

Нахождение первообразных

В этой части курса мы рассмотрим задачу восстановления функции по её производной и рассмотрим основные случаи, когда эту функцию можно восстановить явно, т.е. выразить через известные элементарные функции.

1 Понятия первообразной и неопределённого интеграла

Определение 1.1. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток. Функция $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ называется (точной) первообразной функции $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, если

$$F'(x) = f(x) \quad \text{для всех } x \in I.$$

Таким образом, дифференцируемая функция является первообразной по отношению к своей производной. Поскольку нам известны стандартные правила вычисления производной для элементарных функций, естественным является желание научиться решать обратную задачу — восстановить функцию, если известна её производная.

Прежде всего заметим, что решение задачи нахождения первообразной не единственно. Например, если $F'(x) = f(x)$, то также и $(F(x) + 2016)' = f(x)$, т.е. добавление к первообразной произвольной постоянной величины не повлияет на производную. Следовательно, нужно дать ответ на вопрос: что из себя представляет множество первообразных функции? Ответ даёт следующее утверждение.

Утверждение 1.2. Пусть F_1 и F_2 — две первообразные функции f на одном и том же промежутке. Тогда их разность есть постоянная величина: $F_1(x) - F_2(x) = C$ для некоторого $C \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Имеем $G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$. Для доказательства теоремы нам осталось понять, как устроена функция, производная которой всюду равна нулю. Фиксируем точку x_0 в области определения. Тогда, по теореме Лагранжа о приращениях

$$G(x) - G(x_0) = G'(\xi)(x - x_0) = 0,$$

где ξ — некоторая точка между x и x_0 . Таким образом $G(x) = G(x_0)$ для всех x . $\square$

В приведённом выше утверждении существенно, что областью определения функций является промежуток. В противном случае разница между двумя первообразными может быть непостоянной.

Пример 1.3. Рассмотрим функции $F_1(x) = \arctg x$ и $F_2(x) = \operatorname{arccctg} \frac{1}{x}$. Вычислим их производные:

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= \frac{1}{1+x^2} && \text{при } x \in \mathbb{R}, \\ F_2'(x) &= -\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} && \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, обе функции являются первообразными функции $\frac{1}{1+x^2}$ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, но разница между ними не постоянна. Заметим, что по утверждению 1.2 на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ разница всё же должна быть постоянной. Действительно:

$$\operatorname{arccotg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} x, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, две первообразные одной функции отличаются на постоянную на каждой связной компоненте области определения, но эти постоянные могут различаться на различных компонентах.

Определение 1.4. Неопределённым интегралом (или антипроизводной) функции f называют символ

$$\int f(x) dx,$$

который в зависимости от контекста может означать *любую* первообразную функции f либо *всю совокупность* её первообразных. В этом пособии данный символ всюду используется в первом значении, т. е. если функция f задана на промежутке и F — её первообразная на этом промежутке, то

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

для некоторой постоянной величины $C \in \mathbb{R}$.

В предыдущем обозначении символ $\int$ называется *символом неопределённого интеграла*, а выражение $f(x) dx$ — *подынтегральным выражением*. Часто в практических заданиях бывает удобно использовать следующее обозначение для подынтегральных выражений:

$$dF(x) = F'(x) dx.$$

Из определения и свойств производных сразу следуют следующие свойства подынтегральных выражений:

1. $\int dF(x) = F(x) + C$;
2. $d(F(x) + G(x)) = dF(x) + dG(x)$;
3. $d(F(x)G(x)) = F(x) dG(x) + G(x) dF(x)$.

Обратите внимание на последнее выражение — при записи подынтегральных выражений принято часть, содержащую символ d записывать *последней*.

