ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

С. К. Водопьянов

ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ. РЯДЫ

Учебное пособие

Новосибирск
2016

ББК В.162.12
УДК 517.5
А465

Водопьянов С. К. Пределы. Непрерывность. Дифференцируемость. Ряды: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2016. 261 с.

В пособии изложены основы анализа в объёме, соответствующем программе базового предмета «Математический анализ», читаемого студентам 1-го курса механико-математического факультета НГУ. Изложение начинается с аксиоматического описания поля вещественных чисел. Теория пределов изложена на расширенной вещественной прямой. Свойства элементарных функций выводятся из свойств экспоненциальной функции. Завершают пособие дифференциальное исчисление функций одной переменной и теория рядов.

Приведены задачи, рекомендуемые для решения на практических занятиях по указанному курсу.

Предназначено студентам и преподавателям механико-математического факультета НГУ и других вузов с математическим профилем.

Рецензент

Содержание

Предисловие

1 Вещественные числа

1.1 «Наивное представление о числах»: совокупности чисел, известные из «школьного» курса математики

Совокупность натуральных чисел

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

служит для пересчета предметов.

Совокупность целых чисел

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ..., \pm n, ...\}$$

обеспечивает возможность двигаться в обе стороны от нуля. Совокупность рациональных чисел

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$$

служит для деления целых совокупностей на произвольное количество долей. Очевидно $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Обозначенных символами $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ совокупностей недостаточно для измерения величин.

1.1. Предложение. *Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.*

Доказательство. Если взять квадрат со стороной, равной 1, то по теореме Пифагора[1] его диагональ будет равна $\sqrt{2}$. Для доказательства утверждения надо проверить, что $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде рационального числа. Пусть, напротив,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

где рациональная дробь $\frac{p}{q}$ предполагается несократимой. По определению корня имеем $2 = \frac{p^2}{q^2}$. Отсюда

$$2q^2 = p^2. \tag{1.1.1}$$

[1] Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Так как левая часть делится на 2, то и правая часть этого равенства делится на 2. Если натуральное число p^2 делится на 2, то и число p делится на 2. Следовательно, число p четное: $p = 2k$. Подставляя это представление в (1.1.1), получаем

$$2q^2 = 4k^2 \quad \text{или} \quad q^2 = 2k^2.$$

Отсюда так же, как и предыдущем случае, получаем четность числа q. Таким образом, оба числа p и q четные. Это противоречит несократимости дроби $\frac{p}{q}$.

Представление рационального числа в виде десятичной дроби будет либо конечной десятичной дробью, либо бесконечной периодической десятичной дробью. Все остальные бесконечные десятичные дроби служат для обозначения нерациональных действительных чисел, называемых *иррациональными*. *Действительные числа* — это все рациональные и все иррациональные числа.

Как известно, действительные числа можно складывать, перемножать и два любых действительных числа находятся в одном из отношений: либо они равны, либо одно из них больше другого.

1.2. Задача. Пусть p — простое число. Доказать, что $\sqrt{p}$ не может быть рациональным числом.

1.2 Аксиоматический подход к описанию действительных чисел. Свойства алгебраических операций (аксиомы поля). Следствия из аксиом.

Совокупность $\mathbb{R}$ вещественных чисел определяется как множество, на котором определены алгебраические операции сложения и умножения, и отношение порядка, обладающие свойствами, сформулированными в приводимых ниже аксиомах.

Операция сложения на $\mathbb{R}$ определена как некоторое отображение $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающее свойствами **A1** – **A4** (см. ниже). При этом для пары x, y число $s(x, y)$ обозначается символом $x + y$ и называется суммой чисел x и y.

A1 (ассоциативность сложения). Для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

A2 (существование нуля). Существует число $0 \in \mathbb{R}$ такое, что

$$x + 0 = 0 + x = x$$

для всякого $x \in \mathbb{R}$

A3 (существование противоположного элемента). Для всякого $x \in \mathbb{R}$ существует число $-x \in \mathbb{R}$ такое, что

$$x + (-x) = 0.$$

Число $-x$ называется числом, *противоположным* x.

A4 (коммутативность сложения). Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ имеем

$$x + y = y + x.$$

Операция умножения на $\mathbb{R}$ определена как некоторое отображение $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающее приводимыми ниже свойствами **M1** – **M4** и **AM**. При этом для пары x, y число $p(x, y)$ обозначается символом $x \cdot y$ или просто xy и называется их произведением.

О свойствах операций s и p будем говорить как об аксиомах алгебраической структуры множества $\mathbb{R}$ или правилах действий над вещественными числами.

M1 (ассоциативность умножения). Для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

M2 (существование единицы). Существует число $1 \neq 0$ такое, что

$$1 \cdot x = x$$

для всякого $x \in \mathbb{R}$.

M3 (существование обратного элемента). Для любого $x \neq 0$ из $\mathbb{R}$ существует число $\frac{1}{x}$ такое, что

$$x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1.$$

Число $\frac{1}{x}$ называется числом, *обратным* к x.

M4 (коммутативность умножения). Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ имеем

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

AM (дистрибутивность). Для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Если $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, то число $x + (-y)$ называется разностью чисел x и y и обозначается символом $x - y$. Если $y \neq 0$, то число $x \cdot \frac{1}{y}$ обозначается через $\frac{x}{y}$ и называется частным x и y.

Из перечисленных *аксиом* можно вывести известные тождества элементарной алгебры.

1.3. Задачи. Вывести их аксиом следующие свойства:

1) 0 единствен.

2) 1 единственна.

3) $0 \cdot a = 0$.

4) $(-1) \cdot a = -a$.

5) $0 = -0$; доказать аналогичное свойство для 1.

6) Если $1 = 0$, то $\mathbb{R} = \{0\}$.

7) В множестве действительных чисел у каждого элемента имеется единственный противоположный элемент.

8) Уравнение $a + x = b$ для $a, b \in \mathbb{R}$ имеет и притом единственное решение $x = b + (-a)$.

9) В множестве действительных чисел у каждого элемента, не равного нулю, имеется единственный обратный элемент.

10) Уравнение $a \cdot x = b$ для $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, имеет и притом единственное решение $x = b \cdot \frac{1}{a}$.

11) Закон сокращения: если $a \cdot b = 0$, то возможны лишь следующие варианты:

a) $a = 0$, $b \neq 0$;

b) $a \neq 0$, $b = 0$;

c) $a = 0$, $b = 0$;

Указание: Исключить возможность: $a \neq 0$, $b \neq 0$.

12) $x \cdot 0 = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

13) $-x = (-1) \cdot x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

14) $(-1) \cdot (-x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

15) $(-x) \cdot (-x) = x \cdot x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

1.3 Аксиомы порядка. Согласованность с алгебраическими операциями. Следствия

На множестве $\mathbb{R}$ определено отношение, обозначаемое символом $\leq$ и называемое *отношением порядка*. Это означает, что для каждой пары вещественных чисел x, y указано, верно ли для нее высказывание $x \leq y$ или нет. Если оно верно, то будем говорить, что x *не больше* y, или что x *не превосходит* y, или, наконец, что x *предшествует* y. В случае, если $x \leq y$, будем также писать $y \geq x$ и говорить, что y *не меньше* x, или y *больше или равно* x, или y *следует за* x. Таким образом, высказывания $x \leq y$ и $y \geq x$ означают одно и то же свойство.

Свойства отношения порядка в $\mathbb{R}$ описываются следующими *аксиомами.*

O1 (рефлексивность). Для всякого $x \in \mathbb{R}$ справедливо отношение $x \leq x$.

O2 (транзитивность). Если $x, y, z \in \mathbb{R}$ таковы, что $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$.

O3 Если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$.

O4 Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ всегда либо $x \leq y$, либо $y \leq x$.

OA Если $x \leq y$, то для любого $z \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $x + z \leq y + z$.

OM Если $x \leq y$ и $0 \leq z$, то $xz \leq yz$.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда, если $x \leq y$ и $x \neq y$, то будем писать $x < y$ или $y > x$, и говорить, что x *меньше* y или что y *больше* x.

Формулы, содержащие знаки $\leq$, $\geq$, $<$ и $>$, называются *неравенствами*. Неравенства, содержащие знаки $<$ и $>$, называются *строгими*, неравенства со знаками $\leq$ и $\geq$ — *нестрогими*.

Из аксиом порядка легко вывести простейшие свойства отношения порядка, например, следующие.

(1) *Для любых двух элементов $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется одно и только одно из следующих трех соотношений*:

$$x < y; \quad x = y; \quad y < x. \tag{1.3.2}$$

(2) *Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}$ таковы, что либо $x \leq y$ и $y < z$, либо $x < y$ и $y \leq z$. Тогда $x < z$. В частности, если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$.*

(3) *Если $x < y$, то $x + z < y + z$ для всякого $z \in \mathbb{R}$.*

(4) *Если $x < y$, то $xz < yz$ для всякого z такого, что $0 < z$.*

(5) *Для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $x \cdot x \geq 0$.*

1.4. Задачи. Вывести их аксиом следующие свойства:

1) Если $a > 0$ и $b > 0$, то $a + b > 0$.
2) Если $a > 0$ и $b > 0$, то $a \cdot b > 0$.
3) Если $a > 0$, то $-a < 0$.
4) Если $a > 0$ и $b < 0$, то $a \cdot b < 0$.
5) Если $a < 0$ и $b > 0$, то $a \cdot b < 0$.
6) Если $a < 0$ и $b < 0$, то $a \cdot b > 0$.
7) Если $b > 0$, то $\frac{1}{b} > 0$.
8) Если $b < 0$, то $\frac{1}{b} < 0$.
9) Если $a > 0$ и $b > 0$, то $\frac{a}{b} > 0$.
10) 0<1.

1.4 Аксиома непрерывности

Если A и B — два непустых подмножества в $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для любых $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство

$a \le b$, то существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что соотношения

$$a \le c \le b$$

выполняется для любых чисел $a \in A$ и $b \in B$.

1.5 Абсолютная величина числа. Расстояние между точками и его свойства

1.5. Определение. *Абсолютной величиной* или *модулем числа* $x \in \mathbb{R}$ называется число $|x|$, равное x, если $x \ge 0$, и $-x$, если $x < 0$.

1.6. Задача. $|a| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.

1.7. Задача. Для любых x и y из $\mathbb{R}$

$$|xy| = |x| \cdot |y|.$$

В частности, имеем $|-x| = |-1| \cdot |x| = |x|$ для всякого $x \in \mathbb{R}$.

Легко доказывается следующее

1.8. Свойство модуля. *Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Тогда*
a) неравенство $|x| \le a$ равносильно системе неравенств

$$-a \le x \le a;$$

b) неравенство $|x| < a$ равносильно системе неравенств $-a < x < a$.

1.5.1 Неравенства треугольника

1) *Для любых чисел $x, y \in \mathbb{R}$*

$$|x + y| \le |x| + |y|. \tag{1.5.3}$$

Действительно,

$$-|x| \le x \le |x|,$$
$$-|y| \le y \le |y|.$$

Складывая эти неравенства почленно, получим

$$-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|,$$

откуда в силу первого из свойств 1.8 следует, что

$$|x+y| \leq |x|+|y|.$$

2) *Для любых* $x, y \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство*

$$||x|-|y|| \leq |x-y|. \tag{1.5.4}$$

Действительно, имеем $x=(x-y)+y$ и $y=(y-x)+x$. Отсюда

$$|x| \leq |x-y|+|y| \quad \text{и} \quad |y| \leq |y-x|+|x|$$

в силу (1.5.3). Из первого неравенства получаем

$$|x|-|y| \leq |x-y|,$$

а из второго —

$$|x|-|y| \geq -|x-y|.$$

Отсюда в силу первого из свойств 1.8 вытекает требуемое:

$$||x|-|y|| \leq |x-y|.$$

1.5.2 Расстояние между точками на вещественной прямой

1.9. Определение. *Расстоянием* между точками $x, y \in \mathbb{R}$ называется неотрицательная величина $d(x, y)=|x-y|$.

С помощью установленных в этом разделе свойств можно доказать следующие свойства расстояния.

1) *Для любых* x *и* y *из* $\mathbb{R}$

$$d(x, y) \geq 0.$$

В частности, $d(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$.

2) *Для любых* x *и* y *из* $\mathbb{R}$ выполняется следующее *свойство симметрии*:

$$d(x, y)=d(y, x).$$

3) *Для любых чисел* $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполняется *неравенство треугольника*:

$$d(x, y) \leq d(y, z)+d(z, x).$$

Первые два свойства вытекают из определения модуля. Для доказательство третьего свойства воспользуемся неравенством треугольника (1.5.3) для модуля:

$$d(x, y)=|x-y|=|x-z+z-y| \leq |x-z|+|z-y|=d(x, z)+d(z, y).$$

1.5.3 Положительная и отрицательная части вещественного числа. Понятие знака числа

Пусть $x \in \mathbb{R}$. *Положительной частью* числа x называется число x^+, равное x, если $x \geq 0$, и 0, если $x < 0$. *Отрицательной частью* числа x называется число x^-, равное 0, если $x \geq 0$, и $-x$, если $x < 0$.

1.10. Предложение. *Для всякого $x \in \mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-. \tag{1.5.5}$$

Доказательство. Действительно, если $x \geq 0$, то $x^+ = x$, $x^- = 0$, $|x| = x$, и оба равенства для такого x верны. Пусть $x < 0$. Тогда $x^+ = 0$, $x^- = -x$, $|x| = -x$, откуда ясно, что и в этом случае равенства (1.5.5) верны. Предложение доказано.

Из соотношений (1.5.5) для $x \in \mathbb{R}$ вытекают следующие равенства:

$$x^+ = \frac{|x| + x}{2}, \quad x^- = \frac{|x| - x}{2}.$$

Наконец, для произвольного $x \in \mathbb{R}$ полагаем

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases} \tag{1.5.6}$$

Величина $\operatorname{sign} x$ (читается «сигнум x», signum – знак (лат.)) называется *знаком числа* x. Для всякого $x \in \mathbb{R}$, очевидно, имеем

$$|x| = x \operatorname{sign} x, \quad x = |x| \operatorname{sign} x.$$

1.6 Понятие промежутка. Лемма о непустоте промежутка и ее следствие

1.11. Определение. Пусть даны произвольные числа $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что $a < b$. Множество, обозначаемое символом $\langle a, b \rangle$ и совпадающее с одним из множеств

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \end{aligned}$$

называется *промежутком числовой прямой с концами* a, b. При этом множество (a, b) называют *открытым промежутком* или *интервалом*, а множество $[a, b]$ — *замкнутым промежутком* или *отрезком* с концами a, b. Промежутки $[a, b)$ и $(a, b]$ называют *полуоткрытыми*.

Ясно, что $[a, b] = (a, b) \cup \{a\} \cup \{b\}$, $[a, b) = (a, b) \cup \{a\}$, $(a, b] = (a, b) \cup \{b\}$. Отметим, что $(-\infty, a]$, где $a < \infty$, есть множество всех чисел $x \in \mathbb{R}$ таких, что $x \leq a$, а $(-\infty, a)$ есть множество всех $x \in \mathbb{R}$, для которых $x < a$.

1.12. Лемма. *Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ таких, что $a < b$, существует по крайней мере одно $x \in \mathbb{R}$ такое, что $a < x < b$.*

Доказательство. Если $a, b \in \mathbb{R}$, то число $x = \frac{a+b}{2}$ обладает необходимым свойством. Другими словами, число x удовлетворяет неравенствам

$$a < x < b.$$

Лемма доказана.

1.7 Верхние и нижние границы числового множества. Ограниченные множества

1.13. Определение. Пусть дано непустое множество $A \subset \mathbb{R}$. Число $L \in \mathbb{R}$ ($l \in \mathbb{R}$) называется *верхней* (*нижней*) границей множества A, если $x \leq L$ (соответственно, $x \geq l$) для всякого $x \in A$.

Совокупность всех верхних (нижних) границ для множества $A \subset \mathbb{R}$ обозначается символом $\Gamma^+(A)$ ($\Gamma^-(A)$).

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует число L (l) такое, что

$$x \leq L \quad (l \leq x) \quad \text{для любого числа } x \in A. \tag{1.7.7}$$

Из этого определения выводим, что множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху (снизу) тогда и только тогда, когда множество $\Gamma^+(A)$ ($\Gamma^-(A)$) непустое.

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если оно одновременно ограничено сверху и снизу.

1.14. Задача. Если L — верхняя граница множества A, то и любое число $L' \geq L$ является верхней границей для A: если $L \in \Gamma^+(A)$ и $L' \geq L$, то $L' \in \Gamma^+(A)$.

1.15. Задача. Сформулировать определение неограниченного сверху (снизу) множества. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}$ не ограничено сверху (снизу) тогда и только тогда, когда $\Gamma^+(A) = \emptyset$ ($\Gamma^-(A) = \emptyset$).

1.16. Предложение. *Множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено тогда и только тогда, когда существует $L \in \mathbb{R}$ такое, что $|x| \leq L$ для любого $x \in A$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Почему?

Достаточность. Если $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, то множество $\Gamma^+(A)$ непустое и поэтому содержит некоторое число $M \in \mathbb{R}$. При этом $x \leq M$ для любого числа $x \in A$. Аналогично, если $A \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу, то найдется $m \in \mathbb{R}$ такое, что $m \leq x$ для любого числа $x \in A$. Число $L = \max(|m|, |M|)$ удовлетворяет соотношениям

$$-L \leq m \leq x \leq M \leq L$$

для любого $x \in A$. Следовательно, по определению модуля $|x| \leq L$ для любого $x \in A$.

1.8 Понятие наибольшего и наименьшего элементов числового множества

1.17. Определение. Пусть дано непустое множество $A \subset \mathbb{R}$.

(I) Число $M \in \mathbb{R}$ называется *наибольшим* элементом множества A, если

1) $M \in A$ и

2) $M \in \Gamma^+(A)$, т. е. $x \leq M$ для любого $x \in A$.

(II) Число $m \in \mathbb{R}$ называется *наименьшим* элементом множества A, если

1) $m \in A$ и

2) $m \in \Gamma^-(A)$, т. е. $m \leq x$ для любого $x \in A$.

Наибольший (наименьший) элемент множества A, если он существует, обозначается символом $\max A$ (соответственно, $\min A$) (max и min от латинских слов maximum — «наибольший», и minimum — «наименьший»).

1.18. Задача. Доказать, что наибольший (наименьший) элемент множества $A \subset \mathbb{R}$ единствен.

1.19. Задача. Доказать, что если множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший и наименьший элементы, то $A \subset [\min A, \max A]$.

1.20. Задача. Доказать, что если для множества $A \subset \mathbb{R}$ имеем $\min A = \max A$, то множество A одноточечное.

1.21. Задача. Доказать, что если множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший (наименьший) элемент, то $\max A = \min \Gamma^+(A)$ ($\min A = \max \Gamma^-(A)$). Привести пример ограниченного сверху (снизу) множества, не имеющего наибольшего (наименьшего) числа, но для которого совокупность верхних границ $\Gamma^+(A)$ имеет наименьшее (наибольшее) число.

1.22. Задача. Множество $A \subset \mathbb{R}$ одноточечное тогда и только тогда, когда $\Gamma^-(A) \cup \Gamma^+(A) = \mathbb{R}$.

Для замкнутого промежутка $[a, b]$ в $\mathbb{R}$ левый конец a является его наименьшим, а правый b — наибольшим элементом. (Проверить по определению!)

Множество $A \subset \mathbb{R}$ может и не иметь наименьшего или наибольшего элемента. Например, интервал $A = (0, 1)$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элемента. Действительно, возьмем произвольно точку $a \in (0, 1)$ и положим:

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a+1}{2}.$$

Очевидно, что $0 < x < a < y < 1$. Тем самым a не может быть ни наименьшим, ни наибольшим элементом промежутка $(0, 1)$. Поэтому ввиду произвольности $a \in (0, 1)$, у множества $A = (0, 1)$ нет ни наименьшего, ни наибольшего элемента.

Ясно, что множество $\mathbb{R}$ не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элемента.

1.23. Задача. Доказать, что полуинтервал $[a, b) \subset \mathbb{R}$ имеет наименьший элемент и не имеет наибольшего.

Что можно сказать и наименьшем и наибольшем элементе полуинтервала $(a, b] \subset \mathbb{R}$?

1.24. Задача. Непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший (наименьший) элемент тогда и только тогда, когда пересечение $A \cap \Gamma^+(A) \neq \emptyset$ ($A \cap \Gamma^-(A) \neq \emptyset$). Если это пересечение непустое, то оно состоит из одной точки, которая и будет максимальным (минимальным) элементом множества A.

1.9 Понятие точной верхней и точной нижней границ числового множества и их существование

1.25. Определение. Пусть дано непустое множество $A \subset \mathbb{R}$. Наименьшая из его верхних границ, если таковая существует, называется *точной верхней границей* множества A и обозначается символом $\sup A$ (sup сокращение латинского слова supremum — наивысший). Таким образом,

$$\sup A = \min \Gamma^+(A).$$

Наибольшая из нижних границ множества А, если таковая существует, называется *точной нижней границей* множества A и обозначается символом $\inf A$ (inf сокращение латинского слова infimum — нижайший). Таким образом,

$$\inf A = \max \Gamma^-(A).$$

В этом определении, естественно, предполагается, что $\Gamma^+(A)$ и $\Gamma^-(A)$ — непустые множества. Более того, возникает вопрос о существовании наименьшей из верхних границ (наибольшей из нижних границ) непустого множества A. Ответ на этот вопрос положительный (см. ниже теорему 1.27).

1.26. Задачи. 1) Если множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший элемент, то он является и точной верхней границей множества A: $\max A = \sup A$.

2) Если множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет наименьший элемент, то этот элемент является точной нижней границей множества A: $\min A = \inf A$.

1.9.1 Теорема о существовании точной верхней и точной нижней границ непустого числового множества

В дальнейшем существенно используется следующее свойство подмножеств совокупности $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

1.27. Теорема. *Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю (нижнюю) границу.*

Таким образом, для всякого *ограниченного множества* $E \subset \mathbb{R}$ совокупность $\Gamma^+(E)$ всех его верхних границ имеет наименьший элемент, а совокупность $\Gamma^-(E)$ всех его нижних границ имеет наибольший элемент.

Доказательство. Пусть множество E ограничено сверху. Полагаем в аксиоме непрерывности 1.4 $A = E \neq \emptyset$, а $B = \Gamma^+(E)$. Тогда оба множества непустые и в силу аксиомы 1.4 существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$x \leq c \leq y$$

для любых чисел $x \in A$ и $y \in B$. Левая часть этих соотношений означает, что $c \in \Gamma^+(E)$, а правая — что $c = \min \Gamma^+(E)$.

Аналогично доказывается существование точной нижней границы, когда множество E ограничено снизу.

1.28. Задачи. 1) Если ограниченное сверху множество $E \subset \mathbb{R}$ не имеет максимального элемента, то $\max\{E \cup \{\sup E\}\} = \sup E$.

2) Если ограниченное снизу множество $E \in \mathbb{R}$ не имеет минимального элемента, то $\min\{E \cup \{\inf E\}\} = \inf E$.

На основании задач 1.26 и 1.28 можно сделать вывод, что $\sup E$ ($\inf E$) служат альтернативой $\max E$ ($\min E$) в тех случаях, когда множество E не имеет наибольшего (наименьшего) элемента.

1.9.2 Признак точной верхней и точной нижней границ

При нахождении точных верхних и нижних границ множества $A \subset \mathbb{R}$ удобно использовать следующий признак.

1.29. Теорема. (I) *Для того чтобы число $b \in \mathbb{R}$ было точной верхней границей непустого множества $A \subset \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *$b \in \Gamma^+(A)$, т. е. b — одна из верхних границ;*

2) *для любого числа $b' < b$ существует элемент $x \in A$ такой, что*

$$b' < x \leq b. \tag{1.9.8}$$

(II) *Для того чтобы число $a \in \mathbb{R}$ было точной нижней границей непустого множества $A \subset \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

3) *$a \in \Gamma^-(A)$, т. е. a — одна из нижних границ;*

4) *для любого числа $a' > a$ существует элемент $x \in A$ такой, что*

$$a \leq x < a'. \tag{1.9.9}$$

Доказательство. Мы докажем первое утверждение. Второе доказывается аналогично.

Необходимость. Пусть $b = \sup A$. Тогда b — наименьшая из верхних границ и поэтому $b \in \Gamma^+(A)$.

Теперь фиксируем произвольное число $b' < b$. Отметим, что $b' \notin \Gamma^+(A)$, поскольку b — наименьшая из верхних границ. Поэтому неравенство $x \le b'$ не может выполняется для всех $x \in A$ (ибо, в противном случае $b' \in \Gamma^+(A)$). Следовательно, найдется число $x \in A$, для которого это неравенство не выполняется и, значит, для него имеем $b' < x$. Очевидно, $x \le b$, поскольку b — верхняя граница множества A. Таким образом, для этого x выполняются соотношения (1.9.8) и, следовательно, условие 2 доказано.

Достаточность. Пусть $b \in \Gamma^+(A)$ и число b удовлетворяет условию (1.9.8). Требуется доказать, что b — наименьшая из верхних границ. Возьмем для этого какую-нибудь из верхних границ для множества A, скажем b', и покажем, что $b \le b'$. Для этого достаточно исключить возможность неравенства $b' < b$. Последнее неравенство невозможно, так как условие (1.9.8) означает, что b' не может быть верхней границей для A. Поэтому, если b' — верхняя граница для A, то $b' \ge b$. Следовательно, имеем $b \in \Gamma^+(A)$ и для любого $b' \in \Gamma^+(A)$ справедливо $b' \ge b$, т. е. $b = \min \Gamma^+(A) = \sup A$.

Теорема доказана.

1.30. Задача. Если непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено, то $A \subset [\inf A, \sup A]$ и отрезок $[\inf A, \sup A]$ не может быть уменьшен (ср. с задачей 1.19).

1.31. Задача. $\inf A = \sup A$ тогда и только тогда, когда множество $A \subset \mathbb{R}$ одноточечное.

1.9.3 Точные верхние и нижние границы промежутка

Рассмотрим следующий пример.

1.32. Предложение. *Пусть $A = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ — промежуток на вещественной прямой. Тогда*

$$a = \inf A, \quad b = \sup A.$$

Кроме того, если $a \in A$ ($b \in A$), то $\min A = \inf A = a$ ($\max A = \sup A = b$).

Доказательство. Согласно определению промежутка имеем $a < b$. Для всякого $x \in A$ выполняется неравенство $x \le b$, так что b есть верхняя граница множества A: $b \in \Gamma^+(A)$. Возьмем произвольно $b' < b$

и докажем, что найдется число $x \in A$ такое, что $b' < x \le b$. Если $b' < a$, то любая точка из A удовлетворяет этому соотношению.

Если же $a \le b'$, то $a \le b' < b$ и A содержит в себе интервал (b', b). Значит, любая точка $x \in (b', b)$ принадлежит A. При этом $b' < x < b$. Мы видим, что b удовлетворяет условию (1.9.8) теоремы 1.29 и, следовательно, $b = \sup A$. Если $b \in A$, то $\sup A = \max A$.

Аналогично устанавливается, что $a = \inf A$. Предложение доказано.

1.9.4 Соотношения для sup и inf вложенных множеств

1.33. Теорема о монотонности точных верхних и нижних границ относительно включения множеств. *Пусть даны непустые множества $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$. Если $A \subset B$, то*

$$\inf B \le \inf A \quad \text{и} \quad \sup A \le \sup B. \tag{1.9.10}$$

Наглядный смысл теоремы: у более широкого множества точная верхняя граница не уменьшается, а точная нижняя граница не увеличивается.

Доказательство. Пусть $p = \inf B$, $q = \sup B$. Тогда для всякого $x \in B$ имеем

$$p \le x \le q \tag{1.9.11}$$

Так как $A \subset B$, то любой элемент множества A является элементом множества B и, значит, для всякого $x \in A$ выполняются неравенства (1.9.11). Это означает, что $p \in \Gamma^-(A)$ — одна из нижних, а $q \in \Gamma^+(A)$ — одна из верхних границ множества A. Следовательно,

$$p \le \max \Gamma^-(A) = \inf A, \quad q \ge \min \Gamma^+(A) = \sup A.$$

Теорема доказана.

1.34. Предложение. *Ограниченное множество $X \subset \mathbb{R}$ — промежуток на вещественной прямой тогда и только тогда, когда вместе с любыми двумя точками $a, b \in X$ в этом множестве содержится отрезок $[a, b]$: $[a, b] \subset X$. Более того, $X = \langle \inf X, \sup X\rangle$ и X содержит левый (правый) конец тогда и только тогда, когда* $\inf X \in X$ $(\sup X \in X)$.

Доказательство. Для доказательства необходимости воспользуемся предложением 1.32. Пусть промежуток $X = \langle \alpha, \beta\rangle \subset \mathbb{R}$ и точки точками $a < b$ принадлежат X. Тогда $\alpha = \inf X \le a < b \le \sup X = \beta$. Следовательно, любая точка x отрезка $[a, b]$, $a \le x \le b$, принадлежит также и множеству X.

Докажем достаточность. Пусть, например, $\inf X \in X$, а $\sup X \notin X$. Докажем, что $X = [\inf X, \sup X)$. Включение $X \subset [\inf X, \sup X)$ очевидно.

Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольную точку $x \in (\inf X, \sup X)$. Докажем, что $x \in X$. По признакам точной верхней и нижней граней найдутся точки $a, b \in X$ такие, что $a < x < b$. По условию $[a, b] \subset X$, следовательно, $x \in X$. Так как $\inf X \in X$, включение $[\inf X, \sup X) \subset X$ доказано.

Следовательно равенство $X = [\inf X, \sup X)$ в этом случае доказано. Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.

1.10 Индуктивные множества. Важнейшие классы действительных чисел.

1.35. Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если с каждым числом $x \in X$ ему принадлежит также число $x + 1$.

1.36. Примеры. $\mathbb{R}$; $[0, \infty)$; $[1, \infty)$.

1.37. Задача. Пересечение любой совокупности индуктивных множеств является индуктивным множеством.

1.38. Определение. *Множеством натуральных* чисел называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащее 1.

Множество натуральных чисел обозначается символом $\mathbb{N}$; его элементы называются *натуральными* числами.

1.39. Определение. *Множеством целых* чисел называется совокупность

$$\mathbb{N} - \mathbb{N} = \{x - y \mid x, y \in \mathbb{N}\}$$

Множество целых чисел обозначается символом $\mathbb{Z}$; его элементы называются *целыми* числами.

1.11 Принцип математической индукции. Применения

1.40. Принцип математической индукции. *Если подмножество $E \subset \mathbb{N}$ таково, что*

1) $1 \in E$ *и*

2) *вместе с каждым числом $x \in E$ множеству E принадлежит число $x + 1$,*

то $E = \mathbb{N}$.

Доказательство. Принцип математической индукции вытекает из определения натуральных чисел. Действительно, с одной стороны, E — индуктивное множество в $\mathbb{N}$, содержащее 1, а с другой, $\mathbb{N} \subset E$, поскольку $\mathbb{N}$ — наименьшее индуктивное множество, содержащее 1.

Докажем с помощью принципа математической индукции некоторые свойства натуральных чисел.

1.41. Свойство. *Сумма и произведение натуральных чисел является натуральным числом.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$E = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N} \text{ для любого } m \in \mathbb{N}\}.$$

Докажем его индуктивность и что $1 \in E$. Действительно, $E \subset \mathbb{N}$ по построению. Далее, $1 \in E$. Действительно, если $m \in \mathbb{N}$, то и $m+1 \in \mathbb{N}$, так как $\mathbb{N}$ — индуктивное множество. Пусть теперь $n \in E$, т. е. $m+n \in \mathbb{N}$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Тогда и $m + n + 1 \in \mathbb{N}$ для любого $m \in \mathbb{N}$ в силу предыдущего шага.

1.42. Задача. Доказать, что произведение натуральных чисел является натуральным числом.

1.43. Свойство. *Если $n \in \mathbb{N}$ и $n > 1$, то $n - 1 \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 1 \text{ или } n \neq 1 \text{ и } n - 1 \in \mathbb{N}\}.$$

Докажем, что E — индуктивное множество и $1 \in E$. Действительно, 1 входит в E по построению. Если $n > 1$ и $n \in E$, то по определению множества E имеем $n \in \mathbb{N}$ и $n-1 \in \mathbb{N}$. Но тогда $n+1 \in \mathbb{N}$ и $(n+1)-1 = n \in \mathbb{N}$, т. е. $n + 1 \in E$. ндуктивность

Таким образом, мы доказали индуктивность множества E. Так как по определению $E \subset \mathbb{N}$, то в силу принципа 1.40 имеем совпадение $E = \mathbb{N}$. Следовательно, свойство 1.43 доказано.

1.44. Свойство. *Если $n, m \in \mathbb{N}$ и $n < m$, то $m - n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid m - n \in \mathbb{N} \text{ для любого } m \in \mathbb{N} \text{ такого, что } m > n\}.$$

Докажем, что E — индуктивное множество и $1 \in E$. Действительно, 1 входит в E по свойству 1.43. Если $n \in E$, и $m > n+1$, то неравенство $m > n$ тоже верное. По определению E имеем $m - n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, и $m > n+1$ выводим $m - n > 1$. Отсюда в силу свойства 1.43 имеем $m - n - 1 \in \mathbb{N}$. Последнее можно записать в виде $m - (n+1) \in \mathbb{N}$. Отсюда $n + 1 \in E$.

Таким, образом, доказана индуктивность множества $E \subset \mathbb{N}$. В силу принципа 1.40 имеем совпадение $E = \mathbb{N}$. Следовательно, свойство 1.44 доказано.

