \cdot \int_{\gamma(T)} \mathcal{N}(y, \gamma, T) d\mathcal{H}^1(y),$$

где $\mathcal{N}(y, \gamma, T) = \#\{t \in T : \gamma(t) = y\}$ — индикатриса Банаха.

3) *Ориентированность*: $\int_{-\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \omega$ для любой формы ω , интегрируемой вдоль ориентированного пути γ .

4) *Аддитивность*: пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ — ориентированный путь, и $p, q, r \in [a, b]$ — произвольные точки. Если в формуле

$$\int_{\gamma|_{[p, r]}} \omega = \int_{\gamma|_{[p, q]}} \omega + \int_{\gamma|_{[q, r]}} \omega$$

определены два интеграла, то третий также определён и формула верна.

5) *Формула Ньютона — Лейбница*: если форма ω представима в виде $\omega = df$, где f — гладкая функция на $\mathcal{M}$, то

$$\int_{\gamma} \omega = f(q) - f(p)$$

(p — начало, q — конец пути γ).

1.23. Показать, что если $\mathcal{M}$ — ориентированное одномерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ и инъективное отображение $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ сориентировано, то существует 1-форма ds такая, что

$$\int_{[0, 1]} c^*(ds) = \int_{[0, 1]} \sqrt{[(c^1)']^2 + \dots + [(c^n)']^2} dt$$

= длине кривой $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$.

УКАЗАНИЕ: Свойством, сформулированным в задаче, обладает форма длины ds , определенная следующим образом: $ds\langle v \rangle = \det(\eta, v) = (\eta_1 dy - \eta_2 dx)\langle v \rangle$. Здесь $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ — вектор внешней нормали к кривой γ , координаты которого суть $\eta(t) = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|}(\dot{\gamma}_2(t), -\dot{\gamma}_1(t))$, где $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ — координатные функции сориентированной параметризации кривой.

Отметим, основное свойство формы длины: $ds\langle \dot{\gamma}(t) \rangle = |\dot{\gamma}(t)|$.

Можно проверить, что $ds\langle v \rangle = (\dot{\tau}(t), v)$, где $\dot{\tau}(t)$, касательный вектор единичной длины согласованный с ориентацией. В качестве такого можно взять производную натуральной сориентированной параметризации кривой $c: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$.

1-форма ds называется *формой длины*.

1.24. Если на многообразии $\mathcal{M}$ форма ω является дифференциалом гладкой функции, а путь $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ замкнут, то $\int_{\gamma} \omega = 0$.

1.25. Согласно теореме о вторых производных, если гладкая 1-форма $\sum_{i=1}^n f_i dx_i$ на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ обладает первообразной (т. е. является дифференциалом какой-либо функции), то с необходимостью на U выполняются равенства $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ для всех возможных i, j . Для коэффициентов формы Гаусса эти равенства выполнены на $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Доказать, что, тем не менее, на U формы Гаусса нет первообразной.

УКАЗАНИЕ: $\int_z d\theta = 2\pi$ вдоль пути $z(t) = e^{it}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$.

Вычислить интеграл

$$\int_c \omega$$

для задаваемых ниже форм первой степени ω по ориентированным параметризованным кусочно-гладким путям (или просто путям) в евклидовых пространствах различных размерностей.

1.26. $\omega = x dy - y dx$, а путь c — это линия с началом в точке O , начале координат, и концом в точке A с координатами $(1, 2)$, если:

- а) OA — отрезок прямой линии;
- б) OA — парабола, ось которой есть Oy ;
- в) OA — ломаная линия, состоящая из отрезка OB оси Ox и отрезка BA , параллельного оси Oy .

1.27. $\omega = x dy + y dx$, а путь c — это линия из пунктов а), б), в) предыдущей задачи.

В следующих задачах путь c — это отрезок AB , ориентированный по направлению от точки A к точке B .

1.28. $\omega = dx \sin y + dy \sin x$, $A(0, \pi)$, $B(\pi, 0)$.

1.29. $\omega = x^3 dy - xy dx$, $A(0; -2)$, $B(1; 3)$.

1.30. $\omega = -3x^2 dx + y^3 dy$, $A(0; 0)$, $B(2; 4)$.

1.31. $\omega = (2x - y) dx + (4x + 5y) dy$, $A(3; -4)$, $B(1; 2)$.

1.32. $\omega = (4x + 5y) dx + (2x - y) dy$, $A(1; -9)$, $B(4; -3)$.

1.33. $\omega = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + y \right) dx + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x \right) dy$, $A(1; 0)$, $B(3; 4)$.

1.34. $\omega = (x + y) dx + (x - y) dy$, $A(0; 1)$, $B(2; 3)$.

1.35. $\omega = x dx + y dy + (x + y - 1) dz$, c — отрезок AB , пробегаемый от точки $A(1; 1; 1)$ к точке $B(2; 3; 4)$.

1.36. $\omega = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$, c — отрезок AB , пробегаемый от точки $A(1; 1; 1)$ к точке $B(4; 4; 4)$.

В следующих задачах путь c пробегается от точки A к точке B :

1.37. $\omega = xy dx - y^2 dy$, c — дуга параболы $y = 2x^2$, $A(0; 0)$, $B(2; 2)$.

1.38. $\omega = \frac{3x}{y} dx - \frac{2y^3}{x} dy$, c — дуга параболы $x = y^2$, $A(4; 2)$, $B(1; 1)$.

1.39. $\omega = \frac{x}{y} dx - \frac{y - x}{x} dy$, c — дуга параболы $y = x^2$, $A(2; 4)$, $B(1; 1)$.

1.40. $\omega = x dy$, c — полуокружность $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geq 0$, $A(0; -a)$, $B(0; a)$.

В следующих задачах путь c пробегается в направлении возрастания её параметра x .

- 1.41. $\omega = (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, а путь c — отрезок параболы $y = x^2$ для $x \in [-1, 1]$.
- 1.42. $\omega = (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, а путь c — это кривая $y = 1 - |1 - x|$ для $x \in [0, 2]$.
- 1.43. $\omega = xy dx$, c — дуга синусоиды $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$.
- 1.44. $\omega = \left(x - \frac{1}{y}\right) dy$, c — дуга параболы $y = x^2$, $x \in [1, 2]$.
- 1.45. $\omega = x dy - y dx$, c — кривая $y = x^3$, $x \in [0, 2]$.
- 1.46. $\omega = \frac{y}{x} dx + dy$, c — кривая $y = \ln x$, $x \in [1, e]$.
- 1.47. $\omega = 2xy dx + x^2 dy$, c — дуга параболы $y = \frac{x^2}{4}$, $x \in [0, 2]$.
- 1.48. $\omega = 2xy dx - x^2 dy$, c — дуга параболы $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, $x \in [0, 2]$.
- 1.49. $\omega = \cos y dx - \sin y dy$, c — отрезок прямой $y = -x$, $x \in [-2, 2]$.
- 1.50. $\omega = (xy - y^2) dx + x dy$, c — кривая $y = 2\sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.
- 1.51. $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, c — кривая $y = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- 1.52. $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, c — кривая $(x - 1)(y - 1) = 1$, $x > 1$, пробегаемая в направлении возрастания параметра y .

В следующих задачах путь c пробегается в направлении возрастания её параметра t .

- 1.53. $\omega = xy^2 dx$, c — дуга окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0; \pi/2]$.
- 1.54. $\omega = x dy + y dx$, c — дуга окружности $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $t \in [0; \pi/2]$.
- 1.55. $\omega = \frac{x dy - y dx}{2x^2 + 2y^2}$, c — кривая $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 3\pi/2]$.
- 1.56. $\omega = y dx - x dy$, c — эллипс $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.

- 1.57. $\omega = y^2 dx + x^2 dy$, c — верхняя половина эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.
- 1.58. $\omega = (2a - y) dx + (y - a) dy$, c — дуга циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$.
- 1.59. $\omega = (2a - y) dx + x dy$, а путь c — это арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ для $t \in [0, 2\pi]$.
- 1.60. $\omega = \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, c — дуга астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0; \pi/2]$.
- 1.61. $\omega = y dx + z dy + x dz$, c — виток винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in [0; 2\pi]$.
- 1.62. $\omega = (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$, c — кривая $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t \in [0; 1]$.
- 1.63. $\omega = yz dx + z\sqrt{a^2 - y^2} dy + xy dz$, c — дуга винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = at/(2\pi)$, $t \in [0; 2\pi]$.
- 1.64. $\omega = (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$, c — кривая $x = a \sin^2 t$, $y = 2a \sin t \cos t$, $z = a \cos^2 t$, $t \in [0; \pi]$.
- 1.65. $\omega = x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz$, c — кривая $x = a \sin t$, $y = a \cos t$, $z = a(\cos t + \sin t)$, $t \in [0; 2\pi]$.
- 1.66. $\omega = y dx + z dy + x dz$, c — окружность $x = a \cos \alpha \cos t$, $y = a \cos \alpha \sin t$, $z = a \sin \alpha$, $\alpha = \text{const}$.

В следующих задачах требуется вычислить $\int_c \omega$, где путь $c \subset \mathbb{R}^2$ задается в полярных координатах (r, φ) и пробегается в направлении возрастания параметра φ .

- 1.67. $\omega = (2x \cos(x^2 + y^3) + e^{x+\sin x} + y) dx + (3y^2 \cos(x^2 + y^3) + y^{-\frac{1}{2}}) dy$,
 c — кривая $r = \varphi^{\frac{7}{2}}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.
- 1.68. $\omega = (3x^2 \sin(y^2 + x^3) + e^{x^2 + \cos x} + 2y) dx + (2y \sin(x^3 + y^2) + y^{-\frac{1}{3}}) dy$,
 c — кривая $r = \varphi^{\frac{5}{2}}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

1.69. $\omega = \left(2x \cos(x^2 + y^4) + e^{x + \sin x^2} + 3y\right) dx + \left(4y^3 \cos(x^2 + y^4) + y^{-\frac{1}{4}}\right) dy$,
 c — кривая $r = \varphi^{\frac{7}{2}}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

1.70. $\omega = \left(4x^3 \sin(y^2 + x^4) + e^{x^2 + \cos x^2} + 4y\right) dx + \left(2y \sin(x^4 + y^2) + y^{-\frac{1}{5}}\right) dy$,
 c — кривая $r = \varphi^{\frac{5}{2}}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

В следующих задачах путь c — это замкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая так, что её внутренность остается слева.

1.71. $\omega = (x^2 + y^2) dx$, c — граница прямоугольника, образованного прямыми $x = 1$, $x = 3$, $y = 1$, $y = 5$.

1.72. $\omega = (x^2 - 2xy) dx + (x - 2y)^2 dy$, c — граница прямоугольника, образованного прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$.

1.73. $\omega = (3x^2 - y) dx + (1 - 2x) dy$, c — граница треугольника с вершинами $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$.

1.74. $\omega = (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, c — граница треугольника с вершинами $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$.

1.75. $\omega = 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$, c — граница треугольника с вершинами $(1; 1)$, $(1; 3)$, $(2; 2)$.

1.76. $\omega = \frac{xy^2 dx - x^2 y dy}{x^2 + y^2}$, c — правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

1.77. $\omega = (x + y) dx + (x - y) dy$, а путь c — это эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1.78. $\omega = \frac{(x + y) dx - (x - y) dy}{x^2 + y^2}$, а путь c — это окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

1.79. $\omega = \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, а путь c — это контур квадрата с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$.

1.80. $\omega = dy \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - dx$, а путь c — это замкнутая кривая $OmAnO$, где OmA — часть параболы $y = x^2$ и OnA — отрезок прямой $y = x$.

В следующих задачах путь c — это замкнутая кривая в $\mathbb{R}^3$.

- 1.81. $\omega = x(z - y) dx + y(x - z) dy + z(y - x) dz$, c — ломаная $ABCA$, где $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(0; 0; a)$.
- 1.82. $\omega = y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, c — линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$, $R > 0$, $z \geq 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(0; 0; 0)$.
- 1.83. $\omega = (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, c — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси Ox .
- 1.84. $\omega = (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, c — граница части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, лежащей в I октанте, пробегаемая по ходу часовой стрелки, если смотреть из точки $(0; 0; 0)$.
- 1.85. $\omega = (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$, c — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны полуоси Oy .
- 1.86. $\omega = (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, c — линия пересечения поверхностей $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$, $0 < r < R$, $z \geq 0$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси Oz .
- 1.87. $\omega = y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, а путь c — часть кривой Вивиани $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $z \geq 0$, $a > 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной части $(x > a)$ оси Ox .
- 1.88. $\omega = (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, где C — контур, ограничивающий часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, пробегаемый так, что внешняя сторона этой поверхности остаётся слева.
- 1.89. $\omega = \frac{z \operatorname{arctg} z}{\sqrt{1 + z^2}} dz + (y - z^3) dx - (2x + z^3) dy$, c — контур, заданный системой уравнений $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = z$, $4x^2 + 9y^2 = 1$ и пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси z .

1.90. $\omega = \frac{z \ln z}{(1+z^2)^2} dz + (y^3 + z^3) dx - (x^3 + z^3) dy$, c — контур, заданный системой уравнений $1 - x^2 - y^2 = z$, $4x^2 + 2y^2 = 1$ и пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси z .

1.91. $\omega = \frac{e^z dz}{1 + e^z + e^{2z}} - (2y + z^2) dx + (x + z^3) dy$, c — контур, заданный системой уравнений $\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} = z$, $x^2 + y^2 = 1$, и пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси z .

1.92. $\omega = \frac{dz}{1 - e^z + e^{2z}} + (y^3 + z^3) dx + (x^2 + z^2) dy$, c — контур, заданный системой уравнений $1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = z$, $x^2 + y^2 = 1$ и пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси z .

1.93. Пусть $c \subset \mathbb{R}^3$ простой замкнутый контур класса C^1 , обходящий ось z против часовой стрелки. Докажите равенство

$$\int_c \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + f(z) dz = 2\pi,$$

где f — произвольная функция класса C^1 .

1.94. Доказать, что для интеграла от формы справедлива следующая оценка:

$$|\int_C P dx + Q dy| \leq LM,$$

где L — длина пути интегрирования и $M = \max \sqrt{P^2 + Q^2}$ на дуге C .

1.95. Оценить интеграл:

$$I_R = \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}.$$

Доказать, что $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$.

Гладкая 1-форма $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутой*, если на U выполняются равенства $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ для всех возможных i, j (см. задачу 1.25). Очевидно, что замкнутость 1-формы ω — это необходимое условие для того, чтобы форма ω была дифференциалом некоторой функции.

Вычислить интеграл

$$\int_c \omega = \int_A^B \omega,$$

где ω — замкнутая форма первой степени и c — одномерная цепь в евклидовом пространстве с началом в точке A и концом в точке B , задаваемые ниже.

1.96. $\omega = x dy + y dx$, $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$.

1.97. $\omega = x dx + y dy$, $A(0, 1)$, $B(3, -4)$.

1.98. $\omega = (x + y) dx + (x - y) dy$, $A(0, 1)$, $B(2, 3)$.

1.99. $\omega = (x - y)(dx - dy)$, $A(1, -1)$, $B(1, 1)$.

1.100. $\omega = \frac{y dx - x dy}{x^2}$, $A(2, 1)$, $B(1, 2)$, цепь c не пересекает ось Oy .

1.101. $\omega = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $A(1, 0)$, $B(6, 8)$, цепь c не проходит через начало координат.

1.102. $\omega = (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$, $A(-2, -1)$, $B(3, 0)$.

1.103. $\omega = \frac{x dy - y dx}{(x - y)^2}$, $A(0, -1)$, $B(1, 0)$, цепь c не пересекает прямую $y = x$.

1.104. $\omega = \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy$, $A(1, \pi)$, $B(2, \pi)$, цепь c не пересекает ось Oy . вдоль путей, не пересекающих оси Oy .

1.105. $\omega = x dx + y dy$, $A(-1; 3)$, $B(2; 2)$.

1.106. $\omega = x dx + y dy$, $A(-1; 0)$, $B(-3; 4)$.

- 1.107. $\omega = (x + y) dx + (x - y) dy$, $A(2; -1)$, $B(1, 0)$.
- 1.108. $\omega = 2xy dx + x^2 dy$, $A(0; 0)$, $B(-2; -1)$.
- 1.109. $\omega = (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$, $A(-2; -1)$, $B(0; 3)$.
- 1.110. $\omega = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$, $A(3; 0)$, $B(0; -3)$.
- 1.111. $\omega = (3x^2 - 2xy + y^2) dx + (2xy - x^2 - 3y^2) dy$, $A(-1; 2)$, $B(1; -2)$.
- 1.112. $\omega = f(x + y)(dx + dy)$, $f(t)$ — непрерывная функция, $A(0; 0)$, $B(x_0; y_0)$.
- 1.113. $\omega = \varphi(x) dx + \psi(y) dy$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — непрерывные функции, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.
- 1.114. $\omega = e^x \cos y dx - e^x \sin y dy$, $A(0; 0)$, $B(x_0; y_0)$.
- 1.115. $\omega = x dx + y^2 dy - z^3 dz$, $A(-1; 0; 2)$, $B(0; 1; -2)$.
- 1.116. $\omega = yz dx + xz dy + xy dz$, $A(2; -1; 0)$, $B(1; 2; 3)$.
- 1.117. $\omega = x dx + y^2 dy - z^3 dz$, $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, -4)$.
- 1.118. $\omega = yz dx + xz dy + xy dz$, $A(1, 2, 3)$, $B(6, 1, 1)$.
- 1.119. $\omega = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где точка $A(x_1, y_1, z_1)$ расположена на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, а точка $B(x_2, y_2, z_2)$ — на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ ($a > 0, b > 0$).
- 1.120. $\omega = \varphi(x) dx + \psi(y) dy + \chi(z) dz$, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, где φ, ψ, χ — непрерывные функции.
- 1.121. $\omega = f(x + y + z)(dx + dy + dz)$, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, где f — непрерывная функция.
- 1.122. $\omega = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x dx + y dy + z dz)$, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, где f — непрерывная функция.
- 1.123. Доказать, что если $f(u)$ — непрерывная функция и c , кусочно-гладкий замкнутый контур, то

$$\oint_c f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0.$$

В следующей серии задач найти 0-форму (т. е. функцию) u по заданной 1-форме du :

$$1.124. \quad du = x^2 dx + y^2 dy.$$

$$1.125. \quad du = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy.$$

$$1.126. \quad du = (e^{2y} - 5y^3 e^x) dx + (2xe^{2y} - 15y^2 e^x) dy.$$

$$1.127. \quad du = e^{x-y}[(1+x+y) dx + (1-x-y) dy].$$

$$1.128. \quad du = e^x[e^y(x-y+2)+y] dx + e^x[e^y(x-y)+1] dy.$$

$$1.129. \quad du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \left(\frac{e^2}{1+x^2} + 1 \right) dy.$$

$$1.130. \quad du = \frac{y dx - x dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}.$$

$$1.131. \quad du = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy}{(x+y)^3}.$$

$$1.132. \quad du = \frac{\partial^{n+m+1} v}{\partial x^{n+1} \partial y^m} dx + \frac{\partial^{n+m+1} v}{\partial x^n \partial y^{m+1}} dy.$$

$$1.133. \quad du = \frac{\partial^{n+m+1} v}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dx - \frac{\partial^{n+m+1} v}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+2}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dy, \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$1.134. \quad du = (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz.$$

$$1.135. \quad du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z} \right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2} \right) dy - \frac{xy}{z^2} dz.$$

$$1.136. \quad du = \frac{(x+y-z) dx + (x+y-z) dy + (x+y+z) dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}.$$

$$1.137. \quad du = \frac{dx + dy + dz}{x + y + z}$$

$$1.138. \quad du = \frac{yz dz + xz dy + xy dx}{1 + x^2 y^2 z^2}.$$

- 1.139. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $F(x; y)$, чтобы интеграл от 1-формы $\omega = F(x; y)(y dx + x dy)$ не зависел от пути интегрирования c_{AB} , идущего от точки A к точке B ?
- 1.140. Проверив, что дифференциальная форма $dz = \frac{x+y}{y^2+x^2} dy - \frac{y^2+xy}{x^3+y^2x} dx$ является полным дифференциалом, найдите функцию $z(x, y)$.

1.6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ 1-ФОРМ ВДОЛЬ КРИВЫХ.

Множество $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ называется *ориентированной кривой*, если существует ориентированный путь $\gamma : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ такой, что

- 1) γ — инъективное отображение,
- 2) $\gamma(T) = \mathcal{S}$,
- 3) $\gamma'(t) \neq 0$ для всех $t \in T$.

Если $T = [a < b]$, то точка $\gamma(a)$ называется началом кривой $\mathcal{S}$, а точка $\gamma(b)$ — ее концом. Направление движения по кривой, когда t изменяется от точки a к точке b , задает ориентацию кривой. Заметим, что при смене ориентации, начальной становится точка $\gamma(b)$, а конечной точка $\gamma(a)$.

Если p и q — точки кривой $\mathcal{S}$, то символом $\mathcal{S}[p, q]$ будем обозначать отрезок этой дуги, считая p его началом, а q — концом. Если $\mathcal{S}$ — ориентированная кривая, то символом $-\mathcal{S}$ обозначают ту же самую кривую, снабжённую противоположной ориентацией. Таким образом, $\mathcal{S}[p, q] = -\mathcal{S}[q, p]$.

Пусть даны ориентированная кривая $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ и 1-форма ω^1 в $\mathbb{R}^n$. Определим интеграл (ср. с определением (4)) от формы по ориентированной кривой следующим образом:

$$\int_{\mathcal{S}} \omega^1 = \int_{\gamma} \omega^1 = \int_T \gamma^* \omega^1. \quad (6)$$

- 1.141. Чем приведенное выше определение кривой отличается от определения пути в разделе 1.5?
- 1.142. Доказать, что приведенное определение интеграла корректно, т. е. не зависит от выбора *сориентированной* параметризации γ .

УКАЗАНИЕ. Пусть $\alpha : [c < d] \rightarrow \mathcal{S}$ — любая другая сориентированная параметризация, так что $\gamma(a) = \alpha(c)$, $\gamma(b) = \alpha(d)$. Доказать, что функция $\beta : [u, v] \rightarrow [a, b]$,

задаваемая формулой $\beta = \gamma^{-1} \circ \alpha$, биективна и непрерывно-дифференцируема. Тогда $\int_S \omega = \int_a^b \gamma^* \omega = \int_c^d \beta^* (\gamma^* \omega) = \int_c^d (\gamma \circ \beta)^* \omega = \int_c^d \alpha^* \omega$.

1.143. Доказать **признак интегрируемости**: Непрерывная на множестве U 1-форма интегрируема вдоль любой кривой $S \subset U$.

1.144. Доказать следующие свойства интеграла формы вдоль кривой.

1) **Линейность**: если $\omega = \sum_{i=1}^q a_i \omega_i$, где $\omega_1, \dots, \omega_q$ — 1-формы, интегрируемые вдоль ориентированной кривой S , а $a_1, \dots, a_q$ — постоянные, то ω интегрируема вдоль S и

$$\int_S \omega = \sum_{i=1}^q a_i \int_S \omega_i.$$

2) **Ориентированность**: $\int_{-S} \omega = - \int_S \omega$ для любой формы ω , интегрируемой вдоль S .

3) **Аддитивность**: если в формуле

$$\int_{S[p,r]} \omega = \int_{S[p,q]} \omega + \int_{S[q,r]} \omega$$

определены два интеграла, то третий также определён и формула верна.

4) **Формула Ньютона — Лейбница**: если на ориентированной дуге S форма ω представима в виде $\omega = df$, где f — гладкая функция, то $\int_S \omega = f(p) - f(q)$ (p — начало, q — конец кривой S).

5) **Оценка интеграла**: если форма ω интегрируема вдоль ориентированной кривой S и $|\omega(x)| \leq C$ для любой точки, $x \in S$, то

$$\left| \int_S \omega \right| \leq C \mathcal{H}^1(S).$$

1.7. ФОРМУЛА ГРИНА.

Предположим, что плоскость $\mathbb{R}^2$ ориентирована стандартным образом. Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ — компактная область с кусочно-гладкой границей, т. е.

- 1) множество M компактно,
- 2) M есть замыкание некоторого открытого множества,
- 3) граница $\text{Fr } M$ является объединением *правильной системы* ориентированных кривых $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ ($\sigma_i \cap \sigma_j = \partial\sigma_i \cap \partial\sigma_j$ для любых $i \neq j$),
- 4) кривая σ_i *ориентирована* так, что область M примыкает к ней слева.

Говорят, что M примыкает к ориентированной кривой $\sigma_{[p,q]}$ *слева*, если для любой точки $z \in \sigma \setminus \partial\sigma$ имеется такой промежуток $(z, u] \subset \mathbb{R}^2 \setminus M$, что пара векторов $(u - z, \dot{\sigma}(z))$ ориентирована стандартно, т. е. $\det(u - z, \dot{\sigma}(z)) > 0$.

Обозначим символом ∂M формальную сумму $\sigma_1 + \dots + \sigma_k$ всех таким образом ориентированных кривых, принадлежащих границе $\text{Fr } M$.

Формула Грина. Для любой C^1 -гладкой на M формы $f dx + g dy$ имеет место равенство

$$\boxed{\int_{\partial M} (f dx + g dy) = \int_M \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.} \quad (7)$$

В следующей серии задач предлагается рассмотреть частный случай формулы Грина, когда область M представляет собой криволинейную вертикальную полосу, т. е.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a < b], y \in [u(x), h(x)]\},$$

где u и h — такие C^1 -гладкие функции на отрезке $[a < b]$, что $u(x) < h(x)$ для любой точки x интервала $(a < b)$, а ∂M — граница M , представленная как кусочно-гладкая кривая, пробегаемая против часовой стрелки.

Пусть U — график функции u , H — график функции h , $A = [(a, u(a)), (a, h(a))]$; $B = [(b, u(b)), (b, h(b))]$. Будем считать, что дуги U , H направлены слева направо, а отрезки A , B — снизу вверх т. е., что точка $(a, u(a))$ служит началом дуг U и A , а точка $(b, h(b))$ — концом дуг H и B (см. рис. 1.1).

Тогда $\partial M = U + B - H - A$. Следовательно, левую часть формулы (7) можно записать в виде

$$\int_{\partial M} (f dx + g dy) = \int_U f dx + \int_B f dx - \int_H f dx - \int_A f dx \quad (8)$$

$$+ \int_U g dy + \int_B g dy - \int_H g dy - \int_A g dy. \quad (9)$$

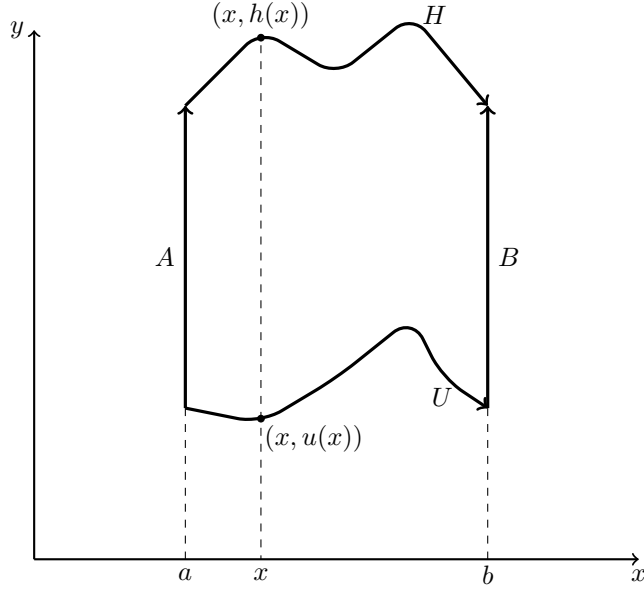


Рис. 1.1: Доказательство формулы Грина

1.145. Проверить, что каждое из следующих отображений

$$\alpha(y) = (a, y) : [u(a), h(a)] \rightarrow A,$$

$$\beta(y) = (b, y) : [u(b), h(b)] \rightarrow B,$$

$$\varphi(x) = (x, u(x)) : [a, b] \rightarrow U,$$

$$\psi(x) = (x, h(x)) : [a, b] \rightarrow H$$

является инъективным и гладким.

Более того, каждое из них определяет ориентацию на соответствующих кривых, согласованную с определенной выше.

1.146. Проверить, что

$$\int_U f dx = \int_a^b f(x, u(x)) dx, \quad \int_H f dx = \int_a^b f(x, h(x)) dx,$$

$$\int_A f dx = \int_B f dx = 0.$$

- 1.147. Доказать на основании предыдущей задачи, что правая часть формулы (8) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \int_U f dx + \int_B f dx - \int_H f dx - \int_A f dx &= \int_a^b (f(x, u(x)) - f(x, h(x))) dx \\ &= - \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \right) dx = - \int_M \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

На каком основании сделан последний переход?

- 1.148. Проверить, что

$$\begin{aligned} \int_A g dy &= \int_{u(a)}^{h(a)} g(a, y) dy, & \int_U g dy &= \int_a^b g(x, u(x)) u'(x) dx, \\ \int_B g dy &= \int_{u(b)}^{h(b)} g(b, y) dy, & \int_H g dy &= \int_a^b g(x, h(x)) h'(x) dx. \end{aligned}$$

- 1.149. Вывести правило дифференцирования интеграла $\int_{u(x)}^{h(x)} g(x, y) dy$

по x при условии, что функции $u(x)$, $h(x)$, $g(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по x .

- 1.150. Используя результаты задач 1.148 и 1.149, проверить, что (9) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} g dy &= \int_B g dy - \int_A g dy - \int_H g dy + \int_U g dy = \int_{u(b)}^{h(b)} g(b, y) dy \\ &- \int_{u(a)}^{h(a)} g(a, y) dy - \int_a^b g(x, h(x)) h'(x) dx + \int_a^b g(x, u(x)) u'(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{u(x)}^{h(x)} g(x, y) dy \right) dx + \int_a^b (-g(x, h(x))h'(x) + g(x, u(x))u'(x)) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{h(x)} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} dy \right) dx = \int_M \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} dx dy.
\end{aligned}$$

- 1.151. Вывести из задач 1.147 и 1.150 формулу Грина для рассматриваемой вертикальной полосы.
- 1.152. Описать горизонтальную полосу, аналогичную вертикальной и установить для такой области формулу Грина.
- 1.153. Допустим, что компактная область M с кусочно-гладкой границей есть объединение областей M_1 и M_2 задачи 1.151, причём $\partial M_1 = A_1 + B_1$, $\partial M_2 = A_2 + B_2$, где A_1, B_1, A_2, B_2 — такие цепи, что $B_1 = -B_2$, $\partial M = A_1 + A_2$. Доказать, что в такой ситуации, если для формы $f dx + g dy$ формула Грина справедлива для двух из рассматриваемых областей, то она справедлива и для третьей.
- 1.154. Показать, что $\int_{\partial M} f dx + g dy$ не зависит от представления границы области $M \subset \mathbb{R}^2$ в виде цепи ориентированных кривых.
- 1.155. В условиях формулы Грина показать, что равенство (7) может быть записано в другом виде:

$$\boxed{\int_{\partial M} (\eta_1 f + \eta_2 g) ds = \int_M \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy,} \quad (10)$$

где $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ — вектор внешней нормали к кривой γ . Известно, что $\eta(t) = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|}(\dot{\gamma}_2(t), -\dot{\gamma}_1(t))$, где $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ — координатные функции параметризации кривой.

УКАЗАНИЕ. В (10) ds — форма длины: $ds\langle v \rangle = \det(\eta, v) = (\eta_1 dy - \eta_2 dx)\langle v \rangle$. Отметим, основные свойства формы длины:

- 1) $ds\langle \dot{\gamma}(t) \rangle = |\dot{\gamma}(t)|$;
- 2) $\eta_1(t) ds = dx$ на векторах касательного пространства к кривой в точке t ;
- 2) $\eta_2(t) ds = dy$ на векторах касательного пространства к кривой в точке t .

Форму ds можно рассматривать также как элемент длины: $\gamma^* ds = |\dot{\gamma}(t)| dt$, где γ — параметризация кривой. Тогда имеем совпадение

$$\int_{\partial M} (\eta_1 f + \eta_2 g) ds = \int_{\partial M} (\eta_1 f + \eta_2 g) d\mathcal{H}_1. \quad (11)$$

Поэтому формула (10) может быть записана как

$$\int_{\partial M} (\eta_1 f + \eta_2 g) d\mathcal{H}^1 = \int_M \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy. \quad (12)$$

Из выведенных формул получаем также равенство трех интегралов:

$$\int_{\partial M} f dx + g dy = \int_{\partial M} (\eta_1 f + \eta_2 g) ds = \int_{\partial M} (\eta_1 f + \eta_2 g) d\mathcal{H}^1. \quad (13)$$

1.156. Нахождение площадей плоских фигур. В условиях формулы Грина показать, что площадь области M можно найти по формуле:

$$\mathcal{H}^2(M) = \int_{\partial M} x dy = \frac{1}{2} \int_{\partial M} (x dy - y dx) = -\frac{i}{2} \int_{\partial M} \bar{z} dz, \text{ где } z = x + iy.$$

1.157. Интеграл Гаусса. Если область M не содержит точку $0 \in \mathbb{R}^2$, то $\int_{\partial M} d\theta = 0 \in \mathbb{R}$. Если же $0 \in \text{int } M$, то $\int_{\partial U} d\theta = 2\pi$.

