

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Ориентировочный план семинаров, 4 семестр, 2013

1. Интегралы, зависящие от параметра.

1.1. *Понятие равномерной интегрируемости параметризованного семейства функций.* Критерий Коши — Больцано равномерной интегрируемости, мажорантный признак, признаки Дирихле и Абеля.

НАДО знать: определение равномерной сходимости и признаки равномерной сходимости.

НАДО уметь: применять признаки равномерной сходимости при решении задач, см. например:

(Д.: 3756 – 3770, любая задача из 3753 – 3755.)

ЗАДАЧА 3763 б. Исследовать на равномерную сходимость

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx \quad (1)$$

при $-\infty < \alpha < +\infty$.

Решение. Заметим, что при фиксированном $\alpha \in \mathbb{R}$ данный интеграл сходится

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Достаточно доказать, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$$

не является равномерно сходящимся по $\alpha \in \mathbb{R}$ (ПОЧЕМУ?).

Чтобы это доказать покажем, что не выполняется критерий Коши равномерной сходимости. Другими словами, существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $A > 0$ найдутся число $a \geq A$ и значение параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\int_a^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx \geq \varepsilon$$

(не пишем модуль интеграла, так как значение интеграла неотрицательно).

Положим $\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Для любого $A > 0$ положим $a = A$, а $\alpha = a$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \varepsilon.$$

Следовательно, критерий Коши равномерной сходимости не выполняется и интеграл (1) равномерно не сходится.

ЗАДАЧА 3758. Исследовать на равномерную сходимость семейство интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx, \quad -\infty < \alpha < +\infty.$$

Решение. Заметим, что подынтегральная функция имеет интегрируемую мажоранту

$$\left| \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{где} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi < \infty.$$

Следовательно, по мажорантному признаку, данное семейство сходится абсолютно и равномерно. $\square$

ЗАДАЧА 3765. Исследовать на равномерную сходимость семейство интегралов

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx, \quad p \geq 0.$$

Решение. Заметим, что заменой $y = x^2$ интеграл сводится к следующему

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{1}{2}}(1+y^{\frac{p}{2}})} dy.$$

Заметим, что несмотря на то, что знаменатель обращается в нуль в точке $y = 0$, подынтегральная функция не имеет особенности в нуле.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y^{\frac{1}{2}}(1 + y^{\frac{p}{2}})} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{y^{\frac{1}{2}}}{1 + y^{\frac{p}{2}}} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Таким образом, подынтегральная функция будет интегрируема на любом конечном промежутке $[0, b]$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{1}{2}}(1 + y^{\frac{p}{2}})} dy = \int_0^1 \frac{\sin y}{y^{\frac{1}{2}}(1 + y^{\frac{p}{2}})} dy + \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{\frac{1}{2}}(1 + y^{\frac{p}{2}})} dy.$$

Здесь первый интеграл в правой части равенства является собственным и имеет интегрируемую мажоранту

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin y}{y^{\frac{1}{2}}(1 + y^{\frac{p}{2}})} dy \right| \leq \int_0^1 \frac{\sin y}{y^{\frac{1}{2}}} dy < \infty.$$

Исследуем сходимость второго интеграла по признаку Абеля – Дирихле. Для этого необходимо проверить следующие свойства.

(1) Интегралы от синуса ограничены на любом отрезке $[0, b]$ единой константой

$$\left| \int_0^b \sin y dy \right| = |\cos 0 - \cos b| \leq 2.$$

(2) Функция $g_p(y) = \frac{1}{\sqrt{y}(1 + \sqrt{y^p})}$ монотонно убывает на всем луче $[1, \infty)$ для каждого p .

(3) Имеет место равномерная по p сходимость $g_p(y) \rightarrow 0$ для всех $p > 0$. Действительно,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{y}(1 + \sqrt{y^p})} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{y}} \rightarrow 0.$$

Поскольку свойства (1)–(3) выполнены, делаем вывод, что интеграл сходится, причём равномерно по $p > 0$. $\square$

ВОПРОС. Сходится ли интеграл из задачи 3765 абсолютно?

