

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Ориентировочный план семинаров, 3 семестр, 2010

## 1. Функции многих переменных.

### 1.0. Непрерывность.

ЗАДАЧА. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

*Решение.*

*Шаг 1: Выявить проблемные точки.* Всюду, где знаменатель не обращается в нуль, функция непрерывна как композиция непрерывных функций.

$$x^2 y^2 + (x - y)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, y = 0.$$

Необходимо исследовать поведение функции только в окрестности нуля.

*Шаг 2: Проверить существование или отсутствие двойного предела в нуле.* Чтобы доказать, что предела не существует, достаточно найти два направления, по которым пределы различны. Например:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = 0}} f(x, y) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x}} f(x, y) = 1.$$

**НЕВЕРНО!** Проверять существование и равенство повторных пределов. В данном случае

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0,$$

однако двойного предела не существует.

### 1.1. Дифференциал и его свойства.

НАДО знать: определения дифференцируемости и частных производных.

НАДО уметь:

1) исследовать функцию на дифференцируемость (Д.: 3212 (все пункты), 3252, 3253).

ЗАДАЧА. Исследовать на дифференцируемость функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq 0; \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases}$$

*Решение.*

*Шаг 1: Выявить проблемные точки.* Всюду, где знаменатель не обращается в нуль, функция дифференцируема как композиция дифференцируемых функций. Необходимо исследовать поведение функции только в нуле.

*Шаг 2: Проверить, является ли функция непрерывной в нуле.* Проверим, что  $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, 0)$ .

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } (x, y) \rightarrow 0.$$

*Шаг 3: Проверить существование частных производных в нуле и найти их.* Находим по определению:

$$f_x(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0; \quad \text{аналогично } f_y(0) = 0.$$

*Шаг 4: Составляем линейный функционал из частных производных и проверяем, приближает ли он исходную функцию.* В случае дифференцируемости должно быть выполнено

$$f(x, y) = f(0) + f_x(0) \cdot x + f_y(0) \cdot y + o(\|x, y\|).$$

В рассматриваемом случае удобнее использовать евклидову норму:  $\|x, y\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Имеем

$$\frac{f(x, y) - f(0) - f_x(0)x - f_y(0)y}{\|x, y\|_2} = \frac{xy}{x^2 + y^2} \not\rightarrow 0.$$

Например, при  $x = y$  имеем  $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \neq 0$ .

*Вывод.* Данная функция недифференцируема в нуле.

2) Записывать дифференциал в координатной форме (Д.: 3294, 3297, 3300).

3) Дифференцировать сложную функцию (Д.: напишите любые два-три примера из Демидовича на эту тему).

ЗАДАЧА. Найти дифференциал сложной функции  $f(x, y)$ , где

$$f(x, y) = g\left(x, \frac{x}{y}\right).$$

Пусть  $g = g(u, v)$ , где  $u = u(x, y) = x$ ,  $v = v(x, y) = \frac{x}{y}$ . Тогда

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv \\ &= \frac{\partial g}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial g}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u} dx + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{1}{y} dx + \frac{\partial g}{\partial v} \left( -\frac{x}{y^2} \right) dy \\ &= \left( \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{1}{y} \right) dx - \frac{\partial g}{\partial v} \frac{x}{y^2} dy. \end{aligned}$$

4) Оценивать приращение функции по теореме о конечных приращениях (Д.: 3245, 3254, 3255).

ЗАДАЧА. Приближая функцию дифференциалом, вычислить  $1.006 \cdot 3.004^3$  и оценить погрешность вычислений.

Решение: 1. Функция  $f(x, y) = xy^3$  дифференцируема в точке  $x = 1$ ,  $y = 3$  и ее дифференциал равен

$$df = y^3 dx + 3xy^2 dy = 27 dx + 27 dy.$$

2. Для произвольного приращения аргумента  $h = (h_1, h_2)$  вычисляем требуемое значение по приближенной формуле

$$\begin{aligned} f(x + h_1, y + h_2) &\approx f(x, y) + df(x, y) \langle h_1, h_2 \rangle \\ &= xy^3 + y^3 \cdot h_1 + 3xy^2 \cdot h_2. \end{aligned}$$

Подставляя значения  $x = 1$ ,  $y = 3$ ,  $h_1 = 0.006$ ,  $h_2 = 0.004$ , получаем

$$\begin{aligned} f(1.005, 3.002) &\approx f(1, 3) + 3^3 \cdot 0.006 + 3 \cdot 3^2 \cdot 0.004 \\ &= 27 + 27 \cdot 0.006 + 27 \cdot 0.004 = 27.270. \end{aligned}$$

3. Оценим погрешность полученного значения, используя теорему о конечных приращениях:

$$\begin{aligned} & \|f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) - df(x, y)\langle h_1, h_2 \rangle\| \\ & \leq \max_{t \in [0,1]} \|df(x + th_1, y + th_2) - df(x, y)\| \cdot \|(h_1, h_2)\|. \end{aligned}$$

Здесь  $\|(h_1, h_2)\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ . Норма линейной функции  $\mathbb{R}^3 \ni (h_1, h_2) \mapsto ah_1 + bh_2$  по неравенству Коши — Буняковского равна

$$\sup_{\|(h_1, h_2)\|=1} |ah_1 + bh_2| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} & df(x + th_1, y + th_2) - df(x, y) \\ & = (3 + t \cdot 0.004)^3 dx + 3(1 + t \cdot 0.006)(3 + t \cdot 0.004)^2 dy - (27 dx + 27 dy) \\ & = ((3 + t \cdot 0.004)^3 - 3^3) dx + (3(1 + t \cdot 0.006)(3 + t \cdot 0.004)^2 - 3^3) dy. \end{aligned}$$

Для оценки погрешности вычисления остается лишь найти

$$\max_{t \in [0,1]} \sqrt{((3 + t \cdot 0.004)^3 - 3^3)^2 + (3(1 + t \cdot 0.006)(3 + t \cdot 0.004)^2 - 3^3)^2}.$$

Верно ли, что этот максимум достигается при  $t = 1$ ?

### 1.2. Дифференциалы высших порядков.

НАДО знать: индукционное определение дифференциала любого порядка и его свойства.

НАДО уметь:

1) Вычислять частные производные любого порядка (Д.: любые 2-3 задачи из серии 3256–3285).

3273. Найти полный дифференциал  $d^3u$ , если  $u = xyz$ .

*Решение.* Полный дифференциал  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$ . Таким образом, для его вычисления нам понадобятся частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= yz, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= xz, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= xy. \end{aligned}$$

$$du = yzdx + xzdy + xydz.$$

Второй дифференциал:

$$\begin{aligned} d^2u &= d(du) = d(yz)dx + d(xz)dy + d(xy)dz = \\ &= (zdy + ydz)dx + (zdx + xdz)dy + (ydx + xdy)dz = \\ &= 2zdx dy + 2xdy dz + 2ydx dz. \end{aligned}$$

Третий дифференциал:

$$d^3u = d(d^2u) = d(2z)dx dy + d(2x)dy dz + d(2y)dx dz = 6dx dy dz.$$

3274. Найти полный дифференциал  $d^4u$ , если  $u = \ln(x^x y^y z^z)$ .