УКАЗАНИЕ. Если $0 \notin M$, то $\int_{\partial M} d\theta = \int_M 0 dx dy = 0$.

Если $0 \in \text{int } M$, то прямое применение формулы Грина невозможно. Объяснить причину!

Пусть B — круг радиуса r с центром 0 , лежащий в $\text{int } M$, и $V = M \setminus \text{int } B$. Поскольку $0 \notin V$ и $\partial V = \partial M - \partial B$, то $0 = \int_{\partial V} d\theta = \int_{\partial M} d\theta - \int_{\partial B} d\theta$. Следовательно,

$$\int_{\partial M} d\theta = \int_{\partial B} d\theta = \int_{\partial B} \frac{x dy - y dx}{r^2} = 2\pi.$$

1.158. Дана форма $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ в плоскости с выколотой точкой $(0, 0)$. Доказать, что $d\omega = 0$ и форма ω не является дифференциалом в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ никакой функции u .

УКАЗАНИЕ: Доказать, что если $\omega = du$, то должно выполняться равенство $\int_{S(0,r)} \omega = 0$ для всякой окружности $S(0, r)$ с центром в начале координат.

Ниже слово «*контур*» обозначает множество, гомеоморфное окружности, составленное из конечного числа ориентированных кривых.

1.159. Найдите интеграл

$$\int_C \frac{x dy - y dx}{2x^2 + 2y^2},$$

где $C \subset \mathbb{R}^2$ — кривая $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$ и параметр t пробегает значения от $t = 0$ до $t = 3\pi/2$.

1.160. С помощью формулы Грина преобразуйте интеграл

$$\int_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) dy,$$

где контур C ограничивает конечную область S .

1.161. Применяя формулу Грина, вычислите интеграл

$$I = \int_K (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy,$$

где K — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника ABC с вершинами $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(2, 5)$. Проверьте найденный результат, вычисляя интеграл непосредственно.

Применяя формулу Грина, вычислите интегралы вида $\oint_C \omega$:

1.162. $\omega = xy^2 dy - x^2 y dx$, C — окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

1.163. $\omega = (x + y) dx - (x - y) dy$, C — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1.164. $\omega = e^x((1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy)$, C — пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $\{(x, y) \mid x \in (0, \pi), y \in (0, \sin x)\}$.

1.165. $\omega = e^{-(x^2 - y^2)}(\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$, C — окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

1.166. Насколько отличаются друг от друга интегралы

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

и

$$I_2 = \int_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

где AmB — прямая, соединяющая точки $A(1, 1)$ и $B(2, 6)$, и AnB — парабола с вертикальной осью, проходящая через те же точки A и B и начало координат?

1.167. Вычислите интеграл от формы

$$\omega = (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$$

по верхней полуокружности $x^2 + y^2 = ax$, пробегаемой от точки $A(a, 0)$ к точке $O(0, 0)$.

УКАЗАНИЕ: Дополните путь до замкнутого прямолинейным отрезком OA оси Ox .

1.168. Вычислите интеграл от формы

$$\omega = (\varphi(y)e^x - my) dx + (\varphi'(y)e^x - m) dy,$$

где $\varphi(y) \in C^1$, по произвольному пути AmB , соединяющему точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, ограничивающему вместе с отрезком AB площадь $AmBA$ данной величины S .

1.169. Определите две дважды дифференцируемые функции так, чтобы интеграл от формы

$$\omega = P(x + \alpha, y + \beta) dx + Q(x + \alpha, y + \beta) dy$$

по любому замкнутому контуру не зависел от постоянных α и β .

1.170. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $F(x, y)$, чтобы интеграл $\int_{AmB} \omega$ от формы

$$\omega = F(x, y)(y dx + x dy)$$

не зависел от пути интегрирования?

1.171. Вычислите интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{X dY - Y dX}{X^2 + Y^2},$$

если $X = ax + by$, $Y = cx + dy$, $ad - bc \neq 0$, и простой замкнутый контур C окружает начало координат.

1.172. Вычислите интеграл I из предыдущей задачи, если $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$, и простой контур C окружает начало координат, причём кривые $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$ имеют несколько простых точек пересечения внутри контура C .

1.173. Пусть G — ограниченная плоская область с кусочно-гладкой границей ∂G , ориентированной так, что область G находится (локально) слева от касательного к ∂G вектора. Докажите, что площадь μG можно вычислить по любой из формул:

$$S = \oint_{\partial G} x dy = - \oint_{\partial G} y dx = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} x dy - y dx.$$

1.174. Найдите площадь области $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

1.175. Вычислить контурный интеграл $\int_L \frac{1}{2} r^2 d\varphi$, где $L = \partial D$, область D ограничена кривыми

$$xy = p, \quad xy = q, \quad y^2 = ax, \quad y^2 = bx, \quad 0 < p < q, \quad 0 < a < b,$$

(r, φ) — полярные координаты, направление обхода по контуру L происходит против часовой стрелки.

1.176. Вычислить контурный интеграл $\int_L \frac{1}{2} r^2 d\varphi$, где $L = \partial D$, область D ограничена кривыми

$$xy = p, \quad xy = q, \quad y = ax, \quad y = bx, \quad 0 < p < q, \quad 0 < a < b,$$

(r, φ) — полярные координаты, направление обхода по контуру L происходит против часовой стрелки.

1.177. Вычислить контурный интеграл $\int_L \frac{1}{2} r^2 d\varphi$, где $L = \partial D$, область D ограничена кривыми

$$x^2 = py, \quad x^2 = qy, \quad y = ax, \quad y = bx, \quad 0 < p < q, \quad 0 < a < b,$$

(r, φ) — полярные координаты, направление обхода по контуру L происходит против часовой стрелки.

1.178. Вычислить контурный интеграл $\int_L \frac{1}{2} r^2 d\varphi$, где $L = \partial D$, область D ограничена кривыми

$$y = ax^3, \quad y = bx^3, \quad y^2 = px, \quad y^2 = qx, \quad 0 < p < q, \quad 0 < a < b,$$

(r, φ) — полярные координаты, направление обхода по контуру L происходит против часовой стрелки.

С помощью формулы Грина вычислите площади, ограниченные следующими кривыми:

1.179. $y^2 = 4 - x, x = 4, y = 1$.

1.180. $y = 2x^2, x - y + 1 = 0$.

1.181. $y = 1 - x^2, x - y - 1 = 0$.

1.182. $x = t^2, y = t^3, x = 1$.

1.183. $x = 12 \sin^3 t, y = 3 \cos^3 t$.

1.184. $x = a \sin 2\varphi \cos^2 \varphi, y = a \cos 2\varphi \cos^2 \varphi, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

1.185. $(y - x)^2 + x^2 = 1$.

1.186. $(x + y)^2 = ax, y = 0$.

1.187. $y^2 = x^2 - x^4$.

1.188. $9y^2 = 4x^3 - x^4$.

1.189. $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$.

1.190. $x = a \cos t, y = b \sin t, t \in [0, 2\pi]$ (эллипс).

1.191. $x = a \cos t, y = b \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$ (астроида).

1.192. $(x+y)^2 = ax$ ($a > 0$) (парабола) и ось Ox .

1.193. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ (лемниската).

УКАЗАНИЕ: Положите $y = x \operatorname{tg} \varphi$.

1.194. $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ и оси координат.

1.195. $(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m$ ($a > 0$, $n > 0$, $m > 0$).

1.196. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ ($a > 0$, $b > 0$, $n > 0$) и оси координат.

УКАЗАНИЕ: Положите $\frac{x}{a} = \cos^{2/n} \varphi$, $\frac{y}{b} = \sin^{2/n} \varphi$.

1.197. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$ ($a > 0$, $b > 0$, $n > 1$) и оси координат.

1.198. Найти площадь множества, ограниченного кривой

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2} \sin \left(\frac{\pi y}{b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}} \right),$$

где a, b, c — положительные константы.

Найдите площадь области, ограниченной петлёй кривой:

1.199. $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$.

1.200. $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin 2\varphi$, $x \geq 0$.

1.201. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = xy$.

1.202. Петлёр декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$ ($a > 0$).

УКАЗАНИЕ: Положите $y = tx$.

1.203. Вычислите площадь петли кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n$$

($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $n > 0$).

- 1.204. *Эпициклоидой* называется кривая, описываемая точкой подвижной окружности радиуса r , катящейся без скольжения по неподвижной окружности радиуса R и остающейся вне неё. Найдите площадь, ограниченную эпициклоидой, предполагая, что отношение $\frac{R}{r} = n$ есть целое число ($n \geq 1$). Разберите частный случай $R = r$ (кардиоиды).
- 1.205. *Гипоциклоидой* называется кривая, описываемая точкой подвижной окружности радиуса r , катящейся без скольжения по неподвижной окружности радиуса R и остающейся внутри неё. Найдите площадь, ограниченную гипоциклоидой, предполагая, что отношение $\frac{R}{r} = n$ есть целое число ($n \geq 2$). Разберите частный случай $R = 4r$ (астроида).
- 1.206. Вычислите площадь части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = ax$, вырезанной поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- 1.207. Покажите, что, если C — замкнутый контур и $\mathbf{l}$ — произвольное направление, то $\int_C \cos(\mathbf{l}, \mathbf{n}) d\mathcal{H}^1 = 0$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к контуру.
- 1.208. Найдите значение интеграла

$$\oint_C (x \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_x) + y \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_y)) d\mathcal{H}^1$$

по простой замкнутой кривой C , ограничивающей конечную область S , где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к C , $\mathbf{e}_x = (1, 0)$, $\mathbf{e}_y = (0, 1)$.

- 1.209. Пусть $C \subset \mathbb{R}^2$ — простой замкнутый контур класса C^1 , $\tau(x, y)$ — единичный касательный к контуру C вектор, направленный так, чтобы ограниченная область оставалась слева. Докажите равенство

$$\int_C (\mathbf{a}, \tau) d\mathcal{H}^1 = 0,$$

где $\mathbf{a}$ — произвольный постоянный вектор.

- 1.210. Найдите предел

$$\lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{S} \int_C (\mathbf{F}, \mathbf{n}) d\mathcal{H}^1,$$

где S — площадь, ограниченная контуром C , окружающим точку (x_0, y_0) , $d(S)$ — диаметр области S , $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали контура C и $F\{X, Y\}$ — вектор, непрерывно дифференцируемый в $S + C$.

- 1.211. Пусть G — ограниченная область в полуплоскости $y \geq 0$ с кусочно-гладкой границей ∂G , ориентированной так, что область G находится (локально) слева от касательного вектора. Пусть Ω — тело, образованное вращением области G вокруг оси Ox . Докажите, что объём $\mu\Omega$ можно вычислить по любой из формул:

$$\mu\Omega = -\pi \oint_{\partial G} y^2 dx = -2\pi \oint_{\partial G} xy dy = -\frac{\pi}{2} \oint_{\partial G} 2xy dy + y^2 dx.$$

- 1.212. Пусть (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, вершины многоугольника в $\mathbb{R}^2$, занумерованные в порядке обхода так, чтобы при обходе многоугольник оставался слева. Докажите, что площадь многоугольника равна $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \dots + x_ny_1 - x_1y_n)$.

Найдите объём тела, образованного при вращении вокруг оси Ox области, ограниченной кривыми:

- 1.213. $y = \operatorname{sh} x$, $x = 0$, $y = 0$.
 1.214. $y = 2 - \sin x$, $x \in [0; 2\pi]$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$.
 1.215. $y^2 - x^2 = 1$, $|x| = 1$.
 1.216. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.
 1.217. $x = \sin 2t$, $y = \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.
 1.218. Найдите *логарифмический потенциал простого слоя*

$$u(x, y) = \int_{\Gamma} \mu(\zeta, \eta) \ln \frac{1}{r} d\mathcal{H}^1,$$

где Γ — окружность $\zeta^2 + \eta^2 = 1$, ориентированная против часовой стрелки, $r = \sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2}$, если:

- 1) $\mu(\zeta, \eta) = \mu_0 = \text{const}$;
- 2) $\mu(\zeta, \eta) = \cos m\varphi$, $m \in \mathbb{N}$;
- 3) $\mu(\zeta, \eta) = \sin m\varphi$, $m \in \mathbb{N}$.

Здесь φ — полярный угол точки (ζ, η) .

1.219. Вычислите интеграл Гаусса

$$I = \oint_{\partial G} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} d\mathcal{H}^1,$$

где ∂G — кусочно-гладкая граница области G , $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(\zeta, \eta) \in \partial G$, $\mathbf{r} = (\zeta - x, \eta - y)$, $r = \sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2}$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к ∂G , $\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ — косинус угла между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$, предполагая, что:

- 1) $M \notin G$;
- 2) $M \in G$.

1.220. Вычислите логарифмический потенциал двойного слоя

$$u(x, y) = \oint_{\Gamma} \nu(\zeta, \eta) \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} d\mathcal{H}^1,$$

где Γ — окружность $\zeta^2 + \eta^2 = 1$, ориентированная против часовой стрелки, $\mathbf{r} = (\zeta - x, \eta - y)$, $r = \sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2}$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Γ , если:

- 1) $\nu(\zeta, \eta) = \cos m\varphi$, $m \in \mathbb{N}$;
- 2) $\nu(\zeta, \eta) = \sin m\varphi$, $m \in \mathbb{N}$.

Здесь φ — полярный угол точки (ζ, η) . Рассмотрите случаи $\sqrt{x^2 + y^2} > 1$ и $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$.

2. Внешние дифференциальные 2-формы

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ 2-ФОРМ.

2.2. КООРДИНАТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ 2-ФОРМ.

2.3. ОПЕРАЦИЯ ПЕРЕНОСА.

2.4. ОРИЕНТАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ В $\mathbb{R}^3$.

2.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ 2-ФОРМ ПО ПОВЕРХНОСТЯМ.

В следующих задачах найти двумерную цепь c и вычислить интеграл

$$\int_c \omega$$

для задаваемых ниже форм второй степени ω в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

2.1. $\omega = (x^2 + y^2) dx \wedge dy$, c — нижняя сторона круга $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$.

РЕШЕНИЕ. В этой задаче задание цепи c как нижней стороны круга $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$ следует понимать так, что $c = (D, f, Or)$, где отображение f определяется по формулам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r \in [0, 2]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Разберем вопрос выбора ориентации в $\mathbb{R}^2$, которая определяется порядком переменных (r, φ) или (φ, r) . Возможно 2 варианта:

1) $D = \{(r, \varphi) \in [0, 2] \times [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{R}^2$. Тогда интеграл по D от 2 формы вида $a dr \wedge d\varphi$, $a: D \rightarrow \mathbb{R}$, равен

$$\int_D a dr \wedge d\varphi = \int_D a dr d\varphi,$$

где справа — обычный интеграл Лебега.

2) $D = \{(\varphi, r) \in [0, 2\pi] \times [0, 2]\} \subset \mathbb{R}^2$. Тогда интеграл по D от 2 формы вида $a dr \wedge d\varphi$, $a: D \rightarrow \mathbb{R}$, равен

$$\int_D a dr \wedge d\varphi = - \int_D a dr d\varphi,$$

где справа — обычный интеграл Лебега.

Для выбора ориентации мы рассмотрим единичные касательные вектора к поверхности $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\varphi$ вдоль переменных r и φ , соответственно. При этом внешняя нормаль $\mathbf{n}$ равна векторному произведению $\pm \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi$ с точностью до знака.

В нашей задаче $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r$ (смотрите рисунок 2.1). Поэтому мы выбираем случай 2): $D = \{(\varphi, r) \in [0, 2\pi] \times [0, 2]\} \subset \mathbb{R}^2$.

Тогда

$$f^* \omega = r^2 (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi) \wedge (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) = r^3 dr \wedge d\varphi$$

и

$$\int_c \omega = \int_D f^* \omega = \int_D r^3 dr \wedge d\varphi = - \int_D r^3 dr d\varphi = - \int_0^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = -8\pi.$$

Заметим, что f не инъективно на замкнутом множестве D . Однако, оно диффеоморфно на внутренности D и этого достаточно для интегрирования. Аналогичное замечание относится и к последующим задачам.

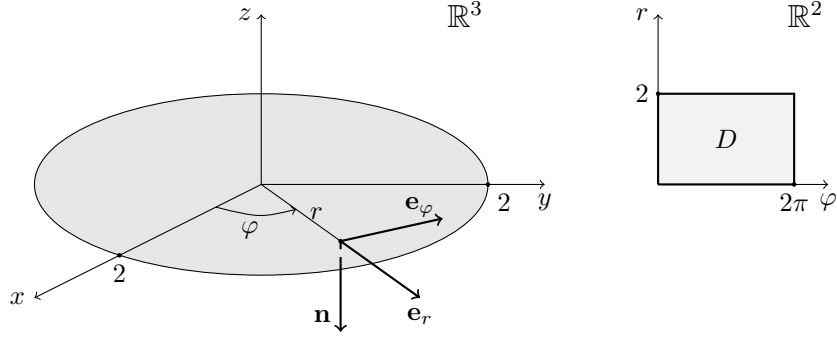


Рис. 2.1: К задаче 2.1

- 2.2. $\omega = (2z - x) dy \wedge dz + (x + 2z) dz \wedge dx + 3z dx \wedge dy$, c — верхняя сторона треугольника $x + 4y + z = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
- 2.3. $\omega = xz dx \wedge dy$, c — внутренняя сторона поверхности тетраэдра $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
- 2.4. $\omega = yz dy \wedge dz + zx dz \wedge dx + xy dx \wedge dy$, c — внутренняя сторона поверхности тетраэдра $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
- 2.5. $\omega = f(x) dy \wedge dz + g(y) dz \wedge dx + h(z) dx \wedge dy$, где $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ — непрерывные функции и c — внешняя сторона параллелепипеда $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$.
- 2.6. $\omega = y dz \wedge dx$, c — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
- 2.7. $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, а цепь c — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- 2.8. $\omega = x^2 dy \wedge dz$, c — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
- 2.9. $\omega = (x^5 + z) dy \wedge dz$, c — внутренняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \leq 0$.
- 2.10. $\omega = x^2 y^2 z dx \wedge dy$, c — внутренняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \leq 0$.
- 2.11. $\omega = x^2 dy \wedge dz + z^2 dx \wedge dy$, c — внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \leq 0$, $y \geq 0$.

- 2.12. $\omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$, c — внешняя сторона сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
- 2.13. $\omega = z^2 dx \wedge dy$, c — внутренняя сторона полусферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.
- 2.14. $\omega = (x-1)^3 dy \wedge dz$, c — внешняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, $z \leq 0$.
- 2.15. $\omega = dz \wedge dx$, c — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- 2.16. $\omega = x dy \wedge dz$, c — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- 2.17. $\omega = x^2 dy \wedge dz$, c — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- 2.18. $\omega = \frac{dx \wedge dy}{z}$, c — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- 2.19. $\omega = \frac{dy \wedge dz}{\frac{x}{x^2} + \frac{y}{y^2} + \frac{z}{z^2}} + \frac{dz \wedge dx}{\frac{x}{x^2} + \frac{y}{y^2} + \frac{z}{z^2}} + \frac{dx \wedge dy}{\frac{x}{x^2} + \frac{y}{y^2} + \frac{z}{z^2}}$, где c — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- 2.20. $\omega = yz dz \wedge dx$, c — внешняя сторона части эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z \geq 0$.
- 2.21. $\omega = x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx$, c — внешняя сторона части эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z \geq 0$.
- 2.22. $\omega = (2x^2 + y^2 + z^2) dy \wedge dz$, c — внешняя сторона боковой поверхности конуса $\sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq H$.
- 2.23. $\omega = (y-z) dy \wedge dz + (z-x) dz \wedge dx + (x-y) dx \wedge dy$, где c — внешняя сторона конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $z \in [0, h]$.
- 2.24. $\omega = (y-z) dy \wedge dz + (z-x) dz \wedge dx + (x-y) dx \wedge dy$, c — одна из сторон поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 < z \leq H$.
- 2.25. $\omega = yz^2 dx \wedge dz$, c — внутренняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = r^2$, $y \leq 0$, $0 \leq z \leq r$.

- 2.26. $\omega = yz dx \wedge dy + zx dy \wedge dz + xy dz \wedge dx$, c — внешняя сторона части цилиндра $x^2 + y^2 = r^2$, $x \leq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq H$.
- 2.27. $\omega = x^6 dy \wedge dz + y^4 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$, c — нижняя сторона части эллиптического параболоида $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$.
- 2.28. $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, c — верхняя сторона части гиперболического параболоида $z = x^2 - y^2$, $|y| \leq x \leq a$.
- 2.29. Докажите, что площадь графика Γ функции $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^1 можно вычислить по формуле

$$\mathcal{H}^2(\Gamma) = \int_U \frac{1}{\cos \alpha(x, y)} dx dy$$

где $\cos \alpha(x, y)$ — двугранный угол между плоскостью Oxy и касательной плоскостью к графику Γ в точке $(x, y, f(x, y))$.

2.6. ФОРМУЛА СТОКСА ДЛЯ 1-ФОРМ В $\mathbb{R}^3$

Применяя формулу Стокса, вычислите интеграл

$$\oint_C \omega$$

от 1-формы ω по ориентированной замкнутой кривой C .

!!! Привести формулы !!!

- 2.30. $\omega = (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$, C — эллипс $x = a \sin^2 t$, $y = 2a \sin t \cos t$, $z = a \cos^2 t$, $t \in [0, \pi]$, пробегаемый в направлении возрастания параметра t .
- 2.31. $\omega = (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, C — эллипс $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$, $a > 0$, $h > 0$, пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox .
- 2.32. $\omega = (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, C — кривая $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$, $r \in (0, R)$, $z > 0$, пробегаемая так, что ограниченная ею на внешней стороне сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ наименьшая область остаётся слева.

- 2.33. $\omega = (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, C — сечение поверхности куба $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ плоскостью $x + y + z = \frac{3}{2}a$, пробегаемое против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox .
- 2.34. $\omega = y^2 z^2 dx + z^2 x^2 dy + x^2 y^2 dz$, C — замкнутая кривая $x = a \cos t$, $y = a \cos 2t$, $z = a \cos 3t$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t .
- 2.35. $\omega = (x + z) dx + (x - y) dy + x dz$, C — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = c$, ориентированный отрицательно относительно вектора $(1, 0, 0)$.
- 2.36. $\omega = y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, C — граница треугольника с вершинами в точках $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$, ориентированная положительно относительно вектора $(0, 1, 0)$.
- 2.37. $\omega = y dx + z dy + x dz$, где C — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$, ориентированная положительно относительно вектора $(0, 0, 1)$.
- 2.38. $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} + z dz$, где C — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$, ориентированная положительно относительно вектора $(0, 0, 1)$.
- 2.39. $\omega = (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, C — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y = x \operatorname{tg} \varphi$, $\varphi \in (0, \pi)$, ориентированная положительно относительно вектора $(1, 0, 0)$.
- 2.40. $\omega = (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, C — эллипс $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$, $a > 0$, $c > 0$, ориентированный отрицательно относительно вектора $(1, 0, 0)$.
- 2.41. $\omega = y dx - z dy + x dz$, C — кривая $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2a^2$, $y - x = 0$, ориентированная положительно относительно вектора $(1, 0, 0)$.
- 2.42. $\omega = z^3 dx + x^3 dy + y^3 dz$, C — кривая $2x^2 - y^2 + z^2 = a^2$, $x + y = 0$, ориентированная положительно относительно вектора $(1, 0, 0)$.
- 2.43. $\omega = x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz$, C — кривая $x = a \sin t$, $y = a \cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, $t \in [0, 2\pi)$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t .

2.44. Вычислите интеграл

$$\int_{AmB} (x^2 - yz) dx + (y^2 - zx) dy + (z^2 - xy) dz,$$

взятый по отрезку винтовой линии $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $z = \frac{h}{2\pi} \varphi$ от точки $A(a, 0, 0)$ до точки $B(a, 0, h)$.

УКАЗАНИЕ. Дополните кривую AmB прямолинейным отрезком и примените формулу Стокса.

2.45. Пусть $C \subset \mathbb{R}^3$ простой замкнутый контур класса C^1 , обходящий ось z против часовой стрелки. Докажите равенство

$$\int_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} + f(z) dz = 2\pi,$$

где f — произвольная функция класса C^1 .

2.46. Вычислите интеграл

$$\int_C \frac{z \operatorname{arctg} z}{\sqrt{1+z^2}} dz + (y - z^2) dx - (2x + z^2) dy,$$

где контур C , пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси z , задан системой уравнений $\sqrt{1-x^2-y^2} = z$, $4x^2 + 9y^2 = 1$.

2.47. Пусть C — замкнутый контур, расположенный в плоскости $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ ($\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы нормали плоскости) и ограничивающий площадку S . Найдите интеграл

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

где контур C пробегается в положительном направлении.

ИЛИ

Пусть C — замкнутый контур, расположенный в плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = p$ ($\mathbf{n}$ — единичная нормаль к плоскости, $\mathbf{r} = x e_x + y e_y + z e_z$) и ограничивающий площадку S . Найдите интеграл

$$\oint_C \omega_{[\mathbf{n}, \mathbf{r}]}^1,$$

где контур C пробегается в положительном направлении.

- 2.48. Пусть S — сфера в $\mathbb{R}^3$ с центром в точке 0 , $C \subset S$ — замкнутый контур класса C^1 , $\mathbf{n}$ — вектор нормали к C касательный к S , $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Докажите, что

$$\int_C [\mathbf{n}, \mathbf{r}] d\mathcal{H}^1 = 0.$$

- 2.49. Докажите, что функция

$$W(x, y, z) = ki \int_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} d\mathcal{H}^2, \quad k = \text{const},$$

где S — площадка, ограниченная контуром C , $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S и $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку пространства $M(x, y, z)$ с текущей точкой $A(\xi, \eta, \zeta)$ контура C , является потенциалом магнитного поля H , создаваемого током i , протекающим по контуру C , т. е.

$$H = H_x e_x + H_y e_y + H_z e_z,$$

где

$$\begin{aligned} H_x &= ki \oint_C \frac{(\eta - y) dz - (\zeta - z) dy}{r^3}, \\ H_y &= ki \oint_C \frac{(\zeta - z) dx - (\xi - x) dz}{r^3}, \\ H_z &= ki \oint_C \frac{(\xi - x) dy - (\eta - y) dx}{r^3}. \end{aligned}$$

2.7. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО ДЛЯ 2-ФОРМ В $\mathbb{R}^3$

В этой размерности формулу (46) принято записывать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} a(x, y, z) dy \wedge dz + b(x, y, z) dz \wedge dx + c(x, y, z) dx \wedge dy \\ = \int_c \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned} \quad (14)$$

!!! Привести формулы !!!

Применяя формулу Остроградского, преобразовать следующие поверхностные интегралы, полагая, что гладкая поверхность S ограничивает конечный объем V и $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к S .

$$2.50. \int_S yz dx \wedge dz + zx dz \wedge dx + xy dx \wedge dy.$$

$$2.51. \int_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy.$$

$$2.52. \int_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d\mathcal{H}^2.$$

$$2.53. \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) d\mathcal{H}^2.$$

$$2.54. \int_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\mathcal{H}^2.$$

2.55. Доказать, что если S — замкнутая простая поверхность и $\mathbf{l}$ — любое постоянное направление, то

$$\int_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) d\mathcal{H}^2 = 0,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S .

2.56. Доказать, что объем тела, ограниченного поверхностью S , равен

$$V = \frac{1}{3} \int_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) d\mathcal{H}^2,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S .

2.57. Доказать, что объем конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью $F(x, y, z) = 0$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$, равен

$$V = \frac{1}{3} SH,$$

где S — площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости, и H — его высота.

2.58. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = \pm c$ и

$$\begin{cases} x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v, \\ y = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v, \\ z = c \sin u. \end{cases}$$

2.59. Доказать для объема V тела, ограниченного гладкой поверхностью S , формулу

$$V = \left| \frac{1}{3} \int_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy \right|.$$

2.60. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = -u + a \cos v \quad (u \geq 0)$$

и плоскостями: $x = 0$ и $z = 0$ ($a > 0$).

2.61. Найти объем тела, ограниченного тором ($0 < a \leq b$):

$$\begin{cases} x = (b + a \cos \psi) \cos \phi, \\ y = (b + a \cos \psi) \sin \phi, \\ z = a \sin \psi. \end{cases}$$

2.62. Доказать формулу

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \int_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} \\ &= \int_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t) dS + \int_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz, \quad (t > 0). \end{aligned}$$

С помощью формулы Остроградского вычислить интегралы $\int_S \omega$ от следующих 2-форм ω и ориентированных поверхностей S :

2.63. $\omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$,

- 1) S — внешняя сторона границы куба $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$;
- 2) S — внутренняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$;
- 3) S — внешняя сторона полной поверхности $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}, 0 \leq z \leq c$ (конус).

2.64. $\omega = (x - y + z) dy \wedge dz + (y - z + x) dz \wedge dx + (z - x + y) dx \wedge dy$, S — внешняя сторона поверхности

$$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1.$$

2.65. $\omega = (1 + 2x) dy \wedge dz + (2x + 3y) dz \wedge dy + (3y + 4z) dx \wedge dy$ где S :

- 1) внешняя сторона пирамиды $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;
- 2) внутренняя сторона поверхности $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = a$

2.66. $\omega = z dx \wedge dy + (5x + y) dy \wedge dz$,

- 1) внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 4$;
- 2) внутренняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$;
- 3) внешняя сторона границы области $1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4$.

2.67. $\omega = x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy$,

- 1) S — внешняя сторона поверхности тетраэдра $x + y + z \leq a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

- $0, y \geq 0, z \geq 0$;
 2) S — внутренняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
- 2.68. $\omega = x^4 dy \wedge dz + y^4 dz \wedge dx + z^4 dx \wedge dy$,
 1) S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
 2) S — внешняя сторона полной поверхности полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$.
- 2.69. $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, S — внешняя сторона поверхности, образованной вращением вокруг оси z кривой:
 1) $y = 2 - |z - 1|, z \in [0; 2]$; 2) $x = 1 + \sin z, z \in [0; \pi]$.
- 2.70. $\omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$,
 1) S — нижняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$;
 2) S — верхняя сторона части поверхности параболоида $x^2 + y^2 + 2az = a^2, z \geq 0$;
 3) S — нижняя сторона части конической поверхности $x^2 + y^2 + z^2, 0 < z \leq H$.
- 2.71. $\omega = (z^2 - x^2) dy \wedge dz + (x^2 - z^2) dz \wedge dx + (y^2 - x^2) dx \wedge dy$, S — верхняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$.
- 2.72. $\omega = x^2 y dy \wedge dz + x y^2 dz \wedge dx + x y z dx \wedge dy$, S — нижняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.
- 2.73. $\omega = x^2 y dy \wedge dz - x y^2 dz \wedge dx + (x^2 + y^2) z dx \wedge dy$, S — внешняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq H$.
- 2.74. $\omega = \frac{x}{y} dx \wedge dy + \sin y dz \wedge dx$, S — внешняя часть конической поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченная плоскостью $y = 1$.
- 2.75. $\omega = \frac{x}{y^2} dx \wedge dy + \cos y dz \wedge dx$, S — внешняя часть конической поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченная плоскостью $y = 1$.
- 2.76. $\omega = \frac{x^2}{y^2} dx \wedge dy + y^2 \ln y dz \wedge dx$, S — внешняя часть конической поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченная плоскостью $y = 1$.
- 2.77. $\omega = \frac{x^2}{y} dx \wedge dy + \operatorname{arctg} y dz \wedge dx$, S — внешняя часть конической поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченная плоскостью $y = 1$.

2.78. $\omega = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + z^2 + 3y^2)^{3/2}}$, S — внешняя поверхность тела, заданного двумя неравенствами $1 - y \geq x^2 + z^2$, $y + 1 \geq \sqrt{x^2 + z^2}$.