1.45. Свойство. *Если $x, y \in \mathbb{Z}$ и $x < y$, то $y - x \in \mathbb{N}$ и $x + 1 \leq y$.*

Доказательство. Пусть $x = p - q$, $y = r - s$, где $p, q, r, s \in \mathbb{N}$. Тогда условие $p - q < r - s$ эквивалентно $p + s < q + r$, а поскольку левая и правая части последнего неравенства — натуральные числа, то по свойству 1.44 разность $q + r - (p + s)$ — натуральное число. Заметим теперь, что

$$y - x = (r - s) - (p - q) = q + r - (p + s) \geq 1.$$

1.46. Задача. Если $x \in \mathbb{Z}$, то либо $x \in \mathbb{N}$, либо $x = 0$, либо $-x \in \mathbb{N}$.

1.11.1 Принцип минимального (максимального) числа

1.47. Теорема. *Всякое ограниченное снизу множество $E \subset \mathbb{Z}$ целых чисел имеет минимальный элемент.*

Доказательство. Пусть $k = \inf E$. Поскольку E ограничено снизу, $k \in \mathbb{R}$. По признаку 1.29 точной нижней границы существует число $x \in E$, удовлетворяющее неравенствам

$$k \leq x < k + 1.$$

Для любого $y \in E$ имеем $k \leq y$, следовательно, $x - 1 < k \leq y$. Так как по свойству 1.45 верно $y - (x - 1) \in \mathbb{N}$, то $y - (x - 1) \geq 1$ или

$$x \leq y$$

для любого $y \in E$. Так как $x \in E$, то x — минимальный элемент в E.

Из доказанного вытекает *принцип максимального числа.*

1.48. Следствие. *Всякое ограниченное сверху множество $F \subset \mathbb{Z}$ целых чисел имеет максимальный элемент.*

Доказательство. Действительно, множество $E = -F = \{y \in \mathbb{Z} : y = -x,\ x \in F\}$ ограничено снизу. По теореме 1.47 множество E содержит минимальный элемент $\min E$. Остается проверить, что целое число $-\min E$ будет максимальным для F. В самом деле, с одной стороны, имеем $\min E \leq y$ для любого $y \in E$, а с другой, выводим

$$x = -y \leq -\min E \in (-E) = F$$

для любого элемента $x \in F$.

1.49. Индукция вниз. *Если подмножество $F \subset \mathbb{N}$ таково, что*

1) *$n \in F$ и*

2) *вместе с каждым числом $x \in F$, $x > 1$, множеству F принадлежит число $x - 1$, то $[1, n] \cap \mathbb{N} \subset F$.*

Доказательство. Действительно, пусть

$$D = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n,\ [k, n] \cap \mathbb{N} \subset F\}.$$

Очевидно D не пусто, по крайней мере, $n \in D$. Так как D ограничено снизу, во множестве D существует наименьшее число m. Заметим, что m не может быть больше единицы: в этом случае $m - 1 \in F$ и поэтому $[m - 1, n] \cap \mathbb{N} = \{m - 1\} \cup \{[m, n] \cap \mathbb{N}\} \subset F$. Последнее противоречит минимальности числа m. Таким образом, $m = 1$.

Индукция, сформулированная в п. 1.40, называется иногда *индукцией вверх.*

1.50. Задача. Используя метод п. 1.49 доказать следующий вариант индукции вверх:

если подмножество $E \subset \mathbb{Z}$ таково, что

1) *$k_0 \in E$ и*

2) *вместе с каждым числом $x \in E$, $x \geq k_0$, множеству E принадлежит число $x + 1$, то $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq k_0\} \subset E$.*

Аналогично предыдущему можно установить также обобщение индукции вниз п. 1.49.

1.51. Задача. Доказать следующий вариант индукции вниз:

если подмножество $E \subset \mathbb{Z}$ таково, что

1) *$k_0 \in E$ и*

2) *вместе с каждым числом $x \in E$, $x \leq k_0$, множеству E принадлежит число $x - 1$, то $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq k_0\} \subset E$.*

1.11.2 Неравенство Коши между арифметическими и геометрическими средними

Докажем с помощью двух индукций неравенство между арифметическими и геометрическими средними.

1.52. Теорема. *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неотрицательные числа и $n \geq 1$. Тогда*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}. \tag{1.11.12}$$

Строгое неравенство выполняется тогда и только тогда, когда не все x_i равны между собой.

Доказательство. Неравенство (1.11.12) докажем в два шага.

На первом шаге применим индукцию для n равных степени двойки: $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

На втором шаге применим индукцию вниз.

1 шаг. Пусть $n = 2$. Применим известное неравенство

$$y_1^2 + y_2^2 \geq 2y_1y_2,$$

справедливое для всех y_1 и y_2. Полагая в этом неравенстве $y_1^2 = x_1$, $y_2^2 = x_2$, получаем

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2} \tag{1.11.13}$$

для любых неотрицательных чисел x_1 и x_2. Равенство в (1.11.13) возможно тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.

Заменим теперь x_1 новой переменной $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, а x_2 — новой переменной $\frac{1}{2}(x_3 + x_4)$. Тогда из неравенства (1.11.13), примененного дважды, мы найдем

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \left[\frac{x_1 + x_2}{2}\frac{x_3 + x_4}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\geq \left[(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}(x_3x_4)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = (x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{4}}. \tag{1.11.14}$$

Равенство в первом переходе возможно тогда и только тогда, когда $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, а во втором — когда $x_1 = x_2$ и $x_3 = x_4$. Отсюда выводим, что (1.11.14) верно в том случае, когда $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$

Продолжая таким образом по индукции вверх, мы убеждаемся, что неравенство (1.11.12) выполняется для $n = 1, 2, 4, 8, \ldots$, т. е. для любого n, являющегося степенью двойки, причем равенство будет тогда и только тогда, когда все x_i равны между собой.

2 шаг. Применим теперь индукцию вниз: покажем, что если утверждение теоремы 1.52 верно для $n > 1$, то оно верна и для $n-1$. Заменим x_n в (1.11.12) на

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1},$$

где $n \geq 2$, и оставим другие x_i неизменными. Тогда по индукционному предположению (1.11.12) получаем соотношения:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}}{n} \geq (x_1 x_2 \ldots x_{n-1})^{\frac{1}{n}} \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (1.11.15)$$

или

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \geq (x_1 x_2 \ldots x_{n-1})^{\frac{1}{n}} \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

После упрощения получаем искомое неравенство

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \geq (x_1 x_2 \ldots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}.$$

Равенство здесь возникнет тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1} = x_n$.

1.11.3 Неравенство Бернулли

1.53. Теорема. *Если $x \geq -1$, то*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (1.11.16)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда либо $n = 1$, либо $n > 1$, а $x = 0$.

Доказательство. Пусть множество E состоит из натуральных чисел, для которых справедливо неравенство (1.11.16). Принадлежность $1 \in E$ очевидна, так как

$$(1+x)^1 = 1 + x \quad (1.11.17)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

Докажем, что E — индуктивное множество. Если натуральное число n принадлежит E, т. е. выполнено (1.11.16), то

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \\ = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x. \quad (1.11.18)$$

Таким образом, в силу принципа математической индукции $E = \mathbb{N}$. Очевидно, что для $n = 1$ в неравенстве (1.11.16) всегда имеет место равенство для любого $x \geq -1$, см. (1.11.17). Если $n > 1$, то при $x = 0$ в неравенстве (1.11.16) мы очевидно имеем равенство. Если же $x \neq 0$, то последнее неравенство в (1.11.18) будет строгим и поэтому равенства в (1.11.18) быть не может.

1.54. Задача. Доказать обобщение неравенства Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{1}{2}n(n-1)x^2 \quad (1.11.19)$$

для любого $x \geq 0$ и любого $n = 1, 2, \ldots$. Исследовать случай равенства.

Указание: Применить индукцию. В доказательстве индукционного шага воспользоваться неравенствами

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx+\frac{1}{2}n(n-1)x^2)(1+x) \\ = 1+(n+1)x+\frac{1}{2}n(n-1)x^2+nx^2+\frac{1}{2}n(n-1)x^3 \\ \geq 1+(n+1)x+\frac{1}{2}(n+1)nx^2.$$

1.11.4 Геометрическая прогрессия

Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Набор чисел $a, aq, aq^2, \ldots, aq^n$, где $n \in \mathbb{N}$, называется *геометрической прогрессией со знаменателем q*. Задача состоит в том, чтобы найти формулу для нахождения суммы

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^n$$

элементов геометрической прогрессии.

1.55. Теорема. *Пусть $q \neq 1$. Тогда*

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^n = \sum_{k=0}^{n} aq^k = a \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}. \quad (1.11.20)$$

Доказательство. Пусть множество E состоит из натуральных чисел, для которых справедливо равенство (1.11.20). Принадлежность $1 \in E$ очевидна, так как

$$a + aq = a(q+1) = a \cdot \frac{(q+1)(q-1)}{q-1} = a \cdot \frac{q^2-1}{q-1}. \qquad (1.11.21)$$

Докажем, что E — индуктивное множество. Если натуральное число n принадлежит E, т. е. выполнено (1.11.20), то

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + aq^{n+1} = a \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + aq^{n+1}$$
$$= a \cdot \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q-1} = a \cdot \frac{q^{n+2}-1}{q-1}. \qquad (1.11.22)$$

Таким образом, в силу принципа математической индукции $E = \mathbb{N}$.

1.11.5 Бином Ньютона

В формулируемой ниже теореме мы используем следующие обозначения: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k+1))}{k!}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, $0! = 1$, $C_n^0 = 1$.

1.56. Теорема. *Если $x, y \in \mathbb{R}$, то*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$$
$$= x^n + \frac{n}{1!} x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} y^2 + \ldots + y^n \qquad (1.11.23)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть множество E состоит из натуральных чисел, для которых справедливо равенство (1.11.23). Принадлежность $1 \in E$ очевидна, так как

$$(x+y)^1 = x + y$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Докажем, что E — индуктивное множество. Если натуральное число n принадлежит E, т. е. выполнено (1.11.23), то

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) = (x+y)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^{n+1-k}y^k \\ &= C_{n+1}^0 x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(C_n^k + C_n^{k-1})x^{n+1-k}y^k + C_{n+1}^0 y^{n+1}.\end{aligned} \tag{1.11.24}$$

Остается проверить $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Действительно,

$$\begin{aligned}C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1-k+k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.\end{aligned}$$

Окончательно, (1.11.24) равно

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^{n+1-k}y^k.$$

Таким образом, в силу принципа математической индукции $E = \mathbb{N}$.

1.57. Пример. Разложим $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ по биному Ньютона:

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{x}{m}\right)^m &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{x^k}{m^k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{\overbrace{m\cdot(m-1)\cdot\dots\cdot(m-(k-1))}^{m \text{ сомножителей}}}{k!}\frac{x^k}{m^k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} 1\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{m} c_{m,k}\frac{x^k}{k!}, \qquad (1.11.25)
\end{aligned}
$$

где

$$c_{m,k} = 1\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{k-1}{m}\right). \qquad (1.11.26)$$

Приведем легко проверяемое свойство коэффициентов $c_{m,k}$, $m\in\mathbb{N}$, $0\le k\le m$:

1) $c_{m,0}=1$ для всех $m\in\mathbb{N}$,

2) $0<c_{m,k}<1$ для всех натуральных $1\le k\le m$.

1.58. Предложение. *Пусть $u\in\mathbb{R}$ — положительное число и $k_0\in\mathbb{N}$ — такие числа, что $u<k_0+1$. Тогда неравенство*

$$\sum_{k=k_0}^{L}\frac{u^k}{k!} < \frac{u^{k_0}}{k_0!}\frac{1}{1-\frac{u}{k_0+1}}. \qquad (1.11.27)$$

справедливо для всех натуральных $L\ge k_0$.

Доказательство. Действительно,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=k_0}^{L}\frac{u^k}{k!}\\
&=\frac{u^{k_0}}{k_0!}\Big(1+\frac{u}{(k_0+1)}+\frac{u^2}{(k_0+1)(k_0+2)}+\ldots+\frac{u^{L-k_0}}{(k_0+1)(k_0+2)\cdot\ldots\cdot L}\Big)\\
&\qquad=\frac{u^{k_0}}{k_0!}\Big(1+\sum_{k=k_0+1}^{L}\frac{u^{k-k_0}}{(k_0+1)(k_0+2)\cdot\ldots\cdot k}\Big)\\
&\qquad\le\frac{u^{k_0}}{k_0!}\sum_{j=0}^{L-k_0}\frac{u^j}{(k_0+1)^j}=\frac{u^{k_0}}{k_0!}\frac{1-\left(\frac{u}{k_0+1}\right)^{L-k_0+1}}{1-\frac{u}{k_0+1}}\\
&\qquad<\frac{u^{k_0}}{k_0!}\frac{1}{1-\frac{u}{k_0+1}}. \qquad (1.11.28)
\end{aligned}
$$

Здесь мы применили формулу (1.11.20) для суммы геометрической прогрессии со значением $a=1$ и знаменателем $q=\frac{u}{k_0+1}<1$. Заметим, что правая часть уже не зависит от L.

1.59. Следствие.

$$\sup_{L\in\mathbb{N}}\sum_{k=k_0}^{L}c_{L,k}\frac{u^k}{k!}\le\sup_{L\in\mathbb{N}}\sum_{k=k_0}^{L}\frac{u^k}{k!}\le\frac{u^{k_0}}{k_0!}\frac{1}{1-\frac{u}{k_0+1}}, \qquad (1.11.29)$$

где $c_{L,k}\in(0,1]$ — коэффициенты из примера 1.57 при $m=L$.

1.12 Принцип Архимеда и его следствия

1.60. Принцип Архимеда. *Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел не ограничено сверху.*

Доказательство. Пусть, напротив, совокупность $\mathbb{N}$ ограничена сверху. Тогда в силу принципа наибольшего числа (следствие 1.48) эта совокупность имеет максимальный элемент: целое число $L\in\mathbb{N}$ такое, что $n\le L$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Здесь мы приходим к противоречию, так как $L+1$ — тоже натуральное число, однако, для него неравенство $L+1\le L$ не выполняется.

Из принципа Архимеда и задачи 1.46 получаем

1.61. Следствие. *Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ не ограничено ни снизу, ни сверху.*

Доказательство. Пусть, напротив, совокупность $\mathbb{Z}$ ограничена сверху. Тогда совокупность $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ натуральных чисел также ограничена сверху. Последнее противоречит 1.60.

С другой стороны, если, напротив, совокупность $\mathbb{Z}$ ограничена снизу, то совокупность чисел $-\mathbb{N} = \{z \in \mathbb{Z} : -z \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}$ также ограничена снизу. В силу теоремы 1.47 совокупность $-\mathbb{N}$ имеет минимальный элемент: число $z_0 \in -\mathbb{N}$ такое, что $z_0 \leq z$ для любого числа $z \in -\mathbb{N}$. В силу неравенства $-z \leq -z_0$ для любого числа $z \in -\mathbb{N}$ и того, $-z_0 \in \mathbb{N}$, а $-z \in \mathbb{N}$ — произвольное натуральное число, выводим, что совокупность $\mathbb{N}$ натуральных чисел ограничена сверху. Последнее противоречит 1.60.

1.62. Свойство. *Если $x, y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ и $x > 0$, то существует натуральное n такое, что $y < nx$.*

Доказательство. Требуемое натуральное число следует искать среди натуральных чисел, удовлетворяющих условию:

$$\frac{y}{x} < n.$$

В силу принципа Архимеда такое натуральное число n всегда существует. Действительно, в противном случае имеем ограниченность сверху множества $\mathbb{N}$ натуральных, так как для всех чисел $n \in \mathbb{N}$ выполнялось бы неравенство

$$n \leq \frac{y}{x}.$$

1.63. Свойство. *Если $a \in \mathbb{R}$ — такое число, что*
1) $a \leq \frac{1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $a \leq 0$;
2) $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $a = 0$.

Доказательство. В каждом из доказываемых случаев требуется исключить возможность $a > 0$. Пусть, напротив, $0 < a \leq \frac{1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$n \leq \frac{1}{a}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, откуда вытекает ограниченность множества натуральных чисел, противоречащая принципу Архимеда.

1.64. Свойство. *Если $x, y \in \mathbb{R}$ и $x > 0$, то существует единственное целое число p такое, что*

$$(p-1)x \leq y < px. \tag{1.12.30}$$

Доказательство. Подмножество $E = \{q \in \mathbb{Z} : \frac{y}{x} < q\}$ целых чисел не пусто и ограничено снизу. Действительно, если $y \geq 0$, то $E \neq \emptyset$ в силу свойства 1.62; если же $y < 0$, то $E \ni 1$ и поэтому не пусто.

Следовательно, по теореме 1.47 в E существует минимальный элемент: $p = \min E$, который и будет искомым, так как $p - 1 \leq \frac{y}{x}$. Единственность числа p вытекает из единственности минимального элемента множества E.

Полагая в (1.12.30) $x = 1$ получаем следующее

1.65. Определение. Для произвольного числа $y \in \mathbb{R}$ единственное целое число $p \in \mathbb{Z}$ такое, что $p \leq y < p + 1$ называется *целой частью* числа x и обозначают символом $[x]$ или $E(x)$.

1.13 Рациональные и иррациональные числа

1.66. Определение. *Множеством рациональных* чисел называется совокупность

$$\left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\right\}.$$

Множество рациональных чисел обозначается символом $\mathbb{Q}$; его элементы называются *рациональными* числами.

1.67. Определение. Действительные числа, не являющиеся *рациональными*, называются *иррациональными*. Таким образом, иррациональные числа — это числа дополнения $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.13.1 Свойства плотности совокупности рациональных чисел и совокупности иррациональных чисел

1.68. Свойство. *Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, то существует рациональное число x такое, что*

$$a < x < b. \tag{1.13.31}$$

Доказательство. Пусть $a < b$. По свойству 1.62 при $y = 1$, $x = b - a > 0$ существует натуральное число n такое, что $1 < n(b - a)$. Отсюда

$$\frac{1}{n} < b - a.$$

Полагая в условиях свойства 1.64 $x = \frac{1}{n}$, $y = a$, найдем единственное целое число $m \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$\frac{m-1}{n} \leq a < \frac{m}{n}.$$

Сопоставляя полученные неравенства, получаем соотношения

$$\frac{m}{n} - a \leq \frac{1}{n} < b - a.$$

Отсюда имеем $\frac{m}{n} < b$. Окончательно выводим

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

Очевидно, что число $x = \frac{m}{n}$ рациональное и удовлетворяет (1.13.31).

1.69. Свойство. *Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, то существует иррациональное число x такое, что*

$$a < x < b. \tag{1.13.32}$$

Доказательство. Для доказательства этого свойства достаточно иметь хотя бы одно иррациональное число $\alpha > 0$. Действительно, если такое число существует (см. доказательство ниже), то по свойству 1.62 найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{\alpha}{b-a} < n$. Отсюда имеем

$$\frac{\alpha}{n} < b - a.$$

По свойству 1.64 найдется единственное целое число $m \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$\frac{m-1}{n}\alpha \leq a < \frac{m}{n}\alpha.$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{m}{n}\alpha = \frac{m-1}{n}\alpha + \frac{1}{n}\alpha \leq a + \frac{\alpha}{n} < b.$$

Сопоставляя два последних соотношения, получаем $a < \frac{m}{n}\alpha < b$. Очевидно, что в качестве x можно взять иррациональное число $\frac{m}{n}\alpha$, если $m \neq 0$.

В противном случае, $a < 0 < b$, и в силу доказанного выше найдется иррациональное число в интервале $(0, b) \subset (a, b)$.

1.70. Определение. *Множеством двоично-рациональных* чисел называется совокупность

$$\left\{ \frac{p}{2^q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}.$$

1.71. Задача. Доказать, что совокупность двоично-рациональных чисел плотна в $\mathbb{R}$.

1.13.2 Существование квадратного корня $\sqrt{2}$

1.72. Предложение. *Существует действительное число $\alpha > 0$, квадрат которого равен 2: $\alpha^2 = 2$, и при этом $\alpha \notin \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Пусть $X = \{x > 0 \mid x^2 < 2\}$ и $Y = \{y > 0 \mid y^2 > 2\}$. Заметим, что множества X и Y непустые, так как очевидно $1 \in X$ и $2 \in Y$. Пусть $x \in X$ и $y \in Y$ — произвольные числа. Тогда $x^2 < y^2$, а так как числа x, y — строго положительные, то имеем также и $x < y$. В самом деле, если $y \leq x$, то $y^2 \leq yx$ и $yx \leq x^2$. Отсюда выводим, $y^2 \leq x^2$, что противоречит неравенству $x^2 < y^2$.

По аксиоме непрерывности 1.4 существует действительное число α такое, что $x \leq \alpha \leq y$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$. Очевидно

$$1 < \alpha < 2.$$

Покажем, что $\alpha^2 = 2$.

Не может быть такого, чтобы $\alpha^2 < 2$, так как в этом случае квадрат числа, $\alpha + \frac{2-\alpha^2}{5}$, большего α, был бы меньше 2. Действительно, $1 \in X$ и $1 < \alpha$. Отсюда имеем $1 < \alpha^2 < 2$ и, следовательно,

$$0 < \delta = 2 - \alpha^2 < 1.$$

Значит,

$$\left(\alpha + \frac{\delta}{5}\right)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\frac{\delta}{5} + \left(\frac{\delta}{5}\right)^2 < \alpha^2 + 4\frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} = \alpha^2 + \delta = 2.$$

По это причине, $\alpha + \frac{\delta}{5} \in X$, что противоречит неравенству $x \leq \alpha$ для любого $x \in X$.

Аналогично исключается возможность $2 < \alpha^2$: если это так, то квадрат числа $\alpha - \frac{\alpha^2-2}{5}$, меньшего α, был бы больше 2. В самом деле, в силу $2 \in Y$ имеем $2 < \alpha^2 < 2^2$ или $0 < \Delta = \alpha^2 - 2 < 2$ и $0 < \frac{\Delta}{5} < 1$. Отсюда

$$\left(\alpha - \frac{\Delta}{5}\right)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\frac{\Delta}{5} + \left(\frac{\Delta}{5}\right)^2 > \alpha^2 - 4\frac{\Delta}{5} - \frac{\Delta}{5} > \alpha^2 - 5\frac{\Delta}{5} = \alpha^2 - \Delta = 2.$$

Последнее противоречит тому, что α ограничивает множество Y снизу.

Таким образом, остается только последняя возможность: $\alpha^2 = 2$.

Иррациональность числа α доказана в разделе 1.1.

1.73. Задача. Найти рациональные числа α и β такие, чтобы

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = \alpha + \beta\sqrt{2}.$$

1.74. Задача. Доказать, что

$$\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}),$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}} = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}.$$

1.14 Расширенная числовая прямая.

1.14.1 Порядок на расширенной числовой прямой и его свойства. Конечные и бесконечные элементы

В некоторых ситуациях, связанных с отношением порядка в $\mathbb{R}$, удобно использовать множество вещественных чисел, дополненное двумя *бесконечными элементами.*

1.75. Определение. Добавив к множеству $\mathbb{R}$ два элемента $-\infty$ и $+\infty$ («минус бесконечность» и «плюс бесконечность») такие, что $-\infty < x < +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$, мы получаем расширенное множество вещественных чисел (или расширенную числовую прямую), обозначаемое символом $\overline{\mathbb{R}}$. Считаем также, что $-\infty < +\infty$. Согласно определению, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Вместо символа $+\infty$ далее мы будем писать просто ∞.

Элементы множества $\overline{\mathbb{R}}$ также будем называть *числами.* При этом число $x \in \overline{\mathbb{R}}$ будем называть конечным, если $x \in \mathbb{R}$.

Числа $-\infty$ и ∞ будем называть бесконечными элементами множества $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение бесконечных элементов по существу содержит распространение отношения порядка в $\mathbb{R}$ на множество $\overline{\mathbb{R}}$. Соотношения $x \le y$ и $x \ge y$ для элементов из $\overline{\mathbb{R}}$, определяются так же, как и для элементов из $\mathbb{R}$ в том случае, когда $x, y \in \mathbb{R}$. Если $x = -\infty$ $(y = \infty)$, то $-\infty \le y$ $(x \le \infty)$для любого элемента $y \in \overline{\mathbb{R}}$ $(x \in \overline{\mathbb{R}})$.

Нетрудно проверить, что при этом выполняются утверждения аксиом **O1** – **O4**.

1.76. Предложение. *Свойство, сформулированное в аксиоме непрерывности, выполняется также для любых непустых множеств $X, Y \subset \overline{\mathbb{R}}$:*

если X и Y — два непустых подмножества в $\overline{\mathbb{R}}$, обладающие тем свойством, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \leq y$, то существует такое $c \in \overline{\mathbb{R}}$, что

$$x \leq c \leq y$$

для любых чисел $x \in X$ и $y \in Y$.

Доказательство. Положим $A = X \cap \mathbb{R}$, $B = Y \cap \mathbb{R}$. Если A и B — непустые множества, то по аксиоме непрерывности существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$x \leq c \leq y \tag{1.14.33}$$

для любых чисел $x \in A$ и $y \in B$. Так как множество X (Y) может отличаться от A (B) лишь символом $-\infty$ ($+\infty$), то соотношения (1.14.33) очевидным образом справедливы для всех $x \in X$ и $y \in Y$.

Если $A = \emptyset$, то в качестве c можно взять $-\infty$. Действительно, в этом случае $X = \{-\infty\}$ и поэтому соотношение $X \ni -\infty \leq c \leq y \in Y$ справедливо для всех $y \in Y$. Аналогично, для $B = \emptyset$ в качестве c можно взять $+\infty$, соотношение(1.14.33) сводится в этом случае к $X \ni x \leq c \leq +\infty \in Y$, так как $Y = \{+\infty\}$.

1.14.2 Понятие промежутка в $\overline{\mathbb{R}}$. Лемма о непустоте промежутка и ее следствие

1.77. Определение. Пусть даны произвольные числа $a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $b \in \overline{\mathbb{R}}$ такие, что $a < b$. Множество, обозначаемое символом $\langle a, b \rangle$ и совпадающее с одним из множеств

$$(a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\},$$
$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\},$$
$$[a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leq b\},$$

называется *промежутком* (расширенной) *числовой прямой с концами* a, b. При этом множество (a, b) называют *открытым промежутком* или *интервалом*, а множество $[a, b]$ — *замкнутым промежутком* или *отрезком* с концами a, b. Промежутки $[a, b)$ и $(a, b]$ называют *полуоткрытыми.*

Заметим, что промежутки на расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}}$, в отличие от промежутков на вещественной прямой $\mathbb{R}$ (см. определение 1.11), могут быть неограниченными.

Промежуток $\langle a, b\rangle$ будем называть *ограниченным*, если его концы суть конечные числа, т. е. $-\infty < a \leq b < \infty$.

Ясно, что $[a,b] = (a,b)\cup\{a\}\cup\{b\}$, $[a,b) = (a,b)\cup\{a\}$, $(a,b] = (a,b)\cup\{b\}$. Отметим, что $(-\infty, a]$, где $a < \infty$, есть множество всех чисел $x \in \mathbb{R}$ таких, что $x \leq a$, а $(-\infty, a)$ есть множество всех $x \in \mathbb{R}$, для которых $x < a$.

Аналогично $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$, $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$, где $a \in \mathbb{R}$. Наконец, $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$, $[-\infty,\infty] = \overline{\mathbb{R}}$.

1.78. Лемма. *Для любых $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ таких, что $a < b$, существует по крайней мере одно $x \in \mathbb{R}$ такое, что $a < x < b$.*

Доказательство. Если a и b — конечные числа, то число $x = \frac{a+b}{2}$ обладает необходимым свойством.

Если $a = -\infty$, $b < \infty$, то число $x = b-1$ удовлетворяет неравенствам $a < x < b$.

Если же $a > -\infty$, $b = \infty$, то $x = a + 1$ будет требуемым.

Наконец, если $a = -\infty$, $b = \infty$, то любое $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенствам $a < x < b$. Лемма доказана.

1.14.3 Верхние и нижние границы числового множества в $\overline{\mathbb{R}}$

1.79. Определение. Пусть дано множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Число $q \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *верхней* (*нижней*) границей множества A, если $x \leq q$ (соответственно, $x \geq q$) для всякого $x \in A$.

Очевидно, что $-\infty$ является одной из нижних границ, а $+\infty$ — одной из верхних границ любого множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$.

Совокупность всех верхних (нижних) границ для множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ обозначается символом $\overline{\Gamma}^+(A)$ $(\overline{\Gamma}^-(A))$[2]. Очевидно $\overline{\Gamma}^+(A) \ni +\infty$ $(\overline{\Gamma}^-(A) \ni -\infty)$ для любого множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$.

Целесообразно считать, что всякое число $p \in \overline{\mathbb{R}}$ является верхней и одновременно нижней границей пустого множества.

1.80. Задача. Для любого множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ верно $\overline{\Gamma}^+(A) \setminus \Gamma^+(A) \ni +\infty$ и $\overline{\Gamma}^-(A) \setminus \Gamma^-(A) \ni -\infty$. Если $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ — непустое множество, то $\overline{\Gamma}^+(A) \setminus \Gamma^+(A) = +\infty$ и $\overline{\Gamma}^-(A) \setminus \Gamma^-(A) = -\infty$.

---

[2]Здесь следует различать чем отличается употребление символа $\overline{\Gamma}^+(A)$ от символа $\Gamma^+(A)$. Первый используется для обозначения совокупности верхних границ в $\overline{\mathbb{R}}$, а второй — для обозначения совокупности верхних границ в $\mathbb{R}$.

Напомним, что непустое множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует число $L \in \mathbb{R}$ ($l \in \mathbb{R}$) такое, что

$$x \leq L \quad (l \leq x) \quad \text{для любого числа } x \in X. \tag{1.14.34}$$

Из этого определения выводим, что если множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ ограничено сверху (снизу), то пересечение $\Gamma^+(X) \cap \mathbb{R}$ ($\Gamma^-(X) \cap \mathbb{R}$) непустое.

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если оно одновременно ограничено сверху и снизу.

1.81. Задача. Если L — верхняя граница множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, то и любое число $L' \geq L$ является верхней границей для A: если $L \in \overline{\Gamma}^+(A)$ и $L' \geq L$, то $L' \in \overline{\Gamma}^+(A)$.

1.82. Предложение. *Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ ограничено тогда и только тогда, когда существует $L \in \mathbb{R}$ такое, что $|x| \leq L$ для любого $x \in X$.*

Доказательство. Если $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ ограничено сверху, то пересечение $\overline{\Gamma}^+(A) \cap \mathbb{R}$ содержит некоторое число $l \in \mathbb{R}$. Значит, $x \leq l$ для любого числа $x \in X$.

Аналогично, если $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ ограничено снизу, найдется $l' \in \mathbb{R}$ такое, что $l' \leq x$ для любого числа $x \in A$. Число $L = \max(|l'|, |l|)$ удовлетворяет соотношениям

$$-L \leq l' \leq x \leq l \leq L$$

для любого $x \in X$. Следовательно, по определению модуля $|x| \leq L$ для любого $x \in X$.

1.14.4 Понятие наибольшего и наименьшего элементов числового множества в $\overline{\mathbb{R}}$

1.83. Определение. Пусть дано множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *наибольшим* (*наименьшим*) элементом множества A, если

1) a принадлежит A и

2) является верхней (нижней) границей множества A, т. е. если $a \in A$ и для всех $x \in A$ выполняется неравенство $x \leq a$ (соответственно, $x \geq a$).

Наибольший (наименьший) элемент множества A, если он существует, обозначается символом $\max A$ (соответственно, $\min A$) (max и min от латинских слов maximum — «наибольший», и minimum — «наименьший»).

1.84. Задача. Доказать, что наибольший (наименьший) элемент множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ единствен.

Число $-\infty$ является наименьшим элементом, а число ∞ — наибольшим элементом множества $\overline{\mathbb{R}}$. Для замкнутого промежутка $[a, b]$ в $\overline{\mathbb{R}}$ левый конец a является его наименьшим, а правый b — наибольшим элементом. Множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ может и не иметь наименьшего или наибольшего элемента.

Например, интервал $A = (0, +\infty)$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элемента. Действительно, возьмем произвольно точку $a \in (0, +\infty)$ и положим:

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a+1}{2}.$$

Очевидно, что $0 < x < a < y < +\infty$. Тем самым a не может быть ни наименьшим, ни наибольшим элементом промежутка $(0, +\infty)$. Поэтому ввиду произвольности $a \in (0, +\infty)$, у множества $A = (0, +\infty)$ нет ни наименьшего, ни наибольшего элемента.

Ясно, что множество $\mathbb{R}$ не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элемента ни в самом множестве $\mathbb{R}$, ни в $\overline{\mathbb{R}}$.

1.85. Задача. Непустое множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ имеет наибольший (наименьший) элемент тогда и только тогда, когда пересечение $A \cap \overline{\Gamma}^{+}(A) \neq \emptyset$ ($A \cap \overline{\Gamma}^{-}(A) \neq \emptyset$). Если это пересечение непустое, то оно состоит из одной точки, которая и будет максимальным (минимальным) элементом множества A.

1.14.5 Понятие точной верхней и точной нижней границ числового множества в $\overline{\mathbb{R}}$. Теорема о существовании точной верхней и точной нижней границ непустого числового множества

1.86. Определение. Пусть дано непустое множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Наименьшая из его верхних границ, если таковая существует, называется *точной верхней границей* множества A и обозначается символом $\sup A$ (sup сокращение латинского слова supremum — наивысший). Таким образом,

$$\sup A = \min \overline{\Gamma}^{+}(A).$$

Наибольшая из нижних границ множества A, если таковая существует, называется *точной нижней границей* множества A и обозначается символом $\inf A$ (inf сокращение латинского слова infimum — нижайший). Таким образом,

$$\inf A = \max \overline{\Gamma}^{-}(A).$$

Естественно, возникает вопрос о существовании наименьшей из верхних границ непустого множества A (наибольшей из нижних границ) непустого множества A. Ответ на этот вопрос положительный (см. ниже теорему 1.88).

1.87. Задачи. 1) Если множество $A \in \overline{\mathbb{R}}$ имеет наибольший элемент, то он и является точной верхней границей множества A: $\max A = \sup A$.