1.2. Общие теоремы о предельном переходе под знаком интеграла и о непрерывности функций, представимых интегралами, зависящими от параметра. Теоремы о дифференцировании по параметру (правило Лейбница) и интегрировании интегралов по параметру.

НАДО знать: условия возможности предельного перехода по параметру, формулу Лейбница дифференцирования по параметру, и условия интегрирования по параметру.

НАДО уметь: применять все эти признаки для решения задач, см. например:

предельный переход под знаком интеграла (Д.: 3772 – 3777);

непрерывность интеграла по параметру (Д.: 3779 – 3783);

дифференцирование интеграла по параметру (Д.: 3787 – 3811).

ЗАДАЧА 3778.1. Показать, что

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha} dx$$

есть непрерывная функция в интервале $0 < \alpha < 1$.

Решение. Фиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 1)$. Очевидно, что подынтегральная функция непрерывна (как функция двух переменных) на декартовом произведении интервалов $(0, 1) \times (\varepsilon, 1)$. Поэтому, согласно одной из теорем курса анализа, функция $F(\alpha)$ будет непрерывной на интервале $(\varepsilon, 1)$, если исходный интеграл сходится при $x \rightarrow 0$ равномерно по $\alpha \in (\varepsilon, 1)$. (ОБЪЯСНИТЬ ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ?)

Для всех $\alpha \in (\varepsilon, 1)$ и для всех $x \in (0, 1)$ имеем очевидную оценку

$$\left| \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\varepsilon}.$$

Непосредственным вычислением проверяется, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\varepsilon} dx$$

сходится. Отсюда по мажорантному признаку получаем, что исходный интеграл сходится равномерно на интервале $(\varepsilon, 1)$. Ввиду сказанного выше, это дает нам искомую непрерывность $F(\alpha)$ на интервале $\alpha \in (\varepsilon, 1)$.

Учитывая произвольность выбора $\varepsilon \in (0, 1)$, получаем, что $F(\alpha)$ непрерывна в каждой точке $\alpha \in (0, 1)$.

ЗАДАЧА 3778.2. Определить точки разрыва функции

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1 - a^2)x}{x} dx.$$

Построить график функции $F(a)$.

Решение. Согласно классической формуле для интеграла Дирихле имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда, делая замену $u = \alpha x$ для положительных α , имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} d\alpha x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда для $\alpha < 0$ получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-\alpha x)}{x} dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, установлено, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Другими словами,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha.$$

Следовательно,

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1 - a^2)x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(1 - a^2) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |a| < 1, \\ 0, & |a| = 1, \\ -\frac{\pi}{2}, & |a| > 1. \end{cases}$$

Очевидно, данная функция имеет разрыв первого рода в точках $a = \pm 1$.

ЗАДАЧА 3789. Доказать формулу Фруллани

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0),$$

где $f(x)$ — непрерывная функция и интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ имеет смысл при любом $A > 0$.

Решение. Отойдем от особой точки 0. Для этого рассмотрим $\varepsilon > 0$ и интеграл

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx.$$

По условию

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx = - \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(y)}{y} dy \quad \text{и} \quad \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(y)}{y} dy$$

сходящиеся интегралы. Поэтому

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(y)}{y} dy - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(y)}{y} dy = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(y)}{y} dy.$$

По первой теореме о среднем

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(y)}{y} dy = f(c_{\varepsilon}) \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{y} dy = f(c_{\varepsilon}) \ln \frac{b}{a},$$

где $c_{\varepsilon} \in (a\varepsilon, b\varepsilon)$. Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(c_{\varepsilon}) \ln \frac{b}{a} = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

В последнем переходе мы использовали непрерывность f и то, что $c_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ЗАДАЧА 3794. С помощью дифференцирования по параметру вычислить следующий интеграл:

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right)^2 dx, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (2)$$

Решение. Функция

$$f(x, a, b) = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$$

непрерывна на множестве $(0, \infty) \times [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, $0 < a_1 < a_2$, $0 < b_1 < b_2$.