2.79. $\omega = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + 2z^2)^{3/2}}$, S — внешняя поверхность тела, заданного двумя неравенствами $1 - z \geq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

2.80. $\omega = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(4x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, S — внешняя поверхность тела, заданного двумя неравенствами $1 - x \geq z^2 + y^2$, $4y^2 + 4z^2 \leq x + 4$.

2.81. $\omega = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + z^2 + 3y^2)^{3/2}}$, S — внешняя поверхность тела, заданного двумя неравенствами $4x^2 + 9y^2 + z^2 \leq 1$, $4x^2 + 9y^2 \leq 2z + 1$.

2.82. Вычислить

$$\int_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) d\mathcal{H}^2,$$

где S — часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$) и $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к этой поверхности.

УКАЗАНИЕ: Присоединить часть плоскости $z = h$, $x^2 + y^2 \leq h^2$.

2.83. Доказать формулу

$$\int_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \int_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) d\mathcal{H}^2,$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V , $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S в текущей точке ее (ξ, η, ζ) , $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ и $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, идущий от точки (x, y, z) к точке (ξ, η, ζ) .

2.84. Вычислить *интеграл Гаусса*

$$I(x, y, z) = \int_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} d\mathcal{H}^2$$

где S — простая замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая объем V , $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S в точке ее (ξ, η, ζ) , $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку (x, y, z) с точкой (ξ, η, ζ) и $\mathbf{r} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

Рассмотреть два случая:

- а) когда поверхность S не окружает точку (x, y, z) ,
- б) когда поверхность S окружает точку (x, y, z) .

2.85. Доказать, что если

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

и S — гладкая поверхность, ограничивающая конечное тело V , то справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\mathcal{H}^2 &= \int_V \Delta u \, dx \wedge dy \wedge dz; \\ \text{б) } \int_S u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\mathcal{H}^2 &= \int_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx \wedge dy \wedge dz \\ &\quad + \int_V u \, \Delta u \, dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

где u — функция, непрерывная вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в области $V + S$, и $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ — производная по внешней нормали к поверхности S .

2.86. Доказать *вторую формулу Грина* в пространстве

$$\int_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx \, dy \, dz = \int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \\ u & v \end{vmatrix} d\mathcal{H}^2,$$

где объем V ограничен поверхностью S , $\mathbf{n}$ — направление внешней нормали к поверхности S и функции $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ дважды дифференцируемы в области $V + S$.

- 2.87. Функция $u = u(x, y, z)$, обладающая непрерывными производными до второго порядка включительно в некоторой области, называется *гармонической* в этой области, если

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Доказать, что если u — гармоническая функция в конечной замкнутой области V , ограниченной гладкой поверхностью S , то справедливы формулы:

$$\text{а) } \int_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\mathcal{H}^2 = 0;$$

$$\text{б) } \int_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = \int_S u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\mathcal{H}^2,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S .

Пользуясь формулой б), доказать, что функция, гармоническая в области V , однозначно определяется своими значениями на её границе S .

- 2.88. Доказать, что если функция $u = u(x, y, z)$ — гармоническая в конечной замкнутой области V , ограниченной гладкой поверхностью S , то

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, идущий из внутренней точки (x, y, z) области V в переменную точку (ξ, η, ζ) поверхности S , $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности S в точке (ξ, η, ζ) ,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

- 2.89. Доказать, что если $u = u(x, y, z)$ — функция, гармоническая внутри сферы S радиуса R с центром в точке (x_0, y_0, z_0) , то

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S u(x, y, z) d\mathcal{H}^2$$

(теорема о среднем).

2.90. Доказать, что функция $u = u(x, y, z)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области V и гармоническая внутри неё, не может достигать своих наибольшего и наименьшего значений во внутренней точке области, если эта функция не является тождественной постоянной (*принцип максимума*).

2.91. Пусть $F(x, y, z) = (0, 0, cz)_{(x, y, z)}$ — векторное поле на $\mathbb{R}^3$ и $\mathcal{M}$ — компактное трехмерное многообразие с краем, содержащееся в полупространстве $\{(x, y, z) : z \leq 0\}$. Поле F можно представить себе как давление жидкости плотности c , заполняющей область $\{(x, y, z) : z \leq 0\}$. Поскольку жидкость оказывает равное давление во всех направлениях, мы будем под *выталкивающей силой*, действующей на $\mathcal{M}$, понимать $\int_{\partial \mathcal{M}} \langle F, n \rangle d\mathcal{H}^2$. Доказать *закон Архимеда*: действующая на $\mathcal{M}$ выталкивающая сила равна весу жидкости, вытесненной $\mathcal{M}$.

2.92. Пусть S_t — переменная сфера $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$ и функция $f(\xi, \eta, \zeta)$ непрерывна. Доказать, что функция

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t} d\mathcal{H}^2$$

удовлетворяет *волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

и начальным условиям: $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f(x, y, z)$.

УКАЗАНИЕ: Производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ выразить тройным интегралом.

2.93. Пусть ω^2 дифференциальная 2-форма в $\mathbb{R}^3$. Доказать, что $d\omega^2 = 0$ тогда и только тогда, когда для любой компактной области $M \subset \mathbb{R}^3$ с гладким краем ∂M справедливо равенство $\int_{\partial M} \omega^2 = 0$.

2.94. Вычислите $\int_U x^2 d\mathcal{H}^2$, где $U = \{z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4, x > y\}$.

2.95. Вычислите $\int_U x^2 dy \wedge dz$, где $U = \{z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 4, x, y > 0\}$ — многообразие, ориентированное вектором $\mathbf{n} = (2x, -2y, -1)$.

3. Полилинейные функции

3.1. Сопряженные пространства

Пусть $\mathbb{V}$ — конечномерное векторное пространство над полем действительных чисел. Функция $l : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *линейной* или *линейным функционалом*, если

$$l(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = \alpha l(\mathbf{v}) + \beta l(\mathbf{w}) \quad (15)$$

для любых $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}$ и скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Сумма двух линейных функционалов l_1 и l_2 и умножение линейного функционала l на скаляр α определяются поточечно:

$$(l_1 + l_2)(\mathbf{v}) = l_1(\mathbf{v}) + l_2(\mathbf{v}), \quad (16)$$

$$(\alpha l)(\mathbf{v}) = \alpha \cdot l(\mathbf{v}) \quad (17)$$

для любого $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$. Совокупность всех линейных функций с введенными операциями будет векторным пространством, называется *сопряженным* (или *дуальным*) к $\mathbb{V}$, и обозначается символом $\mathbb{V}^*$ (или $\mathbb{V}'$). Элементы пространства $\mathbb{V}^*$ называют также *ковекторами* или *1-формами*.

Пусть в $\mathbb{V}$ фиксирован базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Тогда для любого вектора $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ имеем $\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e}_i$. Набор чисел $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ определяется однозначно и называется *координатами* вектора $\mathbf{v}$. Отображение $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{v} \mapsto (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n,$$

называется *линейной системой координат* в $\mathbb{V}$.

3.1. Проверить, что линейная система координат в $\mathbb{V}$ является изоморфизмом векторных пространств $\mathbb{V}$ и $\mathbb{R}^n$.

3.2. Пусть выбрана линейная система координат $(v_1, \dots, v_n)$. Каждая координатная функция v_i сама является линейной функцией: $v_i(\mathbf{v}) = v_i$ — i -ая компонента вектора $\mathbf{v}$ в выбранной системе координат. Докажите, что каждая линейная функция $l \in \mathbb{V}^*$ имеет вид

$$l(\mathbf{v}) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_i \alpha_i v_i(\mathbf{v}), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

3.3. Докажите, что пространство $\mathbb{V}^*$ линейных функций на векторном пространстве $\mathbb{V}$ размерности n конечномерно и найдите его размерность.

3.2. ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение 1. Отображение $A : \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n \rightarrow \mathbb{Y}$ прямого произведения конечномерных векторных пространств $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ в конечномерное векторное пространство $\mathbb{Y}$ называется *полилинейным* (*n-линейным оператором*), если отображение

$$\mathbb{X}_k \ni \mathbf{u}_k \mapsto A\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$$

линейно по переменной $\mathbf{u}_k \in \mathbb{X}_k$ при фиксированных значениях переменных $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n$, $k = 1, \dots, n$.

Совокупность n -линейных отображений $A : \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n \rightarrow \mathbb{Y}$ будет обозначаться символом $\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$.

В частности, при $n = 1$ получаем множество $\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ линейных операторов из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$.

При $n = 2$ полилинейное отображение называется *билинейным*, при $n = 3$ — *трилинейным* и т. д. Следует отличать n -линейное отображение $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$ от линейного отображения $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ векторного пространства $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n$ в $\mathbb{Y}$.

Если $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$, то полилинейные отображения называются *полилинейными функционалами*, или *n-линейными функциями*, или *ковариантными n-тензорами*.

Пространство $\mathcal{L}(\mathbb{V}; \mathbb{R})$ очевидно совпадает с пространством $\mathbb{V}'$.

3.4. Доказать, что скалярное произведение в евклидовом векторном пространстве $\mathbb{E}$ над полем $\mathbb{R}$ является билинейной функцией

$$\mathbb{E} \ni \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mapsto (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}.$$

В силу неравенства Коши — Буняковского имеем

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|,$$

причем это неравенство переходит в равенство, если и только если $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Здесь $|\cdot|$ — евклидова норма вектора в $\mathbb{E}$.

3.5. Проверить, что обычное произведение

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdot \dots \cdot x_n$$

n действительных чисел является типичным примером n -линейной функции $A \in \mathcal{L}(\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}; \mathbb{R})$.

Обобщением предыдущей задачи является произведение

$$(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \rightarrow l_1 \langle \mathbf{u}_1 \rangle \cdot \dots \cdot l_n \langle \mathbf{u}_n \rangle$$

n линейных функционалов $l_k : \mathbb{X}_k \rightarrow \mathbb{R}$.

3.6. Показать, что этот полилинейный оператор является элементом пространства $\mathcal{L}(\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n; \mathbb{R})$.

В пространстве $\mathbb{X}$ фиксируем базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$. Определим линейную функцию $l : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая $l \langle \mathbf{u} \rangle = \sum_{j=1}^m u_j$ для вектора $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^m u_j \mathbf{e}_j$. Аналогично предыдущему примеру определим n -линейную функцию

$$l \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = l \langle \mathbf{u}_1 \rangle \cdot \dots \cdot l \langle \mathbf{u}_n \rangle, \quad (18)$$

где $\mathbf{u}_i \in \mathbb{X}$, $i = 1, \dots, n$. Полагая в (18) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \dots = \mathbf{u}_n$, получаем

$$l \langle \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u} \rangle = l \langle \mathbf{u} \rangle^n = \left(\sum_{j=1}^m u_j \right)^n = \sum_{j_1=1, \dots, j_n=1}^m u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{j_n}. \quad (19)$$

В правой сумме формулы (19) есть повторяющиеся слагаемые. Заметим, что в случае $m = 2$ эта сумма является известным биномом Ньютона, записываемым в виде

$$\begin{aligned} l \langle \mathbf{u} \rangle^n &= (u_1 + u_2)^n = \sum_{j_1=1, \dots, j_n=1}^2 u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{j_n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} u_1^k u_2^{n-k} = \sum_{k_1+k_2=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2!} u_1^{k_1} u_2^{k_2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Возникает естественное желание обобщить формулу (20) на произвольное число слагаемых. База индукции — это как раз формула (20). Пусть

для m слагаемых, $m \geq 2$, правая сумма в (19) записывается в виде

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \cdot \dots \cdot u_m^{k_m}. \quad (21)$$

Рассмотрим теперь $m + 1$ слагаемое $u_1 + u_2 + \dots + u_m + u_{m+1} = v + u_{m+1}$, где $v = u_1 + u_2 + \dots + u_m$.

3.7. Доказать формулу (21) применив базу индукции, а затем индукционное предположение.

3.8. Определить на совокупности полилинейных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$ операции поточечного сложения двух таких операторов и умножения оператора на скаляр. Доказать, что с введенными операциями $\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$ становится векторным пространством.

3.9. Пусть $A : \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n \rightarrow \mathbb{Y}$ — полилинейный оператор, действующий из произведения конечномерных нормированных пространств $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ в нормированное пространство $\mathbb{Y}$. Фиксируем в каждом из пространств $\mathbb{X}_i$ базис $\mathbf{e}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{e}_{l_i}^{(i)}$, $\dim \mathbb{X}_i = l_i$. Тогда вектор $\mathbf{u}^{(i)} \in \mathbb{X}_i$ можно представить в этом базисе как

$$\mathbf{u}^{(i)} = \sum_{j_i=1}^{l_i} u_{j_i}^{(i)} \mathbf{e}_{j_i}^{(i)}.$$

Ввиду полилинейности оператора A имеем

$$\begin{aligned} A\langle \mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)} \rangle &= A\left\langle \sum_{j_1=1}^{l_1} u_{j_1}^{(1)} \mathbf{e}_{j_1}^{(1)}, \dots, \sum_{j_n=1}^{l_n} u_{j_n}^{(n)} \mathbf{e}_{j_n}^{(n)} \right\rangle \\ &= \sum_{j_1=1}^{l_1} \dots \sum_{j_n=1}^{l_n} u_{j_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot u_{j_n}^{(n)} A\langle \mathbf{e}_{j_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}^{(n)} \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, полилинейный оператор однозначно определяется набором значений $A\langle \mathbf{e}_{j_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}^{(n)} \rangle \in \mathbb{Y}$. Найти размерность пространства $\mathcal{L}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n; \mathbb{Y})$, если $\dim \mathbb{Y} = l$.

3.10. Докажите, что n -линейные операторы α и β векторных переменных $\mathbf{v}_k \in \mathbb{X}_k$, $k = 1, \dots, n$, совпадают, если и только если $\alpha\langle \mathbf{e}_{j_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}^{(n)} \rangle = \beta\langle \mathbf{e}_{j_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}^{(n)} \rangle$ для каждого набора $\mathbf{e}_{j_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}^{(n)}$ векторов некоторых базисов $\mathbf{e}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{e}_{l_i}^{(i)}$ в $\mathbb{X}_i$.

3.3. Ориентация в $\mathbb{R}^n$.

Как известно, переход от одного базиса в конечномерном векторном пространстве $\mathbb{V}$ к другому базису осуществляется с помощью матрицы перехода, определитель которой может быть либо положительным, либо отрицательным. Назовем базисы *эквивалентными*, если определитель матрицы перехода положительный. Это отношение будет отношением эквивалентности, которое разбивает все базисы в $\mathbb{V}$ ровно на два класса: два базиса принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда определитель матрицы перехода от одного базиса к другому будет положительным, и — разным классам в противном случае. Ориентировать $\mathbb{V}$ — значит выбрать какой-либо класс эквивалентности и объявить его положительной (стандартной, правой, левой и т. д.) ориентацией. Тогда все базисы, входящие в один класс с избранным, также будут одинаково в нем ориентированы, а все базисы из второго класса будут ориентированы в нем противоположно. Понятно, что любой базис выбранного класса ориентирует пространство $\mathbb{V}$ однозначно.

С математической точки зрения никакого канонического способа задания стандартной ориентации не существует.

Исторически положительная ориентация в $\mathbb{R}$ определяется ненулевым вектором в $\mathbb{R}$, направленным слева направо, положительная ориентация в $\mathbb{R}^2$ — парой неколлинеарных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ таких, что движение от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ по меньшему углу происходит против часовой стрелки.

Если выбрана ориентация μ в $\mathbb{V}$, то символ $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mu$ означает, что набор векторов $\{v_1, \dots, v_n\}$ — базис в $\mathbb{V}$, входящий в класс μ .

3.11. Доказать, что векторное произведение $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ векторов трехмерного евклидова ориентированного пространства $\mathbb{R}^3$ является билинейным оператором из пространства $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, обладающим дополнительными свойствами:

- 1) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ (антикоммутативности);
- 2) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (тождество Якоби).

Известно, что длина вектора $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ равна площади параллелограмма, натянутого на векторы $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \sin \varphi,$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Равенство в неравенстве

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$$

будет тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ортогональны.

3.12. Если $\mathbb{R}^n$ — арифметическое векторное пространство, $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n v_i^j \mathbf{e}_j$ — координатное представление вектора $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, то, полагая

$$A\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \det \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ v_n^1 & \dots & v_n^n \end{pmatrix},$$

получаем n -линейную функцию $A : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_n \rightarrow \mathbb{R}$.

Доказать, что

- а) набор векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ образует базис тогда и только тогда, когда $A\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle \neq 0$;
- б) базис $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ одинаково (противоположно) ориентирован с базисом $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ тогда и только тогда, когда $A\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle > 0$ ($A\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle < 0$).

Ниже и далее $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2},$$

при условии, что скалярное произведение векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$ равно

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k. \quad (22)$$

Нетрудно показать, что задание скалярного произведения формулой (22) возможно тогда и только тогда, когда векторы стандартного базиса $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathbb{R}^n$ ортонормированы: $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$.

3.13. Доказать, что если векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ принадлежат евклидову пространству $\mathbb{R}^n$, то

а) величина $|A\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle|$ равна объему параллелепипеда, натянутого на векторы $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, и этот объем максимален, если векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, сохранив их длины, сделать взаимно ортогональными. Таким образом,

$$|\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)| \leq |\mathbf{v}_1| \cdot \dots \cdot |\mathbf{v}_n|,$$

причем для ортогональных векторов и только для них имеет место равенство.

б) величина $A\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ — ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, равный 0, если параллелепипед вырождается, — объему параллелепипеда, натянутого на векторы $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, если набор $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ положительно ориентирован, и — объему параллелепипеда с противоположным знаком, если наборы $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ ориентированы противоположно;

Метрическое пространство $\mathbb{X}$ называют *линейно связным*, если любые две его точки соединимы путем, т. е. если для любых двух точек $p, q \in \mathbb{X}$ существует такое непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{X}$, что $\gamma(a) = p$ и $\gamma(b) = q$.

3.14. Образ линейно связного пространства при непрерывном отображении линейно связан и, следовательно, линейная связность является топологическим свойством.

3.15. Если в пространстве $\mathbb{X}$ точка p соединима путем с точкой q , а точка q — с точкой r , то точки p и r соединимы путем в пространстве $\mathbb{X}$ и, следовательно, объединение любого семейства попарно пересекающихся линейно связных подпространств пространства $\mathbb{X}$ линейно связно.

3.16. Пространство $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и сфера $\mathbb{S}^{n-1}$ линейно связны при $n \geq 2$.

3.17. Всякое линейно связное подпространство числовой прямой является промежутком.

3.18. Промежутки расширенной числовой прямой одного наименования гомеоморфны (по принадлежности концов), а разных наименований — нет. Промежуток и окружность не гомеоморфны.

Определение 2. Непрерывное отображение $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ двух метрических (или топологических пространств) называют *топологическим изоморфизмом* или *гомеоморфизмом*, если имеется такое непрерывное отображение $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$, что $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{X}}$, а $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{Y}}$. Иными словами, гомеоморфизм — это непрерывное отображение, обладающее непрерывным обратным.

Пространства $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ называются *гомеоморфными* или *топологически изоморфными*, если существует гомеоморфизм $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$.

3.19. Количество компонент линейной связности пространства является топологическим свойством. (Непустое линейно связное подпространство $\mathbb{L}$ пространства $\mathbb{X}$ называют *компонентой линейной связности пространства $\mathbb{X}$* , если оно не содержится в более широком линейно связном подпространстве.)

3.20. Доказать, что группа $\mathbf{GL}(n)$ обратимых матриц состоит из двух компонент линейной связности:

- 1) $\mathbf{GL}^+(n) = \{A \in \mathbf{GL}(n) : \det A > 0\}$ и
- 2) $\mathbf{GL}^-(n) = \{A \in \mathbf{GL}(n) : \det A < 0\}$.

УКАЗАНИЕ: Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — стандартный базис пространств в $\mathbb{R}^n$. Для всякого числа δ символом $E(\delta)$ обозначим матрицу, первый столбец которой есть вектор $\delta \mathbf{e}_1$, а i -ый столбец совпадает с вектором $\mathbf{e}_i$ при $i > 1$. Простой перестройкой матрицы назовем операцию прибавления к одному из её столбцов линейной комбинации остальных столбцов.

- 1) Для каждой матрицы $A \in \mathbf{GL}(n)$ существует такая цепочка матриц $A_0, \dots, A_k \in \mathbf{GL}(n)$, что $A_0 = A$, $A_k = E(\delta)$, A_i получена простой перестройкой из A_{i-1} .
- 2) Если матрица B получена из $A \in \mathbf{GL}(n)$ простой перестройкой, то отрезок $[A, B] \subset \mathbf{GL}(n)$.
- 3) Если $\delta \neq 0$, то $[E(\delta), E(\text{sgn } \delta)] \subset \mathbf{GL}(n)$.
- 4) Если матрицы A и B соединимы путем в $\mathbf{GL}(n)$, то $\text{sgn } \det A = \text{sgn } \det B$.

Поскольку каждая $(n \times n)$ -матрица A является системой столбцов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$, то столбцы матрицы из $\mathbf{GL}(n)$ можно рассматривать как векторы некоторого базиса в $\mathbb{R}^n$.

3.21. КРИТЕРИЙ СООРИЕНТИРОВАННОСТИ БАЗИСОВ. Следующие свойства эквивалентны:

- 1) базисы A и B пространства $\mathbb{R}^n$ одинаково ориентированы (т. е. определитель матрицы перехода от одного базиса к другому положительный);

2) $\operatorname{sgn} \det A = \operatorname{sgn} \det B$;

3) базисы $A, B \in \mathbf{GL}(n)$ принадлежат в одной компоненте линейной связности пространства базисов $\mathbf{GL}(n)$.

3.22. Группа ортогональных матриц состоит из двух компонент линейной связности.

УКАЗАНИЕ: Применить свойства преобразования Грама — Шмидта $\mathbf{GL}(n) \rightarrow \mathbf{O}(n)$.

4. Внешние формы

4.1. ВНЕШНИЕ 2-ФОРМЫ.

Внешней формой степени 2 (или, короче, *2-формой*) называется функция от пары векторов, $\omega: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, которая билинейна и кососимметрична:

$$\begin{aligned}\omega\langle \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \lambda_1 \omega\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \lambda_2 \omega\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \\ \omega\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= -\omega\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \quad \text{для всех } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Множество всех 2-форм на $\mathbb{R}^n$ превращается в вещественное векторное пространство, если определить сложение форм формулой

$$(\omega_1 + \omega_2)\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \omega_1\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \omega_2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

а умножение на число — формулой

$$(\lambda \omega)\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \omega\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Пространство 2-форм на $\mathbb{R}^n$ обозначается символом $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$.

4.1. Докажите, что $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ с введенными операциями сложения и умножения на число действительно является векторным пространством.

4.2. Докажите, что для всякой 2-формы ω в $\mathbb{R}^n$ имеем

$$\omega\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \text{для всех } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

4.3. Докажите, что пространство 2-форм на $\mathbb{R}^n$ конечномерно и найдите его размерность.

- 4.4. Пусть $S\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ — ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ориентированной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, т. е.

$$S\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{v} &= v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — базис, задающий ориентацию $\mathbb{R}^2$. Докажите, что S есть 2-форма.

- 4.5. Докажите, что ориентированная площадь проекции параллелограмма со сторонами $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ в евклидовом $\mathbb{R}^3$ на плоскость (x_1, x_2) есть 2-форма.

- 4.6. Пусть $\mathbf{v}$ — однородное поле скоростей жидкости в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве. Докажите, что поток жидкости через площадь параллелограмма $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, определенный как

$$\omega\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2),$$

есть 2-форма. (Здесь $(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ — смешанное произведение трех векторов.)

4.2. ВНЕШНИЕ k -ФОРМЫ.

Определение 3. *Внешней формой степени k (или, короче, k -формой)* называется функция от k векторов, которая k -линейна и кососимметрична:

$$\begin{aligned} \omega\langle \lambda_1 \mathbf{u}'_1 + \lambda_2 \mathbf{u}''_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \rangle &= \lambda_1 \omega\langle \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \rangle + \lambda_2 \omega\langle \mathbf{u}''_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \rangle, \\ \omega\langle \mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \dots, \mathbf{u}_{i_k} \rangle &= (-1)^\nu \omega\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \rangle, \end{aligned}$$

$$\text{где } \nu = \begin{cases} 0, & \text{если перестановка } i_1, \dots, i_k \text{ четная,} \\ 1, & \text{если перестановка } i_1, \dots, i_k \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Совокупность k -форм на $\mathbb{R}^n$ обозначается символом $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. Определим сумму двух форм $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$(\omega_1 + \omega_2)\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = \omega_1\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle + \omega_2\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle,$$

а умножение числа $\lambda \in \mathbb{R}$ на форму $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ — формулой

$$(\lambda \omega)\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = \lambda \omega\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle.$$

- 4.7. Докажите, что пространство $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ с введенными операциями является конечномерным вещественным векторным пространством и найдите его размерность.
- 4.8. Докажите, что всякая k -форма в $\mathbb{R}^n$ тождественно равна 0 при $k > n$.
- 4.9. Пусть $V\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ — ориентированный объем параллелепипеда с ребрами $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ в ориентированном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$V\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = \det \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{u}_i = u_{i1}\mathbf{e}_1 + \dots + u_{in}\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что V есть n -форма (см. задачу 3.12).

- 4.10. Пусть $\mathbb{R}^k$ — k -мерная ориентированная плоскость в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Докажите, что k -мерный ориентированный объем проекции параллелограмма с ребрами $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^k$ есть k -форма в $\mathbb{R}^n$.

Билинейная форма (2-тензор) T на линейном пространстве $\mathbb{V}$ называется *внутренним произведением*, если он *симметричен*, т. е. $T\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = T\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ для всех $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}$, и *положительно определен*, т. е. $T\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ для всех $\mathbf{v} \neq 0$.

- 4.11. Пусть на линейном n -мерном пространстве $\mathbb{V}$ задано внутреннее произведение T и ориентация μ . Доказать, что существует единственная n -форма ω такая, что $\omega\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = 1$ для всякого ортонормированного базиса $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{V}$, у которого $\mu\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = 1$.

Единственная форма ω задачи 4.11 называется *элементом объема* пространства $\mathbb{R}^n$, определяемым внутренним произведением T и ориентацией μ .

- 4.12. Показать, что если $\omega \in \Lambda^n(\mathbb{V})$ — элемент объема, определяемый T и μ , и $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in \mathbb{V}$, то

$$|\omega\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \rangle| = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

где $g_{ij} = T\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle$.

УКАЗАНИЕ. Показать, что если $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ — ортонормированный базис и $\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{v}_i$, то $g_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}$.

4.13. Показать, что если $c: [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}^n)^n$ непрерывно и каждое $c^1(t), \dots, c^n(t)$ есть базис в $\mathbb{R}^n$, то $\mu\langle c^1(0), \dots, c^n(0) \rangle = \mu\langle c^1(1), \dots, c^n(1) \rangle$.

УКАЗАНИЕ. Рассмотреть $\det \circ c$.

4.14. а) Что означает $\mathbf{v} \times$, если $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$?

б) Показать, что если $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ линейно независимы, то базис $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$ стандартно ориентирован в $\mathbb{R}^n$?

4.15. Вывести следующие свойства векторного произведения в $\mathbb{R}^3$:

- $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,$
- а) $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = 0, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1,$
 $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = 0.$
- б) $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2) \mathbf{e}_1 + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \mathbf{e}_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \mathbf{e}_3.$
- в) $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \sin \theta$, где θ — угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$,
 $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0.$
- г) $(\mathbf{v}, \mathbf{w} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{w}, \mathbf{z} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{z}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}),$
 $\mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{v}, \mathbf{z}) \mathbf{w} - (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mathbf{z},$
 $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{z} = (\mathbf{v}, \mathbf{z}) \mathbf{w} - (\mathbf{w}, \mathbf{z}) \mathbf{v}.$
- е) $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - (\mathbf{v}, \mathbf{w})^2}.$

4.16. Пусть $f_1, \dots, f_{n-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Определим $f_1 \times \dots \times f_{n-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой $f_1 \times \dots \times f_{n-1}(p) = f_1(p) \times \dots \times f_{n-1}(p)$. Вывести формулу для дифференциала $D(f_1 \times \dots \times f_{n-1})(p)$.

4.17. Показать, что всякая ненулевая n -форма $\omega \in \Lambda^n(\mathbb{V})$ является элементом объема, определяемым некоторым внутренним произведением T и ориентацией μ .

4.18. Пусть $\omega \in \Lambda^n(\mathbb{V})$ — элемент объема. Выразить векторное произведение $\mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$ через ω .

4.19. Пусть $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Показать, что

$$|\mathbf{w}_1 \times \dots \times \mathbf{w}_{n-1}| = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

где $g_{ij} = (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)$.

УКАЗАНИЕ. Применить задачу 4.12 к надлежаще выбранному $(n-1)$ -мерному подпространству в $\mathbb{R}^n$.

4.3. ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ 1-ФОРМ.

Пусть ω_1 и $\omega_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ — две 1-формы в $\mathbb{R}^n$. Значение *внешнего произведения* $\omega_1 \wedge \omega_2$ на паре векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ есть ориентированная площадь образа параллелограмма со сторонами $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ на плоскости (ω_1, ω_2) :

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(\mathbf{u}) & \omega_2(\mathbf{u}) \\ \omega_1(\mathbf{v}) & \omega_2(\mathbf{v}) \end{pmatrix}.$$

Пусть в $\mathbb{R}^n$ выбрана линейная система координат, т. е. заданы n независимых 1-форм $x_1, \dots, x_n$. Эти формы мы будем называть *базисными*.

Внешние произведения базисных форм суть 2-формы $x_i \wedge x_j$. Геометрический смысл формы $x_i \wedge x_j$ очень прост: ее значение на паре векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ равно ориентированной площади проекции параллелограмма $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ на координатную плоскость (x_i, x_j) параллельно остальным координатным направлениям.

4.20. Доказать, что $\omega_1 \wedge \omega_2$ есть 2-форма для любых 1-форм ω_1 и ω_2 .

4.21. Доказать, что отображение

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2$$

билинейно и кососимметрично:

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= -\omega_2 \wedge \omega_1, \\ (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) \wedge \omega_3 &= \lambda_1 \omega_1 \wedge \omega_3 + \lambda_2 \omega_2 \wedge \omega_3 \end{aligned}$$

для всех $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

4.22. Доказать, что $\omega \wedge \omega \equiv 0$ для любой 1-формы ω .

4.23. Докажите, что $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ форм $x_i \wedge x_j$ ($i < j$) линейно независимы.

4.24. Докажите, что все 2-формы в трехмерном пространстве с координатами (x_1, x_2, x_3) исчерпываются формами

$$P x_2 \wedge x_3 + Q x_3 \wedge x_1 + R x_1 \wedge x_2, \quad P, Q, R \in \mathbb{R}.$$

4.25. Докажите, что каждая 2-форма в $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_1, \dots, x_n$ однозначно представляется в виде

$$\omega = \sum_{i < j} a_{ij} x_i \wedge x_j.$$

4.4. ВНЕШНИЕ ОДНОЧЛЕНЫ.

Пусть теперь даны k форм $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(\mathbf{u}_1) & \dots & \omega_k(\mathbf{u}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(\mathbf{u}_k) & \dots & \omega_k(\mathbf{u}_k) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Внешнее произведение

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, \quad 1 \leq i_j \leq n,$$

k базисных 1-форм есть ориентированный объем проекции k -параллелепипеда на k -плоскость $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ параллельно остальным координатным направлениям.

Пусть даны два одночлена

$$\omega^k = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k, \quad \omega^l = \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_{k+l},$$

где $\omega_1, \dots, \omega_{k+l} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. Произведение $\omega^k \wedge \omega^l$ мы определим как одночлен

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) \wedge (\omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_{k+l}) = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_{k+l}. \quad (24)$$

4.26. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ есть k -форма.

4.27. Докажите, что операция внешнего умножения 1-форм задает полилинейное кососимметрическое отображение

$$(\omega_1, \dots, \omega_k) \mapsto \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k.$$

Иными словами,

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \omega'_1 + \lambda_2 \omega''_1) \wedge \omega_2 \cdots \wedge \omega_k &= \lambda_1 \omega'_1 \wedge \omega_2 \cdots \wedge \omega_k + \lambda_2 \omega''_1 \wedge \omega_2 \cdots \wedge \omega_k, \\ \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k} &= (-1)^\nu \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k, \end{aligned}$$

$$\text{где } \nu = \begin{cases} 0, & \text{если перестановка } i_1, \dots, i_k \text{ четная,} \\ 1, & \text{если перестановка } i_1, \dots, i_k \text{ нечетная.} \end{cases}$$

4.28. Докажите, что умножение одночленов ассоциативно:

$$(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m),$$

и косокоммутативно:

$$\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k.$$

4.29. Докажите, что если среди индексов $i_1, \dots, i_k$ есть два одинаковых, то форма $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}$ равна нулю.