2) Если множество $A \in \overline{\mathbb{R}}$ имеет наименьший элемент, то этот элемент является точной нижней границей множества A: $\min A = \inf A$.

В данных здесь определениях множество A предполагалось непустым. Оказывается целесообразным определить понятия точной верхней и точной нижней границы также и для пустого множества. Полагаем

$$\inf \emptyset = +\infty, \quad \sup \emptyset = -\infty. \tag{1.14.35}$$

Целесообразность такого соглашения будет видна из дальнейшего.

В дальнейшем существенно используется следующее свойство подмножеств в расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}}$.

1.88. Теорема о существовании точных верхней и нижней границ числового множества. *Всякое множество $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы.*

Если $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ пустое, то существование его точных верхней и нижней границ обеспечено соглашением (1.14.35). Таким образом содержательная часть теоремы 1.88 говорит о том, что *для всякого непустого множества $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ множество $\overline{\Gamma}^+(E)$ всех его верхних границ имеет наименьший элемент, а множество $\overline{\Gamma}^-(E)$ всех его нижних границ имеет наибольший элемент.*

Доказательство. Полагаем в аксиоме непрерывности $A = E \neq \emptyset$, а $B = \overline{\Gamma}^+(E)$. Тогда оба множества непустые и в силу предложения 1.76 существует число $c \in \overline{\mathbb{R}}$ такое, что

$$x \leq c \leq y$$

для любых чисел $x \in A$ и $y \in B$. Левая часть этих соотношений означает, что $c \in \overline{\Gamma}^+(E)$, а правая — что $c = \min \overline{\Gamma}^+(E)$.

Аналогично доказывается существование точной нижней границы.

1.89. Задачи. 1) Если множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ не имеет максимального элемента, то $\max\{A \cup \{\sup A\}\} = \sup A$.

2) Если множество $A \in \overline{\mathbb{R}}$ не имеет минимального элемента, то $\min\{A \cup \{\inf A\}\} = \inf A$.

1.90. Задачи. Пусть дано множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Определим множество $B = -A = \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid y = -x,\ x \in A\}$. Тогда

1) $\overline{\Gamma}^-(B) = -\overline{\Gamma}^+(A)$.

2) $\inf B = -\sup A$.

3) $\overline{\Gamma}^+(B) = -\overline{\Gamma}^-(A)$.

4) $\sup B = -\inf A$.

1.14.6 Признак точной верхней и нижней границ в $\overline{\mathbb{R}}$. Точные верхние и нижние границы промежутка. Соотношения для sup и inf вложенных множеств

При нахождении точных верхних и нижних границ множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ удобно использовать следующий признак.

1.91. Теорема. *Для того чтобы число $b \in \overline{\mathbb{R}}$ было точной верхней границей непустого множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *$b \in \overline{\Gamma}^+(A)$, т. е. b — одна из верхних границ;*

2) *для любого числа $b' < b$ существует элемент $x \in A$ такой, что*

$$b' < x \leq b. \tag{1.14.36}$$

Для того чтобы число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ было точной нижней границей непустого множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

3) *$a \in \overline{\Gamma}^-(A)$, т. е. a — одна из нижних границ;*

4) *для любого числа $a' > a$ существует элемент $x \in A$ такой, что*

$$a \leq x < a'. \tag{1.14.37}$$

Доказательство. Мы докажем первое утверждение.

Необходимость. Пусть $b = \sup A$. Тогда b — наименьшая из верхних границ и поэтому $b \in \overline{\Gamma}^+(A)$.

Теперь фиксируем произвольное число $b' < b$. Так как $b' \notin \overline{\Gamma}^+(A)$, поскольку b — наименьшая из верхних границ, то неравенство $x \leq b'$ не может выполняется для всех $x \in A$. Следовательно, найдется число $x \in A$, для которого это неравенство не выполняется и, значит, для этого x имеем $b' < x$. Очевидно, $x \leq b$, поскольку b есть верхняя граница множества A. Таким образом, для этого x выполняются соотношения (1.14.36) и, следовательно, условие 2 доказано.

Достаточность. Пусть $b \in \overline{\Gamma}^+(A)$ и число b удовлетворяет условию (1.14.36). Требуется доказать, что b — наименьшая из верхних границ. Возьмем для этого какую-нибудь из верхних границ для множества A, скажем b', и покажем, что $b \leq b'$. Для этого достаточно исключить возможность неравенства $b' < b$. Последнее неравенство невозможно, так как условие (1.14.36) означает, что b' не может быть верхней границей для A. Поэтому, если b' — верхняя граница для A, то $b' \geq b$. Следовательно, имеем $b \in \overline{\Gamma}^+(A)$ и для любого $b' \in \overline{\Gamma}^+(A)$ справедливо $b' \geq b$, т. е. $b = \min \overline{\Gamma}^+(A) = \sup A$.

Признак точной нижней границы множества A доказывается аналогично. Теорема доказана.

1.92. Задача. Если множество $A \subset \mathbb{R}$ не ограничено сверху (снизу), то $\sup A = \infty$ ($\inf A = -\infty$).

Рассмотрим следующий пример.

1.93. Предложение. *Пусть $A = \langle a, b\rangle \subset \overline{\mathbb{R}}$ — промежуток на расширенной вещественной прямой. Тогда*

$$a = \inf A, \quad b = \sup A.$$

Кроме того, если $a \in A$ ($b \in A$), то $\min A = \inf A = a$ ($\max A = \sup A = b$).

Доказательство. Согласно определению промежутка имеем $a < b$. Для всякого $x \in A$ выполняется неравенство $x \leq b$, так что b есть верхняя граница множества A: $b \in \overline{\Gamma}^+(A)$. Возьмем произвольно $b' < b$ и докажем, что найдется число $x \in A$ такое, что $b' < x \leq b$. Если $b' < a$, то любая точка из A удовлетворяет этому соотношению.

Если же $a \leq b'$, то $a \leq b' < b$ и A содержит в себе интервал (b', b). Значит, любая точка $x \in (b', b)$ принадлежит A. При этом $b' < x < b$. Мы видим, что b удовлетворяет условию (1.14.36) теоремы (1.91) и, следовательно, $b = \sup A$.

Аналогично устанавливается, что $a = \inf A$. Предложение доказано.

1.94. Теорема о монотонности точных верхних и нижних границ относительно включения множеств. *Пусть даны множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ и $B \subset \overline{\mathbb{R}}$. Если $A \subset B$, то*

$$\inf B \leq \inf A \quad \text{и} \quad \sup A \leq \sup B. \qquad (1.14.38)$$

Наглядный смысл теоремы: у более широкого множества точная верхняя граница не уменьшается, а точная нижняя граница не увеличивается.

Доказательство. Если множество A пусто, то неравенства очевидным образом выполняются. (Это подтверждает целесообразность данного выше определения точной верхней и точной нижней границ для пустого множества).

Будем считать, что A не пусто. Тогда и $B \neq \emptyset$. Пусть $p = \inf B$, $q = \sup B$. Тогда для всякого $x \in B$ имеем

$$p \leq x \leq q \tag{1.14.39}$$

Так как $A \subset B$, то любой элемент множества A является элементом множества B и, значит, для всякого $x \in A$ выполняются неравенства (1.14.39). Это означает, что $p \in \overline{\Gamma}^{-}(A)$ — одна из нижних, а $q \in \overline{\Gamma}^{+}(A)$ — одна из верхних границ множества A. Следовательно,

$$p \leq \max \overline{\Gamma}^{-}(A) = \inf A, \quad q \geq \min \overline{\Gamma}^{+}(A) = \sup A.$$

Теорема доказана.

1.95. Предложение. *Множество* $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ *— промежуток на расширенной вещественной прямой тогда и только тогда, когда вместе с любыми двумя точками* $a, b \in X$ *в этом множестве содержится отрезок* $[a, b]$: $[a, b] \subset X$. *Более того,* $X = \langle \inf X, \sup X \rangle$ *и* X *замкнут слева (справа) тогда и только тогда, когда* $\inf X \in X$ ($\sup X \in X$).

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть, например, $\inf X \in X$, а $\inf X \notin X$. Докажем, что $X = [\inf X, \sup X)$. Включение $X \subset [\inf X, \sup X)$ очевидно.

Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольную точку $x \in (\inf X, \sup X)$. Докажем, что $x \in X$. По признакам точной верхней и нижней граней найдутся точки $a, b \in X$ такие, что $a < x < b$. По условию $[a, b] \subset X$, следовательно, $x \in X$. Так как $\inf X \in X$, включение Включение $[\inf X, \sup X) \subset X$ доказано.

Следовательно равенство $X = [\inf X, \sup X)$ в этом случае доказано. Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.

1.15 Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел

1.15.1 Понятие комплексного числа

1.96. Определение. Пусть $\mathbb{R}^2$ — прямое произведение множества $\mathbb{R}$ на себя, т. е. совокупность всех упорядоченных пар (x, y) вещественных чисел. Пары вида (x, y) будем записывать в виде

$$x + iy.$$

Определим в $\mathbb{R}^2$ операции *сложения* и *умножения* элементов. Пусть

$$z = x + iy, \quad w = u + iv$$

— два произвольных элемента множества $\mathbb{R}^2$. Полагаем

$$z + w = (x + u) + i(y + v), \quad z \cdot w = (xy - uv) + i(xv + uy). \qquad (1.15.40)$$

Множество $\mathbb{R}^2$, в котором указанным образом введены операции сложения и умножения элементов, называется *множеством комплексных чисел* и обозначается символом $\mathbb{C}$. Элементы множества $\mathbb{C}$ называются *комплексными числами*.

Таким образом, комплексными числами называются элементы множества

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

с операциями сложения и умножения (1.15.40).

Аксиомы алгебраической структуры в $\mathbb{R}$ будут выполняться и в $\mathbb{C}$.

1.97. Предложение. *Алгебраические операции над комплексными числами обладают следующими свойствами.*

А1. *Для любых $z = x + iy$, $w = u + iv$ и $t = r + is$ из $\mathbb{C}$*

$$(z + w) + t = z + (w + t).$$

А2. *Существует число $0 \in \mathbb{C}$ такое, что для всякого $z \in \mathbb{C}$*

$$z + 0 = 0 + z = z.$$

А3. *Для всякого $z \in \mathbb{C}$ существует число $-z \in \mathbb{C}$ такое, что*

$$z + (-z) = 0.$$

А4. *Для любых $z = x + iy$ и $w = u + iv$ из $\mathbb{C}$ имеем*

$$z + w = w + z.$$

М1. *Для любых $z = x + iy$, $w = u + iv$ и $t = r + is$ из $\mathbb{C}$ имеет место равенство*

$$(z \cdot w) \cdot t = z \cdot (w \cdot t).$$

M2. *Существует число* $\mathbf{1} \in \mathbb{C}$ *такое, что для всякого* $z \in \mathbb{C}$

$$\mathbf{1} \cdot z = z \cdot \mathbf{1} = z.$$

M3. *Для любого* $z \neq 0$ *из* $\mathbb{C}$ *существует число* $\frac{1}{z}$ такое,что

$$z \cdot \frac{1}{z} = \mathbf{1}.$$

M4. *Для любых* z *и* w *из* $\mathbb{C}$

$$z \cdot w = w \cdot z.$$

AM. *Свойство дистрибутивности операции умножения. Для любых трех чисел* z, w *и* t *из* $\mathbb{C}$ *выполняется равенство:*

$$z \cdot (w + t) = z \cdot w + z \cdot t.$$

Число $-z$, удовлетворяющее условиям аксиомы **A3**, называется *противоположным* числу z. Если $z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}$, то число $z + (-w)$ называется *разностью* чисел z и w и обозначается символом $z - w$.

Число $\frac{1}{z}$, удовлетворяющее условиям аксиомы **M3**, называется числом, *обратным* к z. Если $w \neq 0$, то число $z\frac{1}{w}$ обозначается символом $\frac{z}{w}$ и называется *частным* z и w.

Доказательство. Перечисленные свойства операций сложения и умножения комплексных чисел являются следствием их определения. Последовательно приведем проверку этих свойств.

A1. Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$, $t = r + is$. Тогда

$$\begin{aligned}(z + w) + t &= ((x + u) + r) + i((y + v) + s) \\ &= (x + (u + r)) + i(y + (v + s)) = z + (w + t).\end{aligned}$$

A2. Положим $0 = (0, 0)$. Тогда для всякого $z = x + iy \in \mathbb{C}$ имеем

$$\begin{aligned}z + 0 &= (x + 0) + (y + 0) = x + iy = z, \\ 0 + z &= (0 + x) + i(0 + y) = x + iy = z.\end{aligned}$$

A3. Условию, указанному в этом предложении для числа $z = x + iy$, очевидно удовлетворяет число

$$-z = -x + i(-y).$$

.

A4. Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогда очевидно

$$z + w = (x + u) + i(y + v) = (u + x) + i(v + y) = w + z.$$

M1. Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$, $t = r + is$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
zw &= (xu - yv) + i(xv + yu), \\
(zw)t &= (xur - yvr - xvs - yus) + i(xus - yvs + xvr + yur), \\
wt &= (ur - vs) + i(us + vr), \\
z(wt) &= (xur - xvs - yus - yvr) + i(xus + xvr + yur - yvs).
\end{aligned}$$

Сравнивая полученные выражения для $(zw)t$ и $z(wt)$, получаем $(zw)t = z(wt)$.

M2. Условию данного предложения, как легко проверить, удовлетворяет число

$$\mathbf{1} = (1, 0).$$

M3. Пусть $z = x + iy$, $z \neq 0 = (0, 0)$. Тогда $x^2 + y^2 \neq 0$. Положим

$$w = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Тогда получим

$$zw = wz = \frac{xx - (-y)y}{x^2 + y^2} + i\frac{-xy + xy}{x^2 + y^2} = (1, 0) = \mathbf{1}$$

и, следовательно, в качестве искомого числа $\frac{1}{z}$ можно взять w.

M4. Данное предложение непосредственно следует из определения произведения комплексных чисел.

AM. Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$ и $t = r + is$. Тогда по определению $w + t = (u + r) + i(v + s)$ и, значит,

$$\begin{aligned}
z(w + t) &= (x(u + r) - y(v + s)) + i(x(v + s) + y(u + r)) \\
&= (xu - yv) + i(xv + yu) + (xr - ys) + i(xs + yr) = zw + zt.
\end{aligned}$$

Число $\mathbf{1}$ такое, что $\mathbf{1}z = z\mathbf{1} = z$ для всякого $z \in \mathbb{C}$ единственно. Действительно, пусть числа $\mathbf{1}'$ и $\mathbf{1}''$ таковы, что $\mathbf{1}'z = z$ и $z\mathbf{1}'' = z$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Полагая в первом равенстве $z = \mathbf{1}''$, получим: $\mathbf{1}' \cdot \mathbf{1}'' = \mathbf{1}''$. Полагая во втором равенстве $z = \mathbf{1}'$, будем иметь: $\mathbf{1}' \cdot \mathbf{1}'' = \mathbf{1}'$, откуда следует $\mathbf{1}' = \mathbf{1}''$, что и требовалось доказать.

Аналогичным образом устанавливается единственность числа 0, удовлетворяющего условиям предложения **A2**.

Для всякого $z \neq 0$ число w такое, что $zw = wz = \mathbf{1}$, единственно. Действительно, предположим, что числа w_1 и w_2 таковы, что $zw_1 = \mathbf{1}, w_2 z = \mathbf{1}$. Тогда имеем

$$w_2 = w_2\mathbf{1} = w_2(zw_1) = (w_2 z)w_1 = \mathbf{1}w_1 = w_1,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично устанавливается единственность числа w такого, что $w + z = z + w = 0$.

1.98. Определение. Определим отображение $J : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, полагая

$$J(x) = x + i0.$$

для $x \in \mathbb{R}$. Непосредственно проверяется, что для любых x и y из $\mathbb{R}$ выполняются равенства:

$$J(x + y) = J(x) + J(y), \quad J(x \cdot y) = J(x) \cdot J(y), \quad J(0) = \mathbf{0}, \quad J(1) = \mathbf{1}.$$

Отображение J инъективно. Мы будем называть J каноническим вложением множества $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$. Вещественное число x мы будем отождествлять с комплексным числом $J(x)$. Иными словами, отныне мы уславливаемся считать, что комплексное число $x + i0$ и вещественное число x представляют собой один и тот же объект. В дальнейшем, число $\mathbf{1}$ мы будем обозначать символом 1.

Комплексное число $0+i1$ записывается просто как i. Непосредственно проверяется, что имеет место равенство

$$i^2 = -1 + i0 = -1.$$

Мы получаем, таким образом, что уравнение $x^2 = -1$, которое не имеет решений в $\mathbb{R}$, оказывается разрешимым в $\mathbb{C}$.

1.99. Задача. Доказать формулу для суммы геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = a\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}. \tag{1.15.41}$$

для случая комплексных a и $q \neq 1$

1.100. Задача. Доказать бином Ньютона для $u, v \in \mathbb{C}$:

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k$$

$$= u^n + \frac{n}{1!}u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^2 + \ldots + u^n \tag{1.15.42}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

1.15.2 Модуль, сопряженное число, вещественная и мнимая части комплексного числа

1.101. Определение. Пусть $z = x + iy$. Число x называется *вещественной частью* z и обозначается символом $\Re z$. Число y называется *мнимой частью* числа z и обозначается символом $\Im z$.

Во введенной здесь форме записи комплексных чисел арифметические действия над ними можно выполнять как над обычными двучленами, принимая при этом во внимание, что $i^2 = -1$.

1.102. Определение. Пусть $z = x + iy$. Число $x - iy$ называется *сопряженным* к z и обозначается символом $\overline{z}$.

1.103. Определение. Для комплексного числа $z = x + iy$ полагаем $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Величина $|z|$ называется *модулем комплексного числа* z.

Имеем $|z| \geq 0$ для всякого $z \in \mathbb{C}$, и $|z| = 0$ в том и только в том случае, когда $z = 0$.

1.104. Предложение. *Отметим некоторые свойства операции перехода к сопряженному числу и модуля комплексного числа.*

I. *Для всякого $z \in \mathbb{C}$ имеет место равенство*

$$\bar{\bar{z}} = z. \tag{1.15.43}$$

II. *Для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ имеем*

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2. \tag{1.15.44}$$

III. *Для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем*

$$z\bar{z} = |z|^2. \tag{1.15.45}$$

IV. *Справедливы неравенства*

$$|\Re z| \leq |z|, \quad |\Im z| \leq |z| \tag{1.15.46}$$

для всякого $z \in \mathbb{C}$.

V. *Для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 имеют место соотношения*

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \tag{1.15.47}$$

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|. \tag{1.15.48}$$

VI. *Для любого комплексного числа z верно соотношение*

$$|z| = |\bar{z}|. \tag{1.15.49}$$

Доказательство. Доказательство свойств **I** и **II** выводится непосредственно из определений сопряженного числа и алгебраических операций.

III. Для $z = x + iy$ имеем

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

IV. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Имеем $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \ge \sqrt{x^2} = |x| = |\Re z|$ и, далее, $\sqrt{x^2 + y^2} \ge \sqrt{y^2} = |y| = |\Im z|$.

V. В силу (1.15.45) имеем

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

Отсюда, очевидно, следует равенство (1.15.47).

Применяя равенство (1.15.45), получим

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2).$$

Отсюда

$$|z_1 + z_2|^2 = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2.$$

Теперь заметим, что $\overline{z_1\bar{z}_2} = \bar{z}_1\bar{\bar{z}}_2 = \bar{z}_1 z_2$, откуда выводим, что

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\Re(z_1\bar{z}_2) \in \mathbb{R}.$$

Применяя первое из неравенств (1.15.46), получаем

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\Re z_1\bar{z}_2 \le 2|z_1||z_2|,$$

откуда

$$|z_1 + z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Неравенство (1.15.48) очевидно доказано.

Из неравенства (1.15.48) дословно так же, как и в случае вещественных чисел (см. (1.5.4)), выводится, что

$$\big||z| - |w|\big| \leq |z - w| \tag{1.15.50}$$

для любых $z, w \in \mathbb{C}$.

Комплексные числа допускают геометрическое представление которое часто оказывается полезным.

На плоскости зададим декартову ортогональную систему координат. Пусть O начало системы координат. Комплексному числу $z = x + iy$ сопоставим вектор на плоскости, началом которого служит точка O, а концом точка — A с координатами (x, y). Вектор $\overrightarrow{OA}$ назовем изображением комплексного числа $z = x + iy$.

Пусть даны комплексные числа $z = x + iy$ и $w = u + iv$ и пусть $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ их изображения. Тогда изображением суммы $z + w$ будет служить вектор $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, где сложение векторов определяется известным правилом треугольника.

Модуль числа $z = x + iy$ равен длине вектора $\overrightarrow{OA}$, который изображает z. Неравенства (1.15.48) и (1.15.50) в силу этого допускают простое геометрическое истолкование. Первое неравенство равносильно утверждению: длина стороны треугольника не превосходит суммы двух других его сторон, второе — утверждению о том, что разность длин двух сторон треугольника не превосходит третьей его стороны.

Операция умножения на комплексное число $z = x + iy$ также допускает простое геометрическое истолкование. Мы предоставляем читателю разобраться в этом самостоятельно.

2 Множества и элементарные операции над ними

Понятие множества принадлежит к числу первичных математических понятий и не может быть определено сведением к каким-либо другим более простым понятиям.

Множеством называется любая совокупность предметов произвольного рода, рассматриваемая как единое целое. Слово «множество» есть математический термин, употребляемый для обозначения того, что в обиходной речи выражают словами: собрание, набор, система, коллекция, совокупность, семейство и т. д. Например, можно говорить о множестве решений некоторого уравнения, о множестве картин, хранящихся в музее, множестве точек круга и т. д.

Предметы, составляющие то или иное множество, называются его *элементами.* Множество считается заданным, если для любого объекта можно установить является он элементом этого множества или нет.

2.1 Отношение включения.

Пусть A — произвольное множество, а x — какой-то объект. Тогда, если x есть элемент A, то говорят, что x *принадлежит* A и пишут: $x \in A$ (читается «x принадлежит A», «x — элемент A» или, наконец, «x из A»). Если же x не является элементом множества A, то говорят, что x *не принадлежит* A. В обозначениях последняя ситуация выражается следующим образом: $x \notin A$ (читается: «x не принадлежит A» или «x не есть элемент A»).

Оказывается удобным говорить о множестве, у которого нет никаких элементов. Множество, не имеющее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\emptyset$. Например, множество всех прямоугольных равносторонних треугольников пусто, так как не существует ни одного такого треугольника. В теории множеств пустое множество играет роль, аналогичную той, которая в обычной арифметике принадлежит нулю.

2.1. Определение. Пусть A и B — произвольные множества. Говорят, что A содержится в B или, иначе, A является *подмножеством* или *частью* B, если всякий элемент множества A является также и элементом B.

Высказывание: «A содержится в B» записывается одним из способов, либо: $A \subset B$, либо $B \supset A$ (первая запись читается как «A содержится в B», вторая — «B содержит A»).

Принято считать, что пустое множество содержится в любом другом: $\emptyset \subset A$ каково бы ни было множество A.

Отметим некоторые *свойства* отношения включения, непосредственно вытекающие из определения.

2.2. Предложение. 1) *Для всякого множества A верно включение $A \subset A$.*

2) *Если $A \subset B$, а $B \subset C$, то $A \subset C$.*

Доказательство. Доказательство первого свойства очевидно.

Докажем второе Возьмем произвольно $x \in A$. Тогда $x \in B$, так как $A \subset B$. Так как $B \subset C$, то x является элементом также и множества C. Поскольку x было выбрано в множестве A произвольным образом, то тем самым доказано, что любой элемент множества A является элементом C, т. е. $A \subset C$, что и требовалось доказать.

2.3. Определение. Говорят, что множества A и B *равны* или *совпадают* и пишут $A = B$, если одновременно справедливы два включения:

$$A \subset B \quad \text{и} \quad B \subset A.$$

Иначе говоря,

$$A = B$$

в том и только в том случае, если всякий элемент A является элементом B, а всякий элемент B принадлежит и множеству A.

Отметим *свойства* равенства множеств, непосредственно следующее из определения.

2.4. Предложение. 1) *Для любого множества A имеем: $A = A$.*

2) *Если $A = B$, то $B = A$.*

3) *Если $A = B$, $B = C$, то $A = C$.*

Доказательство. Первое свойство очевидно из определения. Второе следует из того, что в определении равенства множества A и B входят равноправным образом. Докажем третье предложение. Если $A = B$, то $A \subset B$ и если $B = C$, то $B \subset C$. Отсюда следует, что $A \subset C$. Так как $C = B$, то $C \subset B$, а из $B = A$ вытекает, что $B \subset A$ и, значит, $C \subset A$. Итак, выполняются включения $A \subset C$ и $C \subset A$ и, потому $A = C$, что и требовалось доказать.

2.2 Операции над множествами (объединение, пересечение и разность)

2.5. Определение. *Объединением множеств* A и B называется совокупность всех объектов x, каждый из которых принадлежит *или* множеству A, *или* множеству B.

Объединение множеств A и B обозначается символом $A \cup B$.

2.6. Определение. *Пересечением множеств* A и B называется совокупность всех объектов x, каждый из которых принадлежит одновременно *и* множеству A, *и* множеству B.

Пересечение обозначается символом $A \cap B$.

Если у данных множеств A и B нет общих элементов, то их пересечение $A \cap B$ представляет пустое множество, $A \cap B = \emptyset$. В этом случае говорят, что множества A и B не пересекаются или *дизъюнктны.*

2.7. Определение. *Разностью множества* A и множества B мы будем называть совокупность всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B

Разность множеств A и B обозначается символом $A \setminus B$.

Из определения, очевидно, следует, что всегда $A \setminus B \subset A$, а пересечение множеств $A \setminus B$ и B *пустое.*

2.8. Задача. Доказать, что для любых множеств A и B справедливы равенства

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cap B) \setminus B,$$
$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

2.9. Задача. Доказать, что для любых трех множеств A, B и C выполняются равенства:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

2.10. Задача. Доказать, что для произвольных множеств A, B и C справедливы равенства

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$$
$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C),$$
$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

2.11. Задача. Дано n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Сколько, самое большее, новых множеств можно образовать из них используя операции объединения, пересечения и взятия разности?

2.3 Прямое произведение множеств и его свойства

Пусть даны два произвольных объекта x и y. Говорят, что они образуют *упорядоченную пару*, если один из них назван первым, а другой — вторым. Пара, в которой первый элемент есть x, а второй y обозначается символом (x, y). При этом две пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются *совпадающими* в том и только в том случае, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Объекты x и y, образующие пару, не предполагается различными, так что можно рассматривать пары вида (x, x), (y, y) и т. п. Первый элемент пары называют также ее первой компонентой, второй элемент, соответственно, — второй компонентой пары.

2.12. Определение. Пусть A и B — произвольные множества. Совокупность всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$, $y \in B$, называется (*прямым*) *произведением множеств* A и B, и обозначается символом $A \times B$.

В том случае, когда одно из данных множеств A и B пусто полагаем $A \times B = \emptyset$.

Из определения непосредственно вытекает следующее предложение.

2.13. Предложение. *Пусть даны множества A_1 и A_2, B_1 и B_2. Тогда если $A_1 \subset A_2$ и $B_1 \subset B_2$, то $A_1 \times B_1 \subset A_2 \times B_2$.*

Доказательство. Действительно, возьмем произвольную пару

$$(x, y) \in A_1 \times B_1.$$

Тогда $x \in A_1$, $y \in B_1$ и так как $A_1 \subset A_2$, $B_1 \subset B_2$, то $x \in A_2$, $y \in B_2$ и, значит, $(x, y) \in A_2 \times B_2$. Это доказывает, что $A_1 \times B_1 \subset A_2 \times B_2$.

В частности, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ есть множество всех пар (x, y) вещественных чисел, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ множество всех пар (m, n) натуральных чисел и т.д.

Понятие прямого произведения может быть распространено на случай любого конечного (и даже бесконечного) числа множества.

Пусть дано произвольное целое число $n \geq 2$. Предположим, что каждому натуральному числу k такому, что $1 \leq k \leq n$, сопоставлен некоторый объект a_k. В этом случае говорят, что задана упорядоченная система $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ объектов, состоящая из n компонент или, иначе, упорядоченная n-ка. При этом a_k называется k-ой *компонентой системы* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Мы будем говорить также, что $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ есть *упорядоченная система длины n.*

Слово «упорядоченная» в конкретных случаях обычно опускается.

Всякая пара, очевидно, есть упорядоченная n-ка, для которой $n = 2$.

2.14. Определение. Пусть дана упорядоченная система

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

длины n, где $A_1, A_2, \dots, A_n$ — произвольные множества. *Прямым* или *декартовым произведением множеств* $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется совокупность всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ длины n, у которых первая компонента x_1 есть *элемент множества* A_1, вторая x_2 — элемент множества A_2 и, вообще, x_k принадлежит множеству A_k при всяком $k = 1, 2, \dots, n$. Прямое произведение множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ обозначается либо символом

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n,$$

либо посредством следующего выражения:

$$\prod_{k=1}^{n} A_k.$$

Данное определение не исключает случай, когда все множества A_k *совпадают*. Если $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, то множество $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ обозначается также символом A^n. Согласно данному здесь определению, A^n есть совокупность всех упорядоченных n-ок, у которых каждая компонента является некоторым элементом множества A.

2.15. Задача. Даны множества A_1, B_1, A_2 и B_2. Доказать равенства

$$\begin{aligned}
(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) &= (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2), \\
(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) &= [A_1 \times (B_1 \setminus B_2)] \cup [(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \cap B_2)] \\
&= [(A_1 \setminus A_2) \times B_1] \cup [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)].
\end{aligned}$$

2.4 Общее понятие функции и отображения.

2.16. Определение. Пусть A и B — произвольные множества. Функцией с *областью определения* A и *областью значений* B называется всякое *правило* или *закон* f, в силу которого каждому элементу x множества A соответствует *один и только один* элемент $y \in B$. Этот элемент y обозначается символом $f(x)$ и называется *значением* функции f на элементе $x \in A$. Такая функция обозначается символом

$$f : A \to B,$$

а ее область определения A — символом $\operatorname{Dom} f$.

Функция, таким образом, есть совокупность трех объектов — *множеств A и B* и *правила* f, в силу которого каждому элементу x множества A соответствует *единственный* элемент $y = f(x)$ множества B.

Относительно природы множеств A и B и правила f при этом не делается никаких предположений. Требуется лишь, чтобы каждому x соответствовал в точности один элемент y множества B. Разным элементам множества A могут соответствовать как различные элементы множества B, так и одинаковые.

Функция f с областью определения A и областью значений B называется также *отображением множества* A в множество B. Высказывание: f есть отображение A в B (или, что то же самое, f есть функция с областью определения A и областью значений B) символически записывается следующим образом: $f : A \to B$ (читается: «f отображает A в B»). Значение функции f на элементе x множества A называется также *образом* x при отображении f.

2.17. Определение. Две функции $f : A_1 \to B_1$ и $g : A_2 \to B_2$ считаются *совпадающими*, т. е. рассматриваются как одна и та же функция в том и только в том случае, если их области определения *совпадают*, т. е. $A_1 = A_2$ или $\operatorname{Dom} f_1 = \operatorname{Dom} f_2$, и области значений *совпадают*, т. е. $B_1 = B_2$, причем если A — их общая область определения, а B — их общая область значений, то для всякого $x \in A$ элементы $f(x)$ и $g(x)$ множества B совпадают.

Определение функции не исключает формально случай, когда область определения A функции f может быть пустым множеством. Если $A = \emptyset$, то множество B также может быть пустым. Но если A — непустое множество, то, очевидно, и множество B значений функции также непустое.

Отметим два важных частных случая общего понятия функции.

2.18. Определение. Функция $f : A \to B$ называется *постоянной* на множестве A, если существует такой элемент c множества B, что $f(x) = c$ для всех $x \in A$. В этом случае мы будем говорить, что $f(x)$ *тождественно равно* c.

2.19. Определение. Пусть A и B — произвольные множества, причем $A \subset B$. Отображение $j : A \to B$, определенное по формуле $j(x) = x$ для всякого $x \in A$ называется *вложением* множества A в множество B. Вложение есть отображение, которое каждому $x \in A$ сопоставляет тот же самый x, но рассматриваемый уже как элемент множества B.

Если $A = B$, то отображение вложения множества A в A называется *тождественным* отображением множества A и обозначается символом i_A.

В дальнейшем рассматриваются, главным образом, такие функции у которых область определения и область значений есть либо подмножество множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ (комплексных чисел $\mathbb{C}$), либо могут быть получены из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ определенными построениями, например, $\overline{\mathbb{R}}$.

Далее будет встречаться высказывание вида: «дана функция $f(x)$ переменной x с областью определения A и областью значений B», или «дана функция $f(x)$ переменной x» и, наконец, просто «дана функция $f(x)$». Первое высказывание при этом является синонимом высказывания: «дана функция f, которая каждому $x \in A$ сопоставляет $f(x) \in B$». Вторые два следует рассматривать как сокращенные варианты первого, употребляемые в тех случаях, когда область определения и область значения функций ясны из контекста. Последний способ выражения особенно удобен в тех случаях, когда указана формула для определения величины $f(x)$ по данному x.

Формально выражение: «дана функция $f(x)$» содержит в себе некоторую неточность, поскольку в нем смешиваются объекты разной логической природы — функция, как закон соответствия, и значение, принимаемое функцией f на элементе x ее области определения. По данной причине некоторые авторы избегают пользоваться выражениями вида «дана функция $f(x)$». Однако отказ от такого способа речи ведет к некоторым неудобствам, а содержащиеся в нем опасности на самом деле никаких трудностей не вызывают.

Пусть даны множества A и B и некоторое математическое выражение $F(x)$, содержащее символ x. Предположим, что если в $F(x)$ вместо x подставить произвольный элемент множества A, то мы либо получим предписание, указывающее, как построить по x определенный элемент y множества B, либо прийдем к выражению, не имеющему смысла. В первом случае говорят, что $F(x)$ определено для данного $x \in A$, y называют значением выражения $F(x)$ для этого x и пишут $y = F(x)$. Во втором случае говорят, что $F(x)$ для рассматриваемого x не определено.