*Решение.* Преобразуем функцию  $u$  к более удобному виду

$$u = \ln(x^x y^y z^z) = \ln(x^x) + \ln(y^y) + \ln(z^z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z.$$

Полный дифференциал  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$ . Таким образом, для его вычисления нам понадобятся частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \ln x + 1, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \ln y + 1, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \ln z + 1. \end{aligned}$$

Получаем первый дифференциал

$$du = (\ln x + 1)dx + (\ln y + 1)dy + (\ln z + 1)dz.$$

Второй дифференциал

$$\begin{aligned} d^2u &= d(du) = d(\ln x + 1)dx + d(\ln y + 1)dy + d(\ln z + 1)dz = \\ &= \frac{1}{x} dx dx + \frac{1}{y} dy dy + \frac{1}{z} dz dz = \frac{1}{x} dx^2 + \frac{1}{y} dy^2 + \frac{1}{z} dz^2. \end{aligned}$$

Третий дифференциал

$$\begin{aligned} d^3u &= d(d^2u) = d\left(\frac{1}{x}\right)dx^2 + d\left(\frac{1}{y}\right)dy^2 + d\left(\frac{1}{z}\right)dz^2 = \\ &= -\frac{1}{x^2} dx^3 - \frac{1}{y^2} dy^3 - \frac{1}{z^2} dz^3. \end{aligned}$$

Четвертый дифференциал

$$\begin{aligned} d^4u &= d(d^3u) = d\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx^3 + d\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy^3 + d\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz^3 \\ &= \frac{2}{x^3}dx^4 + \frac{2}{y^3}dy^4 + \frac{2}{z^3}dz^4. \end{aligned}$$

2) Записывать дифференциал любого порядка в координатной форме (Д.: 3240, 3242, 3301, 3304).

3301 Найти полные дифференциалы первого и второго порядка функции  $u = f(\xi, \eta, \zeta)$ , где  $\xi = x^2 + y^2$ ,  $\eta = x^2 - y^2$ ,  $\zeta = 2xy$ .

*Решение.* Первый дифференциал:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)dy \\ &= \left(2x\frac{\partial f}{\partial \xi} + 2x\frac{\partial f}{\partial \eta} + 2y\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)dx + \left(2y\frac{\partial f}{\partial \xi} - 2y\frac{\partial f}{\partial \eta} + 2x\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)dy. \end{aligned}$$

Второй дифференциал:

$$\begin{aligned} d^2u &= d(du) = d\left(2x\frac{\partial f}{\partial \xi} + 2x\frac{\partial f}{\partial \eta} + 2y\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)dx + d\left(2y\frac{\partial f}{\partial \xi} - 2y\frac{\partial f}{\partial \eta} + 2x\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)dy = \\ &= \left(2\frac{\partial f}{\partial \xi} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} + 2\frac{\partial f}{\partial \eta} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \right. \\ &\quad \left. 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \zeta} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \xi} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \eta} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right)dx^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} - 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \zeta} + 2 \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \right. \\
& \quad \left. 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \xi} - 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \eta} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \right) dy dx + \\
& \left( 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} - 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} - 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \zeta} + 2 \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \right. \\
& \quad \left. 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \xi} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \eta} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \right) dx dy + \\
& \left( 2 \frac{\partial f}{\partial \xi} + 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} - 2 \frac{\partial f}{\partial \eta} - 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} + 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \right. \\
& \quad \left. 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \zeta} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \xi} - 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \eta} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \right) dy^2 = \\
& \left( 2 \frac{\partial f}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial f}{\partial \eta} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} + 8x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + 8xy \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} + 8xy \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \zeta} \right) dx^2 + \\
& \left( 4 \frac{\partial f}{\partial \zeta} + 8xy \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + (8x^2 + 8y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} - 8xy \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + (8x^2 - 8y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \zeta} + 8xy \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \right) dx dy + \\
& \left( 2 \frac{\partial f}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial f}{\partial \eta} + 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} - 8y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + 8xy \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} - 8xy \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \zeta} \right) dy^2
\end{aligned}$$

3) Работать с выражениями, содержащими частные производные высоких порядков (Д.: 3305, 3306, 3309, 3310).

### 1.3. Формула Тейлора.

НАДО знать условия, при которых можно записать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, Лагранжа, Коши.

НАДО уметь:

1) Написать формулу Тейлора для конкретной функции и оценивать остаточный член (Д.: 3285–3288).

Формула Тейлора до  $k$ -го порядка включительно с остаточным членом в форме Пеано для функции  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + Df(x)\langle h \rangle + \frac{1}{2!}D^2f(x)\langle h \rangle + \dots + \frac{1}{k!}D^kf(x)\langle h \rangle + o(|h|^k) \\
&= \sum_{j=0}^k \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = j}} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^j f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n} + o(|h|^k), \quad (1)
\end{aligned}$$

где приращение  $h \in \mathbb{R}^n$  таково, что  $x+h \in U$ .

*Задача;* Написать разложение в ряд Тейлора функции  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  в окрестности точки  $M = (1, 0, 1)$ .

*Решение:* Поскольку эта функция — полином третьего порядка, она совпадает со своим разложением в ряд Тейлора третьего порядка.

*Шаг 1.* Находим частные производные функции  $f$  до третьего порядка включительно.

$$\begin{aligned}
f_x &= 3x^2 - 3yz, & f_y &= 3y^2 - 3xz, & f_z &= 3z^2 - 3xy, \\
f_{xx} &= 6x, & f_{yy} &= 6y, & f_{zz} &= 6z, & f_{xy} &= -3z, & f_{xz} &= -3y, & f_{yz} &= -3x, \\
f_{xxx} &= f_{yyy} = f_{zzz} = 6, & f_{xyz} &= -3,
\end{aligned}$$

остальные частные производные третьего порядка равны нулю.

*Шаг 2.* Найдем частные производные в точке  $M$ :

$$\begin{aligned}
f(M) &= 2, & f_x(M) &= 3, & f_y(M) &= -3, & f_z(M) &= 3, \\
f_{xx}(M) &= 6, & f_{yy}(M) &= 0, & f_{zz}(M) &= 6, & f_{xy}(M) &= -3, \\
f_{xz}(M) &= 0, & f_{yz}(M) &= -3, \\
f_{xxx}(M) &= f_{yyy}(M) = f_{zzz}(M) = 6, & f_{xyz}(M) &= -3.
\end{aligned}$$

*Шаг 3.* Подставляем это в формулу Тейлора (8) (у нас теперь роль  $x$  из формулы (8) играет точка  $M = (1, 0, 1)$ , а роль  $h$  играет вектор приращения  $(x, y, z) - (1, 0, 1) = (x-1, y, z-1)$ ):

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= 2 + 3(x-1) - 3y + 3(z-1) + 3(x-1)^2 + 3(z-1)^2 - 3(x-1)y - 3y(z-1) + \\
&\quad + (x-1)^3 + y^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)y(z-1).
\end{aligned}$$

2) Пользоваться асимптотическими свойствами формулы Тейлора (Д.: 3600–3603).