В заключение отметим принятый приоритет операций: символ d имеет приоритет *большой* чем сложение и вычитание, но *меньший*, чем умножение и деление. Таким образом, при записи интеграла от суммы следует использовать скобки:

$$\text{НЕКОРРЕКТНО: } \int f(x) + g(x) dx, \quad \text{КОРРЕКТНО: } \int (f(x) + g(x)) dx.$$

Тогда как при записи интеграла от произведения скобки можно опускать:

$$\text{ОБЕ ЗАПИСИ КОРРЕКТНЫ: } \int f(x)g(x) dx, \quad \int (f(x)g(x)) dx.$$

По этому же правилу $dx^2 \neq d(x^2)$, поскольку $dx^2 = dx \cdot dx$, а $d(x^2) = 2x dx$.

2 Основные приёмы отыскания первообразной

а. Табличные производные, которые необходимо знать.

Поскольку операция неопределённого интегрирования есть обратное действие к дифференцированию, прежде всего стоит вспомнить/выучить производные элементарных функций.

Задача 2.1. Вычислить первообразную степенной функции $f(x) = x^p$.

Решение. Вспомним, что $(x^{p+1})' = (p+1)x^p$. Отсюда получаем, что

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1.$$

При $p = -1$ выражение в правой части теряет смысл, и такой способ не даёт нам возможности вычислить первообразную от $\int \frac{dx}{x}$. Внимательное рассмотрение производных простейших функций может подсказать, что $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ при $x > 0$, и $(\ln(-x))' = \frac{1}{x}$ при $x < 0$. Отсюда

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + C_1, & x > 0, \\ \ln(-x) + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

Традиционно в учебниках записывают $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, однако стоит помнить, что в случае, когда область определения состоит из нескольких компонент (в данном примере $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$), постоянные на различных компонентах могут быть различны. $\square$

Ниже перечислены первообразные основных элементарных функций в предположении, что подынтегральная функция задана на промежутке.

$$\begin{array}{ll} \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1, & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C_1, \\ -\arccos x + C_2, \end{cases} \\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, & \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C_1, \\ -\operatorname{arcctg} x + C_2, \end{cases} \\ \int e^x dx = e^x + C, & \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C, \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, & \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C, \\ \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, & \int \sin x dx = -\cos x + C, \\ \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, & \int \cos x dx = \sin x + C, \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, & \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsh} x + C, \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arch} x + C. \end{array}$$

б. Линейность неопределённого интеграла.

Первообразная от линейной комбинации есть линейная комбинация первообразных с точностью до постоянного слагаемого:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx + C. \quad (2.1)$$

В этом несложно убедиться, продифференцировав левую и правую часть.

Задача 2.2. Найти первообразную многочлена $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx_n$.

Решение. По (2.1) имеем

$$\int P(x) dx = \int \sum_{k=0}^n a_k x^k dx = \sum_{k=0}^n a_k \int x^k dx = \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

Таким образом, первообразная многочлена есть многочлен. □

Задача 2.3. Найти первообразную функции $\frac{x^2}{x^2+1}$.

Решение. Заметим, что

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}.$$

Отсюда

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \int 1 dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \arctg x + C.$$

□

Задача 2.4. Найти первообразную функции $\sin^2 x$.

Решение. При вычислении интегралов от тригонометрических и гиперболических функций нередко используется приём «понижения степени». Этот приём заключается в том, что квадраты таких функций выражаются через соответствующие функции от удвоенных углов (это верно и для больших степеней, однако выражения в этом случае могут получиться неоправданно громоздкими). Итак, по формуле двойного угла

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x.$$

Отсюда $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$. Таким образом

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \int \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + C.$$

□

с. Интегрирование по частям.

Если $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции, то

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx + C.$$

Эта формула следует из формулы дифференцирования произведения. Действительно, $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, откуда

$$u(x)v(x) = \int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx + C = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx + C.$$

Задача 2.5. Найти первообразную функции $\ln x$.

Решение. Представим $\ln x$ как $1 \cdot \ln x$. В этом случае $u(x) = \ln x$, $v(x) = x$. Таким образом,

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x(\ln x)' \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.$$

□

При использовании метода интегрирования по частям часто удобно использовать символику подынтегральных выражений, введённую нами в конце первого раздела. Тогда мы можем записать формулу интегрирования по частям в более лаконичном виде

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du,$$

и в этом же виде использовать.