Кроме того, при фиксированных $a \in [a_1, a_2]$ и $b \in [b_1, b_2]$ функция $f(x, a, b)$ имеет предел при $x \rightarrow 0$. Действительно, рассмотрим произвольную точку $(a, b) \in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$. Тогда

$$f(x, a, b) = \frac{1 - ax + O(x^2) - (1 - bx + O(x^2))}{x} = b - a + O(x)$$

при $x \rightarrow 0$. Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, a, b) = b - a.$$

Полагая $f(0, a, b) = b - a$, получаем функцию $f(x, a, b)$, непрерывную на множестве $[0, \infty) \times [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, $0 < a_1 < a_2$, $0 < b_1 < b_2$. Непрерывной на этом же множестве является также и функция $f^2(x, a, b)$.

Следовательно, непрерывной будет и частная производная

$$(f^2(x, a, b))'_a = -2f(x, a, b)e^{-ax}$$

на множестве $[0, \infty) \times [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$.

Интеграл $I(a, b)$ сходится при каждом значении $(a, b) \in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$. Действительно, подынтегральная функция $f^2(x, a, b)$ имеет интегрируемую мажоранту

$$h(x) = \begin{cases} L^2, & x \in [0, +1), \\ \frac{4}{x^2}, & x \in [1, +\infty), \end{cases}$$

на промежутке $[0, +\infty)$, где $L = \max_{(x,a,b) \in [0,1] \times [a_1,a_2] \times [b_1,b_2]} f(x, a, b)$. Более того, интеграл

$$-2 \int_0^{\infty} f(x, a, b) e^{-ax} dx$$

сходится равномерно на множестве $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, поскольку подынтегральная функция имеет интегрируемую мажоранту на $[1, +\infty)$:

$$|(f^2(x, a, b))'_a| = |2f(x, a, b)e^{-ax}| \leq \begin{cases} 2L, & x \in [0, +1), \\ \frac{4}{xe^{a_1x}}, & x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Таким образом, выполнены все условия для дифференцирования интеграла по параметру. Мы имеем

$$I'_a(a, b) = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-(a+b)x} - e^{-2ax}}{x} dx.$$

Как несложно видеть, интеграл

$$\int_A^{\infty} \frac{e^{-(a+b)x} - e^{-2ax}}{x} dx$$

имеет смысл при любом $A > 0$, а значит, применяя формулу Фруллани, получаем

$$I'_a(a, b) = 2 \ln \frac{2a}{a+b}.$$

При помощи интегрирования по частям выводим

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int 2 \ln \frac{2a}{a+b} da = 2 \int \ln 2a da - 2 \int \ln(a+b) da \\ &= 2a \ln 2a - 2a \ln(a+b) - 2b \ln(a+b) + C(b), \end{aligned}$$

где $C(b)$ — зависящая от b функция. Найдем ее. Для этого заметим, что $I(b, b) = 0$, поэтому

$$2b \ln 2b - 2b \ln(2b) - 2b \ln(2b) + C(b) = 0 \Rightarrow C(b) = 2b \ln(2b).$$

Таким образом, получаем окончательный ответ:

$$I(a, b) = \ln \frac{(2a)^{2a}(2b)^{2b}}{(a+b)^{2a+2b}}.$$

1.3. Понятие меры Хаусдорфа, Простейшие свойства.

НАДО знать: определение меры Хаусдорфа, связь 1-меры Хаусдорфа с длиной кривой, формулу площади и коплощади.

НАДО уметь: оценивать размерность по Хаусдорфу, применять формулы площади и коплощади

(Д.: 3212 (все пункты), 3252, 3253),

(Д.: 3245, 3254, 3255).

1.2. Понятие бесконечного произведения.

НАДО знать: Определение сходимости бесконечного произведения.

Признаки сходимости.

Формулу Валлиса.

НАДО уметь: применять признаки сходимости (Д.: любые 2-3 задачи из серии 3256–3285)

1.3. Свертка и ее свойства.

НАДО знать условия существования свертки.

НАДО знать основные примеры сверточных ядер: Стеклова, Соболева и свойства свертки с этими ядрами.

НАДО знать примеры ядер, приводящих к Δ -образным последовательностям.

НАДО знать теорему об аппроксимации единицы и ее применения к аппроксимации в равномерной норме и L_1 -норме.

2. Интегрирование внешних дифференциальных форм.

НАДО знать общее определение внешней дифференциальной формы, геометрический смысл базисных дифференциальных форм.