**Теорема 1.** Если  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  — отображение открытого множества  $U$  нормированного пространства  $\mathbb{R}^n$  в нормированное пространство  $\mathbb{R}^k$  имеет  $m$ -ый дифференциал  $D^m f(a)$  в точке  $a \in U$  и найдены такие элементы  $c_\alpha \in \mathbb{Y}$ , что

$$f(a + h) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{c_\alpha}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^n) \quad \text{при } \mathbb{X} \ni h \rightarrow 0,$$

то имеют место равенства

$$c_\alpha = D^\alpha f(a) \quad \text{для всех } |\alpha| \leq m.$$

*Задача:* В выражении  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  произведем следующие действия:

$$f(x, y, z) = ((x-1)+1)^3 + y^3 + ((z-1)+1)^3 - 3((x-1)+1)y((z-1)+1).$$

После этого возведем выражение в куб и приведем подобные члены. В результате получим многочлен, написанный на последнем шаге предыдущей задачи. *Объяснить результат!*

*Задача:* Написать формулу Тейлора в точке  $(0,0)$  до порядка 5 включительно для следующих функций:

- 1)  $e^x \sin y$ ;
- 2)  $\cos x \ln(1+y)$ ;
- 3)  $\ln(1+x) \ln(1+y)$ .

*Решение:*

1) Обозначим  $f(x, y) = e^x \sin y$ . Нам понадобятся следующие элементарные соотношения:

$$x^k y^m = o((\sqrt{x^2 + y^2})^{k+m-1}),$$

$$o(x^k) y^m = o((\sqrt{x^2 + y^2})^{k+m}), \quad o(x^m) y^k = o((\sqrt{x^2 + y^2})^{k+m}).$$

Имеем

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 + o(y^5).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & f(x, y) \\ &= y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 + xy - \frac{1}{6}xy^3 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{12}x^2y^3 + \frac{1}{6}x^3y + \frac{1}{24}x^4y + o((\sqrt{x^2 + y^2})^5). \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда, согласно теореме 1, сформулированной выше, получаем полином Тейлора 5-го порядка в точке  $(0, 0)$ :

$$P(x, y) = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 + xy - \frac{1}{6}xy^3 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{12}x^2y^3 + \frac{1}{6}x^3y + \frac{1}{24}x^4y,$$

и значения частных производных:

$$f_y(0) = 1, \quad f_{xy}(0) = 1, \quad f_{yyy}(0) = -1, \quad f_{xxy} = 1,$$

$$f_{xyyy}(0) = -1, \quad f_{yxxx}(0) = 1,$$

$$f_{xxyyy} = -1, \quad f_{xxxxy}(0) = 1, \quad f_{yyyyy}(0) = 1;$$

остальные производные порядка не выше 5 равны нулю. Можно решить эту задачу и по-другому, заметив, что

$$\frac{\partial^{k+2l+1} f}{\partial x^k \partial^{2l+1} y}(0) = (-1)^l \quad \text{и} \quad \frac{\partial^{k+2l} f}{\partial x^k \partial^{2l} y}(0) = 0.$$

#### 1.4. Исследование функций на экстремум.

НАДО знать необходимые и достаточные условия экстремумов.

НАДО уметь:

1) Исследовать функцию на экстремум (Д.: любые 3-4 задачи из серии 3621–3674),

*Задача 3624* из Демидовича: Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y.$$

*Решение:* Функция  $z$  гладкая и ее область определения совпадает с  $\mathbb{R}^2$ .

*Шаг 1.* Найдем критические точки функции  $z$ , т. е., точки  $(x_0, y_0)$ , в которых дифференциал  $z$  равен 0. Дифференциал  $z$  всюду определен и равен

$$dz = (2x - y - 2) dx + (2y - x + 1) dy.$$

$$dz = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2 = 0, \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Точка  $(1, 0)$  является подозрительной на экстремум.

*Шаг 2.* Критическая точка  $(1, 0)$  является точкой локального минимума, если  $d^2z(1, 0)\langle h, h \rangle > 0$  на сфере  $|h| = 1$ ; и точкой локального максимум, если  $d^2z(1, 0)\langle h, h \rangle < 0$  на сфере  $|h| = 1$ .

Напишем  $d^2z$  в точке  $(1, 0)$ :

$$d^2z = 2(dx)^2 - 2dx dy + 2(dy)^2 = (dx - dy)^2 + dx^2 + dy^2.$$

(Заметим, что  $d^2z$  не зависит от точки.) Покажем, что квадратичная форма  $d^2z$  положительно определена. Возьмем произвольный единичный вектор  $h = (h_1, h_2)$ ,  $h_1^2 + h_2^2 = 1$ . Тогда

$$d^2z\langle h, h \rangle = (h_1 - h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2 \geq h_1^2 + h_2^2 = 1 > 0.$$

Следовательно, точка  $(1, 0)$  является точкой локального минимума функции  $z$ , а  $z(1, 0) = -1$  — ее минимальным значением.

*Показать*, что в данной задаче это локальное минимальное значение будет также и глобальным, т. е.  $-1$  — наименьшее значение функции  $z$ , определенной на плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

*Задача* (Кудрявцев, 3, стр. 95): Исследовать на экстремум функцию трех переменных

$$u = 3x^2 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1.$$

*Решение:* Функция очевидно дифференцируема.

*Шаг 1.* Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 9x^2 + 6y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 6x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2.$$

Находим стационарные точки, приравнявая производные к нулю.

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 0, \\ y + 3x = 0, \\ z - 1 = 0. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Два решения:} \\ A(2, -6, 1), \quad B(0, 0, 1). \end{array}$$

*Шаг 2.* Находим частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 16x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

Матрица вторых производных второго дифференциала  $d^2u$  равна

$$J = \begin{pmatrix} 18x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Шаг 3.* Исследуем квадратичную форму  $d^2u\langle h, h \rangle$  с матрицей  $J$  на знакоопределенность, используя критерий Сильвестра:

$$\Delta_1 = 18x, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 18x & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = 36(x - 1), \quad \Delta_3 = \det J = 72(x - 1).$$

В точке  $A(2, -6, 1)$  получаем  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0$ , следовательно  $A$  является точкой локального минимума.

В точке  $B(0, 0, 1)$  имеем  $\Delta_1 = 0$ , и значит критерий Сильвестра в этом случае неприменим. Заметим, что

$$u(0, 0, 1) = 0, \quad u(x, 0, 1) = 3x^3 > 0 \text{ при } x > 0, \\ < 0 \text{ при } x < 0.$$

То есть в окрестности точки  $B$  функция  $u$  принимает значения, как большие  $u(B)$ , так и меньшие  $u(B)$ . Следовательно, точка  $B$  не является точкой локального экстремума.

### 1.5. Теорема о неявной функции.

НАДО знать формулировку теоремы о неявной функции в общем виде и ее частные формулировки в малых размерностях.