2.20. Пример. Пусть, например, $A = B = \mathbb{R}$ и $F(x)$ есть дробь $\frac{1+x^2}{1-x^2}$. Если число $x \neq \pm 1$, то подставив его в $F(x)$ и выполнив все операции, указанные в выражении для $F(x)$, мы получим некоторое число. Подставляя в дробь $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ значения 1 и -1, получим не имеющее смысла выражение $\frac{2}{0}$.

Обозначим через E совокупность всех $x \in A$, для которых выражение $F(x)$ определено. Сопоставляя $x \in E$ значение $F(x)$, получим некоторую функцию f с областью определения E и областью значений

B, для которой $f(x) = F(x)$ для всякого $x \in E$. Для обозначения этой функции f используется либо выражение $f : x \in A \mapsto F(x) \in B$, либо следующее более короткое выражение: $f : x \mapsto F(x)$. Таким образом, высказывание «дана функция $f : x \in A \mapsto F(x) \in B$» задает функцию, область определения которой есть совокупность E всех $x \in A$ таких, что выражение $F(x)$ имеет смысл, а область значений есть множество B. Для каждого такого x величина $f(x)$ равна значению, которое выражение F принимает при подстановке в него данного значения x.

2.21. Примеры. 1) Пусть $A = B = \mathbb{R}$. Тогда выражение «функция $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x}$» означает функцию f, у которой область определения есть множество всех чисел $x \in \mathbb{R}$, отличных от нуля, причем $f(x) = \frac{1}{x}$ для любого такого x.

2) Выражение «функция $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$» означает функцию f, область определения которой есть множество всех $x \in \mathbb{R}$ таких, что $1 - x^2 \geq 0$, причем $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ для всех этих x.

2.22. Определение. Пусть $\mathbb{S}$ — произвольное непустое множество. *Последовательностью элементов множества* $\mathbb{S}$ называется всякое отображение x множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в множество $\mathbb{S}$. Образ элемента $n \in \mathbb{N}$ при отображении x обозначается символом x_n и называется n-ым членом последовательности. Для обозначения последовательности $x : \mathbb{N} \to \mathbb{S}$ мы будем применять также запись

$$\{x_n \in \mathbb{S}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

либо просто

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

или

$$\{x_n\}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Последовательность элементов множества $\mathbb{S}$, таким образом, есть функция с областью определения $\mathbb{N}$ и областью значений $\mathbb{S}$.

В дальнейшем неоднократно будет возникать необходимость в построении последовательностей, обладающих теми или иными свойствами. Для этой цели во многих случаях оказывается полезным следующее утверждение, непосредственно вытекающее из принципа математической индукции.

Последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ определена, если задан элемент x_1 и указано правило, которое позволяет построить x_{n+1} в случае, когда x_n определено.

Мы будем называть данное предложение принципом индуктивного построения последовательности. Аналогично принципу математической индукции оно допускает следующую модификацию.

Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ определена, если задан элемент x_1 и указано правило, которое позволяет указать x_{n+1} в случае, если x_m определено для любого целого m такого, что $1 \leq m \leq n$.

Опишем еще одну систему обозначений и терминологию, связанные с понятием функции.

2.23. Определение. Пусть даны произвольные непустые множества $\mathbb{T}$ и $\mathbb{S}$. *Семейством элементов множества* $\mathbb{S}$, занумерованных посредством элементов $\mathbb{T}$, называется отображение $x : \mathbb{T} \to \mathbb{S}$. Множество $\mathbb{T}$ называется *множеством индексов семейства*, а образ элемента t в множестве $\mathbb{S}$ обозначается символом x_t. Семейство элементов множества $\mathbb{S}$, занумерованных элементами $\mathbb{T}$, обозначается символом $\big\{\, x_t \in \mathbb{S} \,\big\}_{t\in\mathbb{T}}$. В тех случаях, когда из контекста ясно, что представляют собой множества $\mathbb{S}$ или $\mathbb{T}$ указание множеств $\mathbb{T}$ или $\mathbb{S}$ в обозначениях опускается и применяется более короткая запись $\big\{x_t\big\}_{t\in\mathbb{T}}$.

Термины «функция», «отображение», «семейство» обозначают одно и тоже понятие. В конкретных вопросах обычно применяется какой либо один из них. Выбор термина при этом определяется содержанием вопроса, хотя указать правило, когда нужно писать «функция», а когда — «отображение» или «семейство» не представляется возможным.

С понятием функции тесно связано понятие уравнения. *Уравнением* называется всякое равенство вида: $f(x) = g(x)$, где f и g — некоторые функции. Величина x_0 называется решением этого уравнения, если обе величины $f(x_0)$ и $g(x_0)$ определены (т. е. x_0 принадлежит области определения каждой из функций f и g) и совпадают между собой. При этом не требуется, чтобы f и g имели одну и ту же область определения. Если a — какой-либо объект, то равенство $f(x) = a$, где f — функция, есть уравнение, правая часть которого — функция, тождественно равная a и имеющая ту же область определения, что и f.

2.24. Примеры. 1) Пусть $A = \mathbb{R},\ \ B = \mathbb{R}$. Зададим произвольно числа a и b. Сопоставив каждому $x \in \mathbb{R}$ число $ax + b$ мы получим некоторую функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Имеем: $f(x) = ax + b$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Определенная так функция f называется *аффинной.*

2) Пусть даны числа a, b, c. *Квадратным трехчленом* с коэффициентами a, b и c называется функция f, определенная соотношением $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c$.

3) Соотношения $x \mapsto x^n$ (n натуральное), $x \mapsto \log_{10} x$, $x \mapsto a^x$, $x \mapsto \sin x$ и т. д. определяют функции, у которых область значений есть множество $\mathbb{R}$, а областью определения служит, соответственно, множество $\mathbb{R}$ для первой, множество всех положительных чисел для функции $\log_{10} x$ и, наконец, множество всех чисел x для последних двух функций.

4) Пусть $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Тогда соотношения:

$$A : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto x + y,$$
$$M : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto xy,$$
$$N : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

определяют некоторые функции со значениями в $\mathbb{R}$, заданные на множестве $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ всех пар (x, y) вещественных чисел.

5) Пусть T множество всех треугольников на плоскости. Каждому треугольнику x могут быть сопоставлены некоторые числа: его площадь $S(x)$, периметр $l(x)$, радиус вписанного круга $r(x)$ и т. д. Тем самым на множестве T всех треугольников на плоскости определены функции:

$$S : x \in T \mapsto S(x), \quad l : x \in T \mapsto l(x), \quad r : x \in T \mapsto r(x).$$

6) Пусть T также есть множество всех треугольников, а K множество всех кругов на плоскости. Каждому элементу x множества A может быть единственным образом сопоставлен некоторый элемент $P(x)$ множества K а, именно, круг вписанный в треугольник x. Этим определено некоторое отображение $P : T \to K$. Другое отображение T в K мы получим, если сопоставим каждому треугольнику x описанный вокруг него круг $Q(x)$.

7) Понятие функции есть одно из основных средств математического описания самых разнообразных физических, механических и других явлений. Пусть, например, изучается движение материальной точки на прямой в течение отрезка времени I, определенного неравенствами $a \leq t \leq b$. Всякому $t \in I$ может быть сопоставлено некоторое число $x(t)$ — координата рассматриваемой точки на прямой в момент времени t. Тем самым определена некоторая функция $x(t)$. Эта функция полностью описывает движение точки. Все остальные характеристики движения можно получить чисто математическими средствами, изучая функцию $x(t)$.

8) Предположим, что в определенной области пространства задано электростатическое поле, создаваемое некоторой системой зарядов. Сопоставляя каждой точке области вектор напряженности электростатического поля получим функцию, для которой данная область является

областью определения, а область значений есть множество всех векторов в пространстве.

2.5 Понятие образа и прообраза точки (множества). Инъективные, сюръективные и биективные отображения.

2.25. Определение. Пусть даны непустые множества A и B и отображение $f : A \to B$. Пусть E — произвольное подмножество A. Совокупность всех элементов $y \in B$, каждый из которых является образом хотя бы одного элемента множества E при отображении f называется *образом* множества E при отображении f и обозначается символом $f(E)$.

Можно сказать также, что $f(E)$ есть множество всех $y \in B$, для которых уравнение $f(x) = y$ имеет, по крайней мере, одно решение x, принадлежащее E.

Символическая запись данного определения:

$$f(E) = \{y \in B \mid \exists(x \in E)\, y = f(x)\}.$$

2.26. Пример. Пусть $A = B = \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $f(x) = 2x - 1$. Тогда для $E = \mathbb{Z}$ множество $f(E)$ есть множество всех нечетных целых чисел. Для $E = \mathbb{N}$ образ $f(E)$ есть множество всех нечетных натуральных чисел. Если $E = \mathbb{Q}$ множество всех рациональных чисел, то $f(E)$, очевидно, совпадает с E.

2.27. Определение. Отображение $f : A \to B$ называется *сюръективным отображением* или *отображением множества A на множество B*, если $f(A) = B$. (Предлог «на», таким образом, несет определенную терминологическую нагрузку).

Иначе говоря, $f : A \to B$ есть отображение A на B, если для каждого элемента y множества B можно указать элемент x множества A, образом которого является данное $y \in B$. Это условие можно сформулировать еще так: f отображает A на B, если уравнение $f(x) = y$ имеет решение, каково бы ни было $y \in B$

2.28. Определение. Пусть дано произвольное множество M. Совокупность всех элементов x множества A, образы которых при отображении $f : A \to B$ принадлежат множеству M, называется *прообразом* M относительно отображения $f : A \to B$ и обозначается символом $f^{-1}(M)$.

В том частном случае, когда множество M состоит из единственного элемента $M = \{y\}$, $f^{-1}(M)$ обозначается просто через $f^{-1}(y)$ и называется *прообразом* y.

Таким образом, множество $f^{-1}(y)$ есть совокупность всех решений уравнения $f(x) = y$:

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}.$$

Заметим, что, в частности, $f^{-1}(M)$ может быть пустым множеством. Это, очевидно, будет в том и только в том случае, когда

$$f(A) \cap M = \emptyset.$$

В данном определении прообраза множества M при отображении $f : A \to B$ не требуется, чтобы M было подмножеством B Очевидно, что если $B \cap M = \emptyset$, то $f^{-1}(M)$ есть пустое множество и в общем случае $f^{-1}(M) = f^{-1}(M \cap B)$

Символическая запись приведенных определений:

$$f^{-1}(M) = \{x \in A \,\big|\, f(x) \in M\} \quad \text{или} \quad f^{-1}(y) = \{x \in A \,\big|\, f(x) = y\}.$$

2.29. Пример. Обозначим через $[0, \infty)$ множество всех неотрицательных действительных чисел, через $(0, \infty)$ — множество всех положительных чисел. (Таким образом, $0 \in [0, \infty)$ и в то же время $0 \notin (0, \infty)$.) Пусть дана функция $f : A \to \mathbb{R}$. Тогда $f^{-1}([0, \infty))$ есть множество всех $x \in A$, для которых $f(x) \geq 0$, а $f^{-1}((0, \infty))$ есть множество всех $x \in A$, для которых $f(x) > 0$. Поэтому задача — найти множество $f^{-1}(M)$ в случае $M = [0, \infty)$ равносильна задаче: решить неравенство $f(x) \geq 0$, а в случае $M = (0, \infty)$ — задаче: решить неравенство $f(x) > 0$. Мы видим, таким образом, что одна из популярных тем различного рода конкурсных экзаменов — задачи на решение неравенств сводятся к определению прообразов множеств $[0, \infty)$ и $(0, \infty)$.

2.30. Пример. Рассмотрим еще приводившийся выше пример, когда $A = T$ есть множество всех треугольников, а $B = K$ — множество всех кругов на плоскости и отображение $P : T \to K$ сопоставляет каждому треугольнику $x \in T$ вписанный в него круг y. Для произвольного $y \in K$ прообраз $P^{-1}(y)$ в этом случая есть совокупность всех треугольников, описанных около данного круга y.

2.31. Определение. Отображение $f : A \to B$ называется *инъективным* или *взаимно однозначным*, если образы различных элементов множества B для этого отображения всегда различны.

Иначе говоря, $f : A \to B$ взаимно однозначно, если $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Последняя импликация эквивалентна следующей: $f : A \to B$ взаимно однозначно, если $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Заметим, что если $f(x_1) = f(x_2) = y$, то $x_1 \in f^{-1}(y)$, $x_2 \in f^{-1}(y)$. Поэтому условие взаимной однозначности f можно сформулировать по другому: *отображение $f : A \to B$ взаимно однозначно, если для любого $y \in B$ множество $f^{-1}(y)$ состоит не более чем из одного элемента.* На языке школьной математики это означает следующее: $f : A \to B$ взаимно однозначно, если уравнение $f(x) = y$ имеет не более одного решения для любого $y \in B$.

2.32. Определение. Отображение $f : A \to B$ называется *биективным*, если оно одновременно сюрьективно и инъективно.

Другими словами, отображение $f : A \to B$ биективно, если оно есть взаимно однозначное отображение множества A на множество B (можно сказать также, что f есть взаимно однозначное соответствие между A и B).

2.33. Примеры. 1) Пусть $A = B = \mathbb{N}$. Определим отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, полагая $f(n) = 2n$ при всяком n. Тогда f есть иньективное отображение множества $\mathbb{N}$ в себя. При этом $f(\mathbb{N})$ — образ самого множества $\mathbb{N}$ есть множество всех четных натуральных чисел.

2) Пусть $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$. Определим отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ полагая $f(1) = 1$ и $f(n) = n - 1$ при $n > 1$. Тогда f есть сюрьективное отображение $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$. В то же время f не взаимно однозначно, так как $f(1) = f(2) = 1$.

Используя введенные понятия, мы можем сформулировать известные из элементарной алгебры теоремы о разрешимости линейного уравнения и систем линейных уравнений следующим образом.

Пусть a — произвольное число. Тогда отображение

$$l : x \mapsto ax \in \mathbb{R}$$

биективно в том и только в том случае, когда $a \neq 0$.

Пусть дана система чисел a, b, c, d. Тогда отображение $L : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto (ax + by, cx + dy) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ биективно в том и только в том случае, если число

$$D = ad - bc$$

отлично от нуля.

Пусть A и B произвольные множества, причем $A \subset B$. Отображение вложения i_A множества A в множество B взаимно однозначно. Если $A = B$, то i_A есть тождественное отображение множества A и в этом случае i_A, очевидно, является взаимно однозначным отображением множества A на себя, т. е. является *биективным отображением.*

2.34. Задача. Пусть дано отображение $f : A \to B$. Доказать, что для любых двух множеств $P \subset B$ и $Q \subset B$ справедливы равенства:

$$f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q),$$
$$f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q),$$
$$f^{-1}(P \setminus Q) = f^{-1}(P) \setminus f^{-1}(Q).$$

2.35. Задача. Дано отображение $f : A \to B$. Пусть $E_1 \subset A$, $E_2 \subset A$, $M_1 \subset B$ и $M_2 \subset B$. Доказать, что если $E_1 \subset E_2$, то $f(E_1) \subset f(E_2)$, а если $M_1 \subset M_2$, то $f^{-1}(M_1) \subset f^{-1}(M_2)$.

2.36. Задача. Дано отображение $f : A \to B$. Доказать, что для всякого $M \subset B$ выполняется включение: $f[f^{-1}(M)] \subset M$. Доказать, что $f[f^{-1}(M)] = M$ для всякого $M \subset B$ в том и только в том случае, если f — сюрьективное отображение множества A на B.

2.37. Задача. Дано отображение $f : A \to B$. Доказать, что для всякого $E \subset A$ имеет место включение $f^{-1}[f(E)] \subset E$. Доказать, что $f^{-1}[f(E)] = E$ для всякого $E \subset A$ тогда и только тогда, когда отображение f иньективное.

2.38. Задача. Дано отображение $f : X \to Y$. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

a) f есть иньективное отображение.

b) Для любых $E_1, E_2 \subset X$ справедливо равенство $f(E_1 \cap E_2) = f(E_1) \cap f(E_2)$.

c) Для всякой пары множеств $E_1, E_2 \subset X$ таких, что $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ также и $f(E_1) \cap f(\cap E_2) = \emptyset$.

d) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ для любых $A, B \subset X$.

2.39. Задача. Пусть A — произвольное множество. Для функции $f : A \to \mathbb{R}$ положим

$$N_f = \{x \in A \mid f(x) = 0\}, \quad H_f = \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}.$$

Предположим, что заданы функции $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Для $x \in A$ положим $f(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_m(x)$. Доказать, что

$$N_f = \bigcup_{i=1}^{m} N_{f_i}, \qquad H_f = \bigcap_{i=1}^{m} H_{f_i}.$$

2.40. Задача. Пусть дана функция $f : A \to \mathbb{R}$. Для $n \in \mathbb{N}$ пусть

$$P_n = \Big\{x \in A \mid f(x) > \frac{1}{n}\Big\}, \quad Q_n = \Big\{x \in A \mid f(x) > -\frac{1}{n}\Big\}.$$

Положим

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n, \quad Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n.$$

Доказать, что $P = \{x \in A \mid f(x) > 0\}$ и $Q = \{x \in A \mid f(x) \geq 0\}$.

2.41. Задача. Для произвольной функции $\varphi : A \to \mathbb{R}$ положим

$$E_0(\varphi) = \varphi^{-1}[(0, \infty)] = \{x \in A \mid \varphi(x) > 0\},$$
$$E_1(\varphi) = \varphi^{-1}[(-\infty, 0)] = \{x \in A \mid \varphi(x) < 0\}.$$

Пусть даны функции $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ и пусть $F(x) = f(x)g(x)$. Доказать равенства

$$E_0(F) = [E_0(f) \cap E_0(g)] \cup [E_1(f) \cap E_1(g)],$$
$$E_1(F) = [E_0(f) \cap E_1(g)] \cup [E_1(f) \cap E_0(g)].$$

(Правила решения неравенств вида $f(x)g(x) > 0$ и $f(x)g(x) < 0$.)

2.42. Задача. Даны функции $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $F(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)$. Доказать, что

$$E_0(F) = \bigcup_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n} [E_{\varepsilon_1}(f_1) \cap E_{\varepsilon_2}(f_2) \cap \cdots \cap E_{\varepsilon_n}(f_n)],$$

где каждое ε_i принимает только значения 0 и 1, а объединение справа берется по множеству всех комбинаций чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, сумма которых четна. (Используются обозначения задачи 2.41.)

2.43. Задача. Даны отображение $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + px + q$ и интервал $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Построить множество $f^{-1}((\alpha, \beta))$.

2.6 Сужение и продолжение функции

Понятие функции или отображения представляет собой совокупность трех объектов: области определения, области значений и правила соответствия. Если хотя бы один из указанных трех объектов меняется, то мы получаем уже некоторую новую функцию. Это находит свое отражение, например, в том что свойства отображения быть взаимно однозначными или быть отображением «на» при каком изменении вообще говоря, не сохраняются. Например, пусть $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ есть множество всех неотрицательных вещественных чисел. Рассмотрим функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ \ h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, каждая из которых сопоставляет всякому элементу области определения его абсолютную величину. Тогда отображение f не будет ни иньективным, ни сюрьективным, g есть сюрьективное отображение, но не иньективное. Наконец, h есть биективное .

Оказывается полезным отразить в надлежащих определениях и обозначениях некоторые ситуации, возникающие, когда меняются либо область определения, либо область значения функции Мы ограничимся только случаем, когда меняется область определения

2.44. Определение. Пусть заданы непустые множества A, M и B, причем $M \subset A$, и отображения $f : A \to B,\ \ g : M \to B$. Тогда мы будем говорить, что g есть *ограничение* или *сужение* отображения f на M, если

$$f(x) = g(x)$$

для каждого $x \in M$.

В этом случае мы будем также говорить, что f есть *продолжение* g на A. Если g есть *сужение* отображения $f : A \to B$ на M, то мы будем писать: $g = f|_M$ либо $g = f|M$.

2.7 Суперпозиция отображений и ее свойства

2.45. Определение. Пусть даны отображения $f : A_1 \to B_1$, $g : A_2 \to B_2$. Их *суперпозицией* (или *композицией*) называется отображение

$$h : x \mapsto g[f(x)],$$

областью определения которого является прообраз $f^{-1}(A_2)$, областью значение множество B_2

Отображение h обозначается символом $g \circ f$ (порядок, в котором записываются символы f и g здесь имеет существенное значение)

Поясним данное определение. Суперпозиция $h = g \circ f$ отображений $f : A_1 \to B_1$ и $g : A_2 \to B_2$ есть отображение, которое строится следующим образом. Берем произвольно элемент x множества A_1 и находим величину $y = f(x)$. Если y принадлежит A_2, то определен элемент $g(y)$ множества B_2 и мы полагаем $h(x) = g(y)$. Может, конечно, оказаться, что $y = f(x)$ множеству A_2 не принадлежит. В этом случае величина $h(x)$ для данного x не определена. Областью значений функции h является множество B_2. Область определения h есть совокупность всех $x \in A_1$, для которых $f(x) \in A_2$, т. е. прообраз $f^{-1}(A_2)$ (это максимальное множество, на котором определена суперпозиция). Множество $f^{-1}(A_2)$ может оказаться пустым и тогда область определения $h = g \circ f$ есть пустое множество. (Формально определением функции такая возможность не исключается.) Следовательно, суперпозиция $h = g \circ f$ отображений $f : A_1 \to B_1$ и $g : A_2 \to B_2$ есть отображение

$$h : f^{-1}(A_2) \to B_2 \tag{2.7.1}$$

с областью определения $f^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_2 \cap B_1)$, областью значений B_2, определенное по правилу

$$f^{-1}(A_2) \ni x \mapsto g[f(x)]. \tag{2.7.2}$$

Таким образом,

$$\operatorname{Dom} h = \operatorname{Dom} g \circ f = f^{-1}(A_2) = f^{-1}(\operatorname{Dom} g). \tag{2.7.3}$$

Суперпозиция есть один из основных способов построения новых функций из уже имеющихся в нашем расположении.

2.46. Пример. Пусть $g = f\big|_M$. Тогда имеет место равенство

$$g = f \circ j_M,$$

где j_M есть вложение M в A. Действительно, $f \circ j_M$ есть отображение M в B и для всякого $x \in M$

$$(f \circ j_M)(x) = f[j_M(x)] = f(x),$$

и, значит,

$$f \circ j_M = g = f\big|_M.$$

2.47. Пример. Функция $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ например, есть суперпозиция функций $f(x) = 1 - x^2$ и $g(y) = \sqrt{y}$. В этом случае $A_1 = B_1 = \mathbb{R}$ и $A_2 = B_2 = [0, \infty)$, где $[0, \infty)$ — множество всех неотрицательных вещественных чисел

Отметим некоторые простые свойства суперпозиции отображений.

Пусть даны множества A и B и отображение $f : A \to B$. Пусть i_A — тождественное отображение множества A в себя, i_B — тождественное отображение B. Тогда из определения суперпозиции непосредственно следует, что

$$f \circ i_A = i_B \circ f = f.$$

Операция образования суперпозиции обладает одним важным свойством, которое называется ассоциативностью.

2.48. Теорема об ассоциативности суперпозиции. *Пусть даны отображения $f : A_1 \to B_1$, $g : A_2 \to B_2$, $h : A_3 \to B_3$. Тогда отображения $\varphi = h \circ (g \circ f)$, $\psi = (h \circ g) \circ f$ совпадают, т. е. имеют одну и ту же область определения и одну и ту же область значений, и для всякого x из их общей области определения $\varphi(x) = \psi(x)$.*

Доказательство. Положим $g \circ f = h_1$, $h \circ g = f_1$. Требуется доказать, что $h \circ h_1 = f_1 \circ f$, т. е. надо доказать, что $\mathrm{Dom}(h \circ h_1) = \mathrm{Dom}(f_1 \circ f)$, и для любого $x \in \mathrm{Dom}(h \circ h_1)$ имеем совпадение: $h[h_1(x)] = f_1[f(x)]$.

В соответствии с (2.7.1) композиция $\varphi = h \circ h_1$ представляет собой отображение

$$\varphi : h_1^{-1}(A_3) \to B_3$$

такое, что $\varphi(x) = h[h_1(x)]$ для $x \in h_1^{-1}(A_3)$. Заметим, что $x \in h_1^{-1}(A_3)$ тогда и только тогда, когда $h_1(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] \in A_3$. Так как $(g \circ f)(x) \in B_2$ по определению композиции $g \circ f$, то, на самом деле, $x \in h_1^{-1}(A_3)$ тогда и только тогда, когда $x \in (g \circ f)^{-1}(B_2 \cap A_3)$. С другой стороны, если $x \in (g \circ f)^{-1}(B_2 \cap A_3)$, то $(g \circ f)(x) = g[f(x)] \in B_2 \cap A_3$. Из последнего имеем $f(x) \in g^{-1}(B_2 \cap A_3)$, откуда $x \in f^{-1}(g^{-1}(B_2 \cap A_3))$. Таким образом, доказано, что если $x \in h_1^{-1}(A_3)$, то $x \in f^{-1}(g^{-1}(B_2 \cap A_3))$, т. е. доказано включение $h_1^{-1}(A_3) \subset f^{-1}(g^{-1}(B_2 \cap A_3))$. Вышеприведенные выводы очевидно обратимы, поэтому имеем также и обратное включение $f^{-1}(g^{-1}(B_2 \cap A_3)) \subset h_1^{-1}(A_3)$. Следовательно,

$$\mathrm{Dom}\,\varphi = h_1^{-1}(A_3) = f^{-1}(g^{-1}(B_2 \cap A_3)), \tag{2.7.4}$$

а для точки $x \in \mathrm{Dom}\,\varphi$ имеем $\varphi(x) = h\{h_1(x)\} = h\{g[f(x)]\}$.

В соответствии с (2.7.1) и (2.7.3) композиция $\psi = f_1 \circ f$ представляет собой отображение

$$\psi : f^{-1}(\mathrm{Dom}\, f_1) \to B_3$$

такое, что $\psi(x) = f_1[f(x)]$ для $x \in f^{-1}(\mathrm{Dom}\, f_1)$. Заметим, что $\mathrm{Dom}\, f_1 = g^{-1}(A_3) = g^{-1}(B_2 \cap A_3)$. Отсюда

$$\mathrm{Dom}\,\psi = f^{-1}(\mathrm{Dom}\, f_1) = f^{-1}(g^{-1}(B_2 \cap A_3)), \tag{2.7.5}$$

а для точки $x \in \operatorname{Dom} \psi$ имеем $\psi(x) = f_1[f(x)] = h\{g[f(x)]\}$.

Сравнивая (2.7.4) и (2.7.5), мы видим, что $\operatorname{Dom} \varphi = \operatorname{Dom} \psi$ и $\varphi(x) = \psi(x)$. Следовательно, отображения φ и ψ совпадают. Теорема доказана.

2.8 Понятие обратного отображения

2.49. Определение. Пусть $f : A \to B$ — взаимно однозначное отображение. Положим $M = f(A)$. Тогда для всякого $y \in M$ существует и притом единственный элемент x множества A такой, что $f(x) = y$. Сопоставляя каждому $y \in M$ этот элемент $x \in A$, мы получаем новое отображение $g : M \to A$. Это отображение называется *обратным* к f и обозначается символом f^{-1}.

Согласно определению, если $y = f(x)$, где $x \in A$, то $f^{-1}(y) = x$. Подставляя в равенство $y = f(x)$ вместо x выражение $f^{-1}(y)$ получим

$$f[f^{-1}(y)] = y$$

для любого $y \in M$. Аналогично, подставляя в равенство $f^{-1}(y) = x$ вместо y выражение $f(x)$ получим, что

$$f^{-1}[f(x)] = x$$

для любого $x \in A$. Иначе говоря,

$$f \circ f^{-1} = j_M, \quad f^{-1} \circ f = i_A,$$

где j_M есть отображение вложения M в B, а i_A есть тождественное отображение множества A.

2.50. Задача. Пусть дано отображение $f : A \to B$. Доказать, что если существует отображение $g : B \to A$ такое, что $g \circ f = i_A$ (i_A – тождественное отображение множества A), то отображение f взаимно однозначно. (В данном случае g называется *левым обратным* для f).

Доказать, что если существует отображение $g : B \to A$ такое, что $f \circ g = i_B$, то g есть отображение множества A на множество B. (В этом случае g называется *правым обратным* к f.)

2.9 График функции

2.51. Определение. Пусть A и B — произвольные непустые множества. Рассмотрим их прямое произведение $A \times B$. Предположим, что задано отображение $f : A \to B$. Множество $\Gamma(f) \subset A \times B$ всех пар $(x, f(x))$ называется *графиком* отображения f.

Для того, чтобы множество $\Gamma \subset A \times B$ было графиком некоторого отображения $f : A \to B$ необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $x \in A$ существовал и притом единственный элемент $y \in B$ множества B такой, что пара (x, y) принадлежит Γ. Действительно, если Γ есть график некоторого отображения $f : A \to B$, то Γ очевидно, удовлетворяет данному условию. Предположим, с другой стороны, что для множества $\Gamma \subset A \times B$ указанное условие выполняется. Возьмем произвольно $x \in A$. Для него, по условию, найдется $y \in B$, для которого $(x, y) \in \Gamma$, причем такое y единственно. Сопоставим каждому $x \in A$ $y \in B$ такое, что $(x, y) \in \Gamma$. Мы получим в результате некоторое отображение множества A в множество B. Графиком этого отображения, очевидно, является данное множество Γ.

2.10 Вещественные функции.

2.10.1 Алгебраические операции над функциями

Пусть A произвольное множество. Вещественной функцией на множестве A называется всякое отображение $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$.

Функцию $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ мы будем называть конечной, если $f(x) \in \mathbb{R}$ для всех $x \in A$.

В дальнейшем, каждый раз, когда это не ограничено особо, под вещественной функцией всегда понимается конечная вещественная функция.

Пусть $f : A \to \mathbb{R}$ и $g : A \to \mathbb{R}$ — конечные вещественные функции, определенные на множестве A.

2.52. Определение. *Суммой* и *произведением* функций f и g называются функции

$$s : A \to \mathbb{R} \quad \text{и} \quad p : A \to \mathbb{R},$$

определенные следующим образом:

$$s(x) = f(x) + g(x), \quad p(x) = f(x)g(x)$$

для всех $x \in A$. Мы будем обозначать функцию s символом $f + g$ а функцию p — символом fg.

2.53. Определение. Если g принимает значения, отличные от нуля хотя бы в одной точке $x \in A$, то может быть определено *частное*

$$h = \frac{f}{g}$$

функций f и g. Областью определения функции h является множество всех $x \in A$, для которых $g(x) \neq 0$ и для всякого такого x

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Пусть $a \in \mathbb{R}$ произвольное число и $f : A \to \mathbb{R}$ — числовая функция, определенная на множестве A. Символами af и $f + a$ будем обозначать функции, определенные условиями:

$$(af)(x) = a \cdot f(x), \ \ (f + a)(x) = f(x) + a$$

для любого $x \in A$.

2.10.2 График вещественной функции

При изучении вещественных функций, определенных на числовых множествах оказываются полезными некоторые наглядно геометрические представления.

Координатной осью на плоскости или *координатной осью в пространстве* называется всякая прямая, на которой указаны две различные точки, причем одной из этих точек присвоено наименование *нулевой*, а другой — *единичной*.

Пусть l — произвольная ось, O — ее нулевая, E — единичная точка (нарисуйте). Каждой точке M на оси l может быть сопоставлено некоторое вещественное число $x(M)$ называемое координатой точки M на оси l. Число $x(M)$ определяется следующим образом. Пусть $\xi \geq 0$ есть отношение длин отрезков OM и OE,

$$\xi = \frac{|OM|}{|OE|} \geq 0.$$

Тогда $x(M) = \xi$, если точки M и E лежат по одну сторону точки O и $x(M) = -\xi$, если точки M и E расположены по разные стороны точки O.

Справедливо следующее утверждение, на котором базируется построение аналитической геометрии.

2.54. Первый постулат аналитической геометрии. *Отображение $x : M \in l \mapsto x(M)$ взаимно однозначно отображает прямую l на множестве всех вещественных чисел $\mathbb{R}$.*

Напомним понятие декартовой аффинной системы координат на плоскости. Проведем две различные прямые OX и OY, пересекающиеся в точке O (нарисуйте). На прямых OX и OY отложим ненулевые направленные отрезки (векторы) OE_x и OE_y. Будем считать точку O нулевой на каждой из прямых OX и OY, а точки E_x и E_y — единичными.

Каждая из прямых OX и OY представляет собой координатную ось и, следовательно, определено понятие координаты для точек на этих осях.

Пусть M — произвольная точка на плоскости, M_1 — ее проекция на прямую OX вдоль оси OY; соответственно, M_2 — проекция M на прямую OY вдоль оси OX. Таким образом, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.

Пусть $x(M)$ — координата точки M_1 на оси OX, $y(M)$ — координата M_2 на оси OY. Следовательно, точке M отвечает пара вещественных чисел (x, y), где $x = x(M)$, $y = y(M)$, т. е. некоторый элемент множества $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Числа x и y называются координатами точки M. При этом число x называют *абсциссой*, а число y — *ординатой* точки M.

Справедливо следующее утверждение.

2.55. Второй основной постулат аналитической геометрии. *Отображение $M \mapsto (x(M), y(M))$ плоскости в прямое произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ взаимно однозначно и является отображением плоскости на множество $\mathbb{R}^2$.*

Это предложение означает, что если точки M_1 и M_2 различны, то соответствующим им пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) также различны и для любой пары чисел (x, y) существует точка M, абсцисса которой равна x, а ордината равна y. Отображение плоскости в множество пар вещественных чисел $\mathbb{R}^2$, получаемое с помощью описанного здесь построения, называется *декартовой аффинной системой координат на плоскости*, оси OX и OY называются координатными осями этой системы координат.