Задача 2.6. Найти первообразную функции $x^2 \cos x$.

Решение. По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int x^2 \cos x \, dx = \int x^2 d(\sin x) = x^2 \sin x - \int \sin x d(x^2) = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx.$$

Для нахождения последнего интеграла следует применить формулу интегрирования по частям ещё раз:

$$\int 2x \sin x \, dx = 2 \int x d(-\cos x) = -2x \cos x + 2 \int \cos x \, dx = -2x \cos x + 2 \sin x.$$

Сложив эти результаты воедино, получаем ответ: $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$. □

d. Замена переменной.

Пусть I_x и I_y — два промежутка, $F, f : I_y \rightarrow \mathbb{R}$ — такие функции, что

$$\int f(y) \, dy = F(y) + C,$$

и $\varphi : I_x \rightarrow I_y$ — дифференцируемое отображение. Тогда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx = (F \circ \varphi)(x) + C.$$

Для доказательства достаточно убедиться, что производные левой и правой частей совпадают.

Задача 2.7. Найти первообразную функции $\frac{x}{x^2 + 1}$.

Решение. Для того, чтобы применить формулу замены переменной, требуется заметить такое выражение $\varphi(x)$, что данная нам функция содержит только выражения вида $\varphi(x)$ и единственный сомножитель $\varphi'(x)$. В данном случае в качестве такого выражения подходит $\varphi(x) = x^2$. Действительно,

$$\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2(x^2 + 1)} \cdot (x^2)'$$

Теперь мы можем совершить замену переменной $y = \varphi(x)$:

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \int \frac{1}{2(x^2 + 1)} (x^2)' dx = \int \frac{dy}{2(y + 1)} = \frac{1}{2} \ln |y + 1| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

Заметим, что хотя в промежуточных вычислениях появился модуль, в ответе он отсутствует, поскольку выражение $x^2 + 1$ всегда положительно. $\square$

Формулу замены переменной также проще мнемонически запомнить, используя символику подынтегральных выражений. Совершая подстановку $y = \varphi(x)$, получаем

$$\int f(y) dy = \int f(\varphi(x)) d\varphi(x).$$

3 Первообразные рациональных функций

3.1 Разложение рациональной функции в простые дроби

Приведём необходимые сведения о многочленах из курса алгебры, которые понадобятся для дальнейшего изложения материала.

Утверждение 3.1. *Любой многочлен $Q(x)$ над полем вещественных чисел представим в виде произведения неприводимых многочленов первой и второй степени:*

$$Q(x) = C(x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_m)^{k_m} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_nx + q_n)^{l_n}, \quad (3.1)$$

где $4q_j - p_j^2 > 0$, $j = 1, \dots, n$. Для ненулевого многочлена это представление единственно с точностью до перестановки сомножителей.

Далее, символом $\deg P$ обозначается степень многочлена P .

Утверждение 3.2 (о делении с остатком). *Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, $Q \neq 0$ и $\deg P \geq \deg Q$. Тогда существуют единственные многочлены $q(x)$ и $r(x)$ такие, что $\deg q = \deg P - \deg Q$, $\deg r < \deg Q$ и*

$$P(x) = q(x)Q(x) + r(x).$$

Далее символом $\text{НОД}(P, Q)$ обозначается наибольший общий делитель многочленов P и Q .

Утверждение 3.3. *Пусть $\deg P, \deg Q > 0$ и $d(x) = \text{НОД}(P(x), Q(x))$. Тогда существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $\deg u < \deg Q$, $\deg v < \deg P$ и*

$$d(x) = P(x)u(x) + Q(x)v(x).$$

Определение 3.4. *Рациональной функцией* называется функция вида $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

При исследовании рациональной функции естественно полагать, что она представляет собой несократимую дробь, т.е. что её числитель и знаменатель взаимно просты. В противном случае мы можем сократить дробь на их наибольший общий делитель.