Рассмотрим функцию  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , определенную равенством  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Если точка  $(a, b)$  выбрана так, что  $f(a, b) = 0$ , причем  $a \neq 1, -1$ , то существуют такие открытые интервалы  $V$  и  $W$ , содержащие соответственно  $a$  и  $b$ , что для всякого  $x \in V$  существует единственное  $y \in W$ , для которого  $f(x, y) = 0$ .

Поэтому можно определить функцию  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  условиями  $g(x) \in W$  и  $f(x, g(x)) = 0$  (если  $b > 0$ , то  $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ). Для рассматриваемой нами функции  $f$  имеется еще одно число:  $-b$ , при котором  $f(a, -b) = 0$ . Так же, как и в предыдущем случае, существует такой интервал  $W_1$ , содержащий  $-b$ , что если  $x \in V$ , то  $f(x, g_1(x)) = 0$  для однозначно определенного  $g_1(x) \in W_1$  (здесь  $g_1(x) = -g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ). Обе функции  $g$  и  $g_1$  дифференцируемы. Их называют *неявными функциями*, определенными уравнением  $f(x, y) = 0$ . При  $a = 1$  или  $-1$  невозможно найти ни одной такой функции  $g$ , определенной в открытом интервале, содержащем  $a$ . Наша задача — найти простые условия, позволяющие решать, когда вообще можно найти такую функцию.

В более общей постановке вопрос можно поставить так: пусть  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  и  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , причем  $f(a_1, \dots, a_n, b) = 0$ ; когда для каждого  $(x_1, \dots, x_n)$  вблизи  $(a_1, \dots, a_n)$  можно найти единственное  $y = y(x_1, \dots, x_n)$  вблизи  $b$ , для которого бы

$$f(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)) = 0?$$

Еще более общим образом можно задаться вопросом об условиях разрешимости системы уравнений, зависящих от переменных  $x_1, \dots, x_n$ , относительно  $m$  неизвестных функций: пусть

$$f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,$$

причем

$$f_i(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Когда для каждого  $(x_1, \dots, x_n)$  вблизи  $(a_1, \dots, a_n)$  можно найти единственное

$$(y_1, \dots, y_m) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$$

вблизи  $(b_1, \dots, b_m)$ , удовлетворяющее уравнениям

$$f_i(x_1, \dots, x_n; y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)) = 0, \quad i = 1, \dots, m?$$

Ответ дает следующая теорема о неявной функции.

**Теорема 2.** Предположим, что на открытом множестве  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  определено непрерывно дифференцируемое отображение  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$U \ni (x; y) = (x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) \mapsto f(x; y) \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

и  $f(a; b) = 0$ , где  $(a; b) \in U$  — некоторая точка,  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Пусть  $(m \times m)$ -матрица определяется выражением

$$M = \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a; b) \right), \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (3)$$

Тогда если  $\det M \neq 0$ , то существуют открытое множество  $V \subset \mathbb{R}^n$ , содержащее  $a$ , и открытое множество  $W \subset \mathbb{R}^m$ , содержащее  $b$ , со следующим свойством: для всякого  $x \in V$  имеется единственное  $g(x) \in W$ , для которого  $f(x; g(x)) = 0$ . При этом функция  $g : V \rightarrow W$  дифференцируема.

Зная, что функция  $g$  дифференцируема, легко найти ее производную. Действительно, так как  $f^i(x; g(x)) = 0$ , то, дифференцируя обе части этого равенства по переменной  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , получаем

$$0 = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x; g(x)) + \sum_{l=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y_l}(x; g(x)) \cdot \frac{\partial g_l}{\partial x_j}(x), \quad i = 1, \dots, m.$$

Поскольку  $\det M \neq 0$ , эта система уравнений относительно  $\frac{\partial g_l}{\partial x_j}(x)$ ,  $l = 1, \dots, m$ ,  $j$  фиксировано, разрешима. Ответ будет зависеть от значений  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x; g(x))$ , а поэтому и от  $g(x)$ . Но это неизбежно, так как уравнение  $f(x; y)$  может иметь несколько решений.

НАДО уметь:

1) Работать с неявно заданными функциями (Д.: любые 3-4 задачи из серии 3371–3415).

*Задача 3381 из Демидовича:* Найти  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$  при  $x = 0$ ,  $y = 1$ , если

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0.$$

*Решение:* Можно решить соответствующее квадратное уравнение, выписать 2 решения, при помощи начальных данных при  $x = 0$ ,  $y = 1$

выбрать подходящую функцию  $y = y(x)$  и трижды ее дифференцировать. Другой способ состоит в применении теоремы о неявной функции, с помощью которой мы проверяем, что неявная функция с требуемыми условиями существует, и последующего применения правила дифференцирования функции, заданной неявно.

Для этого проверим, что в точке  $(0, 1)$  выполняются все условия теоремы о неявной функции. Для дифференцируемой функции

$$F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1$$

имеем  $F(0, 1) = 0$ ,  $F'_y(0, 1) = 3$ , т. е. условия теоремы о неявной функции выполнены. Функция  $F(x, y)$  бесконечно дифференцируема, поэтому таковой будет и неявная функция. Используя вышеприведенный алгоритм вычисления производной неявной функции, мы можем записать

$$\begin{aligned} 2x - y - xy' + 4yy' + 1 - y' &= 0 \\ \Rightarrow -1 + 4y'(0) + 1 - y'(0) &= 0 \Rightarrow y'(0) = 0, \\ 2 - 2y' - xy'' + 4(y')^2 + 4yy'' - y'' &= 0 \\ \Rightarrow 2 + 3y''(0) &= 0 \Rightarrow y''(0) = -\frac{2}{3}, \\ -3y'' - xy'' + 8y'y'' + 4y'y'' + 4yy''' - y''' &= 0 \\ \Rightarrow -3y''(0) + 4y'''(0) - y'''(0) &= 0 \Rightarrow y'''(0) = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

*Задача 3400* из Демидовича: Пусть  $x = x(y, z)$ ,  $y = y(x, z)$ ,  $z = z(x, y)$  — функция, определяемая уравнением  $F(x, y, z) = 0$ . Доказать, что

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

**РЕШЕНИЕ.** По правилу дифференцирования сложной функции мы по-

лучаем

$$F'_y + F'_x \cdot x'_y = 0 \Rightarrow x'_y = -\frac{F'_y}{F'_x}, \quad (4)$$

$$F'_z + F'_y \cdot y'_z = 0 \Rightarrow y'_z = -\frac{F'_z}{F'_y}, \quad (5)$$

$$F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad (6)$$

откуда и вытекает задача 3400. Какие условия надо наложить на функцию  $F(x, y, z)$ , чтобы были оправданы соотношения (4)–(6)?