Если дополнительно координатные оси OX и OY перпендикулярны, а выбранные отрезки OE_x и OE_y имеют одинаковую длину, то отображение плоскости в множество пар вещественных чисел $\mathbb{R}^2$ называется *декартовой ортогональной системой координат на плоскости.*

2.56. Определение. Пусть A — непустое множество вещественных чисел. Предположим, что дана функция $f : A \to \mathbb{R}$. Зададим на плоскости декартову ортогональную систему координат. *Графиком* функции f в этой системе координат называется совокупность всех точек M, у которых первая координата $x(M)$ принадлежит A, а вторая координата $y(M)$ равна $f[x(M)]$.

Использование графика часто позволяет представить те или иные свойства вещественной функции в наглядной и обозримой форме. График функции обычно изображают в виде некоторой линии на плоскости. Если функция достаточно произвольна, то ее график может оказаться множеством, мало поддающимся наглядному восприятию.

2.10.3 Верхняя и нижняя границы вещественной функции. Ограниченные функции

Пусть дана функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$, где M— произвольное множество. Предположим, что A — непустое подмножество M.

Число $L \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *верхней границей* функции f на множестве A, если для всех $x \in A$ выполняется неравенство: $f(x) \leq L$.

Аналогично число $K \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *нижней границей* функции f на множестве A, если для всех $x \in A$ имеем: $f(x) \geq K$.

Очевидно, $-\infty$ является нижней, а ∞ — верхней границей функции $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ на всяком множестве $A \subset M$.

Функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *ограниченной сверху* на множестве $A \subset M$, если она имеет хотя бы одну *конечную верхнюю границу* на множестве A, т. е. существует число $L \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $x \in A$ выполняется неравенство $f(x) \leq L$.

Функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *ограниченной снизу* на множестве $A \subset M$, если она имеет на A хотя бы одну *конечную нижнюю границу*, т. е. существует число $K \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $x \in A$ выполняется неравенство $f(x) \geq K$.

Функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *ограниченной* на множестве $A \subset M$, если она ограничена на нем сверху и снизу. Иначе говоря, функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ ограничена на множестве $A \subset M$, если существуют числа K и L такие, что $-\infty < K < \infty$, $-\infty < L < \infty$, и для всех $x \in A$ выполняются неравенства: $K \leq f(x) \leq L$. Полезно следующее простое утверждение.

2.57. Лемма. *Функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ ограничена на множестве $A \subset M$ тогда и только тогда, когда существует такое конечное число L, что для всех $x \in A$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq L$.*

Доказательство. Предположим, что функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ ограничена на множестве $A \subset M$. Тогда найдутся числа K и L такие, что $K \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, и для всех $x \in A$ выполняются неравенства

$$K \leq f(x) \leq L. \tag{2.10.6}$$

Обозначим через H наибольшее из чисел $|K|$ и $|L|$. Очевидно верны соотношения

$$-H \le -|K| \le K \le L \le |L| \le H.$$

Отсюда и (2.10.6) заключаем, что $-H \le f(x) \le H$ для всех $x \in A$, т. е. $|f(x)| \le H$ для всех $x \in A$. Этим доказана НЕОБХОДИМОСТЬ условия леммы.

Докажем его ДОСТАТОЧНОСТЬ. Предположим, что существует число H такое, что $0 \le H < \infty$ и $|f(x)| \le H$ для всех $x \in A$. Значит, $-H \le f(x) \le H$ для всех $x \in A$. Мы видим, что $-H$ есть нижняя, а H верхняя границы функции f на A. Так как H конечно, отсюда следует ограниченность функции f на множестве A. Лемма доказана.

2.10.4 Точные верхние и нижние границы числовых функций

Пусть даны функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ и множество $A \subset M$. Тогда определено множество $f(A)$ — образ множества A. Точная верхняя граница множества $f(A)$ называется *точной верхней границей функции f на множестве* A и обозначается символом

$$\sup_{x \in A} f(x) \quad \text{либо, короче, символом} \quad \sup_A f.$$

Точная нижняя граница множества $f(A)$ называется *точной нижней границей функции f на множестве* A и обозначается символом

$$\inf_{x \in A} f(x) \quad \text{или, короче, символом} \quad \inf_A f.$$

Согласно определению имеем

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A), \quad \inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A).$$

Отметим некоторые простые свойства понятий точной нижней и точной верхней границы, непосредственно вытекающие из определения.

Зададим произвольно функцию $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ и непустое множество $A \subset M$. Положим

$$K = \inf_{x \in A} f(x), \quad L = \sup_{x \in A} f(x).$$

Справедливы следующие простые свойства, формулируемые ниже как задачи для самостоятельного решения.

2.58. Задача. Для любого $x \in A$ выполняются неравенства

$$K \leq f(x) \leq L.$$

2.59. Задача. Если число L' является верхней границей функции f на множестве A, т. е.

$$f(x) \leq L'$$

для всех $x \in A$, то $L \leq L'$.

Аналогично, если K' есть нижняя граница f на A, т. е.

$$f(x) \geq K'$$

для всех $x \in A$, то $K \geq K'$.

2.10.5 Признак точных верхних и нижних границ числовых функций (геометрическая интерпретация)

Установим признаки точной верхней и точной нижней границ функции, аналогичные соответствующие признакам для точной верхней и точной нижней границ числового множества.

2.60. Теорема. *Пусть даны функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ и непустое множество $A \subset M$. Для того чтобы $L \in \overline{\mathbb{R}}$ было точной верхней границей f на A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующие условия:*

a) $f(x) \leq L$ для любого $x \in A$;

b) для любого $p < L$ существует $x \in A$ такое, что $p < f(x)$.

Число $K \in \overline{\mathbb{R}}$ является точной нижней границей функции f на множестве A тогда и только тогда, когда

a′) $f(x) \geq K$ для любого $x \in A$;

b′) для любого $q > K$ найдется $x \in A$ такое, что $q > f(x)$.

Доказательство. Мы ограничимся случаем точной верхней границы. Для точной нижней границы доказательство приводится совершенно аналогично. Нужно только в рассуждениях заменить знаки неравенств $\leq$ на $\geq$, $<$ на $>$ и слова «верхняя граница» — словами «нижняя граница».

Необходимость. Пусть $L = \sup\limits_A f = \sup f(A)$. Тогда в силу задачи 2.58 выполнено условие a). Требуется доказать, что L удовлетворяет условию b). Пусть $p < L$. Так как по определению $L = \sup f(A)$, то в силу признака 1.91 точной верхней границы множества найдется $y \in f(A)$ такое, что $p < y$. Согласно определению множества $f(A)$ найдется

$x \in A$ такое, что $y = f(x)$. Таким образом для выбранного x имеем $p < f(x)$. Условие b) тем самым доказано.

Достаточность. Требуется доказать, что если L — верхняя граница функции f на множестве A, и для числа $p < L$ найдется точка $x \in A$ такая, что $p < f(x)$, то $L = \sup\limits_A f$. Действительно, если это условие выполнено, то никакое число $p < L$ не является верхней границей функции f на множестве A. Значит, если L' — любая другая верхняя граница функции f на множестве A, то $L \leq L'$. Таким образом, мы получаем, что L есть наименьшая из верхних границ функции f на множестве A. Это означает, что

$$L = \sup_A f$$

Теорема доказана.

2.10.6 Свойства точной верхней и точной нижней границ функции

Ниже мы формулируем в задачах некоторые простые свойства точной верхней и точной нижней границ функции.

2.61. Задача. Пусть даны функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ и множества $A, B \subset M$. тогда в случае $A \subset B$ выполняются неравенства

$$\sup_{x\in A} f(x) \leq \sup_{x\in B} f(x) \quad \text{и} \quad \inf_{x\in A} f(x) \geq \inf_{x\in B} f(x).$$

Указание. Если $A \subset B$, то $f(A) \subset f(B)$.

2.62. Задача. Пусть даны функции $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ и $g : M \to \overline{\mathbb{R}}$. Если для всех $x \in A$, где $A \subset M$, выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то

$$\inf_{x\in A} f(x) \leq \inf_{x\in B} g(x) \quad \text{и} \quad \sup_{x\in A} f(x) \leq \sup_{x\in B} g(x).$$

Указание. Если $K = \inf\limits_{x\in A} f(x)$, то $K \leq f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in A$.

2.63. Задача. Пусть даны функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ и множество $A \subset M$. Тогда

$$\inf_{x\in A} f(x) = -\sup_{x\in A}[-f(x)] \quad \text{и} \quad \sup_{x\in A} f(x) = -\inf_{x\in A}[-f(x)].$$

Указание. Применить теорему 2.60.

2.11 Конечные и бесконечные множества

2.11.1 Конечные множества

Покажем, как интуитивные представления о конечном множестве и числе его элементов соотносятся с вышеприведенным определением натурального числа.

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ символом $\mathbb{I}_n$ будем обозначать совокупность
$$\mathbb{I}_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}.$$
Совокупность $\mathbb{I}_n$ будем называть *n-ым отрезком множества всех натуральных чисел* $\mathbb{N}$.

Если $m \leq n$, то тем более $m \leq n+1$. Отсюда вытекает, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ имеет место включение: $\mathbb{I}_n \subset \mathbb{I}_{n+1}$. Если $m \in \mathbb{I}_{n+1}$ и $m \neq n+1$, то $m < n+1$ и, значит, по свойству 1.45 имеем $m \leq n$. Следовательно, $m \in \mathbb{I}_n$. Последнее позволяет заключить, что
$$\mathbb{I}_{n+1} = \mathbb{I}_n \cup \{n+1\}.$$

Выясняя число предметов, образующих какую-либо совокупность, (например, число зданий в городе, число студентов, явившихся на занятия, число автомобилей на парковке и т. п.), мы по очереди указываем на каждый из этих предметов, произнося при этом слова: «один», «два», «три» и т.д. Когда будет указан последний из данных предметов, слово «n», которое мы при этом произнесем, и будет обозначать число предметов, входящих в данную совокупность.

Математически этот обычный процесс счета есть не что иное, как построение взаимно однозначного отображения рассматриваемого множества объектов на отрезок $\mathbb{I}_n$ множества $\mathbb{N}$.

2.64. Определение. Непустое множество A называется *конечным*, если существует число $n \in \mathbb{N}$, при котором A биективно некоторой совокупности $\mathbb{I}_n$.

Такое n называется *числом элементов множества* A и обозначается символом $\#A$.

Пустое множество также будем считать конечным множеством: число его элементов полагаем равным нулю.

В связи с данным определением конечного множества возникают некоторые вопросы, без ответа на которые это определение не может считаться удовлетворительным. Основной из них таков: *не может ли* *оказаться, что для некоторого множества A существуют взаимно однозначные отображения на различные отрезки $\mathbb{I}_n$ и $\mathbb{I}_m$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$?* Иначе говоря, не может ли получиться, что подсчитывая число элементов конечного множества в разном порядке мы будем каждый раз получать разные результаты?

Наша ближайшая цель — показать, что число элементов конечного множества определено корректно, т. е. не зависит от выбора биективного отображения $f : A \to \mathbb{I}_n$.

Пусть A — непустое конечное множество. Предположим, что существуют биективные отображения $\alpha : A \to \mathbb{I}_n$ и $\beta : A \to \mathbb{I}_m$. Тогда $\beta \circ \alpha^{-1}$ есть биективное отображение множества $\mathbb{I}_n$ в множество $\mathbb{I}_m$.

В силу доказываемого ниже свойства 2.66 это позволяет нам заключить, что $n \leq m$.

Аналогичным образом, $\alpha \circ \beta^{-1}$ есть биективное отображение множества $\mathbb{I}_m$ в $\mathbb{I}_n$. В силу свойства 2.66, отсюда следует, что $m \leq n$ и, значит, $m = n$.

Таким образом, для всякого непустого конечного множества A число $n \in \mathbb{N}$ такое, что A допускает биективное отображение на множество $\mathbb{I}_n$, единственно, и число его элементов определено корректно.

Установим некоторые простые свойства множеств $\mathbb{I}_n$.

2.65. Свойство. *Всякое инъективное отображение множества $\mathbb{I}_n$ в себя является биективным отображением $\mathbb{I}_n$ на себя.*

Доказательство. Пусть $E = \{n \in \mathbb{N} \mid$ всякое инъективное отображение множества $\mathbb{I}_n$ в себя является биективным отображением $\mathbb{I}_n$ на себя$\}$.

Покажем, что $1 \in E$. Действительно, в случае $n = 1$ множество $\mathbb{I}_n$ состоит из единственного элемента — числа 1. Существует только одно отображение множества $\mathbb{I}_1$ в себя — тождественное отображение $\mathbb{I}_1$. Оно одновременно и инъективно, и биективно.

Предположим, что $n \in E$. Пусть $\beta : \mathbb{I}_{n+1} \to \mathbb{I}_{n+1}$ — инъективное отображение $\mathbb{I}_{n+1}$ в себя. Рассмотрим частный случай, к которому мы позже сведем общий: $\beta(n+1) = n+1$. Обозначим через α ограничение β на $\mathbb{I}_n$.

Отображение α инъективно. Если $m \in \mathbb{I}_n$, то $m \neq n+1$ и, значит, $\alpha(m) = \beta(m) \neq \beta(n+1) = n+1$. Отсюда следует, что $\alpha(m) \leq n$, то есть $\alpha(m) \in \mathbb{I}_n$ для всякого $m \in \mathbb{I}_n$ и, значит, α отображает $\mathbb{I}_n$ в себя. В силу индукционного предположения, α — биективное отображение множества $\mathbb{I}_n$.

Отсюда вытекает, что β — биективное отображение множества $\mathbb{I}_{n+1}$ на себя.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $\beta(n+1) \neq n+1$. Пусть $\beta(n+1) = m$. Зададим отображение τ множества $\mathbb{I}_{n+1}$ на себя, полагая $\tau(m) = n+1$, $\tau(n+1) = m$ и $\tau(k) = k$ в случае, если $k \in \mathbb{I}_{n+1}$ отлично от m и $n+1$.

Очевидно, что τ — биективное отображение множества $\mathbb{I}_{n+1}$ на себя. Полагаем $\gamma = \tau \circ \beta$. Очевидно, γ есть инъективное отображение $\mathbb{I}_{n+1}$ в себя. При этом $\gamma(n+1) = \tau[\beta(n+1)] = \tau(m) = n+1$. По доказанному, отсюда вытекает, что γ — биективное отображение множества $\mathbb{I}_{n+1}$ на себя. Это позволяет заключить, что β также является отображением множества $\mathbb{I}_{n+1}$ на себя.

В силу принципа математической индукции $E = \mathbb{N}$

2.66. Свойство. *Пусть даны числа $n, m \in \mathbb{N}$. Если существует инъективное отображение $\mathbb{I}_n$ в $\mathbb{I}_m$, то $n \leq m$.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}$. Пусть $E = \{n \in \mathbb{N} \mid$ для всякого инъективного отображения $\alpha : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_m$ выполняется $n \leq m\}$.

В случае $n = 1$ имеем $1 \in E$, поскольку 1 есть наименьшее натуральное число.

Предположим, что $n \in E$. Пусть $\beta : \mathbb{I}_{n+1} \to \mathbb{I}_m$ — инъективное отображение.

Если $\beta(n+1) = m$, то ограничение β на $\mathbb{I}_n$ будет инъективным отображением $\mathbb{I}_n$ в $\mathbb{I}_m$. В силу предположения индукции, отсюда следует, что $n \leq m$. Установим, что равенства здесь быть не может. Действительно, если $n = m$, то инъективное отображение $\beta : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_m$ в силу свойства 2.65 будет биективным. Следовательно, существует $l \leq n$ такое, что $\beta(l) = m$. Последнее противоречит инъективности отображения $\beta : \mathbb{I}_{n+1} \to \mathbb{I}_m$, так как $\beta(l) = \beta(n+1) = m$. Значит, $n < m$ и поэтому $n+1 \leq m$ (вытекает непосредственно из свойства 1.44).

Предположим, что $k = \beta(n+1) \neq m$. Пусть τ есть отображение множества $\mathbb{I}_m$ на себя, определенное следующим образом: $\tau(k) = m$, $\tau(m) = k$ и $\tau(i) = i$ в случае, если $i \in \mathbb{I}_m$ отлично от k и m.

Очевидно, τ есть биективное отображение $\mathbb{I}_m$ на себя. Полагаем $\gamma = \tau \circ \beta$. Отображение γ множества $\mathbb{I}_{n+1}$ в $\mathbb{I}_m$ инъективно. При этом $\gamma(n+1) = m$. По доказанному, отсюда следует, что $n+1 \leq m$.

Оба требования принципа математической индукции здесь соблюдены и тем самым свойство 2.66 доказано.

2.67. Свойство. *Всякое непустое подмножество множества $\mathbb{I}_n$ является конечным множеством, т. е. допускает биективное отображение на множество $\mathbb{I}_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Доказательство будем вести с помощью принципа индукции. Пусть $n = 1$. Имеем: $\mathbb{I}_1 = \{1\}$ и всякое непустое подмножество $\mathbb{I}_1$ совпадает с $\mathbb{I}_1$, а потому конечно.

Предположим, что для некоторого n предложение доказано. Пусть A есть непустое подмножество множества $\mathbb{I}_{n+1}$.

Если $n+1$ не является элементом A, то для всякого $k \in A$ имеем $k < n+1$ и, значит, $k \leq n$. Отсюда вытекает, что $A \subset \mathbb{I}_n$, и, значит, в силу предположения индукции, множество A конечное.

Предположим, что $n+1 \in A$. Пусть $A' = A \setminus \{n+1\}$.

Если A' пусто, то A состоит из единственного элемента — числа $n+1$. Полагая $\alpha(n+1) = 1$, мы очевидно получаем биективное отображение A на $\mathbb{I}_1$, так что в этом случае множество A конечно, в смысле данного здесь определения.

Если $A' \neq \emptyset$, то для всякого $k \in A'$, очевидно, имеем: $k < n+1$ и, значит, $k \leq n$, то есть $A' \subset \mathbb{I}_n$.

По предположению индукции, множество A' конечно и, значит, найдется биективное отображение $\alpha : A' \to \mathbb{I}_m$. Продолжим α на A, полагая $\alpha(n+1) = m+1$. В результате получим *биективное отображение* A в $\mathbb{I}_{m+1}$. Тем самым конечность множества A доказана.

2.68. Задача. Если множества A и B суть произвольные непересекающиеся конечные множества, n — число элементов множества A, m — число элементов множества B, то их объединение $A \cup B$ имеет $n+m$ элементов:

$$\#A + \#B = \#(A + B).$$

2.69. Задача. Если конечное множество A содержит некоторое непустое множество B, то множество B и дополнение $A \setminus B$ — также конечные, и

$$\#A \setminus B = \#A - \#B.$$

2.70. Задача. Если A и B — конечные множества, то

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

2.71. Задача. Если A, B и C — конечные множества, то

$$
\begin{aligned}
&\#(A\cup B\cup C)\\
&=\#A+\#B+\#C-\#(A\cap B)-\#(B\cap C)-\#(A\cap C)+\#(A\cap B\cap C).
\end{aligned}
$$

2.72. Задача. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_m$ — конечные множества. Тогда справедливо равенство

$$\#\Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big)=\sum_{k=1}^{m}\Big[(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\dots i_k\le m}\#(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k})\Big].$$

Здесь каждая внутренняя сумма содержит слагаемые, отвечающие всем возможным комбинациям индексов $i_1, i_2, \dots i_k$, удовлетворяющим условию, указанному под знаком $\sum$.

Установим одно свойство конечных подмножеств $\mathbb{R}$.

2.73. Теорема. *Всякое непустое конечное множество вещественных чисел имеет максимальный и минимальный элементы.*

Доказательство. Пусть $A\subset\mathbb{R}$ конечное множество и $\#(A)$ число его элементов.

Если $\#(A)=1$, то A состоит из единственного элемента, который будет и наименьшим и наибольшим элементом множества A.

Предположим, что утверждение теоремы верно, когда $\#(A)=n$.

Пусть $\#(A)=n+1$. Возьмем произвольный элемент $x\in A$. Множество $A\setminus\{x\}$ состоит из n элементов и, по предположению, обладает наименьшим и наибольшим элементами.

Пусть p есть наименьший, а q — наибольший элемент $A\setminus\{x\}$. Тогда, меньшее из чисел x и p будет наименьшим элементом множества A.

Точно также, большее из чисел x и q является наибольшим элементом множества A. Теорема доказана.

2.11.2 Бесконечные множества. Счетные множества и их свойства

Если множество не является конечным, то в таком случае его называют *бесконечным.*

Одна из основных идей Георга Кантора — создателя теории множеств — состоит в классификации бесконечных множеств по степени их «обширности». Как показал Г. Кантор бесконечные множества могут быть более и менее обширными.

Счетные множества занимают самое низшее место в иерархии бесконечных множеств, построенной Г. Кантором.

2.74. Определение. Пусть A — произвольное множество. Говорят, что A — счетное множество, если существует *биективное отображение* ν множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на множество A. Всякое такое отображение $\nu : \mathbb{N} \to A$ называется *нумерацией* элементов A. Элемент $\nu(n)$ соответствует числу $n \in \mathbb{N}$ в данной нумерации. Число n называется *номером элемента* $\nu(n)$.

Говоря наглядно, множество A счетное, если каждому его элементу можно присвоить определенный номер и притом так, что разные элементы всегда получают только разные номера. При значения этих номеров пробегают все множество $\mathbb{N}$. (Здесь описано обратное отображение $\nu^{-1} : A \to \mathbb{N}$.)

Множество всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ счетно. Действительно, $\mathbb{N}$ есть бесконечное множество и тождественное отображение $\mathbb{N}$ в себя является нумерацией $\mathbb{N}$.

2.75. Теорема. *Пусть дано биективное отображение $f : A \to B$. Тогда, если A счетно, то множество B также счетно.*

Доказательство. Так как A счетное, то согласно определению существует биективное отображение $\mu : \mathbb{N} \to A$. Положим $\nu = f \circ \mu$. Очевидно, ν есть биективное отображение $\mathbb{N}$ на B. Теорема доказана.

2.76. Теорема. *Всякое бесконечное подмножество множества $\mathbb{N}$ допускает взаимно однозначное отображение на $\mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $M \subset \mathbb{N}$ бесконечное множество. Мы построим сначала взаимно-однозначное отображение множества $\mathbb{N}$ на M. Отображение обратное к нему, очевидно и будет искомым.

Обозначим через x_1 наименьший элемент множества M. Предположим, что для некоторого n элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определены. Пусть $M_n = M \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ множество, состоящее из всех остальных элементов множества M. Так как множество M бесконечно, то M_n не пусто. Обозначим через x_{n+1} наименьший элемент множества M_n. В силу принципа математической индукции тем самым определена некоторая последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ элементов множества M, т. е. отображение x множества $\mathbb{N}$ в M.

Построенное отображение $x : \mathbb{N} \to M$ взаимно однозначно. Действительно пусть n_1 и n_2 произвольные натуральные числа, причем $n_1 \neq n_2$.

Будем считать, что $n_1 < n_2$. Положим $n_2 - 1 = n$. Тогда x_{n_1} есть одно из чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, а $x_{n_2} = x_{n+1} \in M_n$ и, значит, x_{n_2} не равно ни одному из чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. В частности, $x_{n_2} \neq x_{n_1}$.

Докажем, что x есть отображение $\mathbb{N}$ на M. Допустим, что это не так. Тогда найдется $m \in M$ такое, что $m \neq x_n$ каково бы ни было n. Из построения последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ следует, что $m \in M_n$ при любом n и, значит, $x_{n+1} = \min M_n \leq m$ для всех n. Очевидно $1 < m$, и в силу принципа математической индукции отсюда получаем, что $x_n < m$ для всех n. Отображение $x : \mathbb{N} \to M$, как доказано, взаимно однозначно и числа x_n все натуральные. Мы получаем, таким образом, что между 1 и m содержится бесконечно много различных натуральных чисел, что нелепо. Итак допустив, что x не есть отображение $\mathbb{N}$ на M мы приходим к противоречию.

Таким образом, установлено существование взаимно однозначного отображения $\mathbb{N}$ на M и теорема, тем самым, доказана.

2.77. Теорема. *Пусть $f : A \to B$ есть отображение счетного множества A на бесконечное множество B. Тогда B — счетное множество.*

Доказательство. Зададим произвольно нумерацию ν множества A, т. е. биективное отображение $\nu : \mathbb{N} \to A$ и рассмотрим композицию $\mu = f \circ \nu : \mathbb{N} \to B$. Возьмем произвольно $y \in B$. Так как f — сюрьективное отображение, то множество $\mu^{-1}(y)$ непустое. Обозначим через $\min \mu^{-1}(y)$ наименьший из номеров элементов множества $\mu^{-1}(y)$. Этим определено отображение $g : B \to \mathbb{N}$:

$$B \ni y \mapsto \min \mu^{-1}(y).$$

Отображение g взаимно-однозначно. Действительно, если $y_1 \neq y_2$, то множества $\mu^{-1}(y_1)$ и $\mu^{-1}(y_2)$ не имеют общих элементов. Следовательно, $g(y_1) = \min \mu^{-1}(y_1) \neq \min \mu^{-1}(y_2) = g(y_2)$.

Мы построили инъективное отображение $g : B \to \mathbb{N}$ и тем самым теорема доказана, так как $g(B) \subset \mathbb{N}$ — бесконечное подмножество в $\mathbb{N}$, а по теореме 2.76 множество $g(B)$ счетное.

2.78. Следствие. *Бесконечное подмножество B счетного множества A счетно.*

Доказательство. Рассмотрим следующее отображение $f : A \to B$: $f(x) = x$, если $x \in B$, и $f(x) = x_0$, если $x \notin B$, где $x_0 \in B$ — произвольная фиксированная точка. По теореме 2.77 множество B счетное.

2.79. Следствие. *Пусть дано отображение $f : A \to B$. Тогда если множество $E \subset A$ счетное, и его образ $f(E)$ бесконечен, то и $f(E)$ — счетное множество.*

Доказательство. Достаточно заметить, что сужение отображения f на множестве E есть отображение E на $f(E)$.

2.80. Следствие. *Если бесконечное множество A допускает инъективное отображение в $\mathbb{N}$, то A — счетное множество.*

Доказательство. Пусть $\nu : A \to \mathbb{N}$ — инъективное отображение. Пусть $M = \nu(A)$. Очевидно, M есть бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ и, значит, по теореме 2.77 существует биективное отображение $\mu : M \to \mathbb{N}$. Отображение, обратное к композиции $\mu \circ \nu$, как нетрудно видеть, и есть требуемое отображение. Следствие доказано.

Следствие показывает, что проверки счетности бесконечного множества A достаточно построить иньективное отображение A в множество $\mathbb{N}$.

2.81. Определение. Пусть A — произвольное множество. Говорят, что A — *не более чем счетное множество*, если существует инъективное отображение ν множества A во множество натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Из следствия 2.78 очевидно вытекает, что не более чем счетными множествами могут быть лишь конечные множества и счетные. Пустое множество по определению полагаем не более чем счетным.

2.11.3 Операции над счетными множествами

Цель этого раздела — привести одну наглядную схему, полезную при различных операциях над счетными множествами.

На плоскости зададим декартову ортогональную систему координат. Рассмотрим квадрант

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{2.11.7}$$

Прямыми $x = m$, $y = n$, где m и n произвольные натуральные числа, мы разобьем его на квадраты, определяемые неравенствами

$$m - 1 \leq x \leq m; \quad n - 1 \leq y \leq n. \tag{2.11.8}$$

Разделенный таким образом квадрант (2.11.7) будем называть «канторовой таблицей» и отдельные квадраты, составляющие разбиение, будем именовать «клетками канторовой таблицы». Клетку, определенную неравенствами (2.11.8) будем обозначать символом $K_{m,n}$ (нарисуйте).

2.82. Лемма. *Множество всех клеток канторовой таблицы счетно.*

Доказательство. Определим следующим образом нумерацию клеток канторовой таблицы. Сопоставим клетке $K_{m,n}$ натуральное число

$$\nu(m,n) = (2m-1)2^{n-1}.$$

Наглядно это означает, что клеткам, образующим самую нижнюю строку таблицы в качестве номера присваиваются последовательные нечетные числа. Клетке каждой следующей строки присваивается номер, получаемый удвоением номера клетки, расположенной непосредственно под ней.

Докажем, что отображение

$$\nu : K_{m,n} \mapsto (2m-1)2^{n-1} \in \mathbb{N}$$

биективно.

Действительно, возьмем две различные клетки K_{m_1,n_1} и K_{m_2,n_2}. Тогда, если $n_1 \neq n_2$, то числа $\nu(m_1,n_1)$, $\nu(m_2,n_2)$ делятся на разные степени числа 2 и потому различны. Если же $n_1 = n_2$ то $m_1 \neq m_2$ и, значит, $2m_1 - 1 \neq 2m_2 - 1$, откуда следует, что тогда $\nu(m_1,n_1) \neq \nu(m_2,n_2)$. Таким образом, если клетки K_{m_1,n_1} и K_{m_2,n_2} различны, то и числа $\nu(m_1,n_1)$ и $\nu(m_2,n_2)$ различны, так что ν есть инъективное отображение канторовой таблицы в $\mathbb{N}$.

С другой стороны, всякое натуральное число l можно единственным образом представить в виде $(2m-1)2^{n-1}$ (т. е. число l будет образом клетки $K_{m,n}$). Следовательно, отображение ν будет отображением на $\mathbb{N}$, а потому — биективным. Лемма доказана.

Применение канторовой таблицы во многих случаях позволяет придать наглядный характер рассуждениям, посредством которых доказывается счетность тех или иных множеств.

Пусть дано бесконечное множество M. Предположим, что все элементы множества M размещены в клетки канторовой таблицы, причем в одной клетке оказывается не более одного элемента. Не требуется, чтобы все клетки канторовой таблицы были заняты элементами множества M. Можно разместить один элемент множества M в несколько клеток, важно только, чтобы в каждой клетке содержалось не более одного элемента множества M. Пусть E множество всех клеток канторовой таблицы, в которых стоят элементы множества M. Понятно, что множество E бесконечное. (Почему?)

По следствию 2.78 множество E счетное (как бесконечное подмножество счетного элемента). Сопоставив каждой клетке из E заключенный в ней элемент M получим отображение E на M. В силу следствия 2.79 отсюда следует, что M — счетное множество.

Конструкция канторовой таблицы во многих случаях облегчает процесс размещения в нее элементов множества. Покажем как используя канторову таблицу доказать, например, *счетность множества всех целых чисел.* Запишем в клетки первой строки канторовой таблицы числа $1, 2, 3, \ldots$. В первой клетке второй строки запишем число 0. Наконец, в клетках третьей строки запишем последовательно числа -1, -2, $-3, \ldots$. В результате каждое целое число будет занесено в некоторую клетку канторовой таблицы. Присвоив ему номер этой клетки, получим взаимно однозначное отображение $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{N}$. Тем самым, доказано, что множество $\mathbb{Z}$ является счетным.

Аналогичным образом может быть установлено, что и множество всех рациональных чисел счетное. Мы выведем это утверждение как следствие некоторой общей теоремы.

Пусть $\left(E_t\right)_{t\in T}$ произвольное семейство множества, где индекс t пробегает некоторое множество T. (Это означает, что всякому $t \in T$ сопоставлено некоторое множество E_t.) Семейство $\left(E_t\right)_{t\in T}$ называется счетным, если множество индексов T счетное. Объединением семейства множеств $\left(E_t\right)_{t\in T}$ называется совокупность всех объектов x, каждый из которых принадлежит по крайней мере одному из множеств E_t.

2.83. Теорема. *Объединение не более чем счетного семейства не более чем счетных множеств не более чем счетное. Если хотя бы одно из множеств этого семейства счетное, то их объединение — также счетное.*

Доказательство. Доказательство. Пусть $\left(E_t\right)_{t\in T}$ — произвольное не более чем счетное множеств, удовлетворяющих условию теоремы, E — его объединение. Зададим произвольное инъективное отображение $\nu : T \to \mathbb{N}$. Для каждого $t \in T$ элементы множества E_t разместим последовательно в клетках строки с номером $\nu(t)$ канторовой таблицы таким образом, чтобы никакие две различных элемента множества E_t не попали в одну клетку. Это возможно, поскольку множество E_t не более чем счетное. (Может оказаться, что при этом будет занята лишь часть клеток данной строки в случае конечного множества, либо в случае пустого множества E_t ни одна клетка данной строки не будет занята.)

В результате все элементы множества E окажутся размещенными в клетках канторовой таблицы. Пусть F множество всех клеток канторовой таблицы, занятых элементами множества E.

Если F бесконечное, то по следствию 2.78 множество F счетное (в противном случае оно конечное или пустое).

В силу построения каждой клетке множества F соответствует некоторый элемент объединения

$$E = \bigcup_{t \in T} E_t.$$

В силу теоремы 2.77 отсюда вытекает, что E — счетное множество.

Теорема доказана.

2.84. Следствие. *Множество всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.*

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbb{Q}_n$, где $n \in \mathbb{N}$ есть множество всех чисел $x \in \mathbb{Q}$, представимых в виде $x = \dfrac{z}{n}$, где $z \in \mathbb{Z}$.

При каждом $n \in \mathbb{N}$ соответствие $\dfrac{z}{n} \mapsto z$ представляет собой инъективное отображение множества $\mathbb{Q}_n$ на $\mathbb{Z}$. Существование такого отображения доказывает, что каждое из множеств $\mathbb{Q}_n$ счетно, так как $\mathbb{Z}$ счетное. Множество $\mathbb{Q}$ является объединением множеств $\mathbb{Q}_n$, откуда в силу теоремы 2.83 следует, что $\mathbb{Q}$ счетное множество, поскольку $\mathbb{Q}$ бесконечно.