4.30. Докажите, что формы

$$x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}, \quad \text{где } 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n,$$

линейно независимы.

Число таких форм, очевидно, равно C_n^k . Мы будем их называть *базисными k -формами*.

4.31. Докажите, что каждая k -форма в $\mathbb{R}^n$ однозначно представляется в виде линейной комбинации базисных:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}.$$

4.32. Докажите, что всякая n -форма в $\mathbb{R}^n$ есть либо ориентированный объем параллелепипеда при некотором выборе единицы объема, либо нуль:

$$\omega = a \cdot x_1 \wedge \cdots \wedge x_n.$$

4.33. Пусть ω — элемент объема в $\mathbb{V}$, определяемый T и μ (см. задачу 4.11), и $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{V}$ — изоморфизм, для которого $f^*T = (\cdot, \cdot)$ и $\mu\langle f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n) \rangle = 1$. Показать, что $f^*\omega = \det f \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

4.34. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ и $x_1, \dots, x_n$ — дуальный базис, т. е. базис сопряженного пространства с условиями $x_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

а) Показать, что $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) = 1$.

б) Показать, что $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ есть минор матрицы $(\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$ (i -ый столбец матрицы — координаты вектора $\mathbf{v}_i$), получающийся при оставлении строк с индексами $i_1, \dots, i_k$.

4.35. Докажите, что k -линейные функции α и β векторных переменных $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ совпадают, если $\alpha(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) = \beta(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$ для каждого неупорядоченного набора $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}$ (см. задачу 3.10).

4.36. Докажите, что внешние k -формы ω_1 и ω_2 совпадают, если $\omega_1(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) = \omega_2(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$ для всякого упорядоченного набора $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, базисных векторов.

4.37. Докажите, что две k -формы ω_1 и ω_2 в $\mathbb{R}^n$ равны между собой тогда и только тогда, когда в их координатных представлениях

$$\omega_1 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$$

и

$$\omega_2 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} b_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$$

совпадают соответствующие коэффициенты: $a_{i_1 \dots i_k} = b_{i_1 \dots i_k}$.

Далее символ $M(n, k)$ обозначает совокупность всех мультииндексов вида $I = (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$, где $i_j \in \{1, \dots, n\}$.

Для каждого мультииндекса $I = (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n) \in M(n, k)$ и любой $n \times k$ -матрицы $a = (a_1, \dots, a_k)$ определим I -ый минор этой матрицы формулой $\det_I(a) = \det(a|I)$, где $a|I$ — $k \times k$ -матрица, полученная из матрицы a удалением строк с номерами, не входящими в набор I .

4.38. Докажите *формулу Грама*: для любых $(n \times k)$ -матриц $a = (a_1, \dots, a_k)$ и $b = (b_1, \dots, b_k)$, где $k \leq n$, справедлива формула

$$\det(a^*b) = \sum_{I \in M(n, k)} \det_I(a) \det_I(b). \quad (25)$$

УКАЗАНИЕ: Левая $\alpha(a, b)$ и правая $\beta(a, b)$ части формулы Грама суть линейные функции $2k$ векторных переменных $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$, антисимметричные как по первым k переменным, так и по последним. Из легко проверяемого равенства $\alpha(e_I, e_J) = \delta_{I,J} = \beta(e_I, e_J)$, $I, J \in M(n, k)$, следует, что значения функций α и β совпадают на любом базисном наборе $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}$. (Здесь и далее $\delta_{I,J} = 1$, если $I = J$, и $\delta_{I,J} = 0$, если $I \neq J$.)

4.39. Докажите *формулу Бине — Коши*: квадрат объема k -мерного параллелепипеда, натянутого на k векторов в $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$, равен сумме квадратов объемов проекций этого параллелепипеда на все k -мерные координатные подпространства.

УКАЗАНИЕ: Положите в предыдущей задаче $a = b$. Тогда

$$\det(a^*a) = \sum_{I \in M(n, k)} \det_I(a) \det_I(a). \quad (26)$$

Левая часть этой формулы — это квадрат объема k -мерного параллелепипеда, натянутого на k векторов $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$, $k \leq n$, а правая — сумма квадратов объемов проекций этого параллелепипеда на все k -мерные координатные подпространства.

4.5. ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ.

Определение 4. Внешним произведением $\omega^k \wedge \omega^l$ k -формы ω^k в $\mathbb{R}^n$ на l -форму ω^l в $\mathbb{R}^n$ называется $(k+l)$ -форма в $\mathbb{R}^n$, значение которой на $k+l$ векторах $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_{k+l} \in \mathbb{R}^n$ равно

$$(\omega^k \wedge \omega^l)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+l}) = \sum (-1)^\nu \omega^k(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_k}) \omega^l(\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_l}), \quad (27)$$

где $i_1 < \dots < i_k$, $j_1 < \dots < j_l$; $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ — перестановка номеров $(1, 2, \dots, k+l)$, а $\nu = \begin{cases} 0, & \text{если эта перестановка четна,} \\ 1, & \text{если эта перестановка нечетная.} \end{cases}$

4.40. Показать, что при $k = l = 1$ приведенное определение внешнего произведения согласуется с умножением двух 1-форм раздела 4.3.

УКАЗАНИЕ: Если $k = l = 1$, то разбиений всего два: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1$. Поэтому

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \omega_1(\mathbf{v}_1)\omega_2(\mathbf{v}_2) - \omega_1(\mathbf{v}_2)\omega_2(\mathbf{v}_1),$$

в согласии с умножением двух 1-форм.

4.41. Доказать, что приведенное выше определение действительно определяет некоторую $(k + l)$ -форму (т. е., что значение $(\omega^k \wedge \omega^l)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+l})$ зависит от векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+l}$ полилинейно и кососимметрично).

4.42. Докажите, что определенное выше умножение внешних форм коассокоммутативно:

$$\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k,$$

ω^k — k -форма в $\mathbb{R}^n$, ω^l — l -форма в $\mathbb{R}^n$.

4.43. Докажите, что определенное выше умножение внешних форм дистрибутивно:

$$(\lambda_1 \omega_1^k + \lambda_2 \omega_2^k) \wedge \omega^l = \lambda_1 \omega_1^k \wedge \omega^l + \lambda_2 \omega_2^k \wedge \omega^l,$$

ω_1^k, ω_2^k — k -формы в $\mathbb{R}^n$, ω^l — l -форма в $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

4.44. Докажите, что на одночленах

$$\omega^k = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \quad \text{и} \quad \omega^l = \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_{k+l},$$

введенная здесь операция (27) внешнего произведения совпадает с операцией (24) внешнего умножения 1-форм.

УКАЗАНИЕ: Временно обозначим операцию (27) символом $\bar{\wedge}$. Требуется доказать совпадение

$$\begin{aligned} \omega^k \bar{\wedge} \omega^l &= (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) \bar{\wedge} (\omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_{k+l}) \\ &= \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_{k+l} = \omega^k \wedge \omega^l \end{aligned} \quad (28)$$

на произвольных векторах $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+l}$. Значение правой части (28) равно определителю $\det(\omega_i(\mathbf{v}_j))$ порядка $k + l$ в соответствии с определением (23). Значение левой части (28) в соответствии с определением (27) равно сумме произведений

$$\sum \pm \det_{1 \leq i \leq k} (\omega_i(\mathbf{v}_{i_m})) \cdot \det_{k < i \leq k+l} (\omega_i(\mathbf{v}_{j_m}))$$

миноров первых k столбцов определителя порядка $k + l$ на дополнительные миноры. По теореме Лапласа выбор знака в разложении определителя по первым k столбцам согласован с выбором знаков в определении (27).

4.45. Докажите, что операция $\bar{\wedge}$, определенная выражением (27), на одночленах совпадает с операцией $\wedge$. Вывести отсюда ассоциативность операции (27) на одночленах.

- 4.46. Докажите, что определенное выше умножение (27) внешних форм ассоциативно:

$$(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m),$$

ω^k — k -форма в $\mathbb{R}^n$, ω^l — l -форма в $\mathbb{R}^n$, ω^m — m -форма в $\mathbb{R}^n$.

- 4.47. Докажите, что внешний квадрат формы нечетного порядка равен нулю: $\omega^k \wedge \omega^k = 0$, если k нечетно.

- 4.48. Пусть $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ — система координат в $\mathbb{R}^{2n}$ и $\omega^2 = \sum_{i=1}^n p_i \wedge q_i$ — 2-форма. Найдите внешний квадрат 2-формы ω^2 .

- 4.49. Найдите внешнюю k -ую степень формы ω^2 .

- 4.50. Рассмотрим ориентированное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Каждому вектору $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$ сопоставим 1-форму $\omega_{\mathbf{A}}^1$, полагая

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 \langle \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{A}, \mathbf{v}) \quad (\text{скалярное произведение}).$$

Доказать, что отображение $\mathbf{A} \mapsto \omega_{\mathbf{A}}^1$ устанавливает изоморфизм векторного пространства $\mathbb{R}^3$ векторов $\mathbf{A}$ с векторным пространством 1-форм в $\mathbb{R}^3$, называемый *каноническим изоморфизмом* $\mathbb{R}^3$ и $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$.

- 4.51. Рассмотрим ориентированное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Каждому вектору $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$ сопоставим 2-форму $\omega_{\mathbf{A}}^2$, полагая

$$\omega_{\mathbf{A}}^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{A}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (\text{смешанное произведение}).$$

Доказать, что отображение $\mathbf{A} \mapsto \omega_{\mathbf{A}}^2$ устанавливает изоморфизм векторного пространства $\mathbb{R}^3$ векторов $\mathbf{A}$ с векторным пространством 2-форм в $\mathbb{R}^3$. Этот изоморфизм пространства $\mathbb{R}^3$ и $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ называется *каноническим*.

- 4.52. Доказать, что в силу установленных изоморфизмов внешнее умножение 1-форм превращается в векторное умножение векторов $\mathbb{R}^3$, т. е.

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^1 = \omega_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}^2 \quad \text{для любых } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3.$$

- 4.53. Доказать, что в силу установленных изоморфизмов внешнее умножение 1-формы на 2-форму превращается в скалярное умножение векторов $\mathbb{R}^3$, т. е.

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^2 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}) x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \quad \text{для любых } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3.$$

4.6. ПОВЕДЕНИЕ ПРИ ОТОБРАЖЕНИЯХ.

Пусть $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, ω^k — внешняя k -форма в $\mathbb{R}^n$. Тогда на $\mathbb{R}^m$ возникает k -форма $f^*\omega$, значение которой на k векторах $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ равно значению ω на их образах:

$$(f^*\omega)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \omega(f\mathbf{v}_1, \dots, f\mathbf{v}_k).$$

4.54. Проверить, что $f^*\omega$ — внешняя форма.

4.55. Проверить, что $f^*: \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^m)$ — линейный оператор из пространства k -форм на $\mathbb{R}^n$ в пространство k -форм на $\mathbb{R}^m$.

4.56. Пусть $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ — линейные отображения. Проверить, что $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

4.57. Проверить, что f^* сохраняет внешнее умножение:

$$f^*(\omega^k \wedge \omega^l) = (f^*\omega^k) \wedge (f^*\omega^l).$$

4.58. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение и ω — n -форма в $\mathbb{R}^n$. Тогда $f^*\omega = c\omega$, где c — некоторая константа. Показать, что $c = \det f$.

5. Дифференцируемые многообразия

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ В $\mathbb{R}^n$.

Определение 5. Пусть U и V — открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Дифференцируемое отображение $h: U \rightarrow V$ класса C^k , имеющее дифференцируемое обратное $h^{-1}: V \rightarrow U$, принадлежащее классу C^k будем называть C^k -диффеоморфизмом, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Определение 6. Подмножество $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^N$ называется n -мерным C^k -дифференцируемым многообразием, если для всякой точки $x \in \mathcal{M}$ выполнено следующее условие:

существуют открытое множество U , содержащее x , открытое множество $V \subset \mathbb{R}^N$ и C^k -диффеоморфизм $h: U \rightarrow V$ такие, что

$$h(U \cap \mathcal{M}) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{y \in V : y_{n+1} = \dots = y_N = 0\}. \quad (29)$$

Другими словами, часть многообразия $U \cap \mathcal{M}$ может быть «распрямлена» на открытую часть пространства $\mathbb{R}^n$ посредством некоторого C^k -диффеоморфизма.

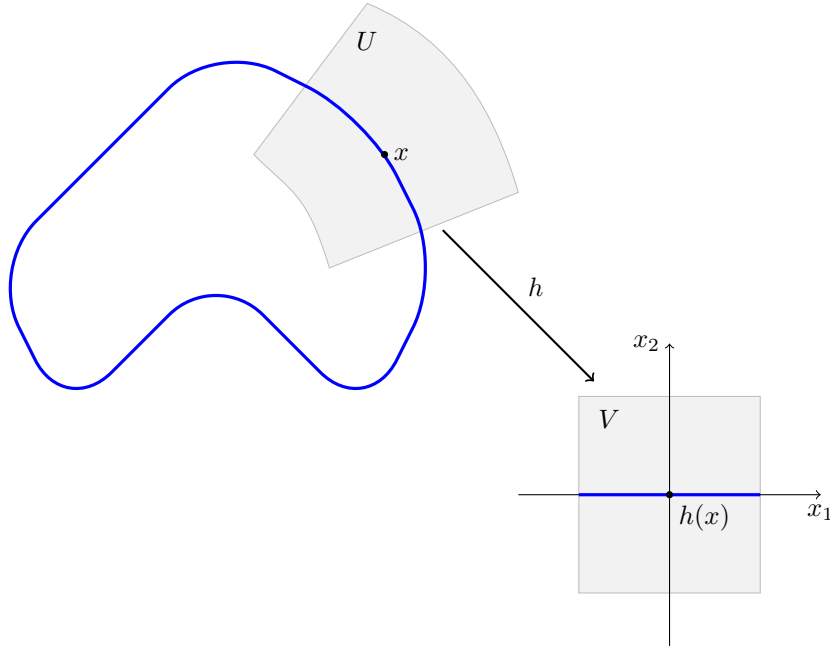


Рис. 5.1: Одномерное многообразие в $\mathbb{R}^2$

Последнее свойство можно формализовать посредством понятия системы координат.

Определение 7. Системой координат (картой) класса C^k на открытом множестве $A \subset \mathbb{R}^N$ называется C^k -диффеоморфизм вида $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : A \rightarrow W \subset \mathbb{R}^N$. При этом числа $\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)$ называются координатами точки $x \in A$ относительно координатной системы φ .

5.1. Показать, что определение многообразия можно переформулировать следующим образом: подмножество $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^N$ называется n -мерным многообразием, если в каждой точке $x \in \mathcal{M}$ существует система координат, в которой многообразие является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

5.2. Проверить в соответствии с определением, что точка в $\mathbb{R}^N$ есть нульмерное многообразие, а открытое подмножество в $\mathbb{R}^N$ есть N -мерное многообразие.

При исследовании вопросов и дифференциальной структуре точечных множества в пространстве $\mathbb{R}^N$ чрезвычайно полезно применять следующие две теоремы о выпрямлении.

Теорема 1 (ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА О ВЫПРЯМЛЕНИИ). *Предположим, что на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^N$ определено непрерывно дифференцируемое отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p \leq N$, и $a \in U$. Если $f(a) = 0$ и $N \times p$ -матрица $Df(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$ имеет ранг p , то существуют открытое множество $A \subset \mathbb{R}^N$ и C^1 -диффеоморфизм $h : A \rightarrow h(A) \subset U$, $a \in h(A)$, такие, что*

$$f \circ h(x_1, \dots, x_N) = (x_{N-p+1}, \dots, x_N).$$

Другими словами, в условиях теоремы найдется такая система координат (A, φ) в открытой окрестности точки a , в которой отображение f является проектированием $\mathbb{R}^N$ на $\mathbb{R}^p$ (здесь $h = \varphi^{-1}$).

Теорема 2 (ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О ВЫПРЯМЛЕНИИ). *Пусть U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^N$ и $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ отображение класса C^k . Предположим, что в точке $a \in U$ ранг отображения f равен n . Тогда $N \geq n$, и существуют окрестность V точки $b = f(a) \in \mathbb{R}^N$, C^k -диффеоморфизм $F : V \rightarrow F(V) \subset \mathbb{R}^N$ и число $\delta > 0$ такие, что если $|x - a| < \delta$, то $f(x) \in V$ и*

$$\begin{cases} F[f(x)] = x & \text{в случае } N = n, \\ F[f(x)] = (x, 0) & \text{в случае } N > n. \end{cases}$$

Другими словами, при выполнении условий теоремы в открытой окрестности A точки $b = f(a)$ найдется такая система координат (A, F) , в которой отображение $F \circ f$ является каноническим вложением $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^N$.

5.3. Доказать, что n -мерная сфера $\mathbb{S}^n$, определяемая как множество $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$, является n -мерным дифференцируемым многообразием класса C^∞ .

УКАЗАНИЕ. Применить первую теорему о выпрямлении.

5.4. Пусть $A \subset \mathbb{R}^N$ — открытое множество и $g : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ — такая C^k -дифференцируемая функция, что $Dg(x)$ имеет ранг k для всех точек x , в которых $g(x) = 0$. Доказать, что прообраз $g^{-1}(0)$ есть $(N - k)$ -мерное многообразие в $\mathbb{R}^N$ класса C^k .

УКАЗАНИЕ. Применить первую теорему о выпрямлении.

5.5. Доказать, что для всякой точки x n -мерного многообразия $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ существуют открытое множество $U \ni x$, открытая окрестность $W \subset \mathbb{R}^n$ точки 0 и инъективная дифференцируемая функция $f : W \rightarrow \mathbb{R}^N$ такие, что

- 1) дифференциал $Df(y)$ имеет ранг n во всех точках $y \in W$,
- 2) $f(0) = x$, $f(W) = \mathcal{M} \cap U$ и $f : W \rightarrow \mathcal{M} \cap U$ — гомеоморфизм.

УКАЗАНИЕ. Рассмотреть отображение $h : U \rightarrow V$, удовлетворяющее условию (29). Пусть $W = \{a \in \mathbb{R}^n : (a, 0) \in h(M)\}$. Проверить, что отображение $f : W \rightarrow \mathbb{R}^N$, определяемое равенством $f(a) = h^{-1}(a, 0)$, обладает требуемыми свойствами.

Отображение $f : W \rightarrow \mathcal{M}$ задачи 5.5 называется (*регулярной*) *параметризацией* окрестности точки $x \in \mathcal{M}$.

5.6. Доказать, что для всяких двух параметризаций $f_1 : W_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$ и $f_2 : W_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ дифференцируемого многообразия $\mathcal{M}$ отображение $f_2^{-1} \circ f_1 : f_1^{-1}(f_2(W_2)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируемо и имеет невырожденный якобиан.

Полупространством $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ называется множество

$$\{y \in \mathbb{R}^n : y_n \geq 0\}.$$

Определение 8. Подмножество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ называется *n -мерным многообразием с краем* класса C^k , если для всякой точки $x \in \mathcal{M}$ выполняется либо условие (29), либо следующее условие:

существуют открытое множество $U \ni x$, открытое множество $V \subset \mathbb{R}^N$ и C^k -диффеоморфизм $h : U \rightarrow V$ такие, что

$$\begin{cases} h(U \cap \mathcal{M}) = V \cap (\mathbb{H}^n \times \{0\}) = \{y \in V : y_n \geq 0, y_{n+1} = \dots = y_N = 0\} \\ \text{и} \\ h(x) \in \{y \in V : y_n = y_{n+1} = \dots = y_N = 0\}. \end{cases} \quad (30)$$

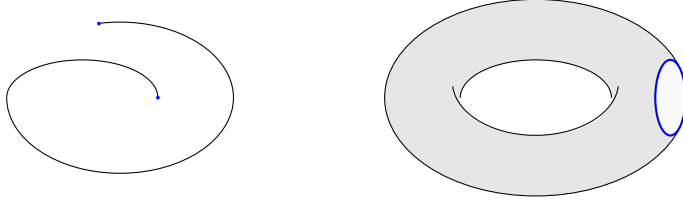


Рис. 5.2: Одномерное и двумерное многообразия с краем в $\mathbb{R}^3$

Другими словами, часть многообразия $U \cap \mathcal{M}$ может быть «превращена» в открытую часть пространства $\mathbb{H}^n$ посредством некоторого диффеоморфизма, при это образ точки x лежит на границе $\mathbb{H}^n$.

5.7. Показать, что условие (30) можно переформулировать следующим образом: подмножество $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^N$ называется *n -мерным многообразием с краем*, если в каждой точки $x \in \mathcal{M}$ существует система координат, в которой многообразие является открытым множеством в $\mathbb{H}^N$, при этом образ точки x лежит на границе $\mathbb{H}^n$.

5.8. Доказать, что $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ является n -мерным многообразием с краем. Показать, что его край $\partial\mathbb{H}^n$ будет множество

$$\{y \in \mathbb{R}^n : y_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}.$$

5.9. Проверить, что условия (29) и (30), не могут одновременно выполняться для одной и той же точки x .

УКАЗАНИЕ. В противном случае в окрестности точки x определены две системы координат, соответствующие условиям (29) и (30). Тогда можно рассмотреть композицию $h \circ f$, где f — параметризация задачи 5.5, а h — отображение условия (30). Композиция $h \circ f$ определена на открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$, непрерывно-дифференцируема и дифференциал этой композиции в точке $f^{-1}(x)$ не вырожден. По теореме об обратной функции точка $h(x)$ является внутренней для образа отображения $h \circ f$. Последнее противоречит условию (30).

Множество всех точек $x \in \mathcal{M}$, удовлетворяющих условию (30), называется *краем многообразия $\mathcal{M}$* и обозначается символом $\partial\mathcal{M}$.

Край многообразия не следует путать с теоретико-множественной границей множества.

- 5.10. а) Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, граница которого является $(n - 1)$ -мерным многообразием. Показать, что объединение $\mathcal{M}$ множества A с его границей есть n -мерное многообразие с краем. (Полезно иметь в виду следующий пример: если $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 \text{ или } 1 < |x| < 2\}$, то $\mathcal{M}$ есть многообразие с краем, но $\partial\mathcal{M}$ не совпадает с границей A .)
- б) Доказать аналогичное утверждение для открытого подмножества n -мерного многообразия.
- 5.11. Пусть $\mathcal{M}$ есть n -мерное многообразие с краем. Доказать, что $\partial\mathcal{M}$ есть $(n - 1)$ -мерное многообразие, а $\mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}$ есть n -мерное многообразие.
- 5.12. Доказать аналог утверждения задачи 5.5 для многообразий с краем: для всякой точки $x \in \partial\mathcal{M}$ n -мерного многообразия $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ с краем существуют открытое множество $U \ni x$, открытое множество $W \subset \mathbb{R}^n$ и инъективная дифференцируемая функция $f : W \rightarrow \mathbb{R}^N$ такие, что
- 1) $f(W \cap \mathbb{H}^n) = \mathcal{M} \cap U$,
 - 2) дифференциал $Df(y)$ имеет ранг n во всех точках $y \in W$.
- УКАЗАНИЕ. Рассмотреть отображение $h : U \rightarrow V$, удовлетворяющее условию (30). Пусть $W = \{a \in \mathbb{R}^n : (a, 0) \in h(\mathcal{M})\}$. Проверить, что отображение $f : W \rightarrow \mathbb{R}^N$, определяемое равенством $f(a) = h^{-1}(a, 0)$, обладает требуемыми свойствами.
- 5.13. Доказать частичное обращение задачи 5.4: для всякой точки x n -мерного многообразия $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ существуют открытое множество $A \subset \mathbb{R}^N$ и функция $g : A \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ такие, что $A \cap \mathcal{M} = g^{-1}(0)$ и $Dg(x)$ имеет ранг $N - k$ всюду, где $g(x) = 0$.
- 5.14. Установить аналог задачи 5.13 для многообразия с краем.
- 5.15. Доказать, что n -мерное (векторное) подпространство в $\mathbb{R}^N$ есть n -мерное многообразие.
- 5.16. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Графиком f называется множество $\{(x, y) : y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Показать, что график f является n -мерным многообразием тогда и только тогда, когда отображение f дифференцируемо.

- 5.17. Пусть $\mathbb{K}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0 \text{ и } x_2, \dots, x_{n-1} > 0\}$. Показать, что если $\mathcal{M} \subset \mathbb{K}^n$ есть k -мерное многообразие и $\mathcal{T}$ получается вращением $\mathcal{M}$ вокруг оси $x_1 = \dots = x_k = 0$, то $\mathcal{T}$ есть $(k+1)$ -мерное многообразие. Пример — тор.

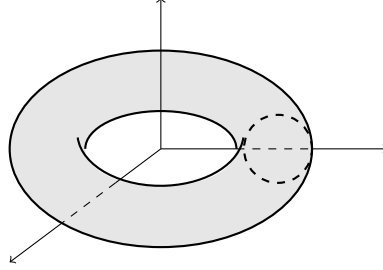


Рис. 5.3: Тор

- 5.18. Пусть $\mathcal{M}$ есть n -мерное многообразие в $\mathbb{R}^N$ и $f : W \rightarrow \mathbb{R}^N$ — параметризация окрестности точки $x = f(a)$. Так как ранг матрицы $Df(a)$ равен n , то линейное отображение $Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ — взаимно однозначно и $Df(a)(\mathbb{R}^n)$ есть n -мерное подпространство в $\mathbb{R}^N$. Доказать, что $Df(a)(\mathbb{R}^n)$ не зависит от выбора параметризации.

УКАЗАНИЕ: Если $g : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ — еще одна система координат с $x = g(b)$, то

$$Dg(b)(\mathbb{R}^n) = Df(a) \circ D(f^{-1} \circ g)(b)(\mathbb{R}^n) = Df(a)(\mathbb{R}^n).$$

На основании задачи 5.18 n -мерное подпространство $Df(a)(\mathbb{R}^n)$ не зависит от выбора параметризации. Это подпространство называется *касательным пространством* $\mathcal{M}$ в точке x и обозначается символом $T_x\mathcal{M}$. В следующих параграфах мы будем пользоваться тем фактом, что на векторах из $T_x\mathcal{M}$ имеется естественное *скалярное* произведение, индуцируемое скалярным произведением $\mathbb{R}^N$ и определяемое для всякой пары $v, w \in T_x\mathcal{M}$ равенством $T_x\langle v, w \rangle = \langle v, w \rangle$.

Рассмотрим функцию, которая относит каждому $x \in \mathcal{M}$ некоторый вектор $F(x) \in T_x\mathcal{M}$; такая функция называется *векторным полем* на $\mathcal{M}$.

- 5.19. Показать, что $T_x\mathcal{M}$ состоит из касательных векторов в t к всевозможным кривым c , лежащим в $\mathcal{M}$ и таким, что $c(t) = x$.

- 5.20. Предположим, что A — открытое множество, содержащее $\mathcal{M}$, и F — такое дифференцируемое поле на A , что $F(x) \in T_x\mathcal{M}$ для каждого $x \in \mathcal{M}$. Для параметризации $f : W \rightarrow \mathbb{R}^N$ доказать существование и единственность (дифференцируемого) векторного поля G на W такого, что $Df(a)(G(a)) = F(f(a))$ для каждого $z \in W$.
- 5.21. В точке $x \in \partial\mathcal{M}$ определены касательное пространство $T_x\mathcal{M}$ и касательное пространство $T_x\partial\mathcal{M}$. Доказать, что
- 1) $T_x\partial\mathcal{M} \subset T_x\mathcal{M}$;
 - 2) $\dim T_x\partial\mathcal{M} = \dim T_x\mathcal{M} - 1$.

Мы по определению будем считать векторное поле F *дифференцируемым*, если дифференцируемо векторное поле G .

- 5.22. Доказать, что определение дифференцируемости векторного поля не зависит от выбора системы координат: если $g : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ таково, что $Dg(H(b)) = F(b)$ для всех $b \in V$, то H — дифференцируемое векторное поле.

УКАЗАНИЕ: Координатные функции для $H(b)$ должны совпадать с координатными функциями для $G(f^{-1}(g(b)))$, так что дифференцируемость G влечет дифференцируемость H .

- 5.23. Пусть c — дифференцируемая кривая в $\mathbb{R}^n$, т. е. дифференцируемая функция $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Определим касательный вектор v к кривой c в точке t формулой $v = c_*((e_1)_t) = ((c^1)'(t), \dots, (c^n)'(t))_{c(t)}$. Показать, что если $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, то касательным вектором к кривой $f \circ c$ в точке t служит $f_*(v)$.
- 5.24. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и кривая $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ определена формулой $c(t) = (t, f(t))$. Показать, что конец касательного вектора, проведенного к кривой c в точке t , лежит на касательной к графику f , проведенной в точке $(t, f(t))$.
- 5.25. Пусть кривая $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ такова, что $|c(t)| = 1$ для всех t . Показать, что $c(t)_{c(t)}$ и касательный вектор к c в точке t перпендикулярны.
- 5.26. а) Показать, что если $\mathcal{M}$ есть n -мерное многообразие в $\mathbb{R}^N$ и $n < N$, то $\mathcal{M}$ имеет нулевую N -мерную меру Лебега.

б) Пусть $\mathcal{M}$ — замкнутое n -мерное многообразие с краем в $\mathbb{R}^n$. Показать, что граница $\mathcal{M}$ совпадает с $\partial\mathcal{M}$. Привести контрпример для случая незамкнутого $\mathcal{M}$.

с) Показать, что всякое n -мерное многообразие с краем в $\mathbb{R}^N$ измеримо по n -мерной мере Хаусдорфа.

д) Показать, что размерность Хаусдорфа n -мерного многообразия равна n .

5.27. Пусть $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, сохраняющее норму, и $\mathcal{M}$ есть k -мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$. Показать, что $\mathcal{M}$ и $T(\mathcal{M})$ имеют одинаковый объем.

5.28. ?? Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Докажите равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu = \int_0^\infty dr \int_{S(0,r)} f(x) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

5.29. а) Пусть $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема и $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ определено равенством $c(x) = (x, f(x))$. Показать, что $c([0, 1])$ имеет длину

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f')^2}.$$

б) Показать, что эта длина является верхней гранью длин вписанных ломаных.

УКАЗАНИЕ. Если $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1$, то

$$|c(t_i) - c(t_{i-1})| = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + f'(s_i)(t_i - t_{i-1})^2}$$

с некоторым $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

5.30. ?? Пусть кривая $y = f(x) \in C^1[a, b]$ вращением вокруг оси x порождает поверхность S . Докажите, что

$$\mathcal{H}^2(S) = 2\pi \int_a^b |f(t)| \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

5.2. ОРИЕНТАЦИЯ НА МНОГООБРАЗИИ.

Фиксируем многообразие $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ размерности $n \leq N$ и рассмотрим совокупность всех базисов в касательном пространстве этого многообразия во всех его точках:

$$\mathcal{BM} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} (x; \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle), \quad \text{где } \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle \text{ — базис в } T_x \mathcal{M}. \quad (31)$$

Так как $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$, а $T_x \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$, то $\mathcal{BM}$ естественным образом вкладывается в $\mathbb{R}^N \times \underbrace{\mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^N}_{n \text{ раз}}$:

$$(x; \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle) \mapsto (x, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in \mathbb{R}^N \times \underbrace{\mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^N}_{n \text{ раз}}.$$

Мы индуцируем на $\mathcal{BM}$ метрику из объемлющего пространства. Таким образом, $\mathcal{BM}$ становится метрическим пространством и, следовательно, определено понятие «близости» между базисами в различных касательных пространствах.

Определение 9. *Ориентацией* на $\mathcal{M}$ называется всякая непрерывная функция

$$\theta : \mathcal{BM} \rightarrow \{-1, +1\},$$

нечетная по каждой векторной переменной:

$$\theta(x; \langle \varepsilon_1 \mathbf{v}_1, \dots, \varepsilon_n \mathbf{v}_n \rangle) = \varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_n \theta(x; \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle)$$

для всех $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}$.

5.31. Доказать, что определение ориентации в пространстве $\mathbb{R}^N$, приведенное в разделе 3.3 эквивалентно определению этого раздела.

УКАЗАНИЕ. Базису $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$ сопоставим функцию

$$\theta(\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle) = \operatorname{sgn} \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N).$$

Проверить, что эта функция удовлетворяет требованиям определения 9.

5.32. Доказать, что на связном многообразии $\mathcal{M}$ существует не более двух ориентаций.