*Задача 3381 из Демидовича:* Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  в точке  $u = 1, v = 1$ , если

$$\begin{cases} x = u + \ln v, \\ y = v - \ln u, \\ z = 2u + v. \end{cases} \quad (7)$$

*Решение:* 1) Здесь мы приведем решение, которое можно применить во всех задачах подобного типа. Подставляя в данные формулы значения  $u = v = 1$ , получаем  $x(1, 1) = 1, y(1, 1) = 1, z(1, 1) = 3$ . Таким образом, в некоторой окрестности  $U$  точки  $(a; b) = (1, 1; 3, 1, 1) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$  отображение  $F = (f_1, f_2, f_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , где

$$\begin{aligned} f_1(x, y; z, u, v) &= x - u - \ln v, \\ f_2(x, y; z, u, v) &= y - v + \ln u, \\ f_3(x, y; z, u, v) &= z - 2u - v, \end{aligned}$$

непрерывно-дифференцируемо, и соответствующая данной задаче матрица  $M$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z}(a; b) & \frac{\partial f_1}{\partial u}(a; b) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(a; b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(a; b) & \frac{\partial f_2}{\partial u}(a; b) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(a; b) \\ \frac{\partial f_3}{\partial z}(a; b) & \frac{\partial f_3}{\partial u}(a; b) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(a; b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

имеет определитель, неравный нулю.

Поэтому по теореме 2 о неявной функции в некоторой окрестности  $V$  точки  $a = (1, 1)$  существуют дифференцируемые функции  $z(x, y)$ ,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  такие, что  $z(1, 1) = 3$ ,  $u(1, 1) = 1$ ,  $v(1, 1) = 1$ , и

$$\begin{cases} x = u(x, y) + \ln v(x, y), \\ y = v(x, y) - \ln u(x, y), \\ z(x, y) = 2u(x, y) + v(x, y) \end{cases} \quad (8)$$

для любой точки  $(x, y) \in V$ . Дифференцируя теперь (8) по правилу дифференцирования сложной функции, в точке  $x = y = 1$ , мы получаем

$$\begin{aligned} 1 &= u'_x + \frac{v'_x}{v} = u'_x + v'_x, \\ 0 &= v'_x - \frac{u'_x}{u} = v'_x - u'_x, \\ z'_x &= 2u'_x + v'_x. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили систему линейных уравнений относительно  $z'_x, u'_x, v'_x$ , матрицей которой будет как раз  $M$ . Она не вырождена, поэтому эта система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} u_x &= v_x = \frac{1}{2}, \\ z_x &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} u_y &= -v_y = -\frac{1}{2}, \\ z_y &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2) Второе решение этой задачи основано на том, что первые два равенства задачи (7) задают локальный диффеоморфизм в окрестности точки  $u = 1$ ,  $v = 1$  и поэтому переменные  $u$  и  $v$  можно выразить через переменные  $x$  и  $y$  (возможно неявным способом) и подставить затем в третье равенство задачи (7).

Из равенств (7) имеем  $x(1, 1) = 1$ ,  $y(1, 1) = 1$ . Поэтому матрица Якоби отображения

$$\begin{cases} x = u + \ln v, \\ y = v - \ln u \end{cases} \quad (9)$$

в точке  $u = v = 1$  равна

$$J = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} (1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

По теореме об обратной функции в некоторой окрестности  $U$  точки  $u = v = 1$  отображение (9) будет диффеоморфизмом. Следовательно, в некоторой окрестности  $V$  точки  $x = u(1, 1) = 1$ ,  $y = v(1, 1) = 1$  существуют дифференцируемые функции  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , такие, что

$$\begin{cases} x = u(x, y) + \ln v(x, y), \\ y = v(x, y) - \ln u(x, y) \end{cases}$$

для любой точки  $(x, y) \in V$ . По известному свойству вычисления матрицы Якоби обратного отображения мы получаем

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} (1, 1) = \begin{pmatrix} x'_u(1, 1) & x'_v(1, 1) \\ y'_u(1, 1) & y'_v(1, 1) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_x(u(1, 1), v(1, 1)) &= 2u_x + v_x = 3/2, \\ z_y(u(1, 1), v(1, 1)) &= 2u_y + v_y = -1/2. \end{aligned}$$

### 1.6. Замена переменной.

Предположим, что задано уравнение в частных производных второго порядка относительно скалярной функции  $z$  двух скалярных переменных  $x$  и  $y$ :

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad (10)$$

где для сокращения записи применяются следующие обозначения:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Необходимо выполнить в нем одновременно замену переменных и замену функции по формулам

$$X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z). \quad (11)$$

Мы хотим узнать, как преобразуется рассматриваемое уравнение в частных производных при такой замене переменных. Она законна лишь в том случае, когда (11) определяет  $C^2$ -диффеоморфизм некоторого открытого множества из  $\mathbb{R}^3$  на открытое множество в  $\mathbb{R}^3$  и поверхность  $z = z(x, y)$ , определяемая уравнением (10), преобразуется в поверхность  $Z = Z(X, Y)$  так, что обе написанные функции принадлежат классу  $C^2$ . Следуя обычному методу, надо выразить

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

как функции новых частных производных

$$P = \frac{\partial Z}{\partial X}, \quad Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}, \quad R = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}, \quad S = \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}, \quad T = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}.$$

Можно начать с производных первого порядка и затем перейти к вычислению производных второго порядка. Для производных первого порядка начинаем с соотношения

$$dZ = PdX + QdY,$$

заменяя  $dX$ ,  $dY$ ,  $dZ$  их дифференциальными выражениями, найденными из (11), и получая таким путем соотношение между  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Это соотношение, представленное в виде  $dz = pdx + qdy$ , позволит выразить  $p$  и  $q$  через  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $P$ ,  $Q$ . Дифференцируя полученное соотношение, затем находим  $dp$  как функцию от  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ,  $dP$ ,  $dQ$ . Заменяя  $dz$ ,  $dP$ ,  $dQ$  на  $pdx + qdy$ ,  $RdX + SdY$ ,  $SdX + TdY$ , затем  $p$  и  $q$  их значениями, найденными прежде,  $dX$  и  $dY$  — их значениями, полученными из (11) (где  $dz$  должно быть заменено на  $pdx + qdy$  с уже найденными  $p$  и  $q$ ), мы выражаем  $dp$  как комбинацию  $dx$  и  $dy$ , которая, будучи представленной в виде  $dp = rdx + sdy$ , дает  $r$  и  $s$  как функции от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$ . Точно так же вычисляется  $t$ . Полученные результаты подставляются в (10).