НАДО знать определения операций над внешними дифференциальными формами и свойства этих операций.

НАДО знать определение интеграла внешней дифференциальной k -формы по k -мерной цепи и k -мерному ориентированному многообразию.

НАДО знать определение интеграла внешней дифференциальной k -формы по k -мерной цепи и k -мерному ориентированному многообразию.

НАДО знать формулировку теоремы Стокса и ее частные случаи: формулу Грина, формулу Стокса, формулу Гаусса — Остроградского.

2.1. Алгебра внешних дифференциальных форм.

НАДО уметь решать задач из Арнольда.

2.2. Интегрирование внешних дифференциальных 1-форм.

НАДО знать геометрический смысл интеграла от внешней дифференциальной 1-формы.

НАДО знать геометрический смысл 1-формы Гаусса и интеграла от 1-формы Гаусса.

НАДО уметь решать любую задачу из [Д], цикл 4249–4295.

НАДО уметь применять формулу Грина [Д], цикл 4296–4325.

2.3. Интегрирование внешних дифференциальных 2-форм.

НАДО знать геометрический смысл интеграла от внешней дифференциальной 2-формы.

НАДО знать геометрический смысл 2-формы Гаусса и интеграла от 2-формы Гаусса.

НАДО уметь решать любую задачу из [Д], цикл 4362–4366.

НАДО уметь применять формулу Стокса [Д], цикл 4367–4375.

НАДО уметь применять формулу Гаусса — Остроградского [Д], цикл 4376–4400.

2.4. Элементы векторного анализа.

НАДО знать интерпретацию понятий векторного анализа на языке внешних дифференциальных форм.

НАДО уметь: решать задачи из [Д], цикл 4401–4462.

2.5. Основы теории дифференцируемых многообразий.

НАДО знать определение дифференцируемого многообразия и касательного пространства.

НАДО уметь решать задачи из Арнольда, Спивака и Решетняка.

3. Ряды и преобразование Фурье.

3.1. Ряды Фурье.

НАДО знать определение ряда Фурье, примеры полных систем в $L_2[-\pi, \pi]$.

НАДО уметь находить разложение Фурье для конкретных функций и уметь применить теорему Дини о поточечной сходимости ряда Фурье, [Д], цикл 2937–2985.

3.2. Преобразование Фурье.

НАДО знать определение преобразования Фурье, его свойства, и классические условия обращения преобразования Фурье.

НАДО уметь решать задачи из [Д], цикл 3881–3900.

Рекомендуемая литература

- [1] Берс Л. *Математический анализ*. Т. 1–2. М.: Высшая школа, 1975.
- [2] Водопьянов С. К. *Интегрирование по Риману*. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2005.
- [3] Зорич В. А. *Математический анализ*. Т. 1–2. М.: Наука, 1981.
- [4] Дьедонне Ж. *Современный анализ*. М.: Мир, 1964.
- [5] Никольский С. М. *Курс математического анализа*. М.: Наука, 1975.
- [6] Решетняк Ю. Г. *Курс математического анализа. Ч. 1, Книжки 1–2*. Новосибирск: Изд-во Института математики, 1999.
- [7] Рудин У. *Основы математического анализа*. М.: Мир, 1976.
- [8] Спивак М. *Математический анализ на многообразиях*. М.: Мир, 1971.
- [9] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1–3. М.: Наука, 1969.
- [10] Шведов И. А. *Компактный курс математического анализа. Ч. 1. Функции одной переменной*. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003.

Литература, рекомендуемая для работы на семинарах

- [ВИ] Водопьянов С. К., Исангулова Д. В. *Исчисление внешних дифференциальных форм. Сборник задач и упражнений*. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2011.
- [Г] Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе*. М.: Мир, 1967.
- [ГМП] Грешнов А. В., Малюгин С. А., Потапов В. Н. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. Новосибирск: изд. НГУ,

2008 (2009).

[Д] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. М.: Наука, 1977.

[Л] Кудрявцев Л. Д. и др. *Сборник задач по математическому анализу*. Санкт-Петербург: Кристалл, 1994.

[Р] Решетняк Ю. Г. *Сборник задач по курсу математического анализа*. Новосибирск: изд. НГУ, 1979.