Рациональную функцию будем называть *правильной дробью*, если степень числителя меньше степени знаменателя.

Теорема 3.5 (о разложении в простые дроби). *Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, $\deg P < \deg Q$, $\text{НОД}(P, Q) = 1$ и для Q выполнено разложение (3.1). Тогда*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_m} \frac{c_{ij}}{(x - x_i)^j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_n} \frac{a_{ij}x + b_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}.$$

Доказательство.

ШАГ 1. Сперва докажем, что если $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$, где $\text{НОД}(Q_1, Q_2) = 1$, то существуют многочлены $P_1(x)$, $P_2(x)$ такие, что $\deg P_1 < \deg Q_1$, $\deg P_2 < \deg Q_2$ и

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Действительно, по утверждению 3.3 существуют $u(x)$, $v(x)$ такие, что $\deg u < \deg Q_2$, $\deg v < \deg Q_1$ и

$$1 = u(x)Q_1(x) + v(x)Q_2(x).$$

Отсюда (опуская аргумент x для краткости)

$$P = Pu \cdot Q_1 + Pv \cdot Q_2.$$

По утверждению 3.2 имеем $Pu = q \cdot Q_2 + r$, где $\deg r < \deg Q_2$. Таким образом

$$P = (qQ_2 + r)Q_1 + Pv \cdot Q_2 = r \cdot Q_1 + (qQ_1 + Pv)Q_2 = r \cdot Q_1 + s \cdot Q_2.$$

Заметим, что $\deg P < \deg Q$ и $\deg(rQ_1) < \deg(Q_2Q_1) = \deg Q$. Следовательно, то же верно и для оставшегося слагаемого: $\deg(sQ_2) < \deg Q$, а значит $\deg s < \deg Q_1$. Таким образом, получаем искомое разложение

$$\frac{P}{Q} = \frac{rQ_1 + sQ_2}{Q_1Q_2} = \frac{r}{Q_2} + \frac{s}{Q_1}.$$

ШАГ 2. Последовательно применяя шаг 1 для каждого неприводимого множителя, который входит в разложение Q , исходную дробь можно привести к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^m \frac{r_i(x)}{(x - x_i)^{k_i}} + \sum_{i=1}^n \frac{s_i(x)}{(x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}}.$$

Докажем это индукцией по числу многочленов, входящих в представление (3.1). Действительно, если $m + n = 1$, утверждение становится тривиальным. Далее, если $Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \tilde{Q}(x)$, где $\tilde{Q}(x_1) \neq 0$, то по шагу 1 получаем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{r(x)}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}. \quad (3.2)$$

По предположению индукции для последней дроби искомое разложение существует.

ШАГ 3. Для того, чтобы получить представление из утверждения теоремы, осталось разложить числители в (3.2) по степеням соответствующих многочленов в знаменателях. Т.е. показать, что

$$r_i(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 + \cdots + a_{k_i}(x - x_i)^{k_i}$$

для некоторых коэффициентов a_j , $j = 1, \dots, k_i$, и то же самое для многочленов второй степени. Этого можно добиться, последовательно разделяя с остатком числитель на первую степень знаменателя. Строгое обоснование этого шага с помощью математической индукции остаётся читателю в качестве упражнения. $\square$

3.2 Интегрирование рациональных функций

Областью определения рациональной функции можно считать все $x \in \mathbb{R}$, при которых знаменатель не обращается в нуль. Однако, поскольку мы решаем задачу восстановления первообразной функции на промежутке, уместно полагать, что функция $R(x)$ задана на промежутке, не содержащем ни одного корня многочлена $Q(x)$. Тем самым будут оправданы записи вида

$$\int \frac{dx}{x - p} = \ln |x - p| + C,$$

поскольку область определения в данном случае содержится либо в $(-\infty, p)$, либо в $(p, +\infty)$ и выражение под модулем имеет вполне определённый знак.