Полученное уравнение относительно  $P, Q, R, S, T$  содержит в действительности величины  $x, y, z$ , а не  $X, Y, Z$ . Поэтому, если эти переменные входят в уравнение, следует еще выразить  $(x, y, z)$  через  $(X, Y, Z)$ , решая систему уравнений (11).  $\square$

НАДО уметь:

1) Вычислять дифференциальные выражения при замене переменных (Д.: любые 3-4 задачи из серии 3434–3523),

*Задача 3476* из Демидовича: Перейти к новым переменным  $X = yz - x$ ,  $Y = xz - y$ ,  $Z = xy - z$ , где  $Z = Z(X, Y)$  в уравнении

$$(xy + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = x + yz$$

*Решение:* Имеем

$$dZ = Z_X dX + Z_Y dY,$$

что можно переписать в переменных  $x, y, z$  как

$$y dx + x dy - dz = Z_X(y dz + z dy - dx) + Z_Y(x dz + z dx - dy).$$

Отсюда

$$(-1 - y Z_X - x Z_Y) dz = (-y - Z_X + z Z_Y) dx + (-x + z Z_X - Z_Y) dy.$$

Следовательно, поскольку  $dz = z_x dx + z_y dy$ , то

$$z_x = \frac{y + Z_X - z Z_Y}{1 + y Z_X + x Z_Y}, \quad z_y = \frac{x - z Z_X + Z_Y}{1 + y Z_X + x Z_Y}.$$

Подставляя  $z_x, z_y$  в исходное уравнение получаем, что

$$Z_Y(1 - y^2 - x^2 - z^2 - 2xyz) = 0.$$

Проверяем, что  $1 - y^2 - x^2 - z^2 - 2xyz = 0$  не является решением уравнения (находим непосредственно  $z_x = -\frac{x+yz}{z+xy}$ ,  $z_y = -\frac{y+xz}{z+xy}$ , подставляем в уравнение), следовательно, окончательно,

$$Z_Y = 0.$$

*Задача 3514* из Демидовича: Приняв  $u$  и  $v$  за новые независимые переменные и  $w = w(u, v)$  за новую функцию, преобразовать следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = x + y, \quad v = \frac{y}{x}, \quad w = \frac{z}{x}$$

*Решение:* Выписываем

$$dw = w_u du + w_v dv = w_u(dx + dy) + w_v \left( -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \right)$$

и

$$dw = -\frac{z}{x^2} dx + \frac{1}{x} dz.$$

Откуда

$$dz = \left( xw_u - \frac{y}{x}w_v + \frac{z}{x} \right) dx + (xw_u + w_v) dy = z_x dx + z_y dy$$

и, следовательно,

$$z_x = xw_u - \frac{y}{x}w_v + \frac{z}{x}, \quad z_y = xw_u + w_v.$$

Найдем дифференциал от  $z_y$ :

$$\begin{aligned} dz_y &= w_u dx + x(w_{uu} du + w_{uv} dv) + (w_{vu} du + w_{vv} dv) \\ &= w_u dx + (xw_{uu} + w_{vu})(dx + dy) + (xw_{uv} + w_{vv}) \left( -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \right) \\ &= z_{xy} dx + z_{yy} dy. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} z_{xy} &= w_u + xw_{uu} + w_{uv} - (xw_{uv} + w_{vv}) \frac{y}{x^2}, \\ z_{yy} &= xw_{uu} + 2w_{uv} + \frac{w_{vv}}{x}. \end{aligned}$$

Выпишем теперь дифференциал от  $z_x$ :

$$\begin{aligned} dz_x &= w_u dx + x(w_{uu} du + w_{uv} dv) - w_v \left( -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \right) \\ &\quad - \frac{y}{x} (w_{vu} du + w_{vv} dv) - \frac{z}{x^2} dx + \frac{1}{x} (z_x dx + z_y dy) \\ &= \left( w_u + xw_{uu} - \frac{y}{x} w_{vu} - \left( xw_{uv} - \frac{y}{x} w_{vv} \right) \frac{y}{x^2} + \frac{y}{x^2} w_v - \frac{z}{x^2} \right. \\ &\quad \left. + w_u - \frac{y}{x^2} w_v + \frac{z}{x^2} \right) dx + (\dots) dy = z_{xx} dx + z_{xy} dy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$z_{xx} = 2w_u + xw_{uu} - \frac{2y}{x} w_{vu} + \frac{y^2}{x^3} w_{vv}.$$

Окончательно получаем

$$0 = z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = \left( \frac{y^2}{x^3} + 2\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x} \right) w_{vv} \Rightarrow w_{vv} = 0.$$

*Задача:* 3526. Решить уравнение

$$\left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

приняв  $x$  за функцию от переменных  $y$  и  $z$ .

*Решение:* Вводим новые переменные и функцию:

$$u = y, \quad v = z, \quad w = w(u, v) = x.$$

Из соотношения

$$dw = w_u du + w_v dv = w_u dy + w_v dz = dx.$$

ВЫВОДИМ

$$dz = \frac{1}{w_v} dx - \frac{w_u}{w_v} dy \Rightarrow z_x = \frac{1}{w_v}, \quad z_y = -\frac{w_u}{w_v}.$$

Чтобы найти вторые частные производные от  $z$  через новые переменные, выпишем  $dz_x$  и  $dz_y$ :

$$\begin{aligned} dz_x &= d\frac{1}{w_v} = -\frac{1}{w_v^2}dw_v = -\frac{1}{w_v^2}(w_{vu}du + w_{vv}dv) = -\frac{1}{w_v^2}(w_{vu}dy + w_{vv}dz) \\ &= -\frac{1}{w_v^2}(w_{vu}dy + w_{vv}(z_x dx + z_y dy)) = -\frac{w_{vu}}{w_v^2}dy - \frac{w_{vv}}{w_v^3}dx + \frac{w_u w_{vv}}{w_v^3}dy \\ &= z_{xx}dx + z_{xy}dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz_y &= -d\frac{w_u}{w_v} = -\frac{1}{w_v}dw_u + \frac{w_u}{w_v^2}dw_v \\ &= -\frac{1}{w_v}(w_{uu}du + w_{uv}dv) + \frac{w_u}{w_v^2}(w_{vu}du + w_{vv}dv) \\ &= -\frac{w_v w_{uu} - w_u w_{vu}}{w_v^2}dy - \frac{w_v w_{uv} - w_u w_{vv}}{w_v^2}dz \\ &= -\frac{w_v w_{uu} - w_u w_{vu}}{w_v^2}dy - \frac{w_v w_{uv} - w_u w_{vv}}{w_v^2}\left(\frac{1}{w_v}dx - \frac{w_u}{w_v}dy\right) \\ &= z_{yx}dx + z_{yy}dy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} z_{xx} &= -\frac{w_{vv}}{w_v^3}, \\ z_{xy} &= \frac{w_u w_{vv} - w_v w_{vu}}{w_v^3}, \\ z_{yy} &= -\frac{w_v^2 w_{uu} - 2w_u w_v w_{uv} + w_u^2 w_{vv}}{w_v^3}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} 0 &= z_y^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} \\ &= -\frac{w_u^2}{w_v^2} \frac{w_{vv}}{w_v^3} + 2\frac{1}{w_v} \frac{w_u}{w_v} \frac{w_u w_{vv} - w_v w_{vu}}{w_v^3} - \frac{1}{w_v^2} \frac{w_v^2 w_{uu} - 2w_u w_v w_{uv} + w_u^2 w_{vv}}{w_v^3} \\ &= -\frac{w_{uu}}{w_v^3}. \end{aligned}$$

Решением данного уравнения являются функции вида:

$$w = u\psi(v) + \varphi(v) \quad \Leftrightarrow \quad x = y\psi(z) + \varphi(z).$$

1.6. *Основы гладкого анализа.* Понятие многообразия. Различные способы из задания.

Градиент и другие геометрические объекты в теории функций многих переменных. (Д.: любые задачи из серии 3528–3580).

1.7. *Условный экстремум.* Множители Лагранжа. (Д.: любые задачи из серии 3654–3680).