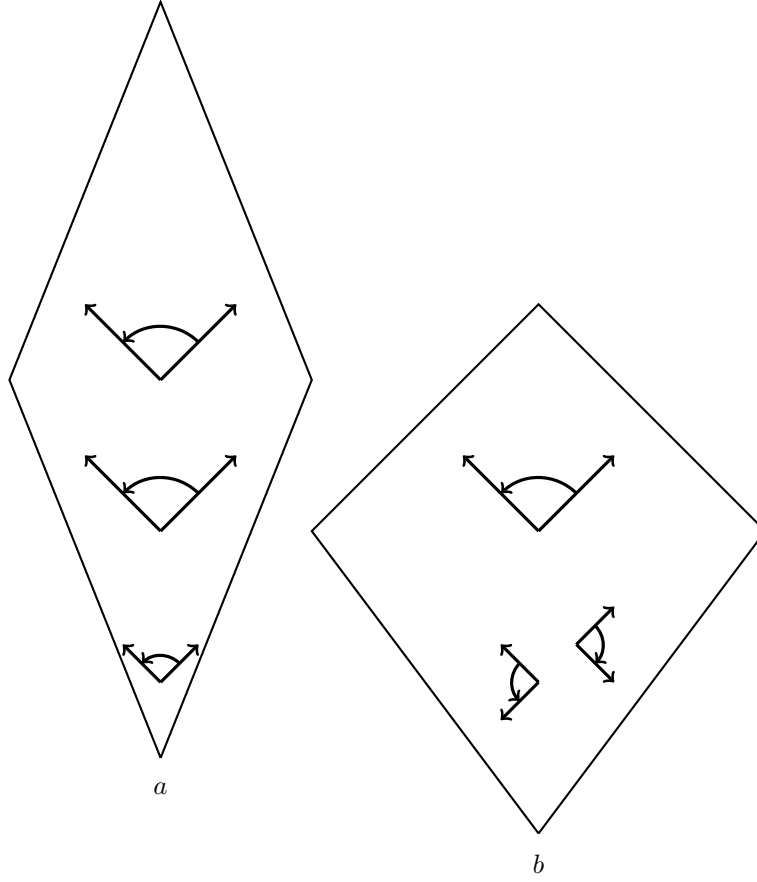


Рис. 5.4: а — согласованный выбор ориентаций, б — несогласованный выбор ориентаций

УКАЗАНИЕ. 1) Пусть для определенности многообразие $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ имеет размерность k . На основании задачи 21 для каждой ориентации θ многообразия $\mathcal{M}$ и любых базисов $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ и $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k)$ в касательном пространстве $T_x\mathcal{M}$ имеет место формула

$$\theta(x; A) = \operatorname{sgn} \det(A/B) \theta(x; B), \quad (32)$$

где (A/B) — матрица базиса A относительно базиса B в пространстве $T_x\mathcal{M}$.

2) Пусть θ и τ — какие-либо ориентации многообразия $\mathcal{M}$. Для каждой точки

$x \in \mathcal{M}$ выберем какой-нибудь базис $A(x)$ в пространстве $T_x\mathcal{M}$ и положим

$$f(x) = \frac{\tau(x; A(x))}{\theta(x; A(x))}. \quad (33)$$

Из формулы (32) следует, что функция $f(x)$ не зависит от выбора базиса $A(x)$.

3) Покажем, что функция f непрерывна в каждой точке $p \in \mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{O}_p$ — открытая окрестность точки p , и $\varphi : U \rightarrow \mathcal{O}_p$ — гладкий диффеоморфизм, где U — открытая окрестность точки $0 \in \mathbb{R}^N$, такой, что $\varphi(0) = p$ и $\varphi(U \cap \mathbb{R}^k) = \mathcal{O}_p \cap \mathcal{M}$. Для каждого индекса $i \in \{1, \dots, k\}$ положим $v_i(x) = D_i\varphi(\varphi^{-1}(x))$. Набор векторов $v(x) = (v_1(x), \dots, v_k(x))$ является базисом пространства $T_x\mathcal{M}$ в каждой точке $x \in \mathcal{O}_p \cap \mathcal{M}$ и непрерывно зависит от $x \in \mathcal{O}_p \cap \mathcal{M}$. Функция (33) непрерывно зависит от точки $x \in \mathcal{O}_p \cap \mathcal{M}$.

4) Так как функция $f : \mathcal{M} \rightarrow \{-1, 1\}$ непрерывна, а многообразие $\mathcal{M}$ линейно связно, то в силу теоремы Больцано — Коши эта функция постоянна. Следовательно, либо $\tau = \theta$, либо $\tau = -\theta$.

5.33. а) Показать, что на k -мерном многообразии $\mathcal{M}$ можно определить абсолютный тензор k -ой степени $|dV|$, даже если $\mathcal{M}$ неориентировано, так, что $\mathcal{M}$ будет иметь объем $\int_{\mathcal{M}} |dV|$.

б) Показать, что двумерный полиэдр $c : [0, 2\pi] \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$, определенный равенством

$$c(u, v) = \left(2 \cos u + v \sin \frac{u}{2} \cos u, 2 + \sin u + v \sin \frac{u}{2} \sin u, v \cos \frac{u}{2} \right),$$

есть лист Мёбиуса, и найти его площадь.

Базис $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ в $T_x\mathcal{M}$ называется *ориентированным положительно* (отрицательно) относительно ориентации θ , если $\theta(x; \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle) > 0$ ($\theta(x; \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle) < 0$).

Диффеоморфизм $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ двух ориентированных многообразий *сохраняет ориентацию*, если дифференциал $Df(x)$ переводит базисы касательного пространства $T_x\mathcal{M}$ в базисы касательного пространства $T_{f(x)}\mathcal{N}$ того же наименования.

5.34. Пусть на $\mathcal{M}$ задан такой набор систем координат $\mathcal{C}$, что

- 1) для каждого $x \in \mathcal{M}$ существует $f \in \mathcal{C}$, являющееся системой координат в окрестности точки x ;
- 2) $\det(f^{-1} \circ g) > 0$ для любых $f, g \in \mathcal{C}$.

Показать, что на $\mathcal{M}$ существует единственная ориентация, сохраняющаяся при всех $f \in \mathcal{C}$.

Определение 10. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ — n -мерное многообразие с краем $\partial\mathcal{M}$, и θ — ориентация на $\mathcal{M}$. *Индукцированная ориентация* θ' края $\partial\mathcal{M}$ определяется по следующему правилу. В точке $x \in \partial\mathcal{M}$ возьмем вектор $\mathbf{v}(x) \in T_x\mathcal{M} \setminus T_x\partial\mathcal{M}$, направленный наружу: если $\mathbf{v}(x) = \dot{\gamma}(0)$, где $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^l$, $\gamma(0) = x$, — гладкая кривая, то $\gamma((-\sigma, 0)) \subset \mathcal{M}$ для некоторого $\sigma > 0$. Определим индуцированную ориентацию края как функцию

$$\theta'(x; \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle) = \theta(x; \langle \mathbf{v}(x), \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle) \quad (34)$$

для $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \in T\partial\mathcal{M}_x$.

- 5.35. Доказать, что индуцированная ориентация определена корректно, т. е. не зависит от выбора вектора $v(x)$, направленного наружу, и является непрерывной функцией.

УКАЗАНИЕ. Рассмотреть в точке $x \in T_x\partial\mathcal{M}$ два вектора $\mathbf{v}(x)$ и $\mathbf{w}(x)$, направленных наружу, и показать, что любой вектор $\mathbf{v}_t(x) = t\mathbf{v}(x) + (1-t)\mathbf{w}(x)$, $t \in [0, 1]$, также направлен наружу. Тогда в силу непрерывности функции θ получаем

$$\theta(x; \langle \mathbf{v}(x), \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle) = \theta(x; \langle \mathbf{w}(x), \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle),$$

что и доказывает корректность определения.

Для доказательства непрерывности индуцированной ориентации следует с помощью задачи 5.12 построить непрерывное поле векторов, направленных наружу: $x \mapsto \mathbf{v}(x)$, где точка x принадлежит некоторой окрестности $U \cap \partial\mathcal{M}$.

- 5.36. Доказать, замкнутый шар $B = \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^n$ — n -мерное многообразие с краем, край ∂B — сфера $S = S(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ и индуцированная ориентация края совпадает со стандартной ориентацией сферы.

- 5.37. Пусть задано n -мерное компактное ориентированное многообразие $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ с краем, теоретико-множественная граница которого совпадает с краем $\partial\mathcal{M}$. Тогда существует функция $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^1 , по крайней мере, такая, что

- 1) $g^{-1}(0) = \partial\mathcal{M}$,
- 2) $\nabla g(x) \neq 0$ в точках $x \in \partial\mathcal{M}$,
- 3) $g < 0$ на $\mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}$ и
- 4) $g > 0$ вне $\mathcal{M}$.

В том случае, когда $\mathcal{M}$ — ориентированное $(n-1)$ -мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$, можно определить орты внешних нормалей, даже в том случае, когда $\mathcal{M}$ не является границей n -мерного многообразия. Пусть θ — ориентация на $\mathcal{M}$, $\theta(x; \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle) = 1$. Выберем единичный вектор $\mathbf{n}(x)$ в $T_x \mathbb{R}^n$ так, чтобы он был перпендикулярен $T_x \mathcal{M}$, а набор векторов $\mathbf{n}(x), \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ имел стандартную ориентацию на $T_x \mathbb{R}^n$. Вектор $\mathbf{n}(x)$ называется *внешней нормалью* к $\mathcal{M}$ (определяемым ориентацией θ).

5.38. Пусть $\mathcal{M}$ есть n -мерное многообразие с краем в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим на $\mathcal{M}$ стандартную ориентацию $T_x \mathcal{M} = T_x \mathbb{R}^n$. Показать, что для $x \in \partial \mathcal{M}$ внешняя нормаль $\mathbf{n}(x) = \mathbf{v}(x)/|\mathbf{v}(x)|$, где вектор $\mathbf{v}(x)$ из определения индуцированной ориентации на $\partial \mathcal{M}$.

5.39. Сфера радиуса r в пространстве $\mathbb{R}^3$ снабжена ориентацией, индуцированной естественной ориентацией ограниченного ею шара. Доказать, что отображение $(\varphi, \theta) \mapsto (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \sin \theta)$, где $0 < \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, представляет собой параметризацию сферы. Определить ориентацию прямоугольника $(0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \subset \mathbb{R}^2$ (переменная φ считается первой, переменная θ — второй), согласованную с ориентацией сферы. Определить ориентацию экватора верхней и нижней сфер, индуцированные ориентациями верхней и нижней полусфер: $z > 0$, $z < 0$.

5.40. Пусть T есть тор, полученный вращением окружности радиуса r вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и проходящей на расстоянии $a > r$ от ее центра. Показать, что функция $\bar{r}(\varphi, \theta) = (x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta))$, где

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi + r \cos \theta \cos \varphi, \\ y &= a \sin \varphi + r \cos \theta \sin \varphi, \\ z &= r \sin \theta, \end{aligned}$$

— дифференцируемое отображение плоскости $\mathbb{R}^2$ на T , дифференциал которого имеет максимальный ранг. Показать, что ограничение отображения $\bar{r}$ на всяком двумерном интервале $(\alpha, 2\pi + \alpha) \times (\beta, 2\pi + \beta)$ представляет собой параметризацию тора T . Показать, что все получаемые таким образом параметризации одинаково ориентированы. Сравнить ориентацию тора, определяемую данным набором карт, с ориентацией, которая индуцируется в нем внутренней областью тора как трехмерным многообразием в $\mathbb{R}^3$.

- 5.41. Сфера $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = r\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ снабжена ориентацией, индуцированной естественной ориентацией ограниченного ею шара. Доказать, что отображения

$$\begin{aligned}\varphi_i : (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n &\mapsto \left(t_1, \dots, t_{i-1}, \sqrt{r^2 - \sum_{j=1}^n t_j^2}, t_i, \dots, t_n \right); \\ \varphi_i : (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n &\mapsto \left(t_1, \dots, t_{i-1}, -\sqrt{r^2 - \sum_{j=1}^n t_j^2}, t_i, \dots, t_n \right),\end{aligned}$$

где точка $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, представляют собой карты сферы S^n . Показать, что области значений этих $2n + 2$ карт при $i = 1, 2, \dots, n + 1$ покрывают всю сферу S^n . Определить, какие из этих карт ориентированы положительно, а какие отрицательно.

- 5.42. Доказать, что множество всех ортогональных матриц представляет собой дифференцируемое многообразие в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ квадратных матриц порядка n . Что представляет собой касательное пространство этого многообразия в точке I (I — единичная матрица)?

УКАЗАНИЕ: Условие ортогональности матриц рассмотреть как систему уравнений относительно n^2 переменных коэффициентов матрицы и определить ранг этой системы.

- 5.43. В четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$ рассмотрим множество Σ , определяемое неравенствами

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -1, \quad x_4 > 0, \quad x_3 - 2x_4 + 2 \geq 0.$$

Доказать, что Σ есть многообразие с краем, диффеоморфное 3-мерному шару. Ориентируем Σ , приняв за нормаль в точке $x_0 = (0, 0, 0, 1)$ вектор $\mathbf{v}_0 = (0, 0, 0, 1)$. Определить положительно ориентированную карту многообразия Σ . Показать, что точка $x_0 = (0, 0, 4/3, 5/3)$ принадлежит краю многообразия Σ . Построить касательные плоскости многообразий Σ и $\partial\Sigma$ в точке x_0 и правые касательные реперы этих многообразий в точке x_0 .

- 5.44. Пусть $f_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и система уравнений $f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_k(x) = 0$, $k < n$, задающая множество решений $\mathcal{M}$, имеет полный ранг во всех точках $x \in \mathcal{M}$. Докажите, что $\mathcal{M}$ — ориентируемое многообразие.

УКАЗАНИЕ. Базису $(v_1, \dots, v_{n-k})$ в касательном пространстве $T_x \mathcal{M}$, $x \in \mathcal{M}$, сопоставим функцию

$$\theta(x; \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle) = \operatorname{sgn} \det(\operatorname{grad} f_1, \dots, \operatorname{grad} f_k, v_1, \dots, v_{n-k}).$$

Проверить, что эта функция удовлетворяет требованиям определения 9.

5.45. Задайте ориентацию многообразия $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$.

5.46. Задайте функцией ориентацию многообразия

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

5.47. Задайте ориентацию многообразия $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$.

6. Внешние дифференциальные k -формы

6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ПРИМЕРЫ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА.

Определение 11. Говорят, что на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ задана $\mathbb{E}$ -значная дифференциальная форма ω степени k , короче k -форма, если каждой точке $x \in U$ и каждому набору векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ поставлен в соответствие элемент $\omega(x) \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ пространства $\mathbb{E}$, причём функция $\omega(x) \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ векторных переменных $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ антисимметрична и линейна по каждой векторной переменной $\mathbf{v}_i$. Таким образом, дифференциальная k -форма — это отображение $\omega: U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{E})$.

Часто бывает полезно трактовать k -форму ω как функцию, сопоставляющую каждой точке $x \in U$ полилинейное антисимметричное отображение $\omega(x): \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{E}$. По этой причине точечную и векторные переменные заключают в отдельные скобки.

Элемент $\omega(x) \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ называют значением формы ω в точке x на векторах $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Дифференциальные формы степеней 0, 1 и 2 были введены выше.

В линейной системе координат $(x_1, \dots, x_n)$ форму $\omega \in \mathcal{F}_r^k(U)$ степени k на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ класса C^r можно записать в следующем виде:

$$\omega(x) = \sum_J a_J(x) dx_J, \quad (35)$$

где $a_J \in C^r(U)$, а суммирование идет по всем наборам J упорядоченных натуральных символов $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, а $dx_J = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

Если все коэффициенты формы ω суть функции класса C^r , то говорят, что ω — форма класса C^r и пишут $\omega \in C^r$.

ПРИМЕР 1. Определим вещественную n -форму dV в пространстве $\mathbb{R}^n$ формулой $dV(x)\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Эту форму обычно называют элементом ориентированного объёма из-за того, что модуль числа $dV(x)\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ есть объём n -мерной клетки (параллелепипеда) $P(x; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \left\{ x + \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{v}_i \mid t_i \in [0, 1] \right\}$, построенной по реперу $(x; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, а знак этого числа говорит о том, сориентирован или нет базис $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ со стандартным базисом $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ пространства $\mathbb{R}^n$.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathbf{w} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — векторное поле в области $U \subset \mathbb{R}^n$. Определим $(n-1)$ -форму $\omega_{\mathbf{w}}^{n-1}$ на U формулой $\omega_{\mathbf{w}}^{n-1}\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle = \det(\mathbf{w}(x), \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ и назовём её *элементом потока* векторного поля $\mathbf{w}$.

ПРИМЕР 3. *Формой Гаусса* в $\mathbb{R}^n$ будем называть $(n-1)$ -форму, заданную на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ равенством

$$d\theta(x)\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle = \det\left(\frac{x}{|x|^n}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}\right), \quad (36)$$

т. е. $d\theta = \omega_{\mathbf{w}}^{n-1}$, где $\mathbf{w}(x) = \frac{x}{|x|^n}$. Примеры векторных полей, связанных с формой Гаусса: если материальная точка находится в точке $0 \in \mathbb{R}^3$, то создаваемое им гравитационное поле имеет вид $c \frac{x}{|x|^3}$, $c < 0$, а поле интенсивности светового потока — вид $c \frac{x}{|x|^3}$, $c > 0$.

Совокупность всех $\mathbb{E}$ -значных k -форм на множестве U обозначим символом $\mathcal{F}^k(U, \mathbb{E})$.

Будем говорить, что k -форма $\omega \in \mathcal{F}^k(U, \mathbb{E})$ на множестве U является *суммой* форм $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{F}^k(U, \mathbb{E})$ и писать $\omega = \omega_1 + \omega_2$, если

$$\omega(x)\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle = \omega_1(x)\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle + \omega_2(x)\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$$

для каждой точки $x \in U$ и любого набора векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ в $\mathbb{R}^n$.

Говорят, что k -форма $\omega \in \mathcal{F}^k(U, \mathbb{E})$ на множестве U является *произведением* функции α и k -формы $\beta \in \mathcal{F}^k(U, \mathbb{E})$ и пишут $\omega = \alpha \cdot \beta$, если $\omega(x)\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle = \alpha(x)\beta(x)\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ для каждой точки $x \in U$ и любого набора векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ в $\mathbb{R}^n$.

Внешним произведением скалярных 1-форм $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ называют k -форму ω , определяемую равенством

$$\omega(x)\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle = \det(\omega_i(x)\langle \mathbf{v}_j \rangle), \quad i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

6.1. Внешнее умножение 1-форм дистрибутивно и антикоммутативно, т. е. операция $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ линейна по каждой переменной ω_i и меняет знак при перестановке любых двух рядом стоящих сомножителей.

6.2. Проверить равенство $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(x) \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \det(v_1, \dots, v_n)$.

Напомним, что символ $M(n, k)$ обозначает совокупность всех мультииндексов вида $I = (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$, где $i_j \in \{1, \dots, n\}$.

Для каждого мультииндекса $I = (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n) \in M(n, k)$ положим $\mathbf{e}_I = (\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$, $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$. Если $k = 0$, то $M(n, k) = \emptyset$, а $dx_\emptyset = 1$.

6.3. $dx_I \langle \mathbf{e}_J \rangle = \delta_{I,J}$ для любых мультииндексов $I, J \in M(n, k)$.

Теорема 3 (КООРДИНАТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ). *Каждую k -форму $\omega \in \mathcal{F}^k(U, \mathbb{E})$ можно и притом лишь одним образом представить в виде*

$$\omega(x) = \sum_{I \in M(n, k)} a_I(x) dx_I,$$

где $a_I \in \mathcal{F}^0(U, \mathbb{E})$. При этом для любой точки $x \in U$ и любого мультииндекса $I \in M(n, k)$ верна формула

$$a_I(x) = \omega(x) \langle \mathbf{e}_I \rangle.$$

Функции $a_I : U \rightarrow \mathbb{E}$, участвующие в этой теореме, называются *коэффициентами формы ω* (относительно выбранной системы координат).

6.4. Всякая дифференциальная 2-форма ω представима в виде

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}(x) dx_i \wedge dx_j.$$

6.5. Всякая n -форма ω на $U \subset \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$\omega(x) = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = f(x) dV.$$

6.6. Всякая $(n-1)$ -форма ω представима в виде

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_{J_i},$$

где $J_i = (\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}) \in M(n, n-1)$.

- 6.7. Если $k > n$, то всякая k -форма в $\mathbb{R}^n$ является нулевой.
- 6.8. Найти координатные представления известных дифференциальных форм dV , ω_w^{n-1} , $d\theta$.
- 6.9. Для каждой вещественной $(n-1)$ -формы ω на U имеется ровно одно векторное поле $\mathbf{w} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $\omega = \omega_{\mathbf{w}}^{n-1}$.

Определение 12. Говорят, что внешняя дифференциальная форма ω является *внешним произведением* дифференциальных форм α и β , если

$$\omega(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x). \quad (37)$$

Здесь $\wedge$ — операция внешнего произведения форм, см. определение 4.

- 6.10. Доказать, что внешнее умножение дифференциальных форм
- а) ассоциативно,
 - б) дистрибутивно,
 - в) антикоммутативно: $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$, где k, l — степени этих форм.
- 6.11. Внешним произведением форм $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ и $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$ будет форма $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$.
- 6.12. Вывести формулу для координатного представления внешнего произведения: форма ω является *внешним произведением* форм $\alpha(x) = \sum_I a_I(x) dx_I$ и $\beta(x) = \sum_J b_J(x) dx_J$ и пишут $\omega = \alpha \wedge \beta$, если

$$\omega(x) = \sum_{I,J} a_I(x) b_J(x) dx_I \wedge dx_J.$$

Если α — 0-форма (функция), то $\alpha \wedge \beta = \alpha \cdot \beta$.

- 6.13. Пусть дано векторное поле $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Найти координатное представление для внешнего произведения $\omega_{\mathbf{w}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{w}}^{n-1}$.
- 6.14. Показать, что если на k -мерном многообразии $\mathcal{M}$ существует всюду отличная от нуля k -форма, то $\mathcal{M}$ ориентируемо.

6.2. ВНЕШНЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ И ЕГО СВОЙСТВА.

Определение 13. Операция *внешнего дифференцирования* для k -формы $\omega = \sum_I a_I dx_I$ в координатах $(x_1, \dots, x_n)$ определяется как

$$d\omega(x) = \sum_I da_I(x) \wedge dx_I, \quad (38)$$

где $da_I(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_I}{\partial x_i}(x) dx_i$ — первый дифференциал функции a_I (функции $a_I : U \rightarrow \mathbb{R}$ предполагаются дифференцируемыми).

6.15. Доказать, что внешний дифференциал k -формы ω является $(k+1)$ -формой.

6.16. Найдите координатную запись формы $\omega = d(f dx + g dy)$ и заметьте, что формула Грина может быть записана в виде:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

6.17. Докажите **свойства внешнего дифференцирования**:

- 1) Если $\omega \in \mathcal{F}_r^k(U)$, то $d\omega \in \mathcal{F}_{r-1}^{k+1}(U)$, $r \geq 1$.
- 2) *Линейность*: $d(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 d\omega_1 + \lambda_2 d\omega_2$.
- 3) *Формулу Лейбница*: $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$, где k — степень α .
- 4) *Формулу Пуанкаре*: $d^2 = d \circ d = 0$, точнее: $d(d\omega) = 0$ на множестве, где все коэффициенты формы ω дважды дифференцируемы. (Это правило является иной формой теоремы о равенстве вторых смешанных производных.)

6.18. Показать, что если $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, то $d(fg) = f dg + g df$.

6.19. Проверить, что дифференциал внешней формы

$$\begin{aligned} \omega = & [f(x_1) + g(x_2) + f(x_1)g(x_2)] dx_1 \wedge dx_2 + [f(x_1) - u(x_3)] dx_1 \wedge dx_3 \\ & + [f(x_1) + v(x_4)] dx_1 \wedge dx_4 - [g(x_2) + u(x_3)] dx_2 \wedge dx_3 \\ & + [v(x_4) - g(x_2)] dx_2 \wedge dx_4 + [u(x_3) + v(x_4) + u(x_3)v(x_4)] dx_3 \wedge dx_4, \end{aligned}$$

равен нулю (Здесь f, g, u, v — дифференцируемые функции, определенные всюду в $\mathbb{R}$.)

6.20. Пусть

$$\omega(x) = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Доказать, что $d\omega(x) = 0$ Построить форму φ степени 1, определенную на полупространстве $z > 0$ и такую, что $\omega = d\varphi$. Показать, что не существует формы φ степени 1 в области $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ такой, что $\omega = d\varphi$.

УКАЗАНИЕ. Действовать аналогично случаю задачи 1.158.

6.3. ПЕРЕНОС ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ k -ФОРМ.

Определение 14. Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : U \rightarrow V$ — гладкое отображение и $k \in \{0, 1, \dots\}$. Каждой k -форме ω на множестве V сопоставим k -форму $\varphi^*\omega$, определяемую следующим образом:

для каждой точки $x \in U$ и любых векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$ положим

$$\varphi^*\omega(x)\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle = \omega(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle \mathbf{v}_1 \rangle, d\varphi(x)\langle \mathbf{v}_2 \rangle, \dots, d\varphi(x)\langle \mathbf{v}_k \rangle \rangle.$$

Тем самым задано отображение

$$\varphi^* : \mathcal{F}^k(V, \mathbb{E}) \rightarrow \mathcal{F}^k(U, \mathbb{E}),$$

называемое *операцией переноса* (замены переменных).

6.21. Докажите **свойства операции переноса**:

1) **Аддитивность**: $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2$ для любых форм $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{F}^k(V, \mathbb{E})$.

2) **Мультипликативность**: если $\omega = \alpha \wedge \beta$, то $\varphi^*\omega = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$.

3) **Закон композиции**: $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, т. е. $(\psi \circ \varphi)^*\omega = \varphi^*(\psi^*\omega)$ для любых гладких отображений $\varphi : U \rightarrow V$, $\psi : V \rightarrow W \subset \mathbb{R}^q$ и формы $\omega \in \mathcal{F}^k(W, \mathbb{E})$.

4) **Запись в координатах**: если преобразование φ задано формулами

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_m),$$

то для каждой k -формы

$$\omega(y) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(y) dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$$

имеет место равенство

$$\varphi^* \omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(\varphi(x)) d\varphi_{i_1}(x) \wedge d\varphi_{i_2}(x) \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}(x),$$

где $d\varphi_i(x)$ — первый дифференциал координатной функции φ_i в точке x .

Иными словами: операция переноса форм, заданных в координатах, осуществляется путём формальной замены переменных.

5) *Перестановочность с дифференциалом*: $\varphi^* d\omega = d\varphi^* \omega$ для каждой формы $\omega \in \mathcal{F}^k(V, \mathbb{E})$ с гладкими коэффициентами.

- 6.22. Докажите, что операция внешнего дифференцирования не зависит от выбора системы координат.
- 6.23. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Показать, что $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ и $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
- 6.24. Если ω — форма класса C^r , а φ — преобразование класса C^{r+1} , то $\varphi^* \omega$ является формой класса C^r .
- 6.25. Пусть $\varphi: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — постоянное отображение, ω^k — дифференциальная k -форма в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что $\varphi^* \omega^k \equiv 0$.
- 6.26. Рассмотрим на сфере $S = S(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ форму объема dV , принимающую значение $dV(x) \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle = \det(x, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ в точке $x \in S$ на векторах $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ касательного пространства $T_x S$.
Доказать, что форма Гаусса в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ совпадает с формой $\varphi^* \omega$, где отображение $\varphi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S$ задается формулой $\varphi(x) = \frac{x}{|x|}$.
(Здесь $|x|$ — евклидова норма вектора x .)
- 6.27. Для формы $\omega = x dy \wedge dz - 2zf(y) dx \wedge dy + yf(y) dz \wedge dx$, где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(1) = 1$, определить те f , для которых
а) $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$,
б) $d\omega = 0$.

- 6.28. Пусть $\omega = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} a_{ij} dx_i \wedge dx_j$ — внешняя форма степени 2 в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, $a_{ij} = -a_{ji}$. Тогда

$$\underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{(n \text{ множителей})} = H dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2n},$$

где $H = \text{const.}$. Доказать, что $H = \sqrt{\det \|a_{ij}\|}$.

- 6.29. В пространстве $\mathbb{R}^n$ дана внешняя дифференциальная форма

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 + \cdots + dx^{2k-1} \wedge dx^{2k},$$

где $2k \leq n$. Определим по индукции последовательность форм $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j, \dots$, полагая $\omega_1 = \omega$, и если ω_j определена, то $\omega_{j+1} = \omega_j \wedge \omega$, так, что $\omega_j = \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (j множителей). Вычислить форму ω_k . Доказать, что $\omega_j = 0$ при $j > k$.

Определение операции внешнего дифференцирования на многообразии. Если ω форма степени k на n -мерном многообразии $\mathcal{M}$, (U, φ) — локальная система координат в окрестности точки $x \in \mathcal{M}$, то для векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1} \in T_x \mathcal{M}$ определим

$$d\omega(x) \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} d(\varphi^{-1*} \omega) \langle \varphi_* \mathbf{v}_1, \dots, \varphi_* \mathbf{v}_{k+1} \rangle. \quad (39)$$

Напомним, что $\varphi_* \mathbf{v}_i = D\varphi(x) \langle \mathbf{v}_i \rangle$.

- 6.30. Проверить, что операция (39) внешнего дифференцирования на многообразии корректно определена, т. е. не зависит от выбора системы координат.

- 6.31. Дано отображение $\varphi : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ области $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ пространства $\mathbb{R}^2$ в себя. Найти перенесенную форму $\varphi^* \omega$, если

$$\omega = x dy + y dx, \quad \omega = x dy - y dx, \quad \omega = (x^2 - y^2) dy - 2xy dx.$$

- 6.32. Дана дифференциальная форма $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$. Определить форму $\varphi^* \omega$ для отображений:

$$\begin{aligned} \varphi : (u, v) &\mapsto (e^u \cos v, e^u \sin v), \\ \varphi : (u, v) &\mapsto \left(\frac{e^v + e^{-v}}{2} \cos u, -\frac{e^v - e^{-v}}{2} \sin u \right), \\ \varphi : (u, v) &\mapsto (u^2 - v^2, 2uv). \end{aligned}$$

- 6.33. Пространство $\mathbb{R}^{2n}$ будем рассматривать как произведение n экземпляров пространства $\mathbb{R}^2$. Пусть T — единичная окружность в $\mathbb{R}^2$. Множество

$$T^n = \underbrace{T \times T \times \cdots \times T}_{n \text{ раз}}$$

называется n -мерным тором. Показать, что n -мерный тор в $\mathbb{R}^{2n}$ может быть определен системой уравнений:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3^2 + x_4^2 = 1, \dots, \quad x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 1.$$

Определим отображение

$$\begin{aligned} r : (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) &\in \mathbb{R}^n \\ &\mapsto (\cos \varphi_1, \sin \varphi_1, \cos \varphi_2, \sin \varphi_2, \dots, \cos \varphi_n, \sin \varphi_n). \end{aligned}$$

Показать, что r регулярно в каждой точке $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{R}^n$ и отображает $\mathbb{R}^n$ на T^n .

Каким должен быть n -мерный интервал

$$I = (\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2) \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n)$$

для того, чтобы ограничение r на I представляло собой параметризацию в T^n ?

Найти перенесенную форму $r^*\omega$, если

$$\begin{aligned} \omega &= dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n + dx^{n+1} \wedge dx^{n+2} \wedge \cdots \wedge dx^{2n}, \\ \omega &= dx^1 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^{2n-1} + dx^2 \wedge dx^4 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}, \\ \omega &= x^2 x^4 \dots x^{2n} dx^1 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^{2n-1} \\ &\quad + x^1 x^3 \dots x^{2n-1} dx^2 \wedge dx^4 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}. \end{aligned}$$

- 6.34. Пусть $\omega \neq 0$ — внешняя форма степени 1 в $\mathbb{R}^n$, α — произвольная внешняя форма в $\mathbb{R}^n$. Показать, что для существования формы β такой, что $\alpha = \omega \wedge \beta$, необходимо и достаточно выполнения равенства $\omega \wedge \alpha = 0$.

- 6.35. Дано отображение $\varphi : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (y_1, y_2, y_3, y_4)$ пространства $\mathbb{R}^4$ в себя, где

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 x_3 x_4, & y_2 &= x_2 - x_1 x_3 x_4, \\ y_3 &= x_3 - x_1 x_2 x_4, & y_4 &= x_4 - x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Определить перенесенную форму $\varphi^*\omega$, если

$$\begin{aligned}\omega &= y_1 dy_1 + y_2 dy_2 + y_3 dy_3 + y_4 dy_4, \\ \omega &= dy_1 \wedge dy_2 + dy_3 \wedge dy_4, \\ \omega &= dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge dy_4.\end{aligned}$$

- 6.36. Пусть φ есть отображение $x \mapsto y = \frac{x}{|x|}$ множества $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ на сферу $S(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, и

$$\omega = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} y_k dy_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy_k} \wedge \dots \wedge dy_n$$

— $(n-1)$ -форма на сфере $S(0, 1)$. Найти форму $\varphi^*\omega$. Доказать, что $d(\varphi^*\omega) = 0$.