В связи с полученным результатом естественно возникает вопрос, а существуют ли вообще бесконечные множества, не являющиеся счетными. Положительный ответ на этот вопрос дан в следующей главе.

2.85. Теорема. *Декартово произведение конечного числа счетных множеств — счетное множество.*

Доказательство. Пусть даны множества $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \leq 1$, каждое из которых счетное. Требуется доказать, что

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

— счетное множество. Доказательство будем вести индукцией по n. В случае $n = 1$ имеем $A = A_1$ и доказательство очевидно.

Предположим, что для некоторого n теорема доказана и дана совокупность из $n+1$ счетных множеств A_i, $i = 1, 2, \dots, n+1$. Для $t \in A_{n+1}$ обозначим через E_t совокупность всех элементов $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ множества $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n+1}$, у которых $x_{n+1} = t$. Имеем биективное отображение:

$$(x_1, \dots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \mapsto (x_1, \dots, x_n, t) \in E_t.$$

По индукционному допущению множество $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ счетное. Отсюда вытекает, что E_t — счетное множество при каждом $t \in A_{n+1}$. В силу очевидного соотношения

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n+1} = \bigcup_{t \in A_{n+1}} E_t.$$

по теореме 2.83 отсюда выводим, что $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n+1}$ — счетное множество. В силу принципа математической индукции теорема доказана.

2.86. Следствие. *Для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество всех конечных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из n рациональных чисел — счетное множество.*

Доказательство. Действительно, указанное множество есть произведение

$$\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q} \ \ (n \text{ множителей}).$$

Так как, согласно следствию 2.80, множество $\mathbb{Q}$ счетное, отсюда, в силу теоремы 2.85 вытекает, что $\mathbb{Q}^n$ есть счетное множество.

2.12 Понятие равномощных множеств. Примеры. Множества мощности континуум

Говорят, что множество $\mathbb{X}$ *равномощно* множеству $\mathbb{Y}$, если существует биективное отображение $\mathbb{X}$ на $\mathbb{Y}$.

Ясно, что введенное отношение между множеств, является *отношением эквивалентности* (Проверить!), по этой причине мы будем писать $\mathbb{X} \sim \mathbb{Y}$, если множества $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ равномощны.

Отношение равномощности разбивает совокупность всех множеств на классы эквивалентных между собой множеств. Множества одного класса эквивалентности имеют одинаковое количество элементов, а множества из разных классов не биективны, т. е. количества элементов различные.

Класс, которому принадлежит множество $\mathbb{X}$, называется *мощностью множества* $\mathbb{X}$, *кардиналом* или *кардинальным числом множества* $\mathbb{X}$ и обозначается символом $\operatorname{card}\mathbb{X}$. Если $\mathbb{X} \sim \mathbb{Y}$, то пишут, что $\operatorname{card}\mathbb{X} = \operatorname{card}\mathbb{Y}$.

2.87. Теорема. *Множество точек отрезка $[0, 1]$ несчетно.*

Мы приведем доказательство этой теоремы в разделе 4.1.

Говорят, что множества, равномощные множеству точек отрезка $[0,1]$, имеют мощность *континуум.*

3 Предел последовательности

3.1 Определение последовательности и примеры

3.1. Определение. Пусть $\mathbb{M} \subset \mathbb{Z}$ — конечное или бесконечное множество, а $\mathbb{S}$ — множество произвольной природы. Отображение

$$x : \mathbb{M} \to \mathbb{S} \tag{3.1.1}$$

называется последовательностью точек множества $\mathbb{S}$, индексированных числами множества $\mathbb{M}$. Последовательность (3.1.1) обозначается одним из следующих символов:

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{M}}; \quad x_n,\ n \in \mathbb{M};$$

или $\{x_n\}$, если множество индексов $\mathbb{M}$ в контексте не меняется.

Таким образом, $x_n \in \mathbb{S}$ — это просто значение последовательности (3.1.1) на номере $n \in \mathbb{M}$.

В дальнейшем изложении мы будем, в основном, рассматривать $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}\cup\{0\}$ или $\mathbb{Z}$ в качестве множества индексов $\mathbb{M}$, и $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ или $\mathbb{C}$ в качестве множества $\mathbb{S}$ значений последовательности.

3.2. Примеры. 1) Пусть $p \in \overline{\mathbb{R}}$ — произвольная точка. Последовательность $x : \mathbb{Z} \to \{p\}$ называется постоянной. Здесь $x_n = p$ для всех номеров $n \in \mathbb{M}$.

2) $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

4) $x_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$, $n \in \mathbb{N}$.

5) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

6) $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $n \in \mathbb{N}$.

7) $z_n = e^{in}$, $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Определение предела последовательности

3.2.1 Конечные пределы

3.3. Определение. Последовательность $x_n \in \mathbb{R}$ сходится к числу $a \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$ тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

3.4. Задача. Показать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ эквивалентен пределу $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$.

3.5. Задача. Доказать, что последовательность $x_n \in \mathbb{R}$ сходится к числу $a \in \mathbb{R}$ при $n \to \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - a| \geq \varepsilon\}$$

конечное.

Для обозначения сходимости последовательности $\{x_n\}$ к числу $a \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$ употребляют любой из приводимых ниже символов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \quad \text{или} \quad x_n \to a\,|_{n\to\infty}.$$

3.6. Задача. Если последовательность $x_n \in \mathbb{R}$ сходится к числу $a \in \mathbb{R}$ при $n \to \mathbb{N}$, то $|x_n|$ сходится к числу $|a|$ при $n \to \mathbb{N}$. При каких условиях верно обратное утверждение?

3.7. Задача. Доказать из определения, что если $x_n \in \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, то последовательность x_n ограничена: т. е. существует число $L \in \mathbb{R}$ такое, что $|x_n| \leq L$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

3.8. Примеры. Исследуем на сходимость последовательности 1–3 задачи 3.2.

1) Пусть $a \in \mathbb{R}$ — произвольная точка. Последовательность $x : \mathbb{N} \to \{a\}$ называется постоянной. Здесь $x_n = a$ для всех номеров $n \in \mathbb{N}$. Поэтому независимо от выбора номера n имеем $|x_n - a| = 0$. Следовательно, $|x_n - a| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$. По определению предела имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2) $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае, последовательность принимает два различных значения, причем каждое из них принимается на сколь

угодно больших номерах. Это явный признак отсутствия предела. Действительно, если предположить, что последовательность имеет предел $a \in \mathbb{R}$, то для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ существует номер n_0 такой, что

$$|x_n - a| = |(-1)^n - a| < \frac{1}{2} \quad \text{для всех } n \geq n_0.$$

Для четных n имеем $|x_n - a| = |1 - a| < \frac{1}{2}$, а для нечетных $|x_n - a| = |(-1) - a| < \frac{1}{2}$. Отсюда $2 = |1 - (-1)| \leq |1 - a| + |a - (-1)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, чего очевидно не может быть.

3) $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По принципу Архимеда 1.60 существует натуральное n_0 такое, что $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$. Тогда для любого натурального $n \geq n_0$ имеем

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

ч. тр. д. (что требовалось доказать).

3.9. Задачи. Доказать по определению, что
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+b} = 0$ для любого фиксированного $b \in \mathbb{R}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{an+b} = 0$ для любых фиксированных $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{an+b} = 0$ для любых фиксированных $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ и $c \neq 0$.

3.10. Предложение. *Пусть даны две последовательности x_n и y_n. Если последовательность x_n сходится к числу $a \in \mathbb{R}$, а $x_n - y_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность y_n сходится и ее предел равен a.*

Доказательство. По неравенству треугольника имеем

$$|y_n - a| \leq |x_n - a| + |y_n - x_n|.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $x_n \to a\,|_{n\to\infty}$, то существует число $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_1$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку $x_n - y_n \to 0\,|_{n\to\infty}$, то существует число $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_2$ выполняется неравенство

$$|x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для всех $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ выполняются оба последних неравенства. Поэтому для разности $|y_n - a|$ имеем

$$|y_n - a| \leq |x_n - a| + |y_n - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвола в выборе ε получаем, что $y_n \to a \,|_{n\to\infty}$.

Условимся о следующем обозначении. Для всякого натурального $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим некоторое высказывание $\Phi(n)$, о котором можно сказать истинно оно или ложно. Мы будем употреблять символ

$$\Phi(n) \,|_{n\to\infty}$$

для обозначения того, что высказывание $\Phi(n)$ истинно для всех n начиная с некоторого номера, т. е. существует номер n_0 такой, что $\Phi(n)$ истинно для всех $n \geq n_0$.

3.11. Задачи. Показать, что задачу 3.7 можно переформулировать следующим образом: доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, то последовательность x_n ограничена при больших n: т. е. существует число $L \in \mathbb{R}$ такое, что $|x_n| \leq L \,|_{n\to\infty}$.

3.12. Пример. Высказывание $\Phi(n)$ состоит в том верно ли неравенство $\frac{1}{n} < 1$ или нет, если $n \in \mathbb{N}$. Очевидно оно верно для всякого $n \geq 2$. Символически это свойство можно записать кратко: $\frac{1}{n} < 1 \,|_{n\to\infty}$.

3.13. Задачи. 1) Проверить, что $n > 10^{2015} \,|_{n\to\infty}$.

2) Пусть $q > 1$ — произвольное число. Тогда $q^n > 10^{2015} \,|_{n\to\infty}$.

3) Если $|q| < \frac{1}{2}$, то $|x_n| < 2 \,|_{n\to\infty}$, где $x_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.

4) Доказать, что $2.5 < x_n < 3 \,|_{n\to\infty}$, где

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.14. Предложение. *Рассмотрим высказывания $\Phi_i(n)$, каждое из которых истинно для всех n начиная с некоторого номера:*

$$\Phi_i(n) \,|_{n\to\infty}.$$

Тогда для всех n начиная с некоторого номера n_0 будут истинны все высказывания $\Phi_i(n)$ одновременно:

$$\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_k(n) \,|_{n\to\infty}.$$

Доказательство. По определению символа $\Phi_i(n)\,|_{n\to\infty}$ для найдется номер n_i такой, что $\Phi_i(n)$ истинно для номеров $n \geq n_i$. Положим $n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$. Тогда для всех $n \geq n_0$ неравенство свойство $\Phi_i(n)$ истинно одновременно для всех $i = 1, 2, \dots, k$, ч. тр. д.

3.15. Предложение. *Пусть даны несколько последовательностей $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}$, каждая из которых имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(i)} = a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется n_0 такое, что*

$$|x_n^{(i)} - a_i| < \varepsilon \tag{3.2.2}$$

для всех $n \geq n_0$ одновременно для $i = 1, 2, \dots, k$.

Доказательство. Доказательство этого предложения можно получить из утверждения 3.14.

Однако, мы приведем независимое рассуждение. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдется n_i такое, что $|x_n^{(i)} - a_i| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_i$. Положим $n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$. Тогда для всех $n \geq n_0$ неравенство (3.2.2) выполняется одновременно для всех $i = 1, 2, \dots, k$, ч. тр. д.

3.2.2 Бесконечные пределы

3.16. Определение. Последовательность $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ сходится к $+\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ при $n \to \infty$ тогда, когда для любого $r \in \mathbb{R}$ существует число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$x_n > r.$$

3.17. Задача. Доказать, что последовательность $x_n \in \mathbb{R}$ сходится к $+\infty$ при $n \to \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда для любого $r \in \mathbb{R}$ множество

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \leq r\}$$

конечное.

3.18. Определение. Последовательность $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ сходится к $-\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ при $n \to \infty$ тогда, когда для любого $r \in \mathbb{R}$ существует число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$x_n < r.$$

3.19. Задача. Доказать, что последовательность $x_n \in \mathbb{R}$ сходится к $-\infty$ при $n \to \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда для любого $r \in \mathbb{R}$ множество

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq r\}$$

конечное.

Для обозначения сходимости последовательности $\{x_n\}$ к числу $p \in \overline{\mathbb{R}}$ при $n \to \infty$ употребляют любой из приводимых ниже символов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\to} p \quad \text{или} \quad x_n \to p\,|_{n\to\infty}.$$

3.20. Задача. Если последовательность $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ сходится к числу $p \in \overline{\mathbb{R}}$ при $n \to \mathbb{N}$, то $|x_n|$ сходится к числу $|p|$ при $n \to \mathbb{N}$.

3.21. Задача. Исследовать последовательность x_n на сходимость и найти ее предел при $n \to \infty$, если

1) $x_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$;
2) $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$;
3) $x_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$;
4) $x_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$, $n \in \mathbb{N}$, при $q \leq 1$;
5) $x_n = n + 1$;
2) $x_n = n + b$ для любого фиксированного $b \in \mathbb{R}$;
3) $x_n = an + b$ для любых фиксированных $a, b \in \mathbb{R}$;
4) $x_n = \frac{an+b}{c}$ для любых фиксированных $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

3.22. Задача. Доказать из определения, что если $x_n \in \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$, то в случае

1) $p = \infty$ последовательность x_n ограничена снизу: т. е. существует число $L \in \mathbb{R}$ такое, что $x_n \geq L$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

2) $p = -\infty$ последовательность x_n ограничена сверху: т. е. существует число $L \in \mathbb{R}$ такое, что $x_n \leq L$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

3.23. Задачи. Показать, что задачу 3.7 можно переформулировать следующим образом: доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$, то в случае

1) $p = \infty$ последовательность x_n ограничена снизу при больших n: т. е. существует число $L \in \mathbb{R}$ такое, что $x_n \geq L\,|_{n\to\infty}$.

2) $p = -\infty$ последовательность x_n ограничена сверху при больших n: т. е. существует число $L \in \mathbb{R}$ такое, что $x_n \leq L\,|_{n\to\infty}$.

3.24. Задача. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$. Доказать, что предел последовательности $y_n = -x_n$ равен $-a$: $\lim_{n\to\infty} y_n = -a \in \overline{\mathbb{R}}$.

3.25. Задача. Пусть даны две последовательности x_n и y_n. Если последовательность x_n сходится к $+\infty$ или к $-\infty$, а $|x_n - y_n| \le L$ при $n \to \infty$, где $L \in \mathbb{R}$, то последовательность y_n сходится при $n \to \infty$ и ее предел равен пределу последовательности x_n.

Указание. Применить метод доказательства предложения 3.10.

3.26. Задача. Пусть даны несколько последовательностей

$$x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)},$$

имеющих общий предел $+\infty$ $(-\infty)$. Тогда для любого $r \in \mathbb{R}$ найдется номер n_0 такой, что

$$x_n^{(i)} > r \quad (x_n^{(i)} < r) \tag{3.2.3}$$

для всех $n \ge n_0$ одновременно для всех $i = 1, 2, \dots, k$.

Указание. Применить метод доказательства предложения 3.15.

3.27. Задачи. Доказать, что если $x_n \to p\,|_{n\to\infty}$, то и $x_{n+k} \to p\,|_{n\to\infty}$ для любого фиксированного $k \in \mathbb{Z}$.

3.3 Единственность предела последовательности

3.28. Теорема. *Последовательность может иметь только один предел.*

Доказательство. Требуется доказать, что предел последовательности единствен. Для этого мы докажем, что $a = b$, если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = b$.

3.3.1 Случай конечных пределов

1) Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \ne b$. Тогда для числа $l \in \mathbb{N}$ существуют числа n_1 и n_2 такие, что, с одной стороны, $|x_n - a| < \frac{1}{2l}$ для всех $n \ge n_1$, а с другой имеем $|x_n - b| < \frac{1}{2l}$ для всех $n \ge n_2$. Положим $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Тогда для чисел $n \ge n_0$ выводим

$$|b - a| \le |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{1}{2l} + \frac{1}{2l} = \frac{1}{l}.$$

Заметим, что неравенство $|b-a| < \frac{1}{l}$ для произвольного $l \in \mathbb{N}$ возможно тогда и только тогда, когда $a = b$ (см. свойство 1.63).

3.3.2 Случай, когда один из пределов может быть бесконечным

2) Исключим теперь возможность, когда $a \in \mathbb{R}$, а $b = +\infty$. В этом случае, с одной стороны, для числа $\varepsilon = 1$ существует число n_1 такое, что

$$|x_n - a| < 1 \quad \text{для всех} \quad n \geq n_1.$$

С другой стороны, для числа и $L > |a| + 1$ существует число n_2 такое, что

$$x_n > L \quad \text{для всех} \quad n \geq n_2.$$

Положим $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Тогда для натуральных чисел $n \geq n_0$ выводим

$$|x_n| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a| < L.$$

Последнее противоречит неравенству $x_n > L$ для всех $n \geq n_0$.

3) Случай $a \in \mathbb{R}$, а $b = -\infty$ рассматривается аналогично.

4) Для окончания доказательства остается исключить случай, когда $a = -\infty$, а $b = \infty$. В этом случае, с одной стороны, для произвольного числа $r \in \mathbb{R}$ существует число n_1 такое, что

$$x_n > r \quad \text{для всех} \quad n \geq n_1.$$

С другой стороны, для того же числа $r \in \mathbb{R}$ существует число n_2 такое, что

$$x_n < r \quad \text{для всех} \quad n \geq n_2.$$

Положим $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Тогда для натуральных чисел $n \geq n_0$ выводим

$$x_n < r \quad \text{и одновременно} \quad r < x_n.$$

Отсюда получаем $x_n < x_n$ для всех $n \geq n_0$, что очевидно невозможно.

3.4 Теоремы о пределе монотонной последовательности

3.29. Определение. 1) Последовательность $\{x_n \in \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ (или $\{x_n \in \overline{\mathbb{R}}\}_{n \in \mathbb{N}}$) называется (*строго*) *возрастающей*, если $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n < x_{n+1}$) для любого номера $n \in \mathbb{N}$.

2) Последовательность $\{x_n \in \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ (или $\{x_n \in \overline{\mathbb{R}}\}_{n \in \mathbb{N}}$) называется (*строго*) *убывающей*, если $x_n \geq x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) для любого номера $n \in \mathbb{N}$.

3.4.1 Классическая теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности

3.30. Теорема. *Монотонная ограниченная (сверху или снизу) последовательность $\{x_n \in \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ всегда имеет предел:*

1) *если x_n возрастает и ограничена сверху, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R};$$

2) *если x_n убывает и ограничена снизу, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы, второе доказываются аналогично. Пусть последовательность $x_n \in \mathbb{R}$ монотонно возрастает и ограничена сверху.

Напомним, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Пусть $a = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Так как x_n ограничена сверху, очевидно $a \in \mathbb{R}$. Фиксируем произвольное положительное число ε. По признаку 1.91 точной верхней границы множества $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ существует элемент x_{n_0} такой, что $a - \varepsilon < x_{n_0} \le a$. С другой стороны, в силу монотонности и оценки $x_n \le a$, справедливой для всех $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \le x_n \le a$$

для любого $n \ge n_0$. Отсюда выводим

$$|x_n - a| = a - x_n < a - (a - \varepsilon) = \varepsilon$$

для любого $n \ge n_0$. В силу произвола в выборе ε имеем $x_n \to a\,|_{n\to\infty}$.

3.31. Пример. Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, примера 3.2 и покажем, что она строго монотонно возрастает: $x_n < x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Действительно, требуемое неравенство равносильно следующему: $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1} n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)^n} \\ &= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \frac{n+2}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right). \qquad (3.4.4)\end{aligned}$$

Первый сомножитель оценим снизу по неравенству Бернулли (1.11.16):

$$\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geq \left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right).$$

Продолжим оценку (3.4.4):

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1+\frac{1}{n+1}-\frac{n}{(n+1)^2}-\frac{n}{(n+1)^3} = 1+\frac{1}{(n+1)^3} > 1.$$

3.32. Задача. Применяя метод решения примера 3.31, доказать, что последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, строго монотонно убывает

Указание. Надо проверить, что $\frac{y_n}{y_{n+1}} > 1$. Имеем

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1}(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}}$$
$$= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+2}\right). \quad (3.4.5)$$

Далее к первому сомножителю в правой части (3.4.5) следует применить неравенство Бернулли (1.11.16) и прийти к неравенствам

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} \geq 1+\frac{1}{n(n+2)^2} > 1.$$

3.4.2 Теорема о пределе монотонной последовательности $\{x_n \in \overline{\mathbb{R}}\}$

3.33. Теорема. *Монотонная последовательность $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ всегда имеет предел (конечный или бесконечный):*

1) *если x_n возрастает, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \begin{cases} -\infty, & \text{если } x_n = -\infty \text{ для всех } n \in \mathbb{N}; \\ a \in \mathbb{R}, & \text{если } x_n \in \mathbb{R} \text{ хотя бы для одного } n \in \mathbb{N} \\ & \text{и ограничена сверху;} \\ +\infty, & \text{если } x_n \text{ не ограничена сверху;} \end{cases}$$

2) *если* x_n *убывает, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = \begin{cases} +\infty, & \text{если } x_n = +\infty \text{ для всех } n \in \mathbb{N}; \\ a \in \mathbb{R}, & \text{если } x_n \in \mathbb{R} \text{ хотя бы для одного } n \in \mathbb{N} \\ & \text{и ограничена снизу;} \\ -\infty, & \text{если } x_n \text{ не ограничена снизу.} \end{cases}$$

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы, второе доказываются аналогично. Пусть последовательность $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ монотонно возрастает.

Напомним, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Пусть $a = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Рассмотрим три случая:

a) $a = -\infty$;

b) $a \in \mathbb{R}$;

c) $a = +\infty$.

В случае a) имеем $x_n \leq a = -\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. $x_n = -\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ — постоянная последовательность. Поэтому ее предел равен $-\infty$.

Второй случай по существу сводится к теореме 3.4.1. Если $a \in \mathbb{R}$ — конечное число, по свойствам точной верхней границы (см. признак 1.29) для некоторого номера n_0 имеем неравенство $a - 1 < x_{n_0} \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = a$. Следовательно, для всех натуральных $n \geq n_0$ справедливы соотношения

$$a - 1 < x_{n_0} \leq x_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = a < \infty.$$

Таким образом, последовательность $y_k = x_{n_0+k} \in \mathbb{R}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Следовательно, по теореме 3.4.1 существует ее предел

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} y_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} x_{n_0+k} = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = a.$$

Проверить равенство: $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} x_{n_0+k} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. С другой стороны,

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Перейдем к рассмотрению случая c): $a = +\infty$. Рассмотрим произвольное число $r \in \mathbb{R}$. По признаку 1.91 точной верхней границы множества $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ существует элемент x_{n_0} такой, что $r < x_{n_0} \leq +\infty$.

В силу монотонного возрастания последовательности имеем $x_{n_0} \leq x_n \leq +\infty$ для любого $n \geq n_0$. Таким образом, $x_n > r$ для любого $n \geq n_0$. В силу произвола в выборе $r \in \mathbb{R}$ имеем $x_n \to +\infty\,|_{n\to\infty}$.

3.34. Замечание. Как уже было отмечено, утверждения 2 теорем 3.30 и 3.33 могут быть доказаны по схеме первого утверждения в этих теоремах. Вместе с тем, их доказательства можно свести к предыдущим случаям с помощью следующего приема: положим $y_n = -x_n$. Тогда последовательность y_n будет монотонно возрастающей и в силу доказанного будет существовать предел $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$. Остается заметить (см. задачи 3.24 и 2.63), что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\lim_{n\to\infty} y_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}} y_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}(-y_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

3.35. Задача. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

Указание. Проверить, что последовательность $\sqrt[n]{n!}$ возрастает и не ограничена сверху.

3.4.3 Число Эйлера

Сравнивая последовательности примера 3.31 и задачи 3.32, имеем

$$x_1 = 2 < x_n < y_n < y_1 = 4, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4.6}$$

Следовательно, обе эти последовательности удовлетворяют условиям теоремы Вейерштрасса 3.4.1 и поэтому имеют конечные пределы:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{а} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Более того, в силу соотношения $y_n = x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ эти пределы совпадают:

$$b = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = a.$$

Общий предел последовательностей x_n и y_n обозначается символом e. Таким образом, для число e — это общее значение двух пределов:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{3.4.7}$$

3.36. Теорема. *Справедливо равенство*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}. \tag{3.4.8}$$

Доказательство. Положим $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. Так как последовательность $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится к числу $e \in \mathbb{R}$, то в силу предложения 3.10 для доказательства (3.4.8) достаточно установить, что разность $u_n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом в соответствии с определением предела надо показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| < \varepsilon \tag{3.4.9}$$

для всех $n \ge n_0$. Фиксируем произвольное $0 < \varepsilon < 4$. Разложение для $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ получим из примера 1.57 при $m = n$ и $x = 1$:

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}\frac{1}{k!}, \tag{3.4.10}$$

где

$$c_{n,k} = 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \tag{3.4.11}$$

Приведем легко проверяемые свойства коэффициентов $c_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$:

1) $c_{n,0} = 1$, а $0 < c_{n,k} < 1$ для всех натуральных $1 \le k \le n$,

3.37. Лемма. $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n,k} = 1$ *для любого фиксированного* $1 \le k \le n$.

Доказательство. Для доказательства леммы применим индукцию и арифметические свойства предела. Очевидно $0 < 1 - c_{n,1} = \frac{1}{n}$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n,1} = 1$, что легко проверяется по определению предела. Таким образом, база индукции проверена.

Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n,k} = 1$ для $1 \le k < n$, и докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n,k+1} = 1$. Заметим, что $c_{n,k+1} = c_{n,k}\cdot\left(1-\frac{k}{n}\right)$. Тогда

$$c_{n,k} - c_{n,k+1} = c_{n,k} - c_{n,k} + c_{n,k}\cdot\frac{k}{n} = c_{n,k}\cdot\frac{k}{n}.$$

Следовательно, $|c_{n,k}-c_{n,k+1}| = c_{n,k}\cdot\frac{k}{n} < \frac{k}{n}$. Так как правая часть может быть сделана сколь угодно малой (см. задачу 3.9), то $|c_{n,k}-c_{n,k+1}| \to 0$ при $n\to\infty$. Применяя предложение 3.10 к последовательностям $x_n = c_{n,k}$ и $y_n = c_{n,k+1}$, выводим, что $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n,k+1} = 1$.

Принимая во внимание (3.4.10), рассмотрим произвольное число $1 < k_0 \le n$, которое впоследствии фиксируем определенным образом, и запишем модуль разности в (3.4.9) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}c_{n,k}\frac{1}{k!}\right|\\ &\le \left|\sum_{k=0}^{k_0-1}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{k_0-1}c_{n,k}\frac{1}{k!}\right| + \left|\sum_{k=k_0}^{n}\frac{1}{k!}\right| + \left|\sum_{k=k_0}^{n}c_{n,k}\frac{1}{k!}\right|\\ &\le \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{k_0-1}(1-c_{n,k})\frac{1}{k!}\right|}_{\text{«хорошая» часть}} + \underbrace{2\sum_{k=k_0}^{n}\frac{1}{k!}}_{\text{«плохая» часть}}. \qquad (3.4.12)\end{aligned}$$

Таким образом, выражение в правой части (3.4.12) состоит из двух слагаемых: первое слагаемое «хорошее» (у него конечное число слагамых), а второе «плохое» (у него количество слагаемых может быть произвольным).

Для оценки плохой части выберем k_0 такое, что

$$\frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{8}$$

(существование такого k_0 выводится из принципа Архимеда 1.60). Тогда одновременно выполняются следующие неравенства:

$$\frac{1}{k_0!} \le \frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{и} \quad \frac{1}{k_0+1} < \frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{8} < \frac{1}{2}. \qquad (3.4.13)$$

На основании (1.11.27) получаем следующие оценки:

$$2\sum_{k=k_0}^{n}\frac{1}{k!} < 2\frac{1}{k_0!}\frac{1}{1-\frac{1}{k_0+1}} < 4\frac{1}{k_0!} < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3.4.14)$$

Поскольку k_0 фиксировано, мы можем подобрать $n_0 \ge k_0$ так, чтобы (см. предложение 3.15)

$$(1-c_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2k_0} \quad \text{для всех } n \ge n_0.$$

При таком выборе n_0 для всех $n \geq n_0$ имеем

$$\left| \sum_{k=0}^{k_0-1} (1 - c_{n,k}) \frac{1}{k!} \right| < \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{\varepsilon}{2k_0} \frac{1}{k!} \leq k_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2k_0} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.4.15}$$

(здесь использовано очевидное неравенство $\frac{1}{k!} \leq 1$, $k = 1, \ldots, k_0$). Объединяя оценки (3.4.14) и (3.4.15), получаем (3.4.9).

Последовательность $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ монотонно возрастает: $u_n < u_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и по теореме 3.36 ее предел равен e: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e$. Обозначим положительную разность $e - u_n$ символом R_n. Таким образом, имеем

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n. \tag{3.4.16}$$

Наша ближайшая цель — получить оценку для величины R_n. Для этого мы применим метод доказательства последней теоремы.

3.38. Предложение. *Для остатка R_n из* (3.4.16) *справедливы оценки*

$$0 < R_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}, \quad n \geq 2. \tag{3.4.17}$$

Доказательство. Так как последовательность $\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$ монотонно возрастает, то $e = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = \sup\limits_{m} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$. Далее непосредственно проверяем

$$e = \sup_m \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sup_m \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!}.$$

(Проверить!)[3] Таким образом,

$$R_n = \sup_m \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!}.$$

[3]Здесь использовано следующее свойство: $\mathrm{const} + \sup\limits_m x_m = \sup\limits_m (\mathrm{const} + x_m)$.

Поэтому достаточно получить верхнюю оценку для сумм $\sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!}$, $m > n+1$. Таковая приведена в (1.11.29) при $k_0 = n+1$, $u = 1$:

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

3.4.4 Иррациональность числа e.

Так как правая часть (3.4.17) меньше единицы при $n \geq 2$, то представление (3.4.16) числа e можно записать в виде

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\theta_n}{n!} \cdot \frac{n+2}{(n+1)^2}, \quad n \geq 2, \tag{3.4.18}$$

где $\theta_n \in (0,1)$. Из представления (3.4.18) можно вывести иррациональность числа e.

Пусть, напротив, число e рациональное и равно дроби $\frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$ (очевидно $q > 2$). Тогда, полагая в (3.4.18) $n = q$ и умножая обе части равенства

$$\frac{p}{q} = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{\theta_q}{q!} \cdot \frac{q+2}{(q+1)^2}$$

на $q!$, получаем соотношение

$$(q-1)! \cdot p - q! \cdot \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = \theta_q \cdot \frac{q+2}{(q+1)^2}, \tag{3.4.19}$$

которое не может быть верным, так слева — целое число, а справа — дробное.

Чему равно e? Первые девять знаков после запятой приведены ниже

$$e = 2,718281828\ldots.$$

Кто и когда открыл число e? Джон Непер, шотландский математик, в 1618 году. Самого числа он не упоминал, зато выстроил на его основе свои таблицы логарифмов. Одновременно кандидатами в авторы константы считаются Якоб Бернулли, Лейбниц, Гюйгенс и Эйлер. Достоверно известно только то, что символ e появился из фамилии последнего.

3.5 Теорема о неравенстве пределов

3.39. Теорема. *Пусть даны две последовательности x_n, y_n, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Если*

1) $a < b$, то $x_n < y_n$ для всех $n \geq n_0$ (здесь $n_0 \in \mathbb{N}$ — некоторое натуральное число);

2) $x_n \leq y_n$ для всех $n \geq n_1$, где $n_1 \in \mathbb{N}$, то $a \leq b$.

Доказательство.

3.5.1 Случай конечных пределов

Докажем первое утверждение.

1) Если $a, b \in \mathbb{R}$, то существуют натуральные числа n_1 и n_2 такие, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_1$, и $|y_n - b| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_2$ где $\varepsilon = \frac{1}{2}(b - a)$. Тогда для всех $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ имеем

$$x_n < a + \varepsilon = b - \varepsilon < y_n.$$

При доказательство второго свойства надо исключить возможность $b < a$. Если такое случилось, то в силу первого пункта имеем $y_n < x_n\,|_{n\to\infty}$ (другими словами $y_n < x_n$ для всех натуральных $n \geq n_0$, где $n_0 \in \mathbb{N}$ — некоторое число), что противоречит условию.

3.5.2 Случай, когда один из пределов может быть бесконечным

2) Если $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$, то существуют натуральные числа n_1 такие, что $|x_n - a| < 1$ для всех $n \geq n_1$, а $y_n > L$ для всех $n \geq n_2$, где $L = a + 1$. Тогда для всех $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ имеем

$$x_n < a + 1 = L < y_n.$$

3) Рассмотрение случаев $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ и $a = -\infty$, $b = +\infty$ предоставляется читателю.

При доказательство второго свойства надо исключить возможность $b < a$. Если такое случилось, то в силу второго и третьего пунктов имеем $y_n < x_n\,|_{n\to\infty}$, что противоречит условию.

3.6 Теорема о пределе промежуточной последовательности

3.6.1 Случай конечного предела

3.40. Теорема. *Пусть даны три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ такие, что*

1) *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$;
2) *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$;
3) $x_n \le z_n \le y_n \,|_{n\to\infty}$.
Тогда существует предел последовательности $\{z_n\}$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. По условию теоремы существуют натуральные числа n_1, n_2 и n_3 такие, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \ge n_1$, $|y_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \ge n_2$, и $x_n \le z_n \le y_n$ для всех $n \ge n_3$. Тогда для всех $n \ge n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$ одновременно выполняются все три условия. Отсюда выводим, что

$$a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon \quad \text{при всех } n \ge n_0.$$

Следовательно, $|z_n - a| \le \varepsilon$ при всех $n \ge n_0$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

3.41. Задачи. Доказать, что
1) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ для любого фиксированного числа q, $|q| < 1$.

Указание. Для $q \in (0,1)$ имеем $\frac{1}{q} = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$. Далее по неравенству Бернулли выводим

$$\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n = (1+\alpha)^n \ge 1 + \alpha \cdot n.$$

Отсюда $0 < q^n \le \frac{1}{\alpha \cdot n + 1}$. Так как правая часть стремится к нулю, то и $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Остается рассмотреть случай, когда $q \in (-1, 0)$ В этом случае очевидно $|q^n| = |q|^n$, а так как $|q| \in (0,1)$, то этот случай сводится к первому.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0$ для любого фиксированного числа q, $q > 1$.