*Задача:* Найти точки условного экстремума функции  $u = xy^2z^3$ , если

$$x + 2y + 3z = a \quad (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0). \quad (12)$$

*Анализ задачи:* Функция  $u$  очевидно непрерывна и дифференцируема. Условие (12) означает, что необходимо найти экстремум функции  $u$ , ограниченной на пересечение плоскости, задаваемой уравнением  $x + 2y + 3z = a$ , и первого октанта  $\{(x, y, z \in \mathbb{R}^3) : x > 0, y > 0, z > 0\}$ , поскольку по условию задачи  $a > 0$ . Это пересечение представляет собой треугольник, граница которого находится на координатных плоскостях. На границе треугольника функция  $u$  тождественно равна нулю, а внутри треугольника строго положительна. Так как замкнутый треугольник — компактное множество, то своего наибольшего значения функция  $u$  достигает внутри треугольника. Таким образом, задача на условный экстремум имеет, по крайней мере, одно решение, которое можно найти с помощью метода множителей Лагранжа.

*Решение:* 1) Напишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z) = xy^2z^3 + \lambda(x + 2y + 3z - a).$$

Частные производные и условие связи приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \\ x + 2y + 3z = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} y^2z^3 + \lambda = 0, \\ 2xyz^3 + 2\lambda = 0 = 0, \\ 3zy^2z^2 + 3\lambda = 0 = 0, \\ x + 2y + 3z = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы из 4 уравнений с 4 неизвестными будут точки  $x = y = z = \frac{a}{6}$ ,  $\lambda = -\frac{a}{6}$ . Поскольку решение единственно и точка  $(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6})$

находится внутри треугольника, то в этой точке функция  $u$  принимает максимальное значение, равное  $u_{\max} = \left(\frac{a}{6}\right)^6$ .

2) В том случае, когда задача решается без предварительного анализа следует найти ограничение второго дифференциала функции Лагранжа на касательную плоскость и исследовать ее на знакоопределенность. Вычисляем второй дифференциал:

$$\begin{aligned} d^2L &= \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} dz^2 \\ &+ 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} dy dz + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} dx dz \\ &= 2xz^3 dy^2 + 6xy^2z dz^2 + 4yz^3 dx dy + 6y^2z^2 dx dz + 12xyz^2 dy dz. \end{aligned}$$

Следовательно, в точке  $\left(\frac{a}{6}, \frac{b}{6}, \frac{c}{6}\right)$  получаем вид второго дифференциала:

$$\begin{aligned} d^2L\left(\frac{a}{6}, \frac{b}{6}, \frac{c}{6}\right) &= 2\left(\frac{a}{b}\right)^4 dy^2 + 6\left(\frac{a}{b}\right)^4 dz^2 \\ &+ 4\left(\frac{a}{b}\right)^4 dx dy + 12\left(\frac{a}{b}\right)^4 dy dz + 6\left(\frac{a}{b}\right)^4 dx dz \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^4 (2 dy^2 + 6 dz^2 + 4 dx dy + 6 dx dz + 12 dy dz) \quad (13) \end{aligned}$$

при условии  $dx + 2 dy + 3 dz = 0$ . Возводим последнее равенство в квадрат и получаем  $dx^2 + 4 dy^2 + 9 dz^2 + 4 dx dy + 6 dx dz + 12 dy dz = 0$ . Отсюда имеем

$$4 dx dy + 6 dx dz + 12 dy dz = -dx^2 - 4 dy^2 - 9 dz^2. \quad (14)$$

Подставляя выражение (14) в (13), получаем

$$d^2L\left(\frac{a}{6}, \frac{b}{6}, \frac{c}{6}\right) = -\left(\frac{a}{b}\right)^4 (dx^2 + 2 dy^2 + 3 dz^2). \quad (15)$$

Очевидно квадратичная форма (15) отрицательно определенная. Следовательно, функция  $u$  имеет минимум в точке  $\left(\frac{a}{6}, \frac{b}{6}, \frac{c}{6}\right)$ .

## 2. Интеграл Лебега.

### 2.1. Двойной интеграл.

НАДО уметь:

Менять порядок интегрирования применяя теорему Фубини или Тонелли (Д.: любые задачи из серии 3924–3931).

*Задача* (Д.: 3924) Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$$

*Решение.* Необходимо переставить пределы интегрирования так, чтобы  $y$  оказалась внешней переменной и получить

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

Найдём пределы интегрирования для внешней переменной  $y$ :

$$y_1 = \min_{x \in [0, 2]} x = 0, \quad y_2 = \max_{x \in [0, 2]} 2x = 4.$$

Найдём пределы интегрирования для  $x$  при фиксированном  $y \in [0, 4]$ . Из исходного интеграла видим, что должны выполняться соотношения:

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{и} \quad x \leq y \leq 2x.$$

Отсюда

$$\max\left\{0, \frac{y}{2}\right\} \leq x \leq \min\{y, 2\}.$$

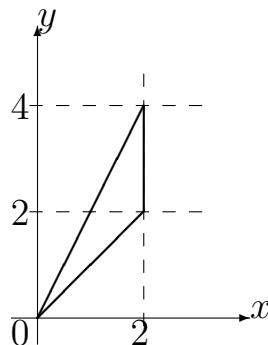
Таким образом,

$$x_1(y) = \max\left\{0, \frac{y}{2}\right\} = \frac{y}{2}, \quad x_2(y) = \min\{y, 2\} = \begin{cases} y, & y \in [0, 2], \\ 2, & y \in [2, 4]. \end{cases}$$

*Ответ:*

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy &= \int_0^4 dy \int_{y/2}^{\min\{y, 2\}} f(x, y) dx \\ &= \int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx. \end{aligned}$$

*Замечание.* В данном случае пределы интегрирования также легко найти, изобразив область интегрирования графически.



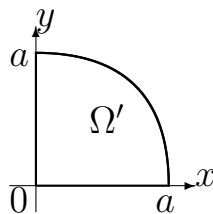
НАДО уметь находить интегралы (Д.: 3932–3936).

*Задача* (Д.: 3934) Вычислить интеграл  $\iint_{\Omega} |xy| dx dy$ , если  $\Omega$  — круг радиуса  $a$  с центром в начале координат.

Прежде всего, заметим, что функция чётна по обеим переменным, а область интегрирования симметрична относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ . Следовательно

$$\iint_{\Omega} |xy| dx dy = 4 \iint_{\Omega'} xy dx dy,$$

где  $\Omega' = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ .



Находим пределы интегрирования:

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Переходим к повторному интегралу и вычисляем.

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega'} xy \, dx \, dy &= \int_0^a x \, dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y \, dy = \int_0^a x \left( \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ &= \int_0^a \frac{x(a^2-x^2)}{2} dx = \left( \frac{x^2 a^2}{4} - \frac{x^4}{8} \right) \Big|_0^a = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{8} = \frac{a^4}{8}.\end{aligned}$$

Таким образом, исходный интеграл равен

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} |xy| \, dx \, dy = 4 \frac{a^2}{8} = \frac{a^2}{2}.$$

НАДО уметь применять формулу замены переменной (Д.: 3937–3960, 3962–3973).