- 6.37. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, ω — форма степени k класса C^r , определенная в V , и $f : U \rightarrow V$ — отображение класса C^{r+1} . Доказать, что если множество $f(U)$ содержится в некотором k -мерном многообразии F класса C^{r+1} , то дифференциал формы $f^*\omega$ равен нулю.

- 6.38. Дана форма $\omega = a dy \wedge dz + b dz \wedge dx + c dx \wedge dy$, где a, b, c — постоянные. Определить все линейные преобразования $\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, сохраняющие эту форму: $\lambda^*\omega = \omega$.

7. Интегрирование дифференциальных форм по цепям

7.1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ n -ФОРМ В $\mathbb{R}^n$.

Фиксируем ориентацию в $\mathbb{R}^n$ и базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, согласованный с ориентацией (см. раздел 3.3). Тогда в системе координат $(x_1, \dots, x_n)$ n -форма ω^n на $\mathbb{R}^n$ может быть записана в виде $\omega^n(x) = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Пусть U — открытое множество $\mathbb{R}^n$, ориентация U определяется ориентацией $\mathbb{R}^n$. Определим в этом случае интеграл от ω^n по ориентированному множеству U как

$$\int_U \omega^n = \int_U f(x) dx.$$

7.1. Докажите, что $\int_U \omega^n$ зависит от ω^n линейно.

7.2. Докажите, что если $U = U_1 + U_2 + \Sigma$, где U_1, U_2 — открытые множества, а $|\Sigma| = 0$, то

$$\int_U \omega^n = \int_{U_1} \omega^n + \int_{U_2} \omega^n.$$

Говорят, что диффеоморфизм $\varphi : U \rightarrow V$ *сохраняет ориентацию*, если $\det d\varphi(x) > 0$ для всех точек $x \in U$.

7.3. Доказать, что если диффеоморфизм $\varphi : U \rightarrow V$ сохраняет ориентацию, то обратный диффеоморфизм $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ также сохраняет ориентацию.

7.4. Доказать, что если диффеоморфизмы $\varphi : U \rightarrow V$ и $\psi : V \rightarrow W$ сохраняют ориентацию, то их композиция $\psi \circ \varphi : U \rightarrow W$ также сохраняет ориентацию.

7.5. Пусть U, V — открытые множества в $\mathbb{R}^n$, а $\varphi : U \rightarrow V$ диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию. Тогда для любой дифференциальной n -формы ω в V справедливо равенство

$$\int_U \varphi^* \omega = \int_V \omega.$$

УКАЗАНИЕ: Проверить, что для формы $\omega^n(y) = f(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ в V и гладкого диффеоморфизма $\varphi : U \rightarrow V$ справедливо $\varphi^* \omega^n(x) = f(\varphi(x)) \det d\varphi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, $x \in U$, и применить формулу замены переменной.

7.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ n -ФОРМ ПО ЦЕПЯМ. ГРАНИЦА ЦЕПИ. ФОРМУЛА СТОКСА — ПУАНКАРЕ.

Пусть D — ограниченный *выпуклый полиэдр* (многогранник) в $\mathbb{R}^n$, т. е. ограниченное пересечение конечного числа полупространств с непустой внутренней частью в $\mathbb{R}^n$. Роль «пути интегрирования» играет *сингулярный n -мерный полиэдр* в k -мерном дифференцируемом многообразии M , представленный тройкой $\sigma = (D, f, Or)$, в которой

- 1) D — выпуклый полиэдр,
- 2) $f : D \rightarrow \mathcal{M}$ — дифференцируемое отображение,
- 3) Or — ориентация в $\mathbb{R}^n$.

Пусть на $\mathcal{M}$ задана n -форма ω , $n \leq k$. *Интегралом n -формы ω по сингулярному n -мерному полиэдру* называется интеграл от перенесенной формы по полиэдру D :

$$\int_{\sigma} \omega = \int_D f^* \omega. \quad (40)$$

7.6. *Линейность*: показать, что интеграл линейно зависит от формы:

$$\int_{\sigma} \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 = \lambda_1 \int_{\sigma} \omega_1 + \lambda_2 \int_{\sigma} \omega_2.$$

Сингулярный n -мерный полиэдр, отличающийся от данного σ лишь ориентацией, называется отрицательным по отношению к σ и обозначается символом $-\sigma$ или $-1 \cdot \sigma$.

7.7. *Зависимость от ориентации*: показать, что при смене ориентации интеграл меняет знак:

$$\int_{-\sigma} \omega = - \int_{\sigma} \omega.$$

Модулем k -формы $\omega(x) = \sum_I a_I(x) dx_I$ называется функция

$$|\omega(x)| = \left(\sum_I |a_I(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

7.8. *Ограниченность*: если форма ω на многообразии $\mathcal{M}$ ограничена $|\omega(x)| \leq C$ для всех $x \in \mathcal{M}$, то

$$\left| \int_{\sigma} \omega \right| \leq C \int_{f(D)} \mathcal{N}(y, f, D) d\mathcal{H}^n(y).$$

7.9. *Независимость от способа параметризации.* Пусть c — сингулярный n -мерный полиэдр и $p: D \rightarrow D'$ — такое взаимно-однозначное отображение, что $p(D) = D'$ и $\det Dp(x) \geq 0$ для всех $x \in D$. Показать, что

$$\int_c \omega = \int_{c \circ p} \omega$$

для любой k -формы ω .

Цепью размерности n на многообразии $\mathcal{M}$ называется конечный набор $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ сингулярных n -мерных полиэдров в $\mathcal{M}$ и целых чисел $m_1, \dots, m_l$, называемых множителями. Цепь обозначается символом

$$c_n = m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 + \dots + m_l \sigma_l.$$

На совокупности всех n -мерных цепей естественно рассматривать следующие отождествления:

$$\begin{aligned} m_1 \sigma + m_2 \sigma &= (m_1 + m_2) \sigma, \\ m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 &= m_2 \sigma_2 + m_1 \sigma_1, \quad 0 \cdot \sigma = 0, \quad c_n + 0 = c_n. \end{aligned}$$

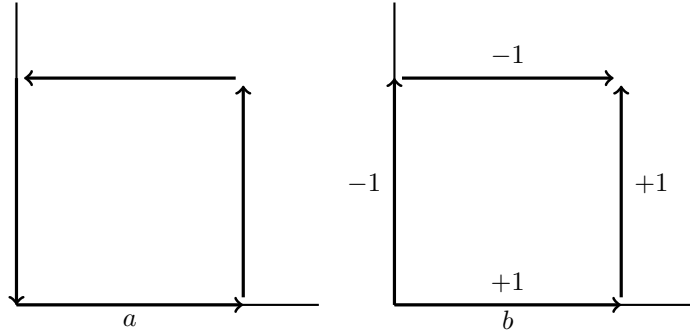


Рис. 7.1: Пример одномерной цепи

7.10. Показать, что совокупность всех n -цепей в $\mathcal{M}$ образует коммутативную группу, если определить сложение цепей c_n и c'_n по формуле:

$$\begin{aligned} c_n + c'_n &= (m_1 \sigma_1 + \dots + m_l \sigma_l) + (m'_1 \sigma'_1 + \dots + m'_l \sigma'_l) \\ &= m_1 \sigma_1 + \dots + m_l \sigma_l + m'_1 \sigma'_1 + \dots + m'_l \sigma'_l. \end{aligned}$$

7.11. Пусть $\mathcal{S}$ — множество всех сингулярных n -мерных кубов и $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел. Сингулярная n -мерная цепь есть такая функция $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Z}$, что $f(c) = 0$ для всех, кроме конечного множества сингулярных n -мерных кубов c . Определим $f + g$ и nf формулами $(f + g)(c) = f(c) + g(c)$ и $(nf)(c) = n f(c)$. Показать, что $f + g$ и nf принадлежат $\mathcal{S}$. Для всякого $c \in \mathcal{S}$ мы будем обозначать через c также такую функцию f , что $f(c) = 1$ и $f(c') = 0$ для всех $c' \neq c$. Показать, что всякая сингулярная n -мерная цепь f может быть записана в виде $a_1 c_1 + \dots + a_k c_k$ с некоторыми целыми коэффициентами $a_1, \dots, a_k$ и сингулярными n -мерными кубами $c_1, \dots, c_k$.

Интегралом от n -формы ω по n -мерной цепи в многообразии M называется сумма интегралов по сингулярным n -мерным полиэдрам, входящим в цепь с учетом их кратностей: если $c_n = m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 + \dots + m_l \sigma_l$, то

$$\int_{c_n} \omega^n = \sum_{i=1}^l m_i \int_{\sigma_i} \omega^n. \quad (41)$$

Таким образом, интегрирование придаёт алгебраический характер действиям с областями интегрирования.

7.12. Показать, что интеграл линейно зависит от формы:

$$\int_{c_n} \omega_1^n + \omega_2^n = \int_{c_n} \omega_1^n + \int_{c_n} \omega_2^n.$$

7.13. Показать, что для фиксированной формы ω^n интегрирование определяет гомоморфизм из абелевой группы цепей в $\mathbb{R}$.

7.14. В $\mathbb{R}^4$ рассмотрим поверхность F , определяемую системой уравнений

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2, \quad x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2.$$

Показать, что F есть двумерный тор. Пусть Σ — часть сферы $S^3(\sqrt{2}) = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2\}$, в которой $x_1^2 + x_2^2 > x_3^2 + x_4^2$. Доказать, что Σ есть трехмерное многообразие с краем и $F = \partial \Sigma$. Ориентируем Σ , выбирая в качестве положительной внешнюю нормаль шара $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 2$. Определить индуцированную ориентацию F (т. е. указать хотя бы одну правую карту F).

Построить касательные плоскости многообразий Σ и F в точке $(0, 1, 0, 1)$. Указать в этой точке правые реперы многообразий Σ и F . Найти интегралы по поверхности F следующих форм:

$$\begin{aligned}\omega &= x_3 x_4 dx_1 \wedge dx_2 - x_2 x_4 dx_1 \wedge dx_3 + x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_4 \\ &\quad + x_1 x_4 dx_2 \wedge dx_3 - x_1 x_3 dx_2 \wedge dx_4 + x_1 x_2 dx_3 \wedge dx_4; \\ \omega &= x_3^2 x_4^2 dx_1 \wedge dx_2 - x_2^2 x_4^2 dx_1 \wedge dx_3 + x_2^2 x_3^2 dx_1 \wedge dx_4 \\ &\quad + x_1^2 x_4^2 dx_2 \wedge dx_3 - x_1^2 x_3^2 dx_2 \wedge dx_4 + x_1^2 x_2^2 dx_3 \wedge dx_4.\end{aligned}$$

Граница цепи. Граница n -цепи есть $(n - 1)$ -цепь, определяемая таким образом, что сопоставление n -цепи его границы является *гомоморфизмом* абелевой группы n -цепей в абелеву группу $(n - 1)$ -цепей. Поэтому достаточно определить границу сингулярного n -мерного полиэдра σ в $\mathcal{M}$.

Пусть D — ориентированный ограниченный выпуклый полиэдр в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью в $\mathbb{R}^n$. *Границей* D называется $(n - 1)$ -мерная цепь ∂D в $\mathbb{R}^n$:

$$\partial D = \sum_i \sigma_i, \quad (42)$$

где $\sigma_i = (D_i, f_i, Or_i)$ — сингулярный $(n - 1)$ -мерный полиэдр, элементами которого являются

- 1) D_i — $(n - 1)$ -мерная грань многогранника D ,
- 2) $f_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вложение грани D_i в $\mathbb{R}^n$,
- 3) Or_i — ориентация грани D_i , выбираемая по следующему правилу. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ориентирующий базис для $\mathbb{R}^n$. Выберем произвольную внутреннюю точку в D_i и отложим от нее вектор n_i внешней нормали к многограннику D . (Почему надо выбирать внутреннюю точку?) Ориентирующим базисом для грани D_i будет такой набор $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ линейно независимых векторов в D_i , для которого набор $n_i, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ будет базисом в $\mathbb{R}^n$, ориентированным так же, как и $e_1, e_2, \dots, e_n$.

7.15. Показать, что ориентация грани D_i не зависит от выбора внутренней точки.

Если теперь $\sigma = (D, f, Or)$ — сингулярный n -мерный полиэдр в $\mathcal{M}$, то его граница

$$\partial \sigma = \sum_i \sigma_i, \quad (43)$$

где $\sigma_i = (D_i, f_i, Or_i)$ — сингулярный $(n-1)$ -мерный полиэдр, элементами которого являются

- 1) D_i — $(n-1)$ -мерная грань многогранника D ,
- 2) Or_i — ориентация грани D_i , выбранная согласно приведенному выше правилу,
- 3) $f_i : D_i \rightarrow \mathbb{M}$ — ограничение отображения $f : D \rightarrow \mathcal{M}$ на грань D_i .

Границей цепи ∂c_n n -мерной цепи $c_n = m_1\sigma_1 + \dots + m_r\sigma_r$ в $\mathcal{M}$ называется сумма границ сингулярных n -мерных полиэдров σ_i , образующих цепь c_n , с их кратностями:

$$\partial c_n = \partial(m_1\sigma_1 + \dots + m_r\sigma_r) = m_1\partial\sigma_1 + \dots + m_r\partial\sigma_r. \quad (44)$$

Формула Стокса — Пуанкаре. Пусть c — произвольная n -цепь в многообразии $\mathcal{M}$, а ω — любая $(n-1)$ -форма на многообразии $\mathcal{M}$. Тогда

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega. \quad (45)$$

В следующей серии задач приводится доказательство формулы (45).

7.16. Достаточно доказать формулу (45) для одного n -мерного сингулярного полиэдра $\sigma = (D, f, Or)$.

7.17. Достаточно доказать формулу (45) для одного n -мерного сингулярного полиэдра $\sigma = (D, \text{Id}, Or)$ в $\mathbb{R}^n$.

Множество $S \subset \mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_n \leq \dots \leq x_1 \leq 1\}$ называется n -мерным *стандартным симплексом*.

7.18. Доказать, что стандартный симплекс в $\mathbb{R}^n$ — выпуклое множество.

7.19. Доказать, что стандартный симплекс в $\mathbb{R}^n$ совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин.

Симплексом в $\mathbb{R}^n$ называется n -мерный полиэдр, имеющий $n+1$ вершину.

7.20. Показать, что всякий симплекс в $\mathbb{R}^n$ может быть получен как образ стандартного симплекса при некотором аффинном преобразовании.

- 7.21. Показать, что всякий n -мерный сингулярный полиэдр является суммой конечного числа n -мерных сингулярных симплексов.
- 7.22. Достаточно доказать формулу (45) для одного n -мерного сингулярного симплекса
- 7.23. Достаточно доказать формулу (45) для одного n -мерного сингулярного куба (Q, f, Or) , где $Q = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$.

УКАЗАНИЕ: Показать, что n -мерный ориентированный куб можно дифференцируемо отобразить на n -мерный ориентированный симплекс так, что

1) внутренность куба диффеоморфно и с сохранением ориентации переходит во внутренность симплекса;

2) внутренности некоторых $(k-1)$ -мерных граней куба диффеоморфно и с сохранением ориентации переходят во внутренности граней симплекса; образы остальных $(k-1)$ -мерных граней куба лежат в $(k-2)$ -мерных гранях симплекса.

Например, для $n = 2$ такое отображение куба $\{0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$ на треугольник $\{0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1\}$ можно осуществить посредством формул $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1 x_2$.

Формула (45) для симплекса вытекает из таковой для куба.

- 7.24. Доказать формулу (45) для n -мерного параллелепипеда.

РЕШЕНИЕ: Формула (45) в размерностях $n = 1, 2$ совпадает с формулой Ньютона — Лейбница и формулой Грина, соответственно.

Рассмотрим n -мерный параллелепипед $Q = \{x = (x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_i \leq d_i, 0 < d_i < \infty, i = 1, \dots, n\}$ со стандартной ориентацией, т. е. стандартный базис $(e_1, \dots, e_n)$ задает положительную ориентацию, и $(n-1)$ -форму

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

где $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$

Докажем формулу

$$\boxed{\int_{\partial Q} \omega = \int_Q \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx.} \quad (46)$$

Разобьем доказательство на несколько шагов.

1) Фиксируем слагаемое

$$(-1)^{i-1} a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

и докажем, что

$$\int_{\partial Q} (-1)^{i-1} a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n = \int_Q \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx. \quad (47)$$

Рассмотрим $(n-1)$ -мерный параллелепипед $D = \{y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : 0 \leq y_k \leq d_k, k = 1, \dots, i-1; 0 \leq y_k \leq d_{k+1}, k = i, \dots, n-1\}$. Здесь удобно рассматривать $\mathbb{R}^{n-1}$ как координатную плоскость $x_i = 0$ в $\mathbb{R}^n$, а набор $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ векторов стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$ отождествлять очевидным образом с векторами стандартного базиса $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-1}$ в $\mathbb{R}^{n-1}$: $\mathbf{f}_k \leftrightarrow \mathbf{e}_k$ при $1 \leq k < i$ и $\mathbf{f}_k \leftrightarrow \mathbf{e}_{k-1}$ при $i \leq k \leq n-1$. При этом

$$D \ni y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \leftrightarrow \sum_{j=1}^{i-1} y_j \mathbf{e}_j + \sum_{j=i}^{n-1} y_j \mathbf{e}_{j+1}.$$

Выберем следующие параметризации «нижнего» основания $U = \{x \in Q : x_i = 0\}$ и «верхнего» основания $H = \{x \in Q : x_i = d_i\}$ (см. рис. 7.2):

$$\varphi_{i,U} : D \ni y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \mapsto (y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_i, \dots, y_{n-1}) \in U, \quad (48)$$

$$\varphi_{i,H} : D \ni y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \mapsto (y_1, \dots, y_{i-1}, d_i, y_i, \dots, y_{n-1}) \in H. \quad (49)$$

Аналогичная параметризация φ_k любой из «боковых» граней приводит к тому, что одна из переменных $x_k, k \neq i$, неизбежно будет постоянной. Поэтому для боковых граней выражение $\varphi_k^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n)$ равно нулю.

2) Заметим, что вектором внешней нормали для верхнего основания H будет вектор $\mathbf{e}_i$, а вектором внешней нормали для нижнего основания U будет вектор $-\mathbf{e}_i$. Если μ — стандартная ориентация в $\mathbb{R}^{n-1}$, то по правилу ориентирования граней индуцированная ориентация грани H совпадает с μ , если $i-1$ — четное число, и противоположна ей, если $i-1$ — нечетное число. Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_{i,H}^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n) \\ = (-1)^{i-1} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{i-1} \wedge dy_i \wedge \dots \wedge dy_{n-1}. \end{aligned}$$

Аналогично индуцированная ориентация грани U противоположна μ , если $i-1$ — четное число, и совпадает с ней, если $i-1$ — нечетное

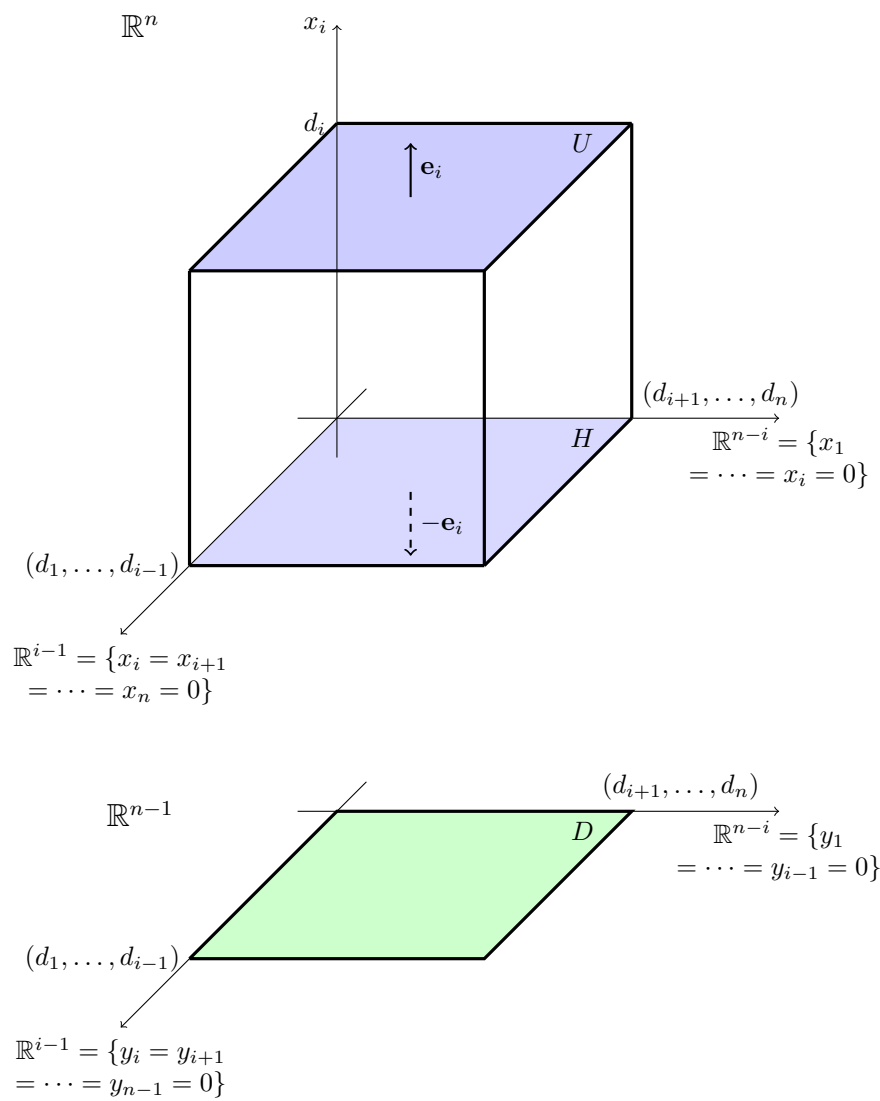


Рис. 7.2: Формула Стокса

число. Поэтому

$$\begin{aligned}\varphi_{i,U}^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n) \\ = -(-1)^{i-1} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{i-1} \wedge dy_i \wedge \dots \wedge dy_{n-1}.\end{aligned}$$

3) По определению интеграла с учетом ориентации имеем

$$\begin{aligned}\int_{\partial Q} (-1)^{i-1} a_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n \\ = \int_D (a_i(y_1, \dots, y_{i-1}, d_i, y_i, \dots, y_{n-1}) \\ - a_i(y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_i, \dots, y_{n-1})) dy_1 \dots dy_{i-1} dy_i \dots dy_{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{По формуле Ньютона – Лейбница} \\ \equiv \int_U dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \int_0^{d_i} \frac{\partial a_i}{\partial dx_i}(x) dx_i \\ \text{По теореме Фубини} \\ \equiv \int_Q \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx.\end{aligned}$$

Таким образом, (47) доказано, а вместе с этим доказано и (46).

7.25. Применяя вышеизложенный метод, привести прямое доказательство формулы Стокса для симплекса.

7.26. Определим для заданных $R > 0$ и $n \neq 0$ ориентированный путь $c_{R,n}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ формулой $c_{R,n}(t) = (R \cos 2\pi nt, R \sin 2\pi nt)$. Показать, что существует сингулярный двумерный полиэдр $c: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, для которого $c_{R_1,n} - c_{R_2,t} = \partial c$.

7.27. Показать, что если $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ — сингулярный путь, у которого $c(0) = c(1)$, то существует такое целое n , что $c - c_{1,n} = \partial c^2$, для некоторого двумерного полиэдра c^2 .

УКАЗАНИЕ: Сначала разбить $[0, 1]$ так, чтобы каждое $c([t_{i-1}, t_i])$ лежало по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через 0.

7.28. Пусть $d\theta$ — форма Гаусса. Показать, что $\int_{c_{R,n}} d\theta = 2\pi n$, и, используя теорему Стокса, вывести отсюда, что $c_{R,n} \neq \partial c$ для всякой

двумерной цепи c в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (напомним, что $c_{R,n}$ было определено в задаче 7.26).

- 7.29. Показать, что целое n в задаче 7.27 единственно. Это число называется *порядком* кривой c относительно 0.
- 7.30. Напомним, что $\mathbb{C}$ обозначает множество всех комплексных чисел. Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ задано равенством $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, где $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Определим сингулярный путь $c_{R,f}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ формулой $c_{R,f} = f \circ c_{R,1}$ и сингулярный двумерный полиэдр равенством $c(s, t) = t c_{R,n}(s) + (1 - t) c_{R,f}(s)$.
- а) Показать, что $\partial c = c_{R,f} - c_{R,n}$ и что $c([0, 1] \times [0, 1]) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, если R достаточно велико.
- б) Используя задачу 7.28, доказать основную теорему алгебры: всякий полином $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ с коэффициентами $a_i \in \mathbb{C}$ имеет корень в $\mathbb{C}$.
- 7.31. Пусть $\omega = f dx$ — форма первой степени на $[0, 1]$ и $f(0) = f(1)$. Показать, что существует единственное число λ , такое, что $\omega - \lambda dx = dg$ для некоторой функции g , у которой $g(0) = g(1)$.

УКАЗАНИЕ: Для нахождения λ проинтегрировать $\omega - \lambda dx = dg$ на $[0, 1]$.

- 7.32. Пусть ω — замкнутая форма первой степени на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Доказать, что

$$\omega = \lambda d\theta + dg$$

для некоторых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$.

УКАЗАНИЕ: Показать, что все числа λ_R в $c_{R^*}(\omega) = \lambda_R dx + d(g_R)$ имеют одно и то же значение λ .

- 7.33. Показать, что если $\omega \neq 0$, то существует цепь c , для которой $\int_c \omega \neq 0$. Используя этот факт, теорему Стокса и равенство $\partial^2 = 0$, доказать, что $d^2 = 0$.

7.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ НА МНОГООБРАЗИЯХ. ФОРМУЛА СТОКСА.

7.34. Пусть $\varphi, \psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$, ω^k — дифференциальная k -форма в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$ — компактное ориентируемое дифференцируемое k -мерное многообразие, $k \leq m \leq n$. Пусть $\varphi(x) = \psi(x)$ для всех $x \in \mathcal{M}$. Докажите равенство $\int_{\partial \mathcal{M}} \varphi^* \omega^k = \int_{\partial \mathcal{M}} \psi^* \omega^k$.

7.35. Доказать, что если ω — $(k-1)$ -форма на компактном k -мерном многообразии $\mathcal{M}$, то $\int_{\mathcal{M}} d\omega = 0$ при условии, что $\partial \mathcal{M} = \emptyset$. Привести контрпример с некомпактным $\mathcal{M}$.

7.36. Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^n$ — компактные n -мерные многообразия с краем, причем $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1 \setminus \partial \mathcal{M}_1$, и ω — $(n-1)$ -форма на $\mathcal{M}_1$. Доказать, что если $d\omega = 0$, то

$$\int_{\partial \mathcal{M}_1} \omega = \int_{\partial \mathcal{M}_2} \omega,$$

где $\partial \mathcal{M}_1$ и $\partial \mathcal{M}_2$ наделены ориентациями, индуцированными стандартными ориентациями многообразий $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$.

УКАЗАНИЕ. Найти такое многообразие с краем $\mathcal{M}$, что $\partial \mathcal{M} = \partial \mathcal{M}_1 \cup \partial \mathcal{M}_2$ и индуцированная ориентация на $\partial \mathcal{M}$ совпадает на $\partial \mathcal{M}_1$ с ориентацией $\partial \mathcal{M}_1$ и противоположна на $\partial \mathcal{M}_2$ ориентации $\partial \mathcal{M}_2$.

7.37. Обобщить теорему Гаусса — Остроградского на случай n -мерного многообразия с краем в $\mathbb{R}^n$.

7.38. Применяя обобщенную теорему Гаусса — Остроградского к множеству $M = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq a\}$ и $F(x) = x_x$, выразить $\mathcal{H}^{n-1}$ -меру сферы $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ через $\mathcal{H}^n$ -меру шара $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$.

8. Замкнутые и точные формы.

Форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, и *точной*, если $\omega = d\sigma$.

Понятно, что каждая точная форма замкнута: $d\omega = d^2\sigma = 0$. Обратное верно лишь в областях специального вида, например, *звездных* относительно некоторой своей точки (2-ая теорема Пуанкаре).

- 8.1. Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — дифференцируемая функция, имеющая дифференцируемую обратную $f^{-1}: f(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Предположим, что всякая замкнутая форма на $f(U)$ точна. Показать, что то же верно для U .

УКАЗАНИЕ: При $d\omega = 0$ и $f^*\omega = d\eta$ рассмотреть $(f^{-1})^*\eta$.

- 8.2. Пусть c_1, c_2 — сингулярные пути с общим началом и общим концом. Показать, что существует сингулярный двумерный полиэдр c , у которого $\partial c = c_1 - c_2 + c_3 + c_4$, где c_3 и c_4 — вырожденные пути, т. е. точки. Вывести отсюда, что если форма ω точна, то $\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$. Дать контрпример на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ для случая, когда ω лишь замкнута.

- 8.3. Показать, что если ω — такая 1-форма на подмножестве $\mathbb{R}^2$, что $\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$ для всех сингулярных путей c_1 и c_2 с общим началом и общим концом, то ω точна.

- 8.4. Пусть дифференциальная форма ω_1 — точная, ω_2 — замкнутая. Докажите, что дифференциальная форма $\omega_1 \wedge \omega_2$ точная.

- 8.5. Пусть ω — форма первой степени $f dx$ на $[0, 1]$ и $f(0) = f(1)$. Показать, что существует единственное число λ , такое, что $\omega - \lambda dx = dg$ для некоторой функции g , у которой $g(0) = g(1)$.

УКАЗАНИЕ: Для нахождения λ проинтегрировать $\omega - \lambda dx = dg$ на $[0, 1]$.

- 8.6. Пусть ω — замкнутая форма первой степени на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Доказать, что

$$\omega = \lambda d\theta + dg$$

для некоторых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть $F: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Для каждого $s \in [0, 1]$ определим $F_s: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ формулой $F_s(t) = F(s, t)$. Если каждое F_s есть замкнутая кривая, то F называют *гомотопией* между замкнутой кривой F_0 и замкнутой кривой F_1 . Пусть F и G — гомотопии между замкнутыми кривыми. Если для каждого s замкнутые кривые F_s и G_s не пересекаются, то пара (F, G) называется гомотопией между парами непересекающихся замкнутых кривых F_0, G_0 и F_1, G_1 . Интуитивно ясно, что такой гомотопии

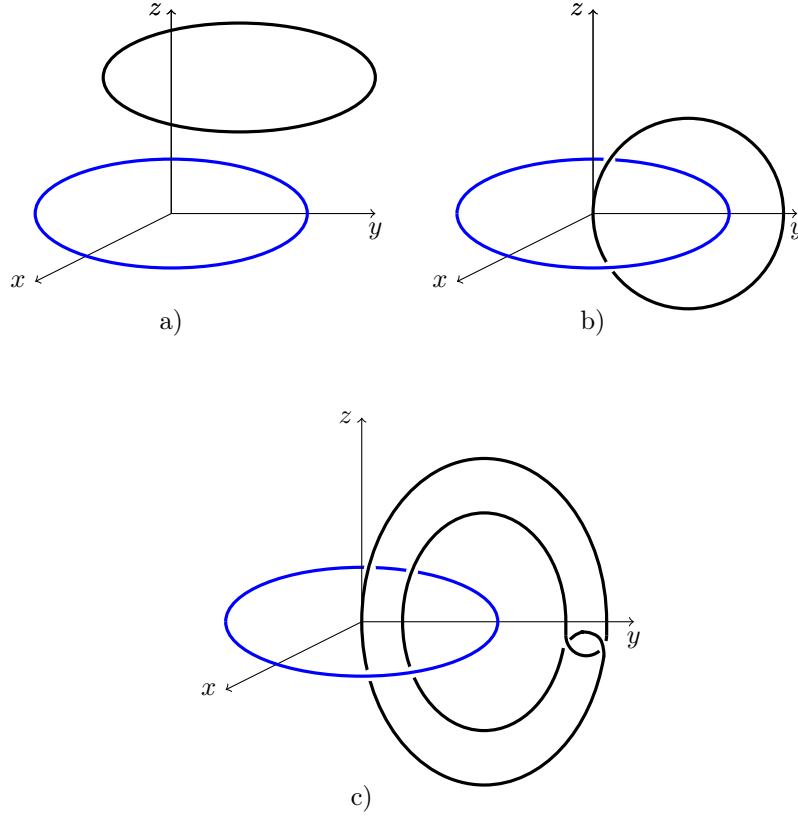


Рис. 8.1: Непересекающиеся кривые

не существует, если F_0, G_0 — пара кривых, изображенных на рисунке 8.1 а), а F_1, G_1 — пара из 8.1 б) и 8.1 с).