Указание. Проверим, что последовательность $\frac{n}{q^n}$ монотонно убывает. Действительно, $\frac{n+1}{q^{n+1}} \le \frac{n}{q^n} \,|_{n\to\infty}$, так как это неравенство эквивалентно $\frac{n+1}{n} \le q \,|_{n\to\infty}$. Справедливость последнего соотношения вытекает из теоремы о неравенстве пределов ввиду $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$ при $n \to \infty$ и неравенства $1 < q$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса о сходимости монотонной последовательности последовательность $x_n = \frac{n}{q^n}$ имеет предел $a \ge 0$ при $n \to \infty$. Имеем соотношения

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{q^{n+1}} = \frac{n}{q^n} \cdot \frac{1}{q} + \frac{1}{q^{n+1}} = x_n \cdot \frac{1}{q} + \frac{1}{q^{n+1}}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $a = a \cdot \frac{1}{q}$. Последнее равенство возможно лишь при $a = 0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ для любого фиксированного числа $a > 0$.

Указание. Пусть $a > 1$. Последовательность $\sqrt[n]{a}$ монотонно убывает, так как $\sqrt[n+1]{a} \le \sqrt[n]{a}$ (последнее эквивалентно очевидному неравенству $a^n \le a^{n+1}$). Следовательно, по теореме Вейерштрасса о сходимости монотонной последовательности $x_n = \sqrt[n]{a}$ имеет предел $b \ge 1$. Если $b > 1$, то $b = 1 + \beta$, $\beta > 0$. Имеем $\sqrt[n]{a} \ge 1 + \beta$ или $a \ge (1+\beta)^n \ge 1 + n\beta$ при $n \to \infty$ по неравенству Бернулли. Так как $\beta > 0$, последнее противоречит принципу Архимеда 1.60.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Указание. Последовательность $x_n = \sqrt[n]{n}$ монотонно убывает при $n \to \infty$: $\sqrt[n+1]{n+1} \le \sqrt[n]{n}\,|_{n\to\infty}$. Действительно, неравенство

$$\sqrt[n+1]{n+1} \le \sqrt[n]{n}$$

эквивалентно $(n+1)^n \le n^{n+1} = n^n \cdot n$ или $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le n$. Последнее неравенство выполнятся при $n \ge 4$ (см. (3.4.6)). Следовательно, последовательность $x_n = \sqrt[n]{n}$ имеет предел $b \ge 1$ по теореме Вейерштрасса о сходимости монотонной последовательности, и при этом $x_n = \sqrt[n]{n} \ge b$. Если, вопреки доказываемому, $b = 1 + \beta > 1$, то $n \ge (1+\beta)^n$. Применим к правой части обобщенное неравенство Бернулли 1.11.19:

$$n \ge (1+\beta)^n \ge 1 + n\beta + \frac{1}{2}n(n-1)\beta^2.$$

Остается разделить обе части неравенства на n: $1 \ge \frac{1}{n} + \beta + \frac{1}{2}(n-1)\beta^2$. Последнее неравенство не может быть верным при $n \to \infty$ в силу неограниченности последовательности $\frac{1}{2}(n-1)\beta^2$ (для проверки последнего достаточно применить принцип Архимеда 1.60).

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$ для любого фиксированного числа q, $q > 1$.

Указание. Проверить, что последовательность $\frac{q^n}{n!}$ монотонно убывает при $n \to \infty$ и применить теорему Вейерштрасса о сходимости монотонной последовательности.

6) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ для любого фиксированного числа q, $q > 1$.

Указание. Применить неравенство Бернулли.

3.6.2 Случай бесконечного предела

3.42. Теорема. I) Пусть даны две последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ такие, что

1) существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

2) $x_n \le z_n \,|_{n\to\infty}$.

Тогда существует предел последовательности $\{z_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} z_n = +\infty.$$

II) Пусть даны две последовательности $\{z_n\}$ и $\{y_n\}$ такие, что

1) существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$;

2) $z_n \le y_n \,|_{n\to\infty}$.

Тогда существует предел последовательности $\{z_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} z_n = -\infty.$$

Доказательство. I) Фиксируем произвольное число $r \in \mathbb{R}$. По условию теоремы существуют натуральные числа n_1 и n_2 такие, что $x_n > r$ для всех $n \ge n_1$ и $x_n \le z_n$ для всех $n \ge n_2$. Тогда для всех $n \ge n_0 = \max(n_1, n_2)$ одновременно выполняются оба условия. Отсюда выводим, что

$$z_n \ge x_n > r \quad \text{при всех } n \ge n_0.$$

Следовательно, $z_n > r$ при всех $n \ge n_0$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty$.

Второе утверждение рассматривается аналогично предыдущему.

3.7 Предел и алгебраические операции

В каждом разделе данного параграфа мы формулируем две теоремы: первую для конечных пределом, а вторую, когда один из пределов может быть бесконечным.

3.7.1 Теорема о сумме пределов

3.43. Теорема. *Пусть даны две сходящиеся последовательности $\{x_n \in \mathbb{R}\}$ и $\{y_n \in \mathbb{R}\}$. Сумма пределов равна пределу суммы: если*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b. \tag{3.7.20}$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует число $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \ge n_1$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и существует число $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_2$ выполняется неравенство
$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Тогда для всех $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ имеем
$$|(x_n + y_n) - (a+b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$, и равенство (3.7.20) доказано.

3.44. Задача. Распространить теорему 3.43 на конечное число слагаемых.

Указание. Применить метод математической индукции.

3.45. Теорема. *Пусть даны две последовательности $\{x_n \in \mathbb{R}\}$ и $\{y_n \in \mathbb{R}\}$. Если последовательность $\{x_n \in \mathbb{R}\}$ ограничена снизу (сверху), а предел последовательности $\{y_n \in \mathbb{R}\}$ равен $+\infty$ $(-\infty)$ при $n \to \infty$, то предел суммы последовательностей равен $+\infty$ $(-\infty)$ при $n \to \infty$.*

Таким образом,
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } x_n \geq L \text{ для всех } n \in \mathbb{N}, \text{ и } \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty, \\ -\infty, & \text{если } x_n \leq L \text{ для всех } n \in \mathbb{N}, \text{ и } \lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty. \end{cases} \tag{3.7.21}$$
Теорема верна, в частности, в том случае, когда последовательность x_n имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\})$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, второй рассматривается по аналогии.

Пусть $x_n \geq L$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем произвольное число $r \in \mathbb{R}$ и найдем $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство
$$y_n > r - L.$$
Тогда для всех $n \geq n_0$ имеем
$$x_n + y_n > L + (r - L) = r.$$
Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$, и первое равенство в (3.7.21) доказано.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, то последовательность x_n ограничена снизу (см. задачи 3.7 и 3.22) и этот случай сводится к предыдущему.

3.46. Замечание. Если a и b — бесконечности разных знаков, сумма $a+b$ не определена (в этом случае говорят о неопределенности вида $\infty - \infty$).

3.7.2 Теорема о произведении пределов

3.47. Теорема. *Пусть даны две сходящиеся последовательности* $\{x_n \in \mathbb{R}\}$ *и* $\{y_n \in \mathbb{R}\}$. *Произведение пределов равно пределу произведения: если*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b. \tag{3.7.22}$$

Доказательство. Так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к числам в $\mathbb{R}$, то они ограничены (см. задачу 3.7): существует число $L \in (0,\infty)$ такое, что $|x_n| \le L$ и $|y_n| \le L$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (проверить это!, см. задачу 3.11).

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует число $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \ge n_1$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2L},$$

и существует число $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \ge n_2$ выполняется неравенство

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

Тогда для всех $n \ge n_0 = \max(n_1, n_2)$ имеем

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - a \cdot b| &= |(x_n - a)\cdot y_n + a\cdot(y_n - b)| \\ &\le |x_n - a|\cdot|y_n| + |a|\cdot|y_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2L}\cdot L + \frac{\varepsilon}{2L}\cdot L = \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.7.23}$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$, и равенство (3.7.22) доказано.

3.48. Задача. Распространить теорему 3.47 на конечное число сомножителей.

Указание. Применить метод математической индукции.

3.49. Теорема. *Пусть даны две сходящиеся последовательности* $\{x_n \in \mathbb{R}\}$ *и* $\{y_n \in \mathbb{R}\}$, *сходящиеся в* $\overline{\mathbb{R}}$. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *и определено произведение* $a \cdot b$, *то произведение пределов равно пределу произведения*:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{3.7.24}$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \begin{cases} (\operatorname{sign} a)\infty, & \text{если } a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\},\ b = +\infty, \\ (-\operatorname{sign} a)\infty, & \text{если } a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\},\ b = -\infty. \end{cases} \tag{3.7.25}$$

Доказательство. Рассмотрим первый случай, второй рассматривается по аналогии: $a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, $b = +\infty$.

Положим для определенности $a < 0$. Фиксируем произвольное число α между a и 0: $a < \alpha < 0$. По теореме 3.39 о неравенстве пределов найдется номер n_1 такой, что

$$x_n < \alpha \quad \text{для всех } n \geq n_1.$$

С другой стороны, для произвольного $r \in (-\infty, 0)$ найдется номер n_2 такой, что

$$y_n > -\frac{r}{|\alpha|} \quad \text{для всех } n \geq n_2.$$

Тогда для всех $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ имеем

$$|x_n \cdot y_n| > |\alpha| \cdot \frac{-r}{|\alpha|} = -r.$$

Поскольку $x_n \cdot y_n$ — отрицательное число при $n \geq n_0$, то

$$x_n \cdot y_n < r.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = -\infty$, и равенство (3.7.24) в этом случае доказано.

3.50. Замечание. В случае, когда $a = 0$ и b — бесконечность любого знака, произведение $a \cdot b$ не определено (неопределенность вида $0 \cdot \infty$).

3.7.3 Теорема об обратной величине предела

3.51. Теорема. *Пусть дана сходящаяся последовательность* $\{x_n \in \mathbb{R}\}$. *Обратная величина предела, не равного нулю, равна пределу последовательности обратных величин: если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{a}. \tag{3.7.26}$$

Доказательство. В случае $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ надо показать, что для любого $\varepsilon > 0$
$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{|x_n \cdot a|} < \varepsilon \,|_{n\to\infty}. \tag{3.7.27}$$
Фиксируем $0 < \varepsilon < |a|$. Тогда для некоторого номера n_1 имеем
$$|x_n - a| < \frac{|a|^2 \varepsilon}{2}$$
для всех $n \geq n_1$. По теореме о неравенстве пределов существует также номер n_2 такой, что
$$|x_n| \geq \frac{|a|}{2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|a|}$$
для всех $n \geq n_2$. Отсюда для всех $n \geq \max(n_1, n_2)$ имеем оценку сверху для правой части (3.7.27):
$$\frac{|x_n - a|}{|x_n \cdot a|} < \frac{|a|^2 \varepsilon}{2} \cdot \frac{2}{|a| \cdot |a|} = \varepsilon.$$

3.52. Теорема. *Пусть дана последовательность $\{x_n \in \mathbb{R}\}$, сходящаяся к одной из бесконечностей при $n \to \infty$. Тогда предел последовательности обратных величин равен нулю: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, то*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0. \tag{3.7.28}$$

Доказательство. Для получения оценки
$$\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$$
надо найти такое n_0 начиная с которого будет справедливо неравенство $\varepsilon^{-1} < |x_n|$. Существование такого n_0 гарантировано условием $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$.

3.53. Задача. Доказать $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Из теорем 3.47, 3.49, 3.51 3.52 выводим

3.54. Следствие. *Если последовательность $x_n \in \mathbb{R}$ сходится к числу $a \in \overline{\mathbb{R}}$ при $n \to \infty$, последовательность $y_n \in \mathbb{R}$ сходится к числу $b \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ при $n \to \infty$, то существует предел отношения последовательностей и равен отношению пределов, когда оно определено:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}. \tag{3.7.29}$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} \frac{a}{b}, & \text{если } a \in \overline{\mathbb{R}},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } a \in \mathbb{R},\ b = \infty. \end{cases} \tag{3.7.30}$$

3.55. Замечание. Таким образом, не определен предел отношения в следующих случаях: когда

1) $a = 0$ и $b = 0$ (неопределенность вида $\frac{0}{0}$);
2) $a = \infty$ и $b = \infty$ (неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$).

3.56. Задача. Пусть $q \in \mathbb{R}$ и $|q| < 1$. Доказать, что последовательность $x_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (см. (1.15.41)) имеет предел при $n \to \infty$ (называемый суммой бесконечной прогрессии), равный $\frac{1}{1-q}$.

3.57. Задача. Пусть дана последовательность $\{x_n \in \mathbb{R}\}$, $x_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } x_n > 0\,|_{n\to\infty}, \\ -\infty, & \text{если } x_n < 0\,|_{n\to\infty}. \end{cases} \tag{3.7.31}$$

3.8 Частичные пределы последовательности. Теорема Вейерштрасса о частичных пределах

3.8.1 Частичные пределы последовательности

Пусть дана последовательность $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$.

3.58. Определение. Число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *частичным пределом* последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если существует последовательность натуральных чисел $\{n_k \in \mathbb{N}\}_{k\in\mathbb{N}}$ с условием $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a. \tag{3.8.32}$$

3.59. Задача. Если последовательность $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ сходится к числу $a \in \overline{\mathbb{R}}$ при $n \to \mathbb{N}$, то a будет также пределом и для любой ее подпоследовательности. В этом случае все ее частичные пределы совпадают.

3.60. Задача. Если последовательность $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ монотонная и известен некоторый ее частичный предел, равный $a \in \overline{\mathbb{R}}$, то предел последовательности x_n при $n \to \infty$ также равен a: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Указание: По теоремам 3.30 и 3.33 данная последовательность x_n имеет предел, совпадающий по предыдущей задаче с любым ее частичным пределом.

3.8.2 Теорема Вейерштрасса о частичных пределах

3.61. Теорема. *Совокупность частичных пределов последовательности $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, представляет собой непустое множество.*

Доказательство. Пусть $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, — произвольная последовательность. Положим

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots, x_m, \dots\}. \tag{3.8.33}$$

По теореме 1.94 последовательность $\{z_n\}$ монотонно убывает: $z_n \geq z_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. По теоремам 3.30 и 3.33 последовательность $\{z_n\}$ имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} z_n = q.$$

Покажем, что q — частичный предел исходной последовательности $\{x_n\}$.

Если $q = -\infty$, то из неравенства $-\infty \leq x_n \leq z_n$ для всех n имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ по теореме 3.42.

Если $q \in \mathbb{R}$, выберем сходящуюся к q подпоследовательность x_{n_k} по индукции. Возьмем для этого произвольную последовательность ε_n положительных чисел, сходящуюся к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Например, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$.

Существует номер l_1 такой, что для всех номеров $n \geq l_1$ имеем $q \leq z_n < q + \varepsilon_1$. По признаку точной верхней границы 1.91 существует натуральное число $n_1 \geq l_1$ такое, что

$$q - \varepsilon_1 < x_{n_1} \leq z_{l_1} < q + \varepsilon_1.$$

Пусть элементы $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ данной последовательности уже выбраны, причем

$$q - \varepsilon_m < x_{n_m} < q + \varepsilon_m \quad \text{для всех } 1 \leq m \leq k$$

и $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$.

Покажем как выбрать элемент $x_{n_{k+1}}$ таким образом, чтобы

$$q - \varepsilon_{k+1} < x_{n_{k+1}} < q + \varepsilon_{k+1}$$

и $n_k < n_{k+1}$. Действительно, существует номер $\bar{l}_{k+1}$ такой, что для всех номеров $n \geq \bar{l}_{k+1}$ имеем

$$q \leq z_n < q + \varepsilon_{k+1}. \tag{3.8.34}$$

Положим $l_{k+1} = \max\{\bar{l}_{k+1}, n_k\} + 1$. Тогда (3.8.34) будет выполняться и для $n \geq l_{k+1}$ По признаку точной верхней границы 1.91 существует натуральное число $n_{k+1} \geq l_{k+1}$ такое, что

$$q - \varepsilon_{k+1} < x_{n_{k+1}} \leq z_{l_{k+1}} < q + \varepsilon_{k+1}.$$

Таким образом, подпоследовательность x_{n_k} построена, причем и соотношения

$$q - \varepsilon_k < x_{n_k} < q + \varepsilon_k,$$

и неравенство $n_k < n_{k+1}$ выполняются для всех $k \in \mathbb{N}$.

Далее, из $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ с помощью теоремы 3.40 выводим требуемое:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = q.$$

Если $q = +\infty$, то очевидно $z_n = +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольную последовательность r_n положительных чисел, сходящуюся к $+\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = +\infty$. Например, $r_n = n$.

По признаку точной верхней границы 1.91 существует натуральное число n_1 такое, что

$$r_1 < x_{n_1}.$$

Пусть элементы $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ данной последовательности уже выбраны, причем

$$r_m < x_{n_m} \quad \text{для всех } 1 \leq m \leq k$$

и $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$.

Покажем как выбрать элемент $x_{n_{k+1}}$ таким образом, чтобы

$$r_{k+1} < x_{n_{k+1}}$$

и $n_k < n_{k+1}$. Поскольку $z_{n_k+1} = +\infty$, по признаку точной верхней границы 1.91 существует натуральное число $n_{k+1} \geq n_k + 1$ такое, что

$$r_{k+1} < x_{n_{k+1}}.$$

Таким образом, подпоследовательность x_{n_k} построена, причем

$$r_k < x_{n_k}$$

и $n_k < n_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Далее, из $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = +\infty$ с помощью теоремы 3.42 выводим требуемое:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty.$$

3.9 Верхний и нижний пределы последовательности

Частичный предел q последовательности $\{x_n\}$, найденный в теореме 3.61, обладает одним замечательным свойством: *любой частичный предел последовательности* $\{x_n\}$ *не превосходит частичного предела* q *теоремы* 3.61.

Для доказательства этого свойства воспользуемся неравенством: $x_n \le z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Если $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ — частичный предел последовательности x_n, то, переходя в неравенстве $x_{n_k} \le z_{n_k}$ к пределу при $k \to \infty$, по теореме о неравенстве пределов 3.39 получаем требуемое соотношение $a \le q$.

Таким образом, доказано

3.62. Предложение. *Частичный предел q последовательности $\{x_n\}$, найденный в теореме* 3.61, *является максимальным из всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$.*

Предел

$$q = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m, \ldots\}$$

теоремы 3.61 является частичным последовательности $\{x_n\}$, называется *верхним пределом* последовательности $\{x_n\}$ и обозначается символом

$$q = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n. \tag{3.9.35}$$

Аналогично предыдущему можно найти наименьший из всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$. Для этого надо рассмотреть последовательность

$$\mathcal{N} \ni n \mapsto y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m, \ldots\}, \tag{3.9.36}$$

проверить, что она монотонно возрастает: $y_n \le y_{n+1}$ для любого $n \in \mathcal{N}$, и по теореме 3.30 убедиться в существовании предела

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} y_n = p. \tag{3.9.37}$$

Читателю остается показать, что p — минимальный частичный предел исходной последовательности $\{x_n\}$.

Частичный предел p последовательности $\{x_n\}$ называется *нижним пределом* последовательности $\{x_n\}$ и обозначается символом

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

3.63. Задача. Доказать, что частичный предел p последовательности $\{x_n\}$, найденный в (3.9.37), является минимальным из всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$.

3.64. Задача. Доказать, что для последовательности $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, всегда имеет место неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n. \tag{3.9.38}$$

3.65. Задача. Доказать, что если p, q — соответственно нижний и верхний пределы последовательности $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, то для любого $\alpha > q$ $(\beta < p)$ множество

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n > \alpha\} \quad (\{n \in \mathbb{N} : x_n < \beta\}) \tag{3.9.39}$$

конечное.

Указание: Воспользуйтесь неравенством $y_n \le x_n \le z_n$, $n \in \mathbb{N}$, и существованием такого n_0, что для всех $n \ge n_0$ будет

$$\beta \le y_n \le y_{n+1} \le x_{n+1} \le z_{n+1} \le z_n \le \alpha.$$

3.66. Задача. Доказать, что для последовательности $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится тогда и только тогда, когда

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n. \tag{3.9.40}$$

3.67. Задача. Последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, сходится тогда и только тогда, когда совокупность всех ее частичных пределов состоит из единственной точки.

3.68. Задача. Доказать, что для последовательности $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, и некоторой ее подпоследовательности $x_{n_k} \in \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, всегда справедливы соотношения

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \le \varliminf_{k\to\infty} x_{n_k} \le \varlimsup_{k\to\infty} x_{n_k} \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n. \tag{3.9.41}$$

Указание. Всякий частичный предел последовательности $\{x_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$ является также частичным пределом и последовательности $\{x_n\}$. Отсюда совокупность M частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ содержит совокупность S частичных пределов последовательности $\{x_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$: $S \subset M$. Поэтому наименьший элемент множества M, равный минимальному частичному пределу последовательности $\{x_n\}$, не превосходит наименьшего элемента множества S, равного минимальному частичному пределу последовательности $\{x_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$. Следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \le \varliminf_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

3.69. Задача. Пусть даны последовательности $\{x_n \in \mathbb{R}\}$ и $\{y_n \in \mathbb{R}\}$. Доказать, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \tag{3.9.42}$$

при условии, что сумма в правой части определена.

Решение. Пример последовательностей $x_n = n$ и $y_n = -n$ показывает, что условие определенности суммы в правой части (3.9.42) связано с существом дела: слагаемые в правой части не могут быть бесконечностями разных знаков.

Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то по условию $\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n > -\infty$, и в этом случае неравенство (3.9.42) очевидно.

Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\infty$, то в этом случае неравенство (3.9.42) также очевидно.

Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то по условию $\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n < +\infty$, и в этом случае надо доказать, что верхний предел в левой части неравенства (3.9.42) равен $-\infty$. Действительно, в этом случае существует $L \in \mathbb{R}$ такое, что

$$y_n \le L$$

для всех номеров $n \ge n_1$, где $n_1 \in \mathbb{N}$ — некоторое число. Для любого $r \in \mathbb{R}$ найдется номер $n_2 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$x_n < r - L$$

для всех номеров $n \ge n_2$. Если $n_0 = \max(n_1, n_2)$, то

$$x_n + y_n < r - L + L = r$$

для всех номеров $n \ge n_0$. Так как $r \in \mathbb{R}$ — произвольное число, то $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\infty$, и неравенство (3.9.42) также выполняется.

Рассмотрим основной случай: когда правая и левая части (3.9.42) — конечные числа. Пусть подпоследовательность $x_{n_k}+y_{n_k}$ сходится к $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ при $k\to\infty$. Подпоследовательность x_{n_k} может и не сходится, но у нее есть (под)подпоследовательность $x_{n_{k_l}}$, сходящаяся к $\varlimsup\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Заметим, что тогда по теореме 3.45 и $y_{n_{k_l}}$ сходится, так как

$$y_{n_{k_l}}=(x_{n_{k_l}}+y_{n_{k_l}})-x_{n_{k_l}}\to\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)-\varlimsup_{k\to\infty}x_{n_k}$$

при $l\to\infty$. Из последнего, в частности, выводим, что $\varlimsup\limits_{k\to\infty} x_{n_k}\neq-\infty$, так как в противном случае и $\varlimsup\limits_{l\to\infty} y_{n_{k_l}}=-\infty$, и

$$\lim_{l\to\infty}(x_{n_{k_l}}+y_{n_{k_l}})=\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=-\infty,$$

что противоречит предположению конечности левой части (3.9.42). Окончательно,

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)&=\lim_{l\to\infty}(x_{n_{k_l}}+y_{n_{k_l}})=\lim_{l\to\infty}x_{n_{k_l}}+\lim_{l\to\infty}y_{n_{k_l}}\\&\le\varlimsup_{k\to\infty}x_{n_k}+\varlimsup_{k\to\infty}y_{n_k}\le\varlimsup_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n\end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались задачей 3.68).

Аналогично решаются следующие три задачи.

3.70. Задача. Пусть даны последовательности $\{x_n\in\mathbb{R}\}$ и $\{y_n\in\mathbb{R}\}$. Доказать, что

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\ge\varliminf_{n\to\infty}x_n+\varliminf_{n\to\infty}y_n$$

при условии, что сумма в правой части определена.

3.71. Задача. Пусть даны последовательности $\{x_n\in\mathbb{R}\}$ и $\{y_n\in\mathbb{R}\}$, $x_n,y_n>0$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}x_n\cdot y_n\le\varlimsup_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n$$

при условии, что произведение в правой части определено.

3.72. Задача. Пусть даны последовательности $\{x_n\in\mathbb{R}\}$ и $\{y_n\in\mathbb{R}\}$, $x_n,y_n>0$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что

$$\varliminf_{n\to\infty}x_n\cdot y_n\ge\varliminf_{n\to\infty}x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty}y_n$$

при условии, что произведение в правой части определено.

3.10 Понятие фундаментальной последовательности. Критерий Коши

Рассмотрим последовательность $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, сходящуюся к некоторому числу $a \in \mathbb{R}$. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.10.43}$$

для всех $n \geq n_0$. Следовательно, для всех $m, l \geq n_0$ из (3.10.43) имеем

$$|x_m - x_l| \leq |x_m - a| + |x_l - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, если последовательность $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к некоторому числу в $\mathbb{R}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что

$$|x_m - x_l| < \varepsilon \tag{3.10.44}$$

для всех $m, l \geq n_0$. Свойство (3.10.44) можно рассматривать и независимо от того сходится последовательность или нет. Выделим полученное свойство в новое понятие.

3.73. Определение. Последовательность $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что

$$|x_m - x_l| < \varepsilon \tag{3.10.45}$$

для всех $m, l \geq n_0$.

3.10.1 Критерий Коши

3.74. Теорема. *Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторому числу в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда она фундаментальная.*

Доказательство. Необходимость доказана перед определением 3.73.

Достаточность. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна. Тогда для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $m, l \geq n_0$ справедливо неравенство (3.10.45). Фиксируем l. При $m \geq n_0$ имеем соотношения

$$-\varepsilon + x_l < x_m < \varepsilon + x_l \tag{3.10.46}$$

из которых вытекает, что последовательность $\{x_m\}$ ограничена. Выделим по теореме Вейерштрасса 3.61 сходящуюся подпоследовательность

x_{m_k}: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = a$. Так как $m_k > n_0 \,|_{k\to\infty}$, то полагая в неравенствах (3.10.46) $m = m_k$ и переходя к пределу при $k \to \infty$ по теореме 3.39 о неравенстве пределов получаем

$$-\varepsilon + x_l \le a \le \varepsilon + x_l \quad \text{или} \quad |x_l - a| \le \varepsilon \tag{3.10.47}$$

при всех $l \ge n_0$. Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{l\to\infty} x_l = a$.

3.11 Экспоненциальная функция $\exp x$

3.11.1 Определение экспоненциальной функции

Применим критерий Коши для доказательства сходимости последовательности

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $x \in \mathbb{R}$ — произвольное фиксированное число. Понятно, что при $x = 0$ последовательность постоянная и ее предел равен 1. Случай $x = 1$ был рассмотрен раннее в п. 3.31: было доказано, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(1)$ существует, принадлежит $\mathbb{R}$, и его значение было обозначено символом e. Здесь мы приведем новое доказательство существования предела последовательности $u_n(x)$. Таким образом, будет доказано, что каждому $x \in \mathbb{R}$ можно сопоставить число $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$, которое мы обозначим символом $\exp x$:

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp x = \lim_{n\to\infty} u_n(x). \tag{3.11.48}$$

Ниже в разделе 3.11.3 будет доказано, что эта функция обладает замечательным свойством: $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$. По этой причине она называется *экспоненциальной*.

3.75. Теорема. *Предел*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{3.11.49}$$

существует для любого $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. При $x = 0$ последовательность очевидно сходится и ее предел равен 1. Фиксируем произвольное $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, рассмотрим последовательность

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и докажем, что она сходится.

Заметим, что при $x = 1$ эта последовательность совпадает с последовательностью $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, примера 3.31. Для доказательства сходимости последовательности $\{u_n(x)\}$ мы воспользуемся критерием Коши.

Надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что

$$|u_m(x) - u_l(x)| < \varepsilon \tag{3.11.50}$$

для всех $m, l \geq n_0$. Фиксируем произвольное $0 < \varepsilon < 4$. Запишем левую часть (3.11.50) в следующем виде:

$$|u_m(x) - u_l(x)| = \left|\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m - \left(1 + \frac{x}{l}\right)^l\right|. \tag{3.11.51}$$

Разложение для $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ получено в примере 1.57 при $m = n$:

$$y_m(x) = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{m} c_{m,k} \frac{x^k}{k!}, \tag{3.11.52}$$

где

$$c_{m,k} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{m}\right). \tag{3.11.53}$$

Напомним свойства коэффициентов $c_{m,k}$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq m$:

1) $c_{m,0} = 1$, а $0 < c_{m,k} < 1$ для всех натуральных $1 \leq k \leq m$,

2) $\lim\limits_{m\to\infty} c_{m,k} = 1$ для любого фиксированного $1 \leq k \leq m$ в силу леммы 3.37.

Принимая во внимание (3.11.52), рассмотрим произвольное число $1 < k_0 \leq \min(m, l)$, которое впоследствии фиксируем определенным образом, и запишем разность в правой части (3.11.51) в следующем виде:

$$\begin{aligned} |u_m(x) - u_l(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{m} c_{m,k} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{l} c_{l,k} \frac{x^k}{k!}\right| \\ &\leq \left|\sum_{k=0}^{k_0-1} c_{m,k} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{k_0-1} c_{l,k} \frac{x^k}{k!}\right| + \left|\sum_{k=k_0}^{m} c_{m,k} \frac{x^k}{k!}\right| + \left|\sum_{k=k_0}^{l} c_{l,k} \frac{x^k}{k!}\right| \\ &\leq \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{k_0-1} (c_{m,k} - c_{l,k}) \frac{|x|^k}{k!}\right|}_{\text{«хорошая» часть}} + \underbrace{2 \sum_{k=k_0}^{L} \frac{|x|^k}{k!}}_{\text{«плохая» часть}}, \end{aligned} \tag{3.11.54}$$

где $L = \max\{m, l\}$. Таким образом, выражение в правой части (3.11.54) состоит из двух слагаемых: первое слагаемое «хорошее» (у него конечное число слагаемых), а второе «плохое» (у него количество слагаемых может быть произвольным). Для оценки плохой части выберем такое $k_0 \in \mathbb{N}$, чтобы одновременно выполнялись следующие неравенства (существование такого k_0 сформулировано в задаче 3.41):

$$\frac{|x|^{k_0}}{k_0!} < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{и} \quad \frac{|x|}{k_0+1} < \frac{\varepsilon}{8} < \frac{1}{2}. \tag{3.11.55}$$

Отсюда в силу неравенства (1.11.27) с $u = |x|$ выводим следующую оценку:

$$2\sum_{k=k_0}^{L} \frac{|x|^k}{k!} < 2\frac{|x|^{k_0}}{k_0!}\frac{1}{1-\frac{|x|}{k_0+1}} < 4\frac{|x|^{k_0}}{k_0!} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.11.56}$$

справедливую для любого $L = \max(m, l) \geq k_0$

Поскольку k_0 фиксировано, мы можем подобрать $n_0 \geq k_0$ такое, чтобы (см. предложение 3.15)

$$|c_{m,k} - c_{l,k}| \leq |c_{m,k} - 1| + |c_{l,k} - 1| < \frac{\varepsilon}{2k_0(|x|+1)^{k_0}} \quad \text{для всех } m, l \geq n_0.$$

При таком выборе n_0 для всех $m, l \geq n_0$ имеем

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=0}^{k_0-1}(c_{m,k} - c_{l,k})\frac{|x|^k}{k!}\right| &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1}|c_{m,k} - c_{l,k}|\frac{|x|^k}{k!} \\ &< \sum_{k=0}^{k_0-1}\frac{\varepsilon}{2k_0(|x|+1)^{k_0}}\frac{|x|^k}{k!} \leq k_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2k_0} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{3.11.57}$$

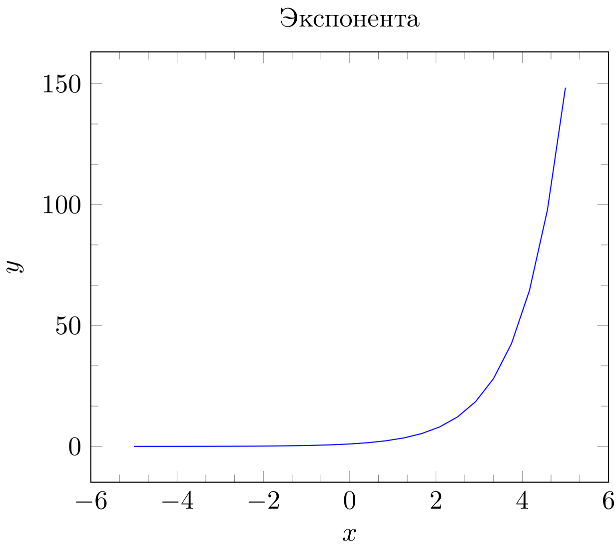
(здесь использованы очевидные неравенства $\frac{|x|^k}{(|x|+1)^{k_0}} \leq 1$ и $\frac{1}{k!} \leq 1$, справедливые для всех $k = 0, \ldots, k_0$ и $x \in \mathbb{R}$).

Объединяя оценки (3.11.56) и (3.11.57), получаем (3.11.50).

3.76. Определение. Экспоненциальной функцией называется функция

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \tag{3.11.58}$$

Очевидно $\exp 1 = e$.



Метод доказательства последней теоремы можно применить для доказательства и других соотношений.

3.77. Задача. Справедливо равенство

$$\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \tag{3.11.59}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

Указание. Применить метод доказательства теоремы 3.36 и соотношения из доказательства теоремы 3.75.

