

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ОРИЕНТИРОВОЧНЫЙ ПЛАН СЕМИНАРОВ, 1 СЕМЕСТР

1. Вещественные числа.

1.1. Аксиоматика вещественных чисел.

«Школьное» представление о числе как модель поля действительных чисел.

33

1.2. Абсолютная величина числа. 21, 27

1.3. Математической индукция. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона.

$$2, 5, 6, 8; C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}, \sum_{s=0}^k C_n^s C_n^{k-s} = C_{n+m}^k, \\ \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

1.4. Нахождение (точных) верхних и нижних границ числового множества. Ограниченные множества. 16, 18, 19, 20; [P] 1.21*.

2. Множества и элементарные операции над ними.

2.1. Задачи на равенства между множествами. [P] 1.2, 1.3, 1.4*; [K] 1.4, 1.14

2.2. Общее понятие функции и отображения. Построение эскизов графиков функций.

318, 319, 320; [P] 1.22, 1.41, 1.42, 1.23.

2.3. Доказательство счетности множества рациональных чисел. [P] 1.34, 1.39*; [K] 1.28, 1.30

2.4. Нахождение точных нижних и верхних границ вещественных функций (последовательностей). [P] 1.19, 1.20;

3. Предел последовательности.

3.1. Вычисление предел последовательностей. 58–66, 127–130, 138.

3.2. Применения критерия Коши. 84–86, 88

3.3. Монотонные последовательности. 80, 81, 90, 637, 639.2.

3.4. Число e . Представление e в виде ряда. 69, 72, 74, 75.а, 76, 147,

3.5. Частичные пределы последовательности. 112, 116, 118, 119, 122, 123, 126, 136; [P] 2.4; [K] 8.54.

3.6. Верхний и нижний пределы последовательности. Свойства верхних и нижних пределов. 102, 111, 131, 133, 134, 135, 642, 643, 644; [K] 8.170, 8.171.

4. Топология вещественной прямой.

4.1. Нахождение предельных и изолированных точек множества. 16; [P] 2.3, 2.76, 2.78.

4.2. Проверка замкнутости и открытости множеств на вещественной прямой. $(-1, 1)$ — открытое множество; множество $\text{Lim } A$ замкнуто; функция, определенная на отрезке числовой прямой, непрерывна тогда только тогда, когда ее график есть компактное множество.

5. Предел функции.

5.1. Нахождение пределов функций «по определению».

401, 402, 403–407; [K] 9.7, 9.8.

5.2. Вычисление пределов. 409, 418, 425, 437, 444, 455, 471, 474, 474.1, 482, 511, 512, 514, 523, 531, 541, 544, 552, 560, 561, 570, 573, 575, 576б, 606, 607, 608а, 642, 644а.

5.3. Применение символов O и o , правила оперирования с ними. Основные разложения. 452, 478, 494, 646б, 647б, 650г, 654, 655; [P] 2.55.

6. Непрерывные функции. Элементарные функции.

6.1. Нахождение точек непрерывности и точек разрыва функции. Определение типа разрыва. 383, 666, 679, 680, 681, 691, 696, 702, 714, 730, 731, 734–736; [P] 2.75.

6.2. Основные элементарные функции. 674е, 679, 681,

6.3. Равномерная непрерывность. 789, 792, 795, 796, 798, 800, 801, 1255.

6.4. Основные теоремы о непрерывных функциях. 741–743, 754, 755, 1034, 1049; [P] 2.75, 2.30, 2.32, 2.44, 2.45*, 2.49; [K] 10.33–10.36, 10.42, 10.71.

7. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

7.1. Исследование функции на дифференцируемости в точке. Геометрический смысл понятия производной. Касательная. Физические приложения понятия производной.

827, 828(б-е), 991, 992, 987, 993, 997, 1004, 1009, 1057, 1062, 1072, 1075, 1078, 1081; [P] 3.40*.

7.2. Вычисление производной. 843, 844, 867, 869, 885, 901, 920, 951, 957, 961, 969, 978б, 987, 1040, 1050, 1052, 1073, 1099.