Пусть $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — непересекающиеся замкнутые кривые. Определим $c_{f,g}: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ формулой

$$c_{f,g}(u, v) = f(u) - g(v).$$

Если (F, G) — гомотопия между непересекающимися замкнутыми кривыми, то определим $C_{F,G}: [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ формулой

$$C_{F,G}(s, u, v) = c_{F_s, G_s}(u, v) = F(s, u) - G(s, v).$$

8.7. Показать, что $\partial C_{F,G} = c_{F_0,G_0} - c_{F_1,G_1}$.

8.8. Пусть ω — замкнутая форма второй степени на $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Показать, что

$$\int_{c_{F_0,G_0}} \omega = \int_{c_{F_1,G_1}} \omega.$$

8.9. Пусть ω — 2-форма, определенная на $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ равенством

$$\omega = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

а) Показать, что ω замкнута.

б) Показать, что

$$\omega(p)\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{w}, p)}{|p|^3}.$$

Пусть $r > 0$ и $S^2(r) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r\}$. Показать, что сужение ω на касательную плоскость к $S^2(r)$ есть элемент объема, умноженный на $\frac{1}{r^2}$, и что $\int_{S^2(r)} \omega = 4\pi$. Вывести отсюда, что форма

ω не точна. Тем не менее обозначим ω через $d\Theta$, поскольку, как мы увидим, $d\Theta$ является аналогом формы первой степени $d\theta$ на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

в) Показать, что если v_p — такой касательный вектор, что $v = \lambda p$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$, то $d\Theta(p)(v_p, w_p) = 0$ для всех w_p .

Показать, что если двумерное многообразие $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^3$ является частью обобщенного конуса, т. е. объединением отрезков лучей, исходящих из нуля, то $\int_{\mathcal{M}} d\Theta = 0$.

г) Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ — такое компактное двумерное многообразие с краем, что любой луч, исходящий из 0, пересекает $\mathcal{M}$ не более одного раза. Объединение всех исходящих из 0 лучей, пересекающих $\mathcal{M}$, образует телесный угол $C(\mathcal{M})$. За телесный угол, стягиваемый многообразием $\mathcal{M}$, принимается площадь $C(\mathcal{M}) \cap S^2$ или, что то же, площадь $C(\mathcal{M}) \cap S^2(r)$ при любом r , деленная на r^2 . Доказать, что телесный угол, стягиваемый многообразием $\mathcal{M}$,

равен $\left| \int_{\mathcal{M}} d\Theta \right|$.

УКАЗАНИЕ. выбрать $r > 0$ столь малым, чтобы существовало трехмерное многообразие с краем $\mathcal{N}$, имеющее в качестве $\partial\mathcal{N}$ объединение $\mathcal{M}$, $C(\mathcal{M}) \cap S^2(r)$ и части обобщенного конуса. (В действительности, $\mathcal{N}$ будет многообразием с углами.)

Пусть $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — непересекающиеся замкнутые кривые. Определим *коэффициент зацепления* $l(f, g)$ кривых f и g формулой

$$l(f, g) = -\frac{1}{4\pi} \int_{c_{f,g}} d\Theta.$$

8.10. Показать, что если (F, G) — гомотопия непересекающихся замкнутых кривых, то $l(F_0, G_0) = l(F_1, G_1)$.

8.11. Показать, что если $r(u, v) = |f(u) - g(v)|$, то

$$l(f, g) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{A(u, v)}{|r(u, v)|^3} du dv,$$

где

$$A = \det \begin{pmatrix} (f^1)'(u) & (f^2)'(u) & (f^3)'(u) \\ (g^1)'(v) & (g^2)'(v) & (g^3)'(v) \\ f^1(u) - g^1(v) & f^2(u) - g^2(v) & f^3(u) - g^3(v) \end{pmatrix}.$$

8.12. Показать, что если обе кривые f и g лежат в плоскости x, y , то $l(f, g) = 0$. Читатель легко может убедиться, что вычисление $l(f, g)$ для $f(u) = (\cos u, \sin u, 0)$, $g(v) = (1 + \cos v, 0, \sin v)$ с помощью приведенного выше интеграла — занятие безнадежное. Следующая задача показывает, как находить $l(f, g)$ без прямого вычисления.

Для точки $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ положим

$$d\Theta_{a,b,c} = \frac{(x-a) dy \wedge dz + (y-b) dz \wedge dx + (z-c) dx \wedge dy}{((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)^{3/2}}.$$

Далее, для компактного двумерного многообразия с краем $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^3$ и точки $(a, b, c) \notin \mathcal{M}$ положим

$$\Omega(a, b, c) = \int_{\mathcal{M}} d\Theta_{a,b,c}.$$

8.13. Пусть (a, b, c) — точка, лежащая по ту же сторону от $\mathcal{M}$, что и внешняя нормаль, и (a', b', c') — точка, лежащая по противоположную сторону. Показать, что выбирая (a, b, c) и (a', b', c') достаточно близкими, можно сделать $\Omega(a, b, c) - \Omega(a', b', c')$ сколь угодно близкими к -4π .

УКАЗАНИЕ. Сначала показать, что если $\mathcal{M} = \partial\mathcal{N}$, то $\Omega(a, b, c) = -4\pi$ при $(a, b, c) \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$ и $\Omega(a, b, c) = -0$ при $(a, b, c) \notin \mathcal{N}$.

8.14. Пусть $f([0, 1]) = \partial\mathcal{M}$ для некоторого компактного ориентированного двумерного многообразия с краем $\mathcal{M}$. (Если f не имеет самопересечений, такое $\mathcal{M}$ всегда существует, даже если f заузлено). Предположим, что g — кривая, обладающая тем свойством, что касательный вектор v к g в точках x , где g пересекает $\mathcal{M}$, не лежит в $T_x\mathcal{M}$. Пусть n^+ — число тех пересечений, для которых вектор v направлен в сторону внешней нормали, n^- — число остальных пересечений и $n = n^+ - n^-$. Показать, что

$$n = -\frac{1}{4\pi} \int_g d\Omega.$$

8.15. Доказать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial a}(a, b, c) &= \int_f \frac{(y-b)dz - (z-c)dy}{r^3}, \\ \frac{\partial\Omega}{\partial b}(a, b, c) &= \int_f \frac{(z-c)dx - (x-a)dz}{r^3}, \\ \frac{\partial\Omega}{\partial c}(a, b, c) &= \int_f \frac{(x-a)dy - (y-b)dx}{r^3}, \end{aligned}$$

где $r(x, y, z) = |(x, y, z)|$.

8.16. Показать, что число n из 8.14 равно интегралу задачи 8.11, и, используя этот результат, показать, что $l(f, g) = 1$ для кривых f и g , изображенных на рис. 8.1 б), и $l(f, g) = 0$ для кривых f и g на рис. 8.1 с).

9. Элементы векторного анализа

9.1. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ФОРМЫ В $\mathbb{R}^3$.

Пусть U — область в $\mathbb{R}^3$. Скалярным полем f на области U мы будем называть функцию $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Напомним, что векторным полем $\mathbf{A}$ на области U называется функция, которая относит каждому $x \in U$ некоторый вектор $\mathbf{A}(x) \in T_x U$.

Векторные поля можно складывать, умножать на числа. Также определены операции скалярного и векторного произведений двух векторных полей $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на U . Скалярное поле $(\mathbf{A}, \mathbf{B}): U \ni x \mapsto (\mathbf{A}(x), \mathbf{B}(x)) \in \mathbb{R}$ называется скалярным произведением $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, а векторное поле $\mathbf{A} \times \mathbf{B}: U \ni x \mapsto \mathbf{A}(x) \times \mathbf{B}(x) \in T_x U$ называется векторным произведением $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

9.1. Пусть U — ориентированная область в $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{A}$ — векторное поле на U и

$$\omega_{\mathbf{A}}^1(x)\langle \xi \rangle = (\mathbf{A}(x), \xi), \quad \omega_{\mathbf{A}}^2(x)\langle \xi, \eta \rangle = (\mathbf{A}(x), \xi, \eta),$$

где $x \in U$, $\xi, \eta \in T_x U$. Проверить, что $\omega_{\mathbf{A}}^1$ и $\omega_{\mathbf{A}}^2$ являются дифференциальными 1- и 2-формами соответственно, то есть, $\omega_{\mathbf{A}}^1 \in \mathcal{F}^1(U)$ и $\omega_{\mathbf{A}}^2 \in \mathcal{F}^2(U)$.

9.2. Пусть U — ориентированная область в $\mathbb{R}^3$ и $\omega^1 \in \mathcal{F}^1(U)$. Доказать, что существует единственное векторное поле $\mathbf{A}$ на U такое, что $\omega^1(x)\langle \xi \rangle = (\mathbf{A}(x), \xi)$ для всех $x \in U$ и $\xi \in T_x U$.

9.3. Пусть U — ориентированная область в $\mathbb{R}^3$ и $\omega^2 \in \mathcal{F}^2(U)$. Доказать, что существует единственное векторное поле $\mathbf{A}$ на U такое, что $\omega_{\mathbf{A}}^2(x)\langle \xi, \eta \rangle = (\mathbf{A}(x), \xi, \eta)$, для всех $x \in U$ и $\xi, \eta \in T_x U$.

9.4. Доказать изоморфизм трех векторных пространств: $\mathcal{F}^1(U)$, $\mathcal{F}^2(U)$ и пространства векторных полей с операциями сложения и умножения на число. То есть проверить, что

$$\lambda_1 \omega_{\mathbf{A}}^1 + \lambda_2 \omega_{\mathbf{B}}^1 = \omega_{\lambda_1 \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{B}}^1 \quad \text{и} \quad \lambda_1 \omega_{\mathbf{A}}^2 + \lambda_2 \omega_{\mathbf{B}}^2 = \omega_{\lambda_1 \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{B}}^2.$$

9.5. Показать, что

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^1 = \omega_{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}^2 \quad \text{и} \quad \omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^2 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \omega^3,$$

где ω^3 — форма объема на $\mathbb{R}^3$.

9.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ grad, rot и div

Внешнему дифференцированию 0-форм (функций), 1-форм и 2-форм в ориентированном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ отвечают соответственно операции нахождения *градиента* (grad) скалярного поля, *ротора* (rot) векторного поля и *дивергенции* (div) векторного поля, определенные соотношениями

$$df = \omega_{\text{grad } f}^1, \quad d\omega_{\mathbf{A}}^1 = \omega_{\text{rot } \mathbf{A}}^2, \quad d\omega_{\mathbf{A}}^2 = \text{div } \mathbf{A} \omega^3$$

(форма ω^3 — элемент объема на $\mathbb{R}^3$).

9.6. Выписать явный вид градиента, ротора и дивергенции в декартовых координатах.

9.7. Докажите, что

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\text{rot } \mathbf{A}, \mathbf{B}) - (\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{A}), \\ \text{rot}(a\mathbf{A}) &= \text{grad } a \times \mathbf{A} + a \text{rot } \mathbf{A}, \\ \text{div}(a\mathbf{A}) &= \text{grad } a \times \mathbf{A} + a \text{div } \mathbf{A}. \end{aligned}$$

УКАЗАНИЕ: По формуле дифференцирования произведения форм

$$d(\omega_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}^2) = d(\omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^1) = d\omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^1 - \omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge d\omega_{\mathbf{B}}^1.$$

9.8. Докажите, что $\text{rot grad} = 0$ и $\text{div rot} = 0$.

УКАЗАНИЕ: $dd = 0$

9.9. Доказать формулы:

- а) $\text{grad}(f + c) = \text{grad } f$ (c — постоянно);
- б) $\text{grad}(cf) = c \text{grad } f$ (c — постоянно);
- в) $\text{grad}(f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$;
- г) $\text{grad}(fg) = f \text{grad } g + g \text{grad } f$;
- д) $\text{grad } f^2 = 2f \text{grad } f$;
- е) $\text{grad}(g \circ f) = g'(f) \text{grad } f$.

9.10. Вычислить $\text{grad } r$, $\text{grad } r^2$ и $\text{grad } \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

9.11. Найти $\text{grad } f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

9.12. Найти $\text{grad}(\mathbf{c}, \mathbf{r})$ и $\text{grad} |\mathbf{c} \times \mathbf{r}|$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, а $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ — радиус-вектор из начала координат.

9.13. Доказать формулу

$$\text{grad } u(f, g) = \frac{\partial u}{\partial f} \text{grad } f + \frac{\partial u}{\partial g} \text{grad } g.$$

9.14. Найти

$$\text{div} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

9.15. Доказать, что

а) $\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div } \mathbf{A} + \text{div } \mathbf{B}$;

б) $\text{div}(u\mathbf{C}) = (\mathbf{C}, \text{grad } u)$ ($\mathbf{C}$ — постоянный вектор, u — скаляр);

в) $\text{div}(u\mathbf{A}) = u \text{div } \mathbf{A} + (\mathbf{A}, \text{grad } u)$.

9.16. Найти $\text{div}(\text{grad } u)$.

9.17. Найти $\text{div}[\text{grad } f(r)]$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В каком случае $\text{div}[\text{grad } f(r)] = 0$?

9.18. Вычислить а) $\text{div } \mathbf{r}$; б) $\text{div} \frac{x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z}{r}$.

9.19. Вычислить $\text{div } f(r)\mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$ — постоянный вектор.

9.20. Найти $\text{div}[f(r)(x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z)]$. В каком случае дивергенция этого вектора равна нулю?

9.21. Найти: а) $\text{div}(u \text{grad } u)$; б) $\text{div}(u \text{grad } v)$.

9.22. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси Oz против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω . Найти дивергенцию вектора скорости $\mathbf{v}$ и вектора ускорения $\mathbf{W}$ в точке $M(x, y, z)$ пространства в данный момент времени.

9.23. Найти дивергенцию гравитационного силового поля, создаваемого конечной системой притягивающих центров.

9.24. Доказать, что

а) $\operatorname{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \mathbf{B}$;

б) $\operatorname{rot}(u\mathbf{A}) = u \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} u \times \mathbf{A}$.

9.25. Найти а) $\operatorname{rot}(x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z)$; б) $\operatorname{rot}[f(r)(x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z)]$ ($\mathbf{C}$ — постоянный вектор).

9.26. Найти модуль и направление $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ в точке $M(1, 2, -2)$, если

$$\mathbf{A} = \frac{y}{z} \mathbf{e}_x + \frac{z}{x} \mathbf{e}_y + \frac{x}{y} \mathbf{e}_z.$$

9.27. Найти а) $\operatorname{rot} \mathbf{C}f(r)$; б) $\operatorname{rot}[\mathbf{C} \times f(r)\mathbf{r}]$ ($\mathbf{r} = (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z)$, ($\mathbf{C}$ — постоянный вектор).

9.28. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси $l\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ с постоянной угловой скоростью w . Найти ротацию вектора скорости $\mathbf{v}$ в точке пространства $M(x, y, z)$ в данный момент времени.

9.3. Криволинейные координаты в $\mathbb{R}^3$.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ имеются две системы координат: x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 . Пусть $\omega \in \mathcal{F}^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда в системе x -координат ω записывается в виде $\omega = X_1 dx_2 \wedge dx_3 + X_2 dx_3 \wedge dx_1 + X_3 dx_1 \wedge dx_2$, где X_1, X_2, X_3 — функции от x_1, x_2, x_3 , и в системе y -координат в виде $\omega = Y_1 dy_2 \wedge dy_3 + Y_2 dy_3 \wedge dy_1 + Y_3 dy_1 \wedge dy_2$, где Y_1, Y_2, Y_3 — функции от y_1, y_2, y_3 .

9.29. Зная вид 2-формы в x -координатах (т. е. X_i) и формулы замены переменных $x_i = x_i(y_1, y_2, y_3)$, найти вид формы в y -координатах, т. е. найти Y_i .

РЕШЕНИЕ. Имеем $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_i}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_i}{\partial y_3} dy_3$. Поэтому

$$\begin{aligned} dx_2 \wedge dx_3 = & \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_2}{\partial y_3} dy_3 \right) \\ & \wedge \left(\frac{\partial x_3}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_3}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial x_3}{\partial y_3} dy_3 \right), \end{aligned}$$

откуда

$$Y_3 = X_1 \left| \frac{D(x_2, x_3)}{D(y_1, y_2)} \right| + X_2 \left| \frac{D(x_3, x_1)}{D(y_1, y_2)} \right| + X_3 \left| \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} \right| \quad \text{и т. д.}$$

Пусть x_1, x_2, x_3 — локальные координаты в $\mathbb{R}^3$, и пусть квадрат элемента длины имеет вид

$$ds^2 = E_1 dx_1^2 + E_2 dx_2^2 + E_3 dx_3^2$$

(т. е. система координат триортогональная).

- 9.30. Найти E_1, E_2, E_3 для декартовых координат x, y, z , цилиндрических координат r, φ, z $\begin{pmatrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{pmatrix}$ и сферических координат R, φ, θ $\begin{pmatrix} x = R \cos \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \cos \theta \\ z = R \sin \theta \end{pmatrix}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Обозначим через $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ орты координатных направлений, соответствующие системе координат x_1, x_2, x_3 . Эти три вектора образуют базис $\mathbb{R}^3$.

- 9.31. Найти значения форм dx_1, dx_2, dx_3 на векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. В частности, выписать ответ для декартовых, цилиндрических и сферических координат.

- 9.32. Вычислить $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$, $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta)$ и $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.

Каждому векторному полю $\mathbf{A}$ на области $U \subset \mathbb{R}^3$ соответствуют две дифференциальные формы $\omega_{\mathbf{A}}^1 \in \mathcal{F}^1(U)$ и $\omega_{\mathbf{A}}^2 \in \mathcal{F}^2(U)$, задаваемые как

$$\omega_{\mathbf{A}}^1(x)\langle \xi \rangle = (\mathbf{A}(x), \xi), \quad \omega_{\mathbf{A}}^2(x)\langle \xi, \eta \rangle = (\mathbf{A}(x), \xi, \eta) \quad \text{для любых } \xi, \eta \in \mathbb{R}^3.$$

Соответствие между векторными полями и формами не зависит от системы координат, но лишь от евклидовой структуры и ориентации. Формулы перехода от полей к формам и обратно имеют в каждой системе координат свой специальный вид. Пусть в координатах x_1, x_2, x_3 , описанных выше, векторное поле имеет вид

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$$

(компоненты A_i — гладкие функции на U).

- 9.33. Зная компоненты векторного поля $\mathbf{A}$, найти разложения 1-формы $\omega_{\mathbf{A}}^1$ по базису dx_i и 2-формы $\omega_{\mathbf{A}}^2$ по базису $dx_i \wedge dx_j$.

РЕШЕНИЕ. Имеем $\omega_{\mathbf{A}}^1 \langle \mathbf{e}_i \rangle = (A, \mathbf{e}_i) = A_i$. В то же время

$$(a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3) \langle \mathbf{e}_i \rangle = a_i dx_i \langle \mathbf{e}_i \rangle = \frac{a_i}{\sqrt{E_i}}$$

в силу задачи 9.31. Отсюда находим, что $a_i = A_i \sqrt{E_i}$, так что

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 = A_1 \sqrt{E_1} dx_1 + A_2 \sqrt{E_2} dx_2 + A_3 \sqrt{E_3} dx_3.$$

Точно так же имеем $\omega_{\mathbf{A}}^2 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = (\mathbf{A}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = A_1$. В то же время

$$(\alpha_1 dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2 dx_3 \wedge dx_1 + \alpha_3 dx_1 \wedge dx_2) \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = \frac{\alpha_1}{\sqrt{E_2 E_3}}.$$

Отсюда $\alpha_1 = A_1 \sqrt{E_2 E_3}$, т. е.

$$\omega_{\mathbf{A}}^2 = A_1 \sqrt{E_2 E_3} dx_2 \wedge dx_3 + A_2 \sqrt{E_3 E_1} dx_3 \wedge dx_1 + A_3 \sqrt{E_1 E_2} dx_1 \wedge dx_2.$$

В частности, в декартовых, в цилиндрических, в сферических координатах в $\mathbb{R}^3$ векторному полю

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z = A_R \mathbf{e}_R + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_\theta \mathbf{e}_\theta$$

отвечает 1-форма

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{A}}^1 &= A_x dx + A_y dy + A_z dz = A_r dr + r A_\varphi d\varphi + A_z dz \\ &= A_R dR + R \cos \theta A_\varphi d\varphi + R A_\theta d\theta \end{aligned}$$

и 2-форма

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{A}}^2 &= A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy \\ &= r A_r d\varphi \wedge dz + A_\varphi dz \wedge dr + r A_z dr \wedge d\varphi \\ &= R^2 \cos \theta A_R d\varphi \wedge d\theta + R A_\varphi d\theta \wedge dR + R \cos \theta A_\theta dR \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

9.34. Найти компоненты градиента функции в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

РЕШЕНИЕ. Имеем $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$. Согласно задаче 9.33,

$$\text{grad } f = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}} \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}} \frac{\partial f}{\partial x_3} \mathbf{e}_3.$$

В частности, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial x_z} \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\partial f}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R \cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta.\end{aligned}$$

9.35. Найдите разложение ω^3 по базису $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

9.36. Зная компоненты векторного поля $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$, найти компоненты его ротора.

РЕШЕНИЕ. Согласно задаче 9.33,

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 = A_1 \sqrt{E_1} dx_1 + A_2 \sqrt{E_2} dx_2 + A_3 \sqrt{E_3} dx_3.$$

Поэтому

$$d\omega_{\mathbf{A}}^1 = \left(\frac{\partial(A_3 \sqrt{E_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial(A_2 \sqrt{E_2})}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \dots = \omega_{\operatorname{rot} \mathbf{A}}^2.$$

Опять в силу задачи 9.33 находим

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{1}{\sqrt{E_2 E_3}} \left(\frac{\partial(A_3 \sqrt{E_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial(A_2 \sqrt{E_2})}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \begin{vmatrix} \sqrt{E_1} \mathbf{e}_1 & \sqrt{E_2} \mathbf{e}_2 & \sqrt{E_3} \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 \sqrt{E_1} & A_2 \sqrt{E_2} & A_3 \sqrt{E_3} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

В частности, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{R \cos \varphi} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial(A_\varphi \cos \theta)}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial A_R}{\partial \theta} - \frac{\partial(RA_\theta)}{\partial R} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial(RA_\varphi)}{\partial R} - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_\theta.$$

9.37. Найти дивергенцию векторного поля $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$.

РЕШЕНИЕ. В силу задачи 9.33

$$\omega_{\mathbf{A}}^2 = A_1 \sqrt{E_2 E_3} dx_2 \wedge dx_3 + A_2 \sqrt{E_3 E_1} dx_3 \wedge dx_1 + A_3 \sqrt{E_1 E_2} dx_1 \wedge dx_2.$$

Следовательно,

$$d\omega_{\mathbf{A}}^2 = \left(\frac{\partial(A_1 \sqrt{E_2 E_3})}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_2 \sqrt{E_3 E_1})}{\partial x_2} + \frac{\partial(A_3 \sqrt{E_1 E_2})}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

По определению дивергенции,

$$d\omega_{\mathbf{A}}^2 = \operatorname{div} \mathbf{A} \omega^3 = \operatorname{div} A \sqrt{E_1, E_2, E_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Значит,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{E_1, E_2, E_3}} \left(\frac{\partial(A_1 \sqrt{E_2 E_3})}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_2 \sqrt{E_3 E_1})}{\partial x_2} + \frac{\partial(A_3 \sqrt{E_1 E_2})}{\partial x_3} \right).$$

В частности, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{R^2 \cos \theta} \left(\frac{\partial(R^2 \cos \theta A_R)}{\partial R} + \frac{\partial(RA_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(R \cos \theta A_\theta)}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

9.38. Оператором Лапласа на M называется оператор $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$. Доказать, что в координатах x_i

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{\sqrt{E_1, E_2, E_3}} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sqrt{\frac{E_2 E_3}{E_1}} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sqrt{\frac{E_3 E_1}{E_2}} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sqrt{\frac{E_1 E_2}{E_3}} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \right] \end{aligned}$$

В частности, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{R^2 \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \cos \theta \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right].\end{aligned}$$

9.39. Найти выражение дивергенции плоского вектора $A = A(r, \varphi)$ в полярных координатах r и φ .

9.40. Найти выражение ротации плоского вектора $A = A(r, \varphi)$ в полярных координатах r и φ .

9.4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ.

а) Работа векторного поля.

Пусть $\mathbf{A}(x)$ — непрерывное векторное поле, заданное в области U евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Если считать, что $\mathbf{A}$ — поле сил, действующее на U , то можно вычислить работу, совершаемую полем A , при перемещении единичной пробной частицы вдоль гладкого пути $\gamma: [a, b] \rightarrow U$. *Работой векторного поля $\mathbf{A}$ вдоль γ называется величина*

$$\int_{\gamma} \omega_{\mathbf{A}}^1.$$

9.41. Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ — C^1 -гладкая функция области $U \subset \mathbb{R}^3$ и $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ — путь в области U . Доказать, что приращение функции f на пути γ равно работе на этом пути поля градиента функции f :

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_{\gamma} \omega_{\text{grad } f}^1.$$

9.42. Найти работу векторного поля $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ вдоль куска винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

9.43. Найти работу векторного поля $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{e}_x}{y} + \frac{\mathbf{e}_y}{z} + \frac{\mathbf{e}_z}{x}$ вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки $M(1, 1, 1)$ и $N(2, 4, 8)$.

- 9.44. Найти работу векторного поля $\mathbf{A} = e^{y-z} \mathbf{e}_x + e^{z-x} \mathbf{e}_y + e^{x-y} \mathbf{e}_z$ вдоль прямолинейного отрезка между точками $O(0, 0, 0)$ и $N(2, 4, 8)$.
- 9.45. Найти работу векторного поля $\mathbf{A} = (y+z) \mathbf{e}_x + (z+x) \mathbf{e}_y + (x+y) \mathbf{e}_z$ вдоль кратчайшей дуги большого круга сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, соединяющей точки $M(3, 4, 0)$ и $N(0, 0, 5)$.
- 9.46. Найти работу векторного поля $\mathbf{A} = f(r)\mathbf{r}$, где f — непрерывная функция, вдоль дуги AB .

б) Поток векторного поля через поверхность.

Пусть $\mathbf{A}(x)$ — непрерывное векторное поле, заданное в области U ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, S — гладкая ориентированная поверхность в U . Величина

$$\int_S \omega_{\mathbf{A}}^2$$

называется *поток векторного поля $\mathbf{A}$ через поверхность S* . Если считать, что в области U задано установившееся течение жидкости или газа и $x \mapsto \mathbf{A}(x)$ — поле скоростей этого течения, то поток векторного поля $\mathbf{A}$ через S задает расход или поток жидкости через поверхность S , то есть объем жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность S в указанную ориентирующим полем нормалей сторону этой поверхности.

- 9.47. Пусть U — компактная область ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, ограниченная (кусочно) гладкой поверхностью ∂U — краем U , и $\mathbf{A}$ — гладкое векторное поле в U . Доказать, что поток векторного поля $\mathbf{A}$ через границу области ∂U равен интегралу от дивергенции этого поля по самой области, то есть

$$\int_{\partial U} \omega_{\mathbf{A}}^2 = \int_U \operatorname{div} \mathbf{A} \, dx \, dy \, dz.$$

- 9.48. Пусть $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — C^1 -гладкое векторное поле. Докажите равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, \varepsilon)|} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} (\mathbf{A}, \mathbf{n}) \, d\mathcal{H}^2 = \operatorname{div} \mathbf{A}(x),$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к сфере $\partial B(x, \varepsilon)$.

- 9.49. Пусть $\mathbf{A}$ — непрерывно-дифференцируемое векторное поле. Доказать, что

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(M) = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S (\mathbf{A}, \mathbf{n}) d\mathcal{H}^2,$$

где S — замкнутая поверхность, окружающая точку M и ограничивающая объем V , $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S , $d(S)$ — диаметр поверхности S .

- 9.50. Найти дивергенцию поля

$$\mathbf{A} = \frac{-x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z}{x^2 + y^2}$$

в точке $M(3, 4, 5)$. Чему приближенно равен поток Π поля $\mathbf{A}$ через бесконечно малую сферу $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = \varepsilon^2$?

- 9.51. Найти поток векторного поля $\mathbf{r}$:

- а) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leq z^2$ ($0 \leq z \leq h$);
б) через основание этого конуса.

- 9.52. Найти поток векторного поля $\mathbf{A} = yz \mathbf{e}_x + xz \mathbf{e}_y + xy \mathbf{e}_z$:

- а) через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($0 \leq z \leq h$);
б) через полную поверхность этого цилиндра.

- 9.53. Найти поток радиус-вектора $\mathbf{r}$ через поверхность

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leq z \leq 1).$$

- 9.54. Найти поток векторного поля $\mathbf{A} = x^2 \mathbf{e}_x + y^2 \mathbf{e}_y + z^2 \mathbf{e}_z$ через положительный октант сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

- 9.55. Найти поток векторного поля $\mathbf{A} = y \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_y + x \mathbf{e}_z$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $x + y + z = a$ ($a > 0$).

Проверить результат, применяя формулу Остроградского.

- 9.56. Найти поток векторного поля $\mathbf{A} = x^3 \mathbf{e}_x + y^3 \mathbf{e}_y + z^3 \mathbf{e}_z$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

- 9.57. Доказать, что поток векторного поля $\mathbf{A}$ через поверхность S , заданную уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ($u, v \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$) равен

$$\int_S (\mathbf{A}, \mathbf{n}) d\mathcal{H}^2 = \int_{\Omega} \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S .

9.58. Найти поток векторного поля $\mathbf{A} = m \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ (m — постоянная) через замкнутую поверхность S , окружающую начало координат.

9.59. Найти поток векторного поля

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \operatorname{grad} \left(-\frac{\mathbf{e}_i}{4\pi r_i} \right),$$

где $\mathbf{e}_i$ — постоянные и r_i — расстояния до точек M_i (*источники*) от переменной точки $M(\mathbf{r})$, через замкнутую поверхность S , окружающую точки M_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

9.60. Доказать, что

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\mathcal{H}^2 = \int_V (\operatorname{div} \operatorname{grad} u) dx dy dz,$$

где поверхность S ограничивает тело V , $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S , $u \in C^2(V)$.

9.61. Количество теплоты, протекающее в поле температуры u за единицу времени через элемент поверхности dS , равно

$$dQ = -k \mathbf{n} \operatorname{grad} u dS,$$

где k — коэффициент внутренней теплопроводности и n — единичный вектор нормали к поверхности S . Определить количество теплоты, накопленное телом V за единицу времени. Используя скорость повышения температуры, вывести уравнение, которому удовлетворяет температура тела (*уравнение теплопроводности*)

9.62. Находящаяся в движении несжимающаяся жидкость заполняет объем V . Предполагая, что в области V отсутствуют источники и стоки, вывести *уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

где $\rho = \rho(x, y, z)$ — плотность жидкости, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, t — время.

УКАЗАНИЕ: Рассмотреть поток жидкости через произвольный объем w , содержащийся в V .

с) Циркуляция векторного поля.

Работа векторного поля на замкнутом пути называется *циркуляцией векторного поля* на этом пути. Чтобы отметить, что интеграл берется по замкнутому пути, вместо традиционного обозначения $\int_{\gamma}$ пишется $\oint_{\gamma}$.

9.63. Пусть $\mathbf{A}$ — векторное поле в области U ориентируемого евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, а S — кусочно-гладкая ориентируемая компактная поверхность с краем в U . Показать, что циркуляция векторного поля $\mathbf{A}$ на границе поверхности равна потоку ротора поля $\mathbf{A}$ через саму поверхность:

$$\oint_{\partial S} \omega_{\mathbf{A}}^1 = \int_S \omega_{\text{rot } \mathbf{A}}^2.$$

9.64. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{A} = -y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y + c \mathbf{e}_z$ (c — постоянная):

- а) вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1, z = 0$;
- б) вдоль окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 1, z = 0$.

9.65. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{A} = \text{grad} \left(\arctg \frac{y}{x} \right)$ вдоль замкнутой кривой C в двух случаях:

- а) C не окружает ось Oz ;
- б) C окружает ось Oz .