Итак, чтобы найти первообразную рациональной функции $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$:

1. Разделим числитель на знаменатель с остатком.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{Q(x)},$$

где $s(x)$ и $r(x)$ — многочлены и дробь в правой части уравнения правильная. Первообразную от многочлена мы уже умеем находить.

2. Представим правильную дробь в виде суммы простых дробей. Это можно сделать, например, методом неопределённых коэффициентов. Для примера рассмотрим дробь

$$R(x) = \frac{3x^2 - 13x + 5}{x^3 - 5x + 8x - 4}.$$

Находим корни знаменателя и получаем $x^3 - 5x + 8x - 4 = (x - 1)(x - 2)^2$. По теореме 3.5 имеет место разложение

$$\frac{3x^2 - 13x + 5}{(x - 1)(x - 2)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{(x - 2)^2}.$$

Умножая уравнение на знаменатель правой части получаем

$$3x^2 - 13x + 5 = A(x - 2)^2 + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1).$$

Поскольку два многочлена совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их коэффициенты, раскрывая скобки в правой части, немедленно получаем уравнения на A , B и C .

Таким образом, чтобы решить задачу о нахождении первообразной рациональной функции, осталось найти первообразные всех возможных простых дробей.

Для многочленов первой степени первообразные находятся простейшей заменой $y = x - x_i$:

$$\int \frac{dx}{x - x_i} = \int \frac{dy}{y} = \ln |y| + C = \ln |x - x_i| + C.$$

При $k > 1$:

$$\int \frac{dx}{(x - x_i)^k} = \int y^{-k} dy = \frac{y^{1-k}}{1-k} + C = \frac{-1}{(k-1)(x - x_i)^{k-1}}.$$

Неприводимый многочлен второго порядка $x^2 + px + q$ можно преобразовать к виду $a^2(y^2 + 1)$, где $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$. Действительно, выделим полный квадрат

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} + (q - \frac{p^2}{4}) = (x + \frac{p}{2})^2 + a^2 = a^2 \left(\left(\frac{x + p/2}{a} \right)^2 + 1 \right).$$

Отсюда, искомая линейная замена $y = \frac{x+p/2}{a}$. После такой замены простая дробь преобразуется к виду

$$\frac{Ay + B}{(y^2 + 1)^k} = A \frac{y}{(y^2 + 1)^k} + B \frac{1}{(y^2 + 1)^k}.$$

Первообразную первой из полученных дробей можно найти, используя замену $y^2 = z$ (при этом $2y dy = dz$):

$$\int \frac{y dy}{y^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{2y dy}{y^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z + 1} = \frac{1}{2} \ln |z + 1| + C = \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) + C.$$

Аналогично, при $k > 1$ имеем

$$\int \frac{y dy}{(y^2 + 1)^k} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{(z + 1)^k} = \frac{-1}{2(k-1)(z + 1)^{k-1}} + C = \frac{-1}{2(k-1)(y^2 + 1)^{k-1}} + C.$$

Осталось вычислить интеграл

$$I_k = \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^k}, \quad k \geq 1.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{y}{(y^2 + 1)^k} - \int y \frac{-2ky}{(y^2 + 1)^{k+1}} dy = \frac{y}{(y^2 + 1)^k} + 2k \int \frac{y^2}{(y^2 + 1)^{k+1}} dy \\ &= \frac{y}{(y^2 + 1)^k} + 2k \int \frac{(y^2 + 1) - 1}{(y^2 + 1)^{k+1}} dy = \frac{y}{(y^2 + 1)^k} + 2k I_k - 2k I_{k+1}, \end{aligned}$$

откуда можно выразить I_{k+1} через I_k . Таким образом, I_k можно вычислить рекуррентно, используя соотношения

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \operatorname{arctg} y + C, \\ I_{k+1} &= \frac{y}{2k(y^2 + 1)^k} + \frac{2k - 1}{2k} I_k. \end{aligned}$$