7.3. Нахождение производных высших порядков. 1130, 1136, 1161, 1177, 1178, 1224, 1225, 1227, 1231, 1160–1162.

7.4. Применение теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши о конечных приращениях. 1238, 1240, 1241*, 1243, 1246.1, 1251–1254, 1261, 1265.

7.5. Формула Тейлора. Различные виды остаточных членов. 1381–1383, 1384, 1386, 1387, 1389, 1393, 1393.(2-3), 1394, 1395, 1398, 1401, 1402, 1404; [P] 3.33.

8. Применения дифференциального исчисления.

8.1. Применение правила Лопиталя раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

1322, 1326, 1341, 1346, 1348, 1349, 1356, 1363, 1363.1, 1366, 1371.1, 1374а, 1405.

8.2. Исследование функций методами дифференциального исчисления. Дифференциальный признак монотонности функции. 1275, 1276, 1280–1282, 1284, 1287, 1289(а,г), 1290, 1296.

Условие внутреннего экстремума функции (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции, достаточные условия). 1414, 1420, 1425, 1428, 1434, 1437, 1438, 1448, 1455, 1456, 1558, 1559; [P] 3.5.

Дифференциальные признаки выпуклости функции. Точка перегиба функции. 1301, 1307, 1312–1317; [Р] 3.59, 3.76.

Построение графика функции. 1308, 1428, 1474, 1504.1, 1510, 1526, 1532, 1534, 1536; [К] 21.6, 21.13, 21.20, 21.24, 21.31.

9. Числовые ряды, степенные и функциональные ряды.

9.1. *Сходимость рядов.* Понятие сходящегося ряда. Необходимый признак сходимости. Критерий сходимости Коши. 2548, 2552, 2553, 2555, 2562, 2564, 2568, 2569, 2575, 2575.1, 2576, 2577, 2588.

9.2. *Признаки сравнения Даламбера, Коши. Телескопический признак сходимости. Гармонический ряд.* 2574, 2617, 2619, 2679, 2581, 2582, 2585.1, 2588, 2591, 2586, 2587, 2589.

9.3. *Степенные ряды.* Понятие степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда. Формула Коши — Адамара для радиуса сходимости степенного ряда. 2812, 2814, 2816, 2822, 2827, 2828, 2831, 2831.2, 2832.

ОРИЕНТИРОВОЧНЫЙ ПЛАН СЕМИНАРОВ, II СЕМЕСТР

1. Ряды.

все задачи взяты из Демидовича!

1.1. Абсолютная сходимость. Признаки абсолютной сходимости.

Обсудить определение абсолютной сходимости. Повторить известные признаки сходимости:

необходимый признак, критерий Коши — 2573–2577;

телескопический — 2619–2622;

Коши и Даламбера — 2578–2590; 2593;

Раабе и Гаусса — 2598–2604.

1.2. Условная сходимость. Признаки условной сходимости.

Обсудить определение условной сходимости, привести определение знакопеременного гармонического ряда и показать их основное отличие от абсолютной сходимости: при перестановке слагаемых сумма ряда может меняться. Теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов.

2659–2666.

Применение признаков Абеля и Дирихле для исследования задач на сходимость

2667–2698.

1.3. Степенные ряды и теорема об умножении рядов.

Свойства суммы степенного ряда. Операции над степенными рядами. Теорема Абеля о непрерывности степенного ряда на границе круга сходимости.

2812–2830.

1.4. Функциональные последовательности и ряды.

Понятие функционального ряда. Поточечная сходимость.

2716–2736.

Критерий Коши равномерной сходимости. Примеры. Критерий Вейерштрасса равномерной сходимости. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости. Равномерная сходимость и непрерывность.

Равномерная сходимость последовательностей функций —

2746–2764;

и рядов — 2774–2782.

Теорема Дини о равномерной сходимости монотонной последовательности непрерывных функций.