9.66. Дано векторное поле $\mathbf{A} = \frac{y}{\sqrt{x}} \mathbf{e}_x - \frac{x}{\sqrt{z}} \mathbf{e}_y + \sqrt{xyz} \mathbf{e}_z$. Вычислив $\text{rot } \mathbf{A}$ в точке $M(1, 1, 1)$, приближенно найти циркуляцию Γ поля вдоль бесконечно малой окружности

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = \varepsilon^2, \\ (x - 1) \cos \alpha + (y - 1) \cos \beta + (z - 1) \cos \gamma = 0, \end{cases}$$

где $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

9.67. Плоский установившийся поток жидкости характеризуется вектором скорости $\mathbf{w} = u(x, y) \mathbf{e}_x + v(x, y) \mathbf{e}_y$. Определить:

- 1) количество жидкости Q , протекающее через замкнутую кривую C , ограничивающую область S (расход жидкости);
- 2) циркуляцию Γ вектора скорости вдоль замкнутой кривой C .

Каким уравнениям удовлетворяют функции u и v , если жидкость несжимаема и поток безвихревой?

9.5. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Пусть $\mathbf{A}$ — векторное поле в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Функция $U: D \rightarrow \mathbb{R}$ называется *потенциалом поля $\mathbf{A}$* в области D , если в этой области $\mathbf{A} = \text{grad } U$. Поле, обладающее потенциалом, называется *потенциальным*. Поскольку в связной области частные производные определяют функцию с точностью до константы, то в такой области потенциал поля определен с точностью до аддитивной постоянной.

Поле $\mathbf{A}$ называется *векторным потенциалом поля $\mathbf{B}$* в области $D \subset \mathbb{R}^3$, если в этой области выполняется соотношение $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

- 8.68. (Необходимое условие потенциальности.) Доказать, что условие $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ является необходимым условием потенциальности поля $\mathbf{A}$. Привести пример, показывающий, что оно не является достаточным.
- 8.69. (Критерий потенциальности.) Пусть $\mathbf{A}$ — непрерывное векторное поле в области $D \subset \mathbb{R}^3$. Доказать, что векторное поле $\mathbf{A}$ потенциально тогда и только тогда, когда его (работа) циркуляция на любом лежащем в D замкнутом пути γ равна нулю:

$$\oint_{\gamma} \omega_{\mathbf{A}}^1 = 0.$$

- 8.70. Пусть векторное поле $\mathbf{B}$ имеет векторный потенциал. Доказать, что $\text{div } \mathbf{B} = 0$. (Поле $\mathbf{B}$, удовлетворяющее условию $\text{div } \mathbf{B} = 0$ часто, особенно в физике, называют *соленоидальным векторным полем*.)

- 8.71. Показать, что поле

$$\mathbf{A} = yz(2x + y + z) \mathbf{e}_x + xz(x + 2y + z) \mathbf{e}_y + xy(x + y + 2z) \mathbf{e}_z$$

потенциальное и найти потенциал этого поля.

8.72. Убедившись в потенциальности векторного поля

$$\mathbf{A} = \frac{2 \mathbf{e}_x}{(y+z)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x \mathbf{e}_y}{(y+z)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x \mathbf{e}_z}{(y+z)^{\frac{3}{2}}},$$

найти работу векторного поля вдоль пути, соединяющего в положительном октанте точки $M(1, 1, 3)$ и $N(2, 4, 5)$.

8.73. Найти потенциал гравитационного поля $\mathbf{A} = -m \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, задаваемого массой m , помещенной в начале координат.

8.74. Найти потенциал гравитационного поля, создаваемого системой масс m_i ($i = 1, 2, \dots, n$), помещенных в точках M_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

8.75. Доказать, что поле $\mathbf{A} = f(r)\mathbf{r}$, где f — однозначная непрерывная функция, является потенциальным. Найти потенциал этого поля.

8.76. Напряженность поля $\mathbf{E}$ электрического поля точечного заряда q , помещенного в начале координат, в точке пространства, имеющего радиус-вектор $\mathbf{r}$, вычисляется по закону Кулона

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Найти потенциал поля E .

В следующих задачах надо выяснить, являются ли векторное поле $\mathbf{A}$ потенциальным или соленоидальным, и найти соответствующий (скалярный или векторный) потенциал поля $\mathbf{A}$.

8.77. $\mathbf{A} = (2xy + y^3z) \mathbf{e}_x + (x^2 + 3y^2zx + z^2) \mathbf{e}_y + (2zy + y^3x) \mathbf{e}_z.$

8.78. $\mathbf{A} = 2z \mathbf{e}_y + (2x - 1) \mathbf{e}_z.$

8.79. $\mathbf{A} = \frac{x^2 - yz}{x^2 z} \mathbf{e}_x + \frac{y^2 - xz}{y^2 x} \mathbf{e}_y + \frac{z^2 - xy}{z^2 y} \mathbf{e}_z.$

8.80. $\mathbf{A} = -\mathbf{e}_x - 2x \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z.$

8.81. $\mathbf{A} = (x^2 + (y+x)^2 + (z+x)^2) \mathbf{e}_x + ((x+y)^2 + y^2 + (z+y)^2) \mathbf{e}_y + ((x+z)^2 + (y+z)^2 + z^2) \mathbf{e}_z.$

8.82. $\mathbf{A} = -2z \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y - 3y^2 \mathbf{e}_z.$

8.83. Доказать формулу

$$\operatorname{grad}_P \left\{ \int_V \rho(Q) \frac{d\mathcal{H}^3}{r} \right\} = - \int_S \rho(Q) \mathbf{n} \frac{d\mathcal{H}^2}{r} + \int_V \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \frac{d\mathcal{H}^3}{r},$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V , $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S , r — расстояние между точками $P(x, y, z)$ и $Q(\xi, \eta, \zeta)$.

8.84. Доказать, что если $\mathbf{A} = \operatorname{grad} u$, где

$$u = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

то

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \rho(x, y, z)$$

(предполагая, что соответствующие интегралы имеют смысл).

9. Элементы теории функций комплексного переменного

Функцию $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называют *дифференцируемой* в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если существует предел

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Если f дифференцируема в каждой точке z открытого множества A и f' непрерывна на A , то функцию f называют *аналитической* на A .

9.1. Показать, что функция $f(z) = z$ аналитична, а $f(z) = \bar{z}$ (где $x + iy = x - iy$) нет. Показать, что сумма, произведение и частное аналитических функций — аналитические функции.

9.2. Показать, что если $f = u + iv$ аналитична на A , то u и v удовлетворяют *условиям Коши — Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

УКАЗАНИЕ: Воспользоваться тем фактом, что

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

должен быть одним и тем же для $z = z_0 + (x + i0)$ и $z = z_0 + (0 + iy)$ с $x, y \rightarrow 0$ (если u и v непрерывно дифференцируемы, то верно также и обратное утверждение, но его труднее доказать).

9.3. Пусть $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — линейное отображение (где $\mathbb{C}$ рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{R}$). Показать, что если матрица T относительно базиса $(1, i)$ равна $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то T есть оператор умножения на некоторое комплексное число тогда и только тогда, когда $a = d$ и $b = -c$. Предыдущая задача показывает, что аналитическая функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, рассматриваемая как функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, имеет производную $Df(z_0)$, являющуюся оператором умножения на комплексное число. Что это за комплексное число?

9.4. Положим

$$\begin{aligned} d(\omega + i\eta) &= d\omega + i d\eta, \\ \int_c \omega + i\eta &= \int_c \omega + i \int_c \eta, \\ (\omega + i\eta) \wedge (\theta + i\lambda) &= \omega \wedge \theta - \eta \wedge \lambda + i(\eta \wedge \lambda + \omega \wedge \lambda) \end{aligned}$$

и

$$dz = dx + i dy.$$

Показать, что $d(f dz) = 0$ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям Коши — Римана.

9.5. Доказать *интегральную теорему Коши*: если f аналитична на A , то $\int_c f dz = 0$ для всякого замкнутого сингулярного пути c , такого, что $c = \partial c'$ для некоторого сингулярного двумерного полиэдра c' в A .

9.6. Показать, что если $g(z) = \frac{1}{z}$, то $g dz$ (или $\frac{1}{z} dz$ в классической записи) равно $i d\theta + dh$ для некоторой функции $h: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Вывести отсюда, что $\int_{c_{R,n}} \frac{1}{z} dz = 2\pi i n$. Напомним, что сингулярный путь $c_{R,n}$ введен в задаче 7.26.

9.7. Пусть f аналитична на $\{z: |z| < 1\}$. Используя тот факт, что $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ аналитична на $\{z: 0 < |z| < 1\}$, показать, что

$$\int_{c_{R_1,n}} \frac{f(z)}{z} dz = \int_{c_{R_2,n}} \frac{f(z)}{z} dz,$$

если $0 < R_1, R_2 < 1$.

Используя предыдущую задачу, вычислить

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{c_{R,n}} \frac{f(z)}{z} dz$$

и вывести отсюда *интегральную формулу Коши*: если f аналитична на $\{z: |z| \leq 1\}$ и c — замкнутая кривая в $\{z: 0 < |z| < 1\}$, имеющая порядок n относительно 0, то

$$nf(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z} dz.$$

Ответы

1.2. $\dim \Lambda^1(\mathbb{R}^n) = n$. 1.26. а) 0; б) $\frac{2}{3}$; в) 2. 1.27. а) 2; б) 2; в) 2. 1.28. 0. 1.29. $\frac{7}{12}$. 1.30. 56. 1.31. 8. 1.32. 6. 1.33. $12 + \ln 5$. 1.34. 4. 1.35. 13. 1.36. $3\sqrt{3}$. 1.37. $\frac{8}{15}$. 1.38. -11. 1.39. $\frac{5 - \ln 8}{3}$. 1.40. $\frac{\pi a^2}{2}$. 1.41. $-\frac{14}{15}$. 1.42. $\frac{4}{3}$. 1.43. π . 1.44. $\frac{14 - 3 \ln 4}{3}$. 1.45. 8. 1.46. $\frac{3}{2}$. 1.47. 4. 1.48. $\frac{12}{5}$. 1.49. $2 \sin 2$. 1.50. $-\frac{8}{15}$. 1.53. $-\frac{1}{4}$. 1.54. 0. 1.56. $-2\pi ab$. 1.57. $-\frac{4ab^2}{3}$. 1.58. πa^2 . 1.59. $-2\pi a^3$. 1.60. $\frac{3\pi a^{4/3}}{16}$. 1.61. πa^2 . 1.62. $\frac{1}{35}$. 1.63. 0. 1.64. 0. 1.65. $-\pi a^2$. 1.66. $-\pi a^2 \cos^2 \alpha$. 1.71. -48. 1.72. 4. 1.73. -12. 1.74. 0. 1.75. $\frac{4}{3}$. 1.76. 0. 1.77. 0. 1.78. -2π . 1.79. 0. 1.80. $\frac{\pi}{4} - 1$. 1.81. a^3 .

1.82. $-\frac{\pi R^3}{4}$. **1.83.** $\pi a^2 2^{3/2} \sin(\pi/4 - \alpha)$. **1.84.** -4 . **1.85.** 0 . **1.86.** $2\pi Rr^2$.
1.87. $-\frac{\pi a^3}{4}$. **1.88.** -4 . **1.96.** 8 . **1.97.** 12 . **1.98.** 4 . **1.99.** -2 . **1.100.** $-\frac{3}{2}$.
1.101. 9 . **1.102.** 62 . **1.103.** 1 . **1.104.** $\pi + 1$. **1.105.** 7 . **1.106.** 12 . **1.107.** 1 .
1.108. -4 . **1.109.** $-\frac{1148}{5}$. **1.110.** 0 . **1.111.** 30 . **1.112.** $\int_0^{x_0+y_0} f(t) dt$. **1.113.**
 $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(t) dt + \int_{y_1}^{y_2} \psi(t) dt$. **1.114.** $e^{x_0} \cos y_0 - 1$. **1.115.** $-\frac{1}{6}$. **1.116.** 6 . **1.117.**
 $-53\frac{7}{12}$. **1.118.** 0 . **1.119.** $b - a$. **1.120.** $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y) dy + \int_{z_1}^{z_2} \chi(z) dz$.
1.121. $\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u) du$. **1.122.** $\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} u f(u) du$. **1.124.** $u = \frac{x^3+y^3}{3} +$
 C . **1.125.** $u = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C$. **1.126.** $u = xe^{2y} - 5y^3e^x + C$.
1.127. $u = e^{x-y}(x+y) + C$. **1.128.** $u = e^{x+y}(x-y+1) + ye^x + C$.
1.129. $u = \frac{e^y-1}{1+x^2} + y + C$. **1.130.** $u = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x-y}{2y\sqrt{2}} + C$. **1.131.**
 $u = \frac{2y^2}{(x+y)^2} + \ln|x+y| + C$. **1.132.** $u = \frac{\partial^{n+m} v}{\partial x^n \partial y^m} + C$. **1.133.** $u =$
 $\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) + C$. **1.134.** $u = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C$. **1.135.**
 $u = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C$. **1.136.** $u = \ln \sqrt{(x+y)^2 + z^2} + \operatorname{arctg} \frac{z}{x+y} + C$.
1.137. $u = \ln|x+y+z| + C$. **1.138.** $u = \operatorname{arctg}(xyz) + C$. **1.139.**
 $x \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$. **1.160.** $\iint_S y^2 dx dy$. **1.161.** $-46\frac{2}{3}$. **1.162.** $\frac{\pi a^4}{2}$.
1.163. $-2\pi ab$. **1.164.** $-\frac{1}{5}(e^\pi - 1)$. **1.165.** 0 . **1.166.** $I_1 - I_2 = 2$. **1.167.**
 $\frac{\pi m a^2}{8}$. **1.168.** $mS + e^{x_2} \varphi(y_2) - e^{x_1} \varphi(y_1) - m(y_2 - y_1) - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)$.
1.169. $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = kx + \frac{\partial u}{\partial y}$, где u — дважды дифференцируемая функ-
ция и k — постоянная величина. **1.170.** $\frac{\partial}{\partial x}[xF(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y}[yF(x, y)]$.

1.171. $\operatorname{sgn}(ad - bc)$. **1.172.** $I = \sum \operatorname{sgn} \det \left(\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \right)$. **1.174.** $\frac{(7\pi + 3)ab}{12}$.
1.175. $\frac{1}{3}(q - p) \ln \frac{b}{a}$. **1.176.** $\frac{1}{2}(q - p) \ln \frac{b}{a}$. **1.177.** $\frac{1}{6}(q^2 - p^2)(b^3 - a^3)$. **1.178.**
 $\frac{5}{12}(a^{-\frac{3}{5}} - b^{-\frac{3}{5}})(q^{\frac{4}{5}} - p^{\frac{4}{5}})$. **1.179.** $\frac{1}{3}$. **1.180.** $\frac{9}{8}$. **1.181.** $\frac{9}{2}$. **1.182.** $\frac{4}{5}$. **1.183.**
 $\frac{27\pi}{2}$. **1.184.** $\frac{3\pi a^2}{8}$. **1.185.** π . **1.186.** $\frac{a^2}{6}$. **1.187.** $\frac{4}{3}$. **1.188.** $\frac{8\pi}{3}$. **1.189.**
 $\frac{5\pi a^2}{8}$. **1.190.** πab . **1.191.** $\frac{3}{8}\pi ab$. **1.192.** $\frac{a^2}{6}$. **1.193.** a^2 . **1.194.** $\frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$.
1.195. $\frac{a^2}{2}B(2m+1, 2n+1)$. **1.196.** $\frac{ab}{2n} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n})}$. **1.197.** $\frac{ab}{n} \left(1 + \frac{(1 + \frac{1}{n})\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \right)$.
1.199. $\frac{3}{2}$. **1.200.** $\frac{4a^2}{3}$. **1.201.** $\frac{1}{30}$. **1.202.** $\frac{3}{2}a^2$. **1.203.** $\frac{abc^2}{2(2n+1)}$. **1.204.**
 $\pi(n+1)(n+2)r^2$; $6\pi r^2$. **1.205.** $\pi(n-1)(n-2)r^2$; $6\pi r^2$. **1.206.** $4a^2$. **1.208.**
 $I = 2|S|$, где $|S|$ — площадь области S . **1.210.** $X'_x(x_0, y_0) + Y'_y(x_0, y_0)$.
1.213. $\frac{\pi(\operatorname{sh} 2a - 2a)}{4}$. **1.214.** $9\pi^2$. **1.215.** $\frac{8\pi}{3}$. **1.216.** $\frac{32\pi a^3}{105}$. **1.217.** $\frac{\pi^2}{2}$.
1.218. 1) 0 при $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$, $-2\pi\mu_0 \ln r$ при $r > 1$; 2) $\frac{\pi}{mr^m} \cos(m\varphi)$
при $r > 1$, $\frac{\pi}{m}r^m \cos(m\varphi)$ при $r < 1$; 3) $\frac{\pi}{mr^m} \sin(m\varphi)$ при $r > 1$,
 $\frac{\pi}{m}r^m \sin(m\varphi)$ при $r < 1$ ((r, φ) — полярные координаты точки (x, y))
. **1.219.** 1) 0; 2) 2π . **1.220.** 1) $\pi r^m \cos m\varphi$ при $r < 1$, $-\pi r^{-m} \cos m\varphi$ при
 $r > 1$; 2) $\pi r^m \sin m\varphi$ при $r < 1$, $-\pi r^{-m} \sin m\varphi$ при $r > 1$ ((r, φ) — по-
лярные координаты точки (x, y)). **2.1.** -8π . **2.2.** $\frac{128}{3}$. **2.3.** $-\frac{1}{24}$. **2.4.** 0.
2.5. $\left[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - f(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right] abc$. **2.6.** $\frac{4\pi R^3}{3}$. **2.7.** $4\pi a^3$.
2.8. 0. **2.9.** $-\frac{2\pi R^7}{7}$. **2.10.** $-\frac{2\pi R^7}{105}$. **2.11.** $-\pi R^4$. **2.12.** $\frac{8\pi(a+b+c)R^3}{3}$.
2.13. $-\frac{\pi R^4}{2}$. **2.14.** $-\frac{2\pi}{5}$. **2.15.** 0. **2.16.** $\frac{4\pi abc}{3}$. **2.17.** 0. **2.18.** $\frac{4\pi ab}{c}$. **2.19.**
 $4\pi abc(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$. **2.20.** $\frac{\pi abc^2}{4}$. **2.21.** $\frac{2\pi(a^2 + b^2)abc}{5}$. **2.22.** $-\frac{3\pi H^4}{2}$.
2.23. 0. **2.24.** 0. **2.25.** $-\frac{\pi r^5}{6}$. **2.26.** $\left(\frac{\pi H}{8} - \frac{r}{3} \right) r^2 H$. **2.27.** $-\frac{\pi}{3}$. **2.28.**
 $-\frac{a^4}{3}$. **2.30.** 0. **2.31.** $-2\pi a(a+h)$. **2.32.** $2\pi Rr^2$. **2.33.** $-\frac{9}{2}a^3$. **2.34.** 0. **2.35.**
 $-\pi ab$. **2.36.** $-a^3$. **2.37.** $\pi\sqrt{3}R^2$. **2.38.** 2π . **2.39.** $2\sqrt{2}\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$. **2.40.**

$2(a+c)a\pi$. **2.41.** $2\pi a^2$. **2.42.** $\frac{3\pi R^4}{2}$. **2.43.** $-\pi a^2$. **2.44.** $\frac{h^3}{3}$. **2.47.** $2\mathcal{H}^1(S)$.
2.50. 0. **2.51.** $3 \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$. **2.52.** $2 \int_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. **2.53.**
 $\int_V \Delta u dx dy dz$. **2.54.** 0. **2.58.** $\frac{4\pi}{3} \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) |c|$. **2.60.** $\frac{2}{9} a^3$. **2.61.** $2\pi^2 a^2 b$.
2.63. 1) $3a^4$; 2) $(a+b+c)abc$; 3) $\frac{\pi abc^2}{2}$. **2.64.** 1. **2.65.** 1) $\frac{3abc}{2}$; 2) $-3a^3$.
2.66. 1) 128π ; 2) -48π ; 3) 56π . **2.67.** 1) $\frac{3a^5}{20}$; 2) $\frac{12\pi R^5}{5}$. **2.68.** 1) 0; 2)
 $\frac{\pi R^6}{3}$. **2.69.** 1) 12π ; 2) $\frac{\pi(24+7\pi)}{2}$. **2.70.** 1) $-\frac{\pi R^4}{2}$; 2) $\frac{\pi a^4}{12}$; 3) $-\frac{\pi H^4}{2}$.
2.71. 0. **2.72.** $-\frac{R^5}{3}$. **2.73.** 0. **2.78.** $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$. **2.79.** $\frac{4\pi}{\sqrt{2}}$. **2.80.** 2π . **2.81.** $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$.
2.82. $-\frac{\pi h^4}{2}$. **2.84.** а) $I = 0$; б) $I = 4\pi$. **2.95.** $\frac{128}{15}$. **3.3.** $\dim \mathbb{V}^* = n$. **3.9.**
 $l \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dots \cdot l_n$. **4.3.** $\dim \Lambda^2(\mathbb{R}^n) = \frac{n(n-1)}{2}$. **4.7.** $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = C_n^k$. **4.16.** ???.
4.48. $\omega^2 \wedge \omega^2 = 2 \sum_{i < j} p_i \wedge q_i \wedge p_j \wedge q_j$. **4.49.** $C_n^k \sum_{I \in M(n,k)} p_{i_1} \wedge q_{i_1} \wedge \dots \wedge p_{i_k} \wedge q_{i_k}$.
9.6. $\text{grad } f = \mathbf{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \right) + \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right)$, $\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$. **9.10.** $\frac{\mathbf{r}}{r}$, $2\mathbf{r}$, $-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$,
где $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$. **9.11.** $f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$, где $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$. **9.12.**
 $\mathbf{c}$; $2\mathbf{r}|\mathbf{c}|^2 - 22\mathbf{c}(\mathbf{c}, \mathbf{r})$. **9.14.** 0. **9.16.** $\text{div}(\text{grad } u) = \Delta u$. **9.17.** $\frac{f''(r)}{r} +$
 $\frac{2}{r}f'(r)$; $f(r) = c + \frac{c_1}{r}$, где c, c_1 — постоянные. **9.18.** а) 3; б) $\frac{2}{r}$. **9.19.**
 $\frac{f'(r)}{r}(\mathbf{C}, (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z))$. **9.20.** $3f(r) + rf'(r)$; $f(r) = \frac{c}{r}$, где c — посто-
янная. **9.21.** а) $u\Delta u + (\text{grad } u)^2$; б) $u\Delta v + (\text{grad } u, \text{grad } v)$. **9.22.** $\text{div } \mathbf{v} = 0$;
 $\text{div } \mathbf{W} = -2w^2$. **9.23.** 0 вне притягивающих центров. **9.25.** а) 0; б) 0.
9.26. $\text{rot } \mathbf{A} = \frac{5}{4}\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + \frac{5}{2}\mathbf{e}_z$, $|\text{rot } \mathbf{A}(M)| = \frac{1}{4}\sqrt{141}$. **9.27.** а) $\frac{f'(r)}{r}[\mathbf{r} \times \mathbf{C}]$;
б) $2f(r)\mathbf{C} + \frac{f'(r)}{r}[\mathbf{C}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{r})]$. **9.28.** $\text{rot } v = 2w$. **9.30.** $ds^2 =$
 $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 = dR^2 + R^2 \cos^2 \theta d\varphi^2 + R^2 d\theta^2$. **9.31.**
 $dx_i \langle \mathbf{e}_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{E_i}} \delta_{ij}$. **9.32.** $\mathbf{e}_3$, 0, 1. **9.35.** $\omega^3 = \sqrt{E_1 E_2 E_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.
9.39. $\text{div } A = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right]$. **9.40.** $\text{rot } A = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_z$.

9.42. $2\pi^2 b^2$. **9.43.** $8\frac{20}{21} \ln 2$. **9.44.** $\frac{3}{4}(3 + e^4 - 12e^2)$. **9.45.** -12 . **9.46.**

$\int_{r_A}^{r_B} f(r)r \, dr$. **9.50.** $\operatorname{div} A(M) = \frac{18}{125}$; $\Pi = \frac{24}{125}\pi\varepsilon^2$. **9.51.** а) 0; б) πh^3 . **9.52.**

а) 0; б) 0. **9.53.** π . **9.54.** $\frac{3\pi}{8}$. **9.55.** 0. **9.56.** $\frac{\pi}{5}$. **9.58.** $4\pi m$. **9.59.** $\sum_{i=1}^n e_i$.

9.61. $c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$, где c — удельная теплоемкость и ρ — плотность тела. **9.64.** а) 2π ; б) 2π . **9.65.** а) 0; б) $2\pi n$, где n — число оборотов замкнутой кривой C вокруг оси Oz . **9.66.** $\operatorname{rot} A(M) = -e_y - 2e_z$,

$\Gamma = -\pi(\cos \beta + 2 \cos \gamma)\varepsilon^2$. **9.67.** $Q = \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$; $\Gamma = \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$;

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. **8.71.** $u = xyz(x + y + z) + C$. **8.72.** $\frac{1}{3}$. **8.73.**

$u = \frac{m}{r}$. **8.74.** $u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}$, где r_i — расстояние от переменной точки

ки $M(x, y, z)$ до точки M_i ($i = 1, 2, \dots, n$). **8.75.** $u(x, y, z) = \int_{r_0}^r t f(t) \, dt$,

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. **8.76.** $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$.

Предметный указатель

- k -форма, 66, 90
- k -формы
 - базисные, 71
- астроида, 37, 38
- базис
 - отрицательно ориентированный относительно ориентации θ , 86
 - положительно ориентированный относительно ориентации θ , 86
- базисы эквивалентные, 60
- цепь
 - размерности n на многообразии, 102
 - сингулярная
 - n -мерная, 103
- циркуляция векторного поля, 129
- диффеоморфизм, 76
 - сохраняющий ориентацию, 86
 - сохраняющий ориентацию, 100
- дифференцирование
 - внешнее k -формы, 94
 - внешнее на многообразии, 97
- дивергенция, 118
- элемент
 - объема, 67
 - площади сектора, 10
 - потока векторного поля, 91
 - работы векторного поля на перемещении, 9
 - угла поворота, 11
- эллипс, 37
- эпициклоида, 38
- форма
 - Гаусса, 11, 91
 - дифференциальная
 - первой степени, 7
 - дифференциальная степени k , 90
 - длины, 32
 - класса C^r , 91
 - внешняя
 - степени k , 66
 - степени 1, 7
 - степени 2, 64
- формула
 - Бине — Коши, 72
 - Грама, 72
 - Грина, 28
 - вторая в пространстве $\mathbb{R}^3$, 54
 - Коши интегральная, 135
 - Лейбница, 95
 - Ньютона — Лейбница, 16, 27
 - Пуанкаре, 95
 - Стокса — Пуанкаре, 105
- функционал
 - линейный, 56
 - полилинейный, 57
- функция
 - n -линейная, 57
 - аналитическая, 133
 - дифференцируемая, 133
 - гармоническая, 54
 - координатная на $\mathbb{R}$, 12
 - линейная, 56
 - гипоциклоида, 38
 - гомеоморфизм, 63
 - градиент, 118
 - график f , 81
 - граница
 - цепи, 105

ориентированного ограниченного выпуклого полиэдра в $\mathbb{R}^n$, 104
 сингулярного n -мерного полиэдра на многообразии, 105
 интеграл
 n -формы по ориентированному множеству в $\mathbb{R}^n$, 100
 n -формы по сингулярному n -мерному полиэдру, 101
 линейность, 101
 ограниченность, 102
 зависимость от ориентации, 102
 Гаусса, 32, 40, 53
 от n -формы по n -мерной цепи в многообразии, 103
 от 1-формы по ориентированной кривой, 26
 аддитивность, 27
 линейность, 27
 оценка, 27
 ориентированность, 27
 от 1-формы вдоль пути, 14
 аддитивность, 16
 линейность, 15
 ограниченность, 15
 ориентированность, 16
 изоморфизм
 канонический
 $\mathbb{R}^3$ и $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$, 75
 $\mathbb{R}^3$ и $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, 75
 кардиоида, 38
 карта, 76
 коэффициент
 k -формы, 93
 формы первой степени, 9
 компонента линейной связности, 63
 координаты точки, 76
 координаты вектора, 56
 ковариантный n -тензор, 57
 ковектор, 56
 край многообразия, 80
 кривая
 контур, 33
 ориентированная, 26
 лемниската, 37
 многообразие
 n -мерное, 76
 с краем, 79
 дифференцируемое, 76
 многогранник, 101
 модуль
 k -формы, 102
 модуль формы первой степени, 15
 нормаль
 внешняя, 88
 область
 в $\mathbb{R}^2$, примыкающая к ориентированной кривой слева, 28
 в $\mathbb{R}^2$ компактная с кусочно-гладкой границей, 28
 операция
 переноса, 12, 96
 аддитивность, 12, 96
 мультипликативность, 12, 96
 перестановочность с дифференциалом, 12, 96
 закон композиции, 12, 96
 запись в координатах, 12, 96
 замены переменных, 12, 96
 оператор
 Лапласа, 125
 ориентация
 края индуцированная, 87
 многообразия, 84
 отображение

n -линейный оператор, 57
 билинейное, 57
 полилинейное, 57
 трилинейное, 57
 параметризация
 кривой сориентированная, 27
 регулярная, 78
 первообразная, 16
 поле
 потенциальное, 130
 скалярное, 117
 векторное, 82, 117
 соленоидальное, 131
 полиэдр, 101
 сингулярный
 n -мерный, 101
 n -мерный отрицательный
 по отношению к σ , 102
 полупространство, 79
 порядок кривой, 110
 потенциал
 логарифмический
 двойного слоя, 40
 простого слоя, 40
 поля, 130
 векторный, 131
 поток векторного поля, 127
 принцип максимума, 55
 признак
 интегрируемости 1-формы по
 ориентированной кривой,
 27
 произведение
 функции и k -формы, 92
 скалярное, 62, 82
 внешнее
 k базисных 1-форм, 70
 k -формы на l -форму, 73
 двух 1-форм, 68
 внешнее скалярных 1-форм,

92
 внутреннее
 скалярное, 67
 пространства
 гомеоморфные, 63
 топологически изоморфные,
 63
 пространство
 линейно связное, 62
 сопряженное, 7
 касательное, 82
 путь
 кусочно-гладкий, 14
 ориентированный, 13
 параметризованный, 13
 работа векторного поля, 126
 ротор, 118
 симплекс, 106
 стандартный, 106
 сингулярный одномерный проме-
 жуток, 13
 система координат, 76
 линейная, 56
 система ориентированных кривых
 правильная, 28
 сумма
 внешних дифференциальных
 форм, 92
 сумма форм, 66
 теорема
 Коши интегральная, 134
 о координатном представле-
 нии дифференциальных
 форм, 92
 о среднем для гармонических
 функций, 55
 первая о выпрямлении, 77
 вторая о выпрямлении, 78
 условия
 Коши — Римана, 133

- векторное пространство
 - дуальное, 56
 - сопряженное, 56
- внешнее произведение дифференциальных форм, 93
- внешнее произведение дифференциальных форм в координатах, 94
- значение формы в точке на векторах, 91
- 1-форма, 7, 56
- 1-формы
 - базисные, 69
- 2-форма, 64
- 2-тензор
 - положительно определенный, 67
 - симметричный, 67

Список литературы

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Едиториал УРСС. 2003.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ, 2009.
3. В. А. Зорич. Математический анализ. Т. 2. М.: МЦНМО, 2007.
4. Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Т. 3. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ. 2003.
5. Решетняк Ю. Г. Сборник задач по курсу математического анализа. Новосибирск.: НГУ, 1973.
6. Ю. Г. Решетняк. Курс математического анализа. Т. 1, 2. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001.
7. М. Спивак. Математический анализ на многообразиях. Изд. 2. М. 2005.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1–3. М.: Наука, 1969.
9. Шведов И. А.
 1. Курс лекций по математическому анализу для студентов 1-го курса ММФ (2 семестр). Новосибирск, НГУ. 1997. 44 стр. 66. Математический анализ. Функции одной вещественной переменной. Новосибирск, НГУ. 1999. 57 стр.
 2. Метрические и топологические основы математического анализа Новосибирск, НГУ. 2000, 23 стр.
 3. Компактный курс математического анализа. Часть 1. Функции одной переменной. Новосибирск, изд-во НГУ, 2001. 108 с.
 4. Компактный курс математического анализа. Часть 2. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Новосибирск, изд-во НГУ, 2001. 64 с.
 5. Компактный курс математического анализа. Часть 3. Теория интеграла. Новосибирск, изд-во НГУ, 2002. 48 с.