Приложения — вычисление площадей (Д.: 3984–4004),  
вычисление объёмов (Д.: 4007–4035).

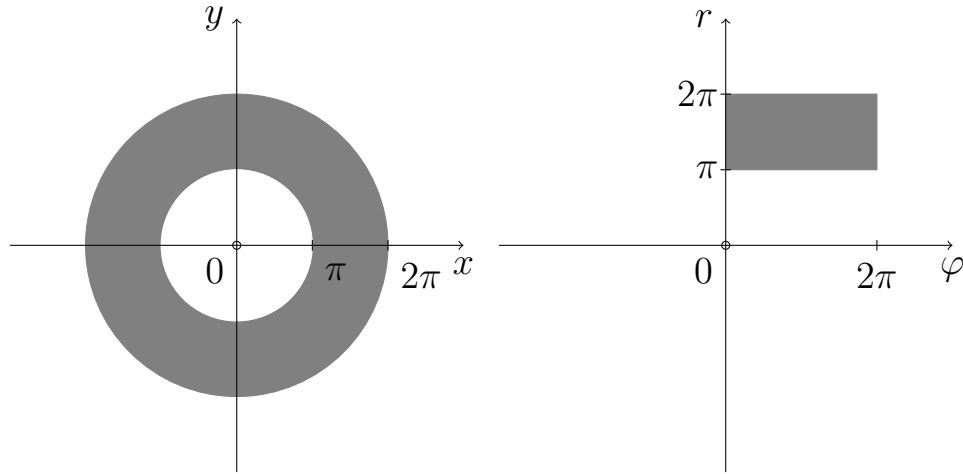
*Задача 3955* из Демидовича: Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл:

$$\iint_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy.$$

*Решение.* Полярная система координат:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Область интегрирования  $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$  (кольцо) в полярных координатах задается как  $\pi \leq r \leq 2\pi$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .



Якобиан замены переменных равен

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r.$$

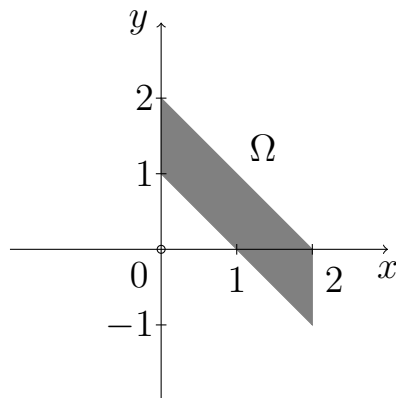
Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_{\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy &= \iint_{\pi \leq r \leq 2\pi, 0 \leq \varphi < 2\pi} \sin r |J| \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi}^{2\pi} r \sin r \, dr = 2\pi \left( -r \cos r \Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \cos r \, dr \right) \\ &= 2\pi \left( -2\pi - \pi + \sin r \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = -6\pi^2. \end{aligned}$$

*Задача 3958* из Демидовича: Вместо  $x$  и  $y$  ввести новые переменные  $u$  и  $v$  и определить пределы интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) \, dy, \quad \text{если } u = x + y, \quad v = x - y.$$

*Решение:* Область интегрирования по  $x$  и  $y$  — это параллелограмм  $\Omega$ .



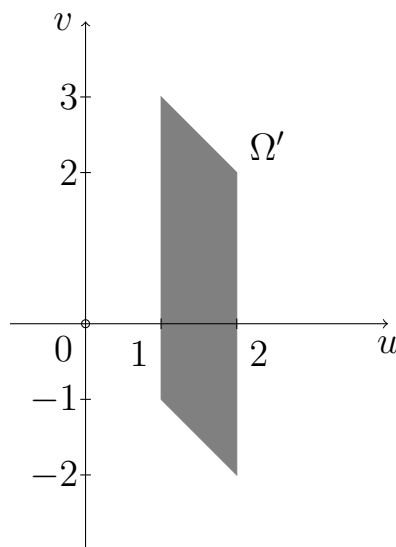
Выразим переменные  $x, y$  через  $u, v$ :

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

Область  $\Omega$  ограничена четырьмя отрезками, которые переходят в следующие отрезки в переменных  $u, v$ :

$$\begin{aligned} x = 0, \quad 1 \leq y \leq 2 & \iff u + v = 0, \quad 2 \leq u - v \leq 4, \\ x = 2, \quad -1 \leq y \leq 0 & \iff u + v = 4, \quad -2 \leq u - v \leq 0, \\ x + y = 1, \quad 0 \leq x \leq 2 & \iff u = 1, \quad 0 \leq u + v \leq 4, \\ x + y = 2, \quad 0 \leq x \leq 2 & \iff u = 2, \quad 0 \leq u + v \leq 4. \end{aligned}$$

Следовательно, область  $\Omega$  переходит в область  $\Omega' = \{1 \leq u \leq 2, -u \leq v \leq 4 - u\}$  в переменных  $u$  и  $v$ :



Якобиан замены переменных равен

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) dy &= \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) |J| du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv. \end{aligned}$$

## 2.2. Тройной интеграл.

НАДО уметь:

Менять порядок интегрирования применяя теорему Фубини или Тонелли (Д.: любые задачи из серии 4081–4086).

НАДО уметь вычислять интегралы (Д.: 4076–4080).

НАДО уметь применять формула замены переменной (Д.: 4087–4093).

Приложение — вычисление объёмов (Д.: 4101–4130).

## 2.3. Многократные интегралы. (Д.: 4204–4220).

2.4. Вычисление интеграла Лебега в неограниченной области от неотрицательной функции. (Д.: 4169–4175, 4196–4199).

## Рекомендуемая литература

- [1] Берс Л. *Математический анализ*. Т. 1–2. М.: Высшая школа, 1975.
- [2] Водопьянов С. К. *Интегрирование по Риману*. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2005.
- [3] Зорич В. А. *Математический анализ*. Т. 1–2. М.: Наука, 1981.
- [4] Дьедонне Ж. *Современный анализ*. М.: Мир, 1964.
- [5] Никольский С. М. *Курс математического анализа*. М.: Наука, 1975.
- [6] Решетняк Ю. Г. *Курс математического анализа. Ч. 1, Книги 1–2*. Новосибирск: Изд-во Института математики, 1999.

- [7] Рудин У. *Основы математического анализа*. М.: Мир, 1976.
- [8] Спивак М. *Математический анализ на многообразиях*. М.: Мир, 1971.
- [9] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1–3. М.: Наука, 1969.
- [10] Шведов И. А. *Компактный курс математического анализа. Ч. 1. Функции одной переменной*. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003.

**Литература, рекомендуемая для работы на семинарах**

- [Г] Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе*. М.: Мир, 1967.
- [Д] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. М.: Наука, 1977.
- [Л] Кудрявцев Л. Д. и др. *Сборник задач по математическому анализу*. Санкт-Петербург: Кристалл, 1994.
- [Р] Решетняк Ю. Г. *Сборник задач по курсу математического анализа*. Новосибирск: изд. НГУ, 1979.