1.5. Теорема о перестановке предельного перехода. Теорема непрерывности предельной функции. Теорема о дифференцировании суммы ряда.

Теорема непрерывности предельной функции.
2763–2765.

Теорема о дифференцировании суммы ряда.
2799–2801; 2906–2910.

2. Нахождение первообразных.

2.1. Первообразная и неопределенный интеграл. Их свойства. Таблица основных интегралов. Основные общие приемы отыскания первообразной.

1654–1673.

2.2. Замена переменных и интегрирование по частям.
1674–1720, 1778–1834.

2.3. Первообразные рациональных функций.
1866–1886.

2.4. Первообразные тригонометрических функций и функций специального вида.
1926–1932, 2025–2030.

3. Определенный интеграл.

3.1. Вычисление интегралов по формуле Ньютона — Лейбница.

3.2. Формула интегрирования по частям. Формула замены переменной.
2239–2249, 2261–2280.

3.3. Интеграл и предельный переход.
2802–2805.

3.4. Некоторые приложения интеграла.

Длина пути. Площади геометрических фигур. Объем тела вращения. Работа и энергия.

2396–2430, 2431–2455.

3.5. *Несобственный интеграл.* Определения, примеры и основные свойства несобственных интегралов. Критерий сходимости несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

2334–2347.

3.6. *Исследование сходимости несобственных интегралов.* Признаки сравнения. Основные признаки сходимости: Вейерштрасса, Абеля, Дирихле.

2358–2377, 2378–2383.

11. Топология многомерного евклидова пространства.

11.1. *Метрические структуры в $\mathbb{R}^n$. Понятие окрестности. Точки прикосновения, предельные и изолированные точки по отношению к данному множеству.*

11.2. *Замкнутые и открытые множества.*

Понятие замыкания множества. Понятие границы и ее свойства.

Открытые множества. Их свойства.

[Гр] раздел 22.2

11.3. *Предел последовательности в метрическом пространстве. Предельная точка последовательности и частичный предел.*

11.4. *Понятие предела функции.*

Эквивалентные определения. Свойства предела. Теорема о суперпозиции. Предел по Гейне. Эквивалентность определений предела по Гейне и по Коши.

3181–3203.

11.5. *Компактные множества в метрическом пространстве.*

Свойства компактных множеств. Понятие полной ограниченности. Эквивалентные определения компактных множеств в метрических пространствах. Компактные множества в многомерных евклидовых пространствах. Теорема о непрерывном образе компактного множества. Теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях.

11.6. *Равномерно непрерывные отображения.*

Теорема Кантора. Теорема о продолжении равномерно непрерывных отображений, определенных на плотном множестве.

794–808.

12. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

12.1. Линейная структура в $\mathbb{R}^n$.

Линейные преобразования из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Нормы в $\mathbb{R}^n$. Евклидова структура в $\mathbb{R}^n$. Нормы линейных отображений.

12.2. Дифференциал функций многих переменных.

Дифференцируемость и дифференциал функции в точке. Дифференциал и частные производные.

3213–3231.

Координатное представление дифференциала. Отображения. Матрица Якоби. Непрерывность, частные производные и дифференцируемость функции в точке.

3235–3241, 3288–3310.

12.3. Основные правила дифференцирования.

Линейность операции дифференцирования. Дифференцирование суперпозиции дифференцируемых отображений.

12.4. Теорема о конечных приращениях.

Теорема Эйлера об однородных функциях. Понятие градиента.

Литература, рекомендуемая для работы на семинарах

[Г] Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе*. — М.: Мир, 1967.

[Гр] Грешнов А. В., Малюгин С. А., Потапов В. Н. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. — Новосибирск: изд. НГУ, 2009.

[Д] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. — М.: Наука, 1977.

[К] Кудрявцев Л. Д. и др. *Сборник задач по математическому анализу*. — Санкт-Петербург: Кристалл, 1994.

[Р] Решетняк Ю. Г. *Сборник задач по курсу математического анализа*. — Новосибирск: изд. НГУ, 1973.