Таким образом, для экспоненциальной функции имеем такое представление

$$\exp x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + R_n(x) \tag{3.11.60}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

3.11.2 Оценки приближения экспоненциальной функции

Наша ближайшая цель — оценить сверху остаток

$$R_n(x) = \exp x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

3.78. Следствие. *Справедлива оценка*

$$|R_n(x)| \le \frac{2}{(n+1)!}|x|^{n+1} \tag{3.11.61}$$

при $|x| \le \frac{n+2}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. *В частности,* $\exp x = 1 + x + R_1(x)$, *где* $|R_1(x)| \le |x|^2$ *при* $|x| \le \frac{3}{2}$.

Доказательство. Действительно, имеем оценку

$$|R_n(x)| = \left|\exp x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \le \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{|x|^k}{k!} = R_n(|x|). \tag{3.11.62}$$

Отсюда с учетом (1.11.29) выводим требуемое:

$$R_n(|x|) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{|x|^k}{k!} \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{|x|}{n+2}} \le \frac{2}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

3.11.3 Основное свойство экспоненциальной функции

Здесь мы докажем основное свойство экспоненциальной функции.

3.79. Теорема. *Экспоненциальная функция обладает следующим свойством:*

$$\exp(u+v) = \exp u \cdot \exp v \tag{3.11.63}$$

для любых действительных чисел $u, v \in \mathbb{R}$.

Доказательство. По условию теоремы 3.75 для всех $u, v \in \mathbb{R}$ определены значения

$$\exp u = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n,$$
$$\exp v = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{v}{n}\right)^n,$$
$$\exp(u+v) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u+v}{n}\right)^n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\exp u \cdot \exp v &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{v}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u+v}{n}+\frac{uv}{n^2}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u+v}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{uv}{n^2\left(1+\frac{u+v}{n}\right)}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u+v}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n, \qquad (3.11.64)
\end{aligned}$$

где

$$z_n = \frac{uv}{n+u+v}.$$

Для окончания доказательства остается проверить, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = 1. \qquad (3.11.65)$$

Если это равенство верное, предел второго сомножителя в правой части (3.11.64) при $n \to \infty$ будет равен единице и теорема будет доказана.

Так как $|z_n| \to 0$ при $n \to \infty$, то существует n_0 такое, что неравенство

$$|z_n| < \frac{1}{2}$$

выполняется при всех $n \geq n_0$.

По неравенству Бернулли (1.11.16) имеем два соотношения:

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \geq 1+z_n \quad \text{и} \quad \left(1-\frac{z_n}{n}\right)^n \geq 1-z_n. \qquad (3.11.66)$$

Далее из очевидного неравенства $1-\frac{z_n^2}{n^2} \leq 1$ выводим $1+\frac{z_n}{n} \leq \frac{1}{1-\frac{z_n}{n}}$. Отсюда и из (3.11.66) приходим к соотношениям:

$$1+z_n \leq \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \leq \frac{1}{\left(1-\frac{z_n}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{1-z_n}.$$

Следовательно,

$$1+z_n \leq \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1-z_n}.$$

Отсюда по теореме 3.40 о пределе промежуточной последовательности получаем соотношение (3.11.65), так как $z_n \to 0$ при $n \to \infty$.

3.12 Теория пределов для комплекснозначных последовательностей. Примеры.

3.12.1 Определение последовательности и примеры

3.80. Определение. Пусть $\mathbb{M} \subset \mathbb{Z}$ — конечное или бесконечное множество, а $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел. Отображение

$$z : \mathbb{M} \to \mathbb{C} \tag{3.12.67}$$

называется последовательностью точек множества $\mathbb{C}$, индексированных числами множества $\mathbb{M}$. Последовательность (3.12.67) обозначается одним из следующих символов:

$$\{z_n\}_{n\in\mathbb{M}}; \quad z_n,\ n \in \mathbb{M};$$

или $\{z_n\}$, если множество индексов $\mathbb{M}$ в контексте не меняется.

Таким образом, $z_n \in \mathbb{C}$ — это просто значение последовательности (3.12.67) на номере $n \in \mathbb{M}$.

В дальнейшем изложении мы будем, в основном, рассматривать $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \cup \{0\}$ или $\mathbb{Z}$ в качестве множества индексов $\mathbb{M}$.

3.81. Примеры. 1) Пусть $p \in \mathbb{C}$ — произвольная точка. Последовательность $z : \mathbb{M} \to \{p\}$ называется постоянной. Здесь $z_n = p$ для всех номеров $n \in \mathbb{M}$.

2) $z_n = i^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

3) $z_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \sum\limits_{k=0}^{n} z^k,\ n \in \mathbb{N}$.

4) $z_n = 1 + \frac{i}{1!} + \frac{i^2}{2!} + \frac{i^3}{3!} + \ldots + \frac{i^n}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}$.

5) $z_n = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

6) $z_n = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}$.

7) $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

3.12.2 Предел комплекснозначной последовательности

3.82. Определение. Пусть дана последовательность $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Число $p \in \mathbb{C}$ называется *пределом* последовательности z_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$|z_n - a| < \varepsilon. \tag{3.12.68}$$

Для обозначения сходимости последовательности $\{z_n\}$ к числу p при $n \to \infty$ употребляют символы

$$\lim_{n\to\infty} z_n = p, \quad z_n \underset{n\to\infty}{\to} p \quad \text{или} \quad z_n \to p\,|_{n\to\infty}.$$

3.83. Задача. Показать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = p$ эквивалентен пределу $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - p| = 0$.

3.84. Теорема. *Последовательность $z_n = x_n + iy_n$ сходится к $a = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда x_n сходится к x_0, а y_n сходится к y_0 при $n \to \infty$.*

Доказательство теоремы выводится из соотношений

$$\frac{1}{2}(|x_n - x_0| + |y_n - y_0|) \leq |z_n - z_0| \leq (|x_n - x_0| + |y_n - y_0|). \qquad (3.12.69)$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$. Из левой части соотношений (3.12.69) выводим

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0. \qquad (3.12.70)$$

Если же верно (3.12.70), то правой части соотношений (3.12.69) выводим $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

3.85. Задача. Если последовательность $z_n \in \mathbb{C}$ сходится к числу $a \in \mathbb{C}$ при $n \to \mathbb{N}$, то $|z_n|$ сходится к числу $|a|$ при $n \to \mathbb{N}$. Обратное неверно.

3.86. Задача. Если последовательность $z_n \in \mathbb{C}$ сходится к числу $a \in \mathbb{C}$ при $n \to \mathbb{N}$, то $\bar{z}_n$ сходится к числу $\bar{a}$ при $n \to \mathbb{N}$.

Указание: применяя свойство (1.15.49), имеем

$$|z_n - a| = |\overline{z_n - a}| = |\bar{z}_n - \bar{a}|.$$

Из этих равенств следует, что из сходимости z_n к a при $n \to \infty$ вытекает сходимость $\bar{z}_n$ к $\bar{a}$ при $n \to \infty$

3.87. Задача. Доказать из определения, что если $z_n \in \mathbb{C}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = p$, то последовательность z_n ограничена: т. е. существует число $L \in \mathbb{R}$ такое, что $|z_n| \leq L$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

3.88. Задача. Исследовать на сходимость последовательности 1–4 задачи 3.81. Найти пределы в случае их существования.

Для всякого натурального $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим некоторое высказывание $\Phi(n)$, о котором можно сказать истинно он или ложно. Мы будем употреблять символ

$$\Phi(n)\,|_{n\to\infty}$$

для обозначения того, что высказывание $\Phi(n)$ истинно для всех n начиная с некоторого номера, т. е. существует номер n_0 такой, что $\Phi(n)$ истинно для всех $n \geq n_0$.

3.89. Задача. Задачу 3.87 можно переформулировать следующим образом: доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = p$, то последовательность z_n ограничена при больших n: т. е. существует число $L \in \mathbb{R}$ такое, что $|z_n| \leq L\,|_{n\to\infty}$.

3.12.3 Единственность предела последовательности

Аналогично теореме 3.28 доказывается следующий результат.

3.90. Теорема. *Последовательность комплексных чисел может иметь только один предел.*

Доказательство. Это утверждение — прямое следствие теоремы 3.84.

3.12.4 Предел и алгебраические операции в $\mathbb{C}$

Утверждения этого раздела можно просто доказать с помощью теоремы 3.84.

3.91. Теорема. *Сумма пределов равна пределу суммы: если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = b$, то*

$$\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n. \tag{3.12.71}$$

3.92. Теорема. *Произведение пределов равно пределу произведения: если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = b$, то*

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n. \tag{3.12.72}$$

3.93. Теорема. *Обратная величина предела, не равного нулю, равна пределу последовательности обратных величин*: *если* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}. \tag{3.12.73}$$

3.94. Задача. Если последовательность $z_n \in \mathbb{C}$ сходится к числу $a \in \mathbb{C}$ при $n \to \mathbb{N}$, последовательность $w_n \in \mathbb{C}$ сходится к числу $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ при $n \to \mathbb{N}$, то существует предел отношения последовательностей и равен отношению пределов, когда оно определено:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{a}{b}. \tag{3.12.74}$$

3.12.5 Понятие фундаментальной последовательности

Рассмотрим последовательность $z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, сходящуюся к некоторому числу $a \in \mathbb{C}$. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что

$$|z_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.12.75}$$

для всех $n \geq n_0$. Следовательно, для всех $m, l \geq n_0$ из (3.12.75) имеем

$$|z_m - z_l| \leq |z_m - a| + |z_l - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, если последовательность $z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к некоторому числу в $\mathbb{C}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что

$$|z_m - z_l| < \varepsilon \tag{3.12.76}$$

для всех $m, l \geq n_0$. Свойство (3.12.76) можно рассматривать и независимо от того сходится последовательность или нет. Выделим полученное свойство в новое понятие.

3.95. Определение. Последовательность $z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что

$$|z_m - z_l| < \varepsilon \tag{3.12.77}$$

для всех $m, l \geq n_0$.

3.12.6 Критерий Коши

3.96. Теорема. *Последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторому числу в $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{z_n\}$ фундаментальная.*

Доказательство. Необходимость доказана перед определением 3.95.

Достаточность. Пусть последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна. Тогда для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $m, l \geq n_0$ справедливо неравенство (3.12.77). Запишем для разности $z_m - z_l = (x_m - x_l) + i(y_m - y_l)$ аналог соотношений 3.12.69:

$$\frac{1}{2}(|x_m - x_l| + |y_m - y_l|) \leq |z_m - z_l| \leq (|x_m - x_l| + |y_m - y_l|). \quad (3.12.78)$$

Из этих соотношений вытекает, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ фундаментальные. В силу критерия Коши они сходящиеся: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Отсюда имеем сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 = x_0 + iy_0$.

3.13 Экспоненциальная функция $\exp z$. Основное свойство экспоненциальной функции.

3.13.1 Экспоненциальная функция $\exp z$ комплексного аргумента.

В этом разделе мы докажем, что для любого фиксированного $z \in \mathbb{C}$ последовательности

$$u_n = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad (3.13.79)$$

$$w_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n, \ n \in \mathbb{N}, \quad (3.13.80)$$

задачи 3.81 сходятся в $\mathbb{C}$ к одному и тому пределу при $n \to \infty$. Общий предел этих последовательностей и есть значение экспоненциальной функции в точке $z \in \mathbb{C}$ и обозначается символом $\exp z$.

3.97. Теорема. *Предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

существует для любого $z \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что последовательность

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

фундаментальная. Действительно, возьмем произвольные натуральные числа $m > l$ и рассмотрим разность

$$u_m - u_l = \sum_{k=l+1}^{m} \frac{z^k}{k!}.$$

Для этой разности справедливы оценки

$$|u_m - u_l| = \Big| \sum_{k=l+1}^{m} \frac{z^k}{k!} \Big| \le \sum_{k=l+1}^{m} \frac{|z|^k}{k!} \le \frac{|z|^{l+1}}{(l+1)!} \frac{1}{1 - \frac{|z|}{l+2}}. \tag{3.13.81}$$

Здесь первое неравенство — результат применения неравенства треугольника, а второе — результат применения оценки (1.11.28) при $k_0 = l+1$, $L = m$, $u = |z|$, $|z| < l+2$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем n_0 таким, чтобы $\frac{|z|}{l+2} < \frac{1}{2}$, а $\frac{|z|^{l+1}}{(l+1)!} < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $l \ge n_0$. При таком выборе n_0 из (3.13.81) при всех $m > l \ge n_0$ выводим

$$|u_m - u_l| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность u_n фундаментальная, и по теореме 3.96 является сходящейся.

В результате, мы получаем функцию

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \exp z = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}, \tag{3.13.82}$$

определенную для всех комплексных $z \in \mathbb{C}$ со значениями в $\mathbb{C}$. Эта функция так же, как и в разделе 3.11.49, называется *экспоненциальной.*

3.98. Теорема. *Предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ *существует для любого* $z \in \mathbb{C}$. *Кроме того, справедливы равенства*

$$\exp z = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Доказательство. Приводимые ниже вычисления — это почти очевидная модификаций вычислений в теореме 3.36. Аналогично (3.11.52) напишем

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}\frac{z^k}{k!}.$$

Тогда разность $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!} - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ можно оценить следующим образом:

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!} - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \le \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}\frac{z^k}{k!}\right|$$
$$\le \left|\sum_{k=0}^{l}(1-c_{n,k})\frac{z^k}{k!}\right| + \sum_{k=l+1}^{n}\frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=l+1}^{n} c_{n,k}\frac{|z|^k}{k!} = I_1 + I_2 + I_3, \tag{3.13.83}$$

где $l < n$, а величины $c_{n,k}$ определены формулой (3.4.11). Так как $0 < c_{n,k} \le 1$, то $I_3 \le I_2$. Заметим, что оценка для I_2 приведена в (1.11.27): полагая в (1.11.27) $k_0 = l+1$, $L = n$, $u = |z|$, получаем

$$I_2 = \sum_{k=l+1}^{n}\frac{|z|^k}{k!} < \frac{|z|^{l+1}}{(l+1)!}\frac{1}{1-\frac{|z|}{l+2}} \le \frac{2}{(l+1)!}\cdot|z|^{l+1}$$

при условии $\frac{|z|}{l+2} \le \frac{1}{2}$. Отсюда и $I_3 \le I_2$ выводим

$$I_2 + I_3 \le 2I_2 \le \frac{4}{(l+1)!}\cdot|z|^{l+1} \tag{3.13.84}$$

при условии $2|z| - 2 \le l$. Заметим, что правая часть (3.13.84) в отличие от левой не зависит от n

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как правая часть (3.13.84) стремится к 0 при $l \to \infty$, найдется натуральное число $k_0 \ge 2|z| - 2$ такое, что $I_2 + I_3 < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $l \ge k_0$. Полагая в (3.13.83) $n > l = k_0$, выводим

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!} - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \le \left|\sum_{k=0}^{k_0}(1-c_{n,k})\frac{z^k}{k!}\right| + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.13.85}$$

Так как сумма в (3.13.85) состоит из конечного числа слагаемых и $c_{n,k} \to 1$ при $n \to \infty$ для любого фиксированного $k = 1, 2, \ldots, k_0$, то сумма в правой части (3.13.85) стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому существует n_0, начиная с которого эта сумма будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Окончательно для всех $n \geq n_0$ получаем

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n\Big| < \varepsilon.$$

Таким образом, $|u_n - w_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность $w_n = u_n - (w_n - u_n)$ имеет предел при $n \to \infty$, совпадающий с пределом $\exp z = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

3.99. Задача. $\overline{e^z} = e^{\bar z}$.

Указание. Значение e^z является пределом последовательности $w_n = \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n$ при $n \to \infty$. В силу задачи 3.86 значение $\overline{e^z}$ равно[4] пределу последовательности $\bar w_n = \overline{\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n} = \Big(1 + \frac{\bar z}{n}\Big)^n \to e^{\bar z}$ при $n \to \infty$.

3.13.2 Оценки приближения экспоненциальной функции

Наша ближайшая цель — оценить сверху остаток

$$R_n(z) = \exp z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

3.100. Следствие. *В представлении*

$$\exp z = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} + R_n(z)$$

для остатка $R_n(z)$ справедлива оценка

$$|R_n(z)| \leq \frac{2}{(n+1)!}|z|^{n+1} \tag{3.13.86}$$

при $|z| \leq \frac{n+2}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. В частности, $\exp z = 1 + z + R_1(z)$, где $|R_1(z)| \leq |z|^2$ при $|z| \leq \frac{3}{2}$.

Доказательство оценки (3.13.86) по существу ничем не отличается от доказательства аналогичной оценки, установленной в следствии 3.78 для вещественных чисел.

[4]Здесь применяется следующее легко проверяемое свойство комплексных чисел: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar z_1 \cdot \bar z_2$

3.13.3 Основное свойство экспоненциальной функции.

3.101. Теорема. *Экспоненциальная функция обладает следующим свойством:*

$$\exp(u+v) = \exp u \cdot \exp v \tag{3.13.87}$$

для любых комплексных чисел $u, v \in \mathbb{C}$.

Доказательство. По условию теоремы 3.101 для всех $u, v \in \mathbb{C}$ определены значения

$$\begin{aligned} \exp u &= \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{u}{n}\Big)^n, \\ \exp v &= \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{v}{n}\Big)^n, \\ \exp(u+v) &= \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{u+v}{n}\Big)^n. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \exp u\cdot\exp v &= \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{u}{n}\Big)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{v}{n}\Big)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{u+v}{n}+\frac{uv}{n^2}\Big)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{u+v}{n}\Big)^n\cdot\Big(1+\frac{uv}{n^2\big(1+\frac{u+v}{n}\big)}\Big)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{u+v}{n}\Big)^n\cdot\Big(1+\frac{z_n}{n}\Big)^n, \end{aligned} \tag{3.13.88}$$

где

$$z_n = \frac{uv}{n+u+v}.$$

Для окончания доказательства остается проверить, что

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{z_n}{n}\Big)^n = 1. \tag{3.13.89}$$

Если это равенство верное, предел второго сомножителя в правой части (3.13.88) при $n\to\infty$ будет равен единице и теорема будет доказана.

Так как $|z_n|\to 0$ при $n\to\infty$, то существует n_0 такое, что неравенство

$$|z_n| < \frac{1}{2}$$

выполняется при всех $n \geq n_0$.

Полагая $x = z_n$ в примере 1.57, имеем

$$y_n(z_n) = \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \tag{3.13.90}$$
$$= \sum_{l=0}^{n} c_{n,l} \frac{z_n^l}{l!} = 1 + \sum_{l=1}^{n} c_{n,l} \frac{z_n^l}{l!},$$

где $c_{n,l} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{l-1}{n}\right)$. Напомним легко проверяемое свойство коэффициентов $c_{n,l}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le l \le n$: $0 < c_{n,l} \le 1$.

Тогда разность $y_n(z_n) - 1$ можно оценить следующим образом:

$$|y_n(z_n) - 1| \le \left|\sum_{l=1}^{n} c_{n,l} \frac{z_n^l}{l!}\right| \le \sum_{l=1}^{n} |c_{n,l}| \frac{|z_n|^l}{l!} \le \sum_{l=1}^{n} \frac{|z_n|^l}{l!}. \tag{3.13.91}$$

Заметим, что оценка для суммы в правой части (3.13.91) приведена в (1.11.27):

$$|y_n(z_n) - 1| \le \sum_{l=1}^{n} \frac{|z_n|^l}{l!} \le |z_n| \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z_n|}{2}} < 2|z_n| \tag{3.13.92}$$

при условии $n \ge n_0$ (которое обеспечивает $|z_n| < \frac{1}{2}$).

Так как $z_n \to 0$ при $n \to \infty$, то по теореме о промежуточной последовательности из (3.13.92) выводим

$$\lim_{n\to\infty} \left| \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n - 1 \right| = 0.$$

для всех $n \ge n_0$. Отсюда плучаем (3.13.89).

4 Основные принципы анализа и топология в множестве вещественных чисел

4.1 Лемма о вложенных отрезках

4.1. Принцип Коши — Кантора. *Для любой последовательности $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset$ вложенных отрезков найдется точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам.*

Если, кроме того, известно, что для любого $\varepsilon > 0$ в последовательности отрезков можно найти отрезок I_k, длина которого $|I_k|$ меньше ε, то c — единственная общая точка всех отрезков.

Сформулированный принцип является следствием следующего более общего утверждения.

4.2. Теорема о пересекающихся отрезках. *Пересечение любой совокупности $M = \{I_\xi\}$ попарно пересекающихся отрезков является отрезком и, следовательно, непустое*

Доказательство. Если два отрезка $I_\xi = [a_\xi, b_\xi]$ и $I_\eta = [a_\eta, b_\eta]$ имеют общую точку $x \in I_\xi \cap I_\eta$, то одновременно имеем соотношения $a_\xi \leq x \leq b_\xi$ и $a_\eta \leq x \leq b_\eta$. Отсюда выводим

$$a_\xi \leq b_\eta \quad \text{и} \quad a_\eta \leq b_\xi,$$

т. е. левый конец любого из отрезков, входящих в совокупность M, не превосходит правого конца любого из отрезков той же самой совокупности. Следовательно, для любого a_ξ получаем

$$a_\xi \leq \inf_{I_\eta = [a_\eta, b_\eta] \in M} b_\eta = \beta.$$

Из левого неравенства очевидно имеем

$$\alpha = \sup_{I_\xi = [a_\xi, b_\xi] \in M} a_\xi \leq \beta.$$

Поскольку $a_\xi \leq \alpha \leq \beta \leq b_\eta$, то

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_\xi I_\xi.$$

Докажем обратное включение. Пусть точка $x \in \bigcap\limits_\xi I_\xi$. Тогда имеем $a_\xi \leq x \leq b_\eta$ для любого левого конца отрезка $I_\xi = [a_\xi, b_\xi] \in M$ и правого конца отрезка $I_\eta = [a_\eta, b_\eta] \in M$. Из соотношений $a_\xi \leq x \leq b_\eta$ выводим неравенства

$$\alpha \leq x \leq \beta.$$

Таким образом, включение

$$\bigcap_\xi I_\xi \subset [\alpha, \beta]$$

доказано, а вместе с ним доказано и равенство $[\alpha, \beta] = \bigcap\limits_\xi I_\xi$.

4.3. Задача. Получить из теоремы о непересекающихся отрезках принцип Коши — Кантора.

4.2 Несчетность множества точек отрезка. Множества мощности континуум

Докажем, сформулированную выше теорему 2.87

4.4. Теорема Кантора. *Множество точек отрезка* $[0,1]$ *несчетное.*

Доказательство. Пусть, напротив, все числа отрезка $[0,1]$ можно пересчитать, т. е. существует биективное отображение $\mathbb{N} \to [0,1]$. Таким образом, все действительные числа отрезка $[0,1]$ являются значениями последовательности $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Возьмем точку x_1 и на отрезке $I_0 = [0,1]$ строим отрезок I_1 ненулевой длины, не содержащий точку x_1. В отрезке I_1 строим отрезок I_2 ненулевой длины, не содержащий точку x_2. Если отрезок $I_n \subset I_{n-1} \subset \ldots \subset I_2 \subset I_1$ ненулевой длины, не содержащий точку x_n, уже построен, то в нем можно выбрать отрезок I_{n+1} ненулевой длины, не содержащий точку x_{n+1}. В силу принципа 4.1 Коши — Кантора последовательность $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset$ вложенных отрезков имеет непустое пересечение. Точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам, очевидно не совпадает ни с одним из значений x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

4.3 Лемма о конечном покрытии.

Говорят, что система $S = \{X_\xi\}_{\xi \in \Sigma}$ множеств X_ξ *покрывает* множество Y, если

$$Y \subset \bigcup_{\xi \in \Sigma} X_\xi.$$

4.5. Принцип Бореля — Лебега. *Из любой системы интервалов, покрывающих замкнутый отрезок, можно выделить конечную подсистему, также покрывающую этот отрезок.*

Принцип Бореля — Лебега мы получим как следствие следующего утверждения.

4.6. Теорема. *Пусть даны отрезок* $[a,b]$ *и система* $S = \{U_\xi\}_{\xi \in \Sigma}$ *интервалов, покрывающая этот отрезок. Тогда существует положительное число* δ *такое, что всякий отрезок* $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$, *длина* $\beta - \alpha$ *которого не превосходит* δ, *принадлежит какому-нибудь интервалу покрытия* S.

Доказательство. Пусть даны отрезок $[a,b]$ и система $S = \{U_\xi\}_{\xi \in \Sigma}$ интервалов, покрывающая этот отрезок. Допустим, что доказываемое утверждение не верно. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдется отрезок

$$[\alpha_n, \beta_n] \subset [a, b] \ \text{ длины } \ \beta_n - \alpha_n \le \frac{1}{n},$$

который не принадлежит ни одному интервалу покрытия S. По теореме Вейерштрасса 3.61 о частичных пределах существует сходящаяся подпоследовательность α_{n_k}, имеющая предел α_0. Из соотношений $a \le \alpha_{n_k} \le b$ по теореме 3.39 о неравенстве пределов выводим, что $a \le \alpha_0 \le b$.

Поскольку S — покрытие отрезка $[a, b]$, точка α_0 принадлежит одному из интервалов покрытия: $\alpha_0 \in U_{\xi_0} = (x - r, x + r)$, где $U_{\xi_0} \in S$, $r > 0$. Для точки $z \in [\alpha_{n_k}, \beta_{n_k}]$ выполняются соотношения

$$|z - x| \le |z - \alpha_{n_k}| + |\alpha_{n_k} - \alpha_0| + |\alpha_0 - x|. \tag{4.3.1}$$

Заметим, что число $|\alpha_0 - x|$ строго меньше r. Следовательно, разность $r - |\alpha_0 - x| = \varepsilon$ положительная.

Поскольку $|z - \alpha_{n_k}| + |\alpha_{n_k} - \alpha_0| \le |\beta_{n_k} - \alpha_{n_k}| + |\alpha_{n_k} - \alpha_0| \to 0$ при $k \to 0$, то найдется число k_0 такое, что неравенство

$$|z - \alpha_{n_k}| + |\alpha_{n_k} - \alpha_0| < \varepsilon$$

будет верным для всех $k \ge k_0$. Отсюда и из (4.3.1) выводим

$$|z - x| < \varepsilon + |\alpha_0 - x| = r.$$

Это значит, что $[\alpha_{n_k}, \beta_{n_k}] \subset U_{\xi_0}$ для всех $k \ge k_0$, вопреки предположению.

4.7. Задача. Получить из теоремы 4.6 принцип Бореля — Лебега. Указание: для данного покрытия S отрезка $[a, b]$ интервалами возьмем число δ из теоремы 4.6. Тогда совокупность точек

$$\{\alpha_k = a + k\delta \le b \mid k = 0, 1, \ldots\}$$

конечная, а конечная совокупность отрезков $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ образует покрытие отрезка $[a, b]$. Каждый отрезок $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ содержится в каком-нибудь интервале покрытия S, совокупность которых и образует конечную подсистему, образующую покрытие отрезка $[a, b]$.

4.4 Лемма о предельной точке в $\mathbb{R}$

4.8. Определение. *Элементарной окрестностью* точки $p \in \mathbb{R}$ называется всякий интервал вида $\mathcal{O}_\varepsilon(p) = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0, \infty)$. Такой интервал называют также *открытой* ε-окрестностью точки p.

Совокупность элементарных окрестностей точки $p \in \mathbb{R}$ будем обозначать символом $\mathcal{N}_e(p)$.

4.9. Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Точка $p \in \mathbb{R}$ называется *предельной* для множества E, если для любой элементарной окрестности $\mathcal{O}_\varepsilon(p)$ точки p пересечение $\mathcal{O}_\varepsilon(p) \cap E \setminus \{p\}$ непустое. Совокупность всех предельных точек множества E обозначается символом $\mathcal{L}im\, E$.

4.10. Принцип Больцано — Вейерштрасса. *Всякое бесконечное ограниченное числовое множество в $\mathbb{R}$ имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого бесконечного ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$ утверждение не выполняется. Заметим, что $A \subset [-L, L]$.

Тогда никакая точка $x \in [-L, L]$ не является предельной точкой для A, т. е. существует интервал $O_{\xi_x}(x) \in \mathcal{N}(x)$ такой, что пересечение

$$\mathcal{O}_{\xi_x}(x) \cap A$$

состоит самое большее из одной точки x (такое будет в том случае, когда $x \in A$).

Заметим, что совокупность $\{\mathcal{O}_{\xi_x}(x) : x \in [-L, L]\}$ интервалов образует покрытие отрезка $[-L, L]$:

$$\bigcup_{x \in [-L, L]} \mathcal{O}_{\xi_x}(x) \supset [-L, L].$$

По принципу Бореля — Лебега из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{\mathcal{O}_{\xi_i}(x_i)\}$:

$$\bigcup_i \mathcal{O}_{\xi_i}(x_i) \supset A.$$

Следовательно, множество A конечное, так как

$$A \subset \bigcup_i \mathcal{O}_{\xi_i}(x_i) \cap A.$$

Полученное противоречие доказывает принцип Бореля — Вейерштрасса.

4.5 Лемма о предельной точке в $\overline{\mathbb{R}}$

В этом разделе мы распространим понятия и результаты предыдущего раздела на расширенную вещественную прямую. В качестве основного результат мы докажем здесь

4.11. Принцип Больцано — Вейерштрасса в $\overline{\mathbb{R}}$. *Всякое бесконечное числовое множество в $\overline{\mathbb{R}}$ имеет хотя бы одну предельную точку.*

Основное отличие этого принципа от сформулированного в 4.10 состоит в том, что мы отказываемся от условия ограниченности числового множества. Например, в качестве такого можно взять совокупность натуральных чисел $\mathbb{N}$. Понятно, что никакая точка из $\mathbb{R}$ не может быть предельной для $\mathbb{N}$ (Доказать это!). Следовательно, предельной точкой, если таковая существует, может быть только $+\infty$ или $-\infty$. Ниже мы приводим топологические понятия, необходимые для формализации понятия предельной точки в $\overline{\mathbb{R}}$.

4.5.1 Понятие элементарной окрестности точки в $\overline{\mathbb{R}}$

Напомним, см. определение 4.8, что *элементарной окрестностью* точки $p \in \mathbb{R}$ называется всякий интервал вида $\mathcal{O}_\varepsilon(p) = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0, \infty)$.

4.12. Определение. Пусть $p \in \overline{\mathbb{R}}$. Если точка p конечная, т. е. принадлежит $\mathbb{R}$, то ее *элементарной окрестностью* называется всякий интервал $\mathcal{O}_\varepsilon(p)$.

Если точка $p = +\infty$ (точка $p = -\infty$), то ее *элементарной окрестностью* на расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ будем называть всякий промежуток вида $(r, \infty]$ (вида $[-\infty, r)$) для произвольного числа $r \in \mathbb{R}$.

Таким образом, совокупности *элементарных окрестностей* точки $p \in \mathbb{R}$ совпадают и на $\mathbb{R}$, и на расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}}$.

Совокупность элементарных окрестностей точки $p \in \overline{\mathbb{R}}$ будем обозначать символом $\mathcal{N}_e(p)$.

4.5.2 Свойства элементарных окрестностей фиксированной точки

4.13. Свойства системы элементарных окрестностей в $\overline{\mathbb{R}}$. *Пусть $p \in \overline{\mathbb{R}}$ — произвольная фиксированная точка, а $\mathcal{N}_e(p)$ — совокупность элементарных окрестностей этой точки. Тогда*

1) *всякая окрестность точки p содержит эту точку: $p \in U$ для любой элементарной окрестности $U \in \mathcal{N}_e(p)$;*

2) *пересечение любых двух элементарных окрестностей точки* p *является элементарной окрестностью этой точки*: $U \cap V \in \mathcal{N}_e(p)$ *для любых окрестностей* $U, V \in \mathcal{N}_e(p)$;

3) *любые две различные точки расширенной числовой прямой обладают непересекающимися элементарными окрестностями*: *если* $p, q \in \overline{\mathbb{R}}$ *и* $p \neq q$, *то существуют окрестности* $U \in \mathcal{N}_e(p)$ *и* $V \in \mathcal{N}_e(q)$ *такие, что* $U \cap V = \emptyset$; *более того, если* $p < q$, *то* $x < y$ *для любых точек* $x \in U$ *и* $y \in V$;

4) *у каждой точки* x *элементарной окрестности* $V \in \mathcal{N}_e(p)$, $p \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \neq p$, *имеется элементарная окрестность* $W \in \mathcal{N}_e(x)$ *такая, что* $W \subset V$ *и* $p \notin W$;

5) *у каждой точки* $p \in \overline{\mathbb{R}}$ *имеется такая последовательность её окрестностей* $\mathcal{O}_0 \supset \mathcal{O}_1 \supset \ldots \mathcal{O}_n \supset \ldots$, *что всякая элементарная окрестность* V *этой точки содержит некоторую окрестность вида* $\mathcal{O}_n$.

Последовательности окрестностей точки из свойства 5 называются *базисными системами окрестностей*.

4.14. Примеры. Если $p \in \mathbb{R}$, то можно взять $\mathcal{O}_n = (p - 2^{-n}, p + 2^{-n})$, $n \in \mathbb{N}$;

если $p = \infty$, то можно положить $\mathcal{O}_n = (n, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$;

если $p = -\infty$, то окрестности $\mathcal{O}_n = [-\infty, -n)$, $n \in \mathbb{N}$, обладают нужными свойствами.

4.15. Задача. Доказать сформулированные в разделе 4.13 свойства окрестностей.

4.16. Задача. Доказать, что если $\mathcal{O}_n$, $n \in \infty$, — базисная система окрестностей точки $p \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n = \{p\}$.

4.5.3 Понятие предельной точки числового множества в $\overline{\mathbb{R}}$

4.17. Определение. Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}$. Точка $p \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *предельной* для множества E, если для любой элементарной окрестности $V \in \mathcal{N}_e(p)$ пересечение $V \cap E \setminus \{p\}$ не пусто. Совокупность всех предельных точек множества E обозначается символом $\mathcal{L}im\, E$.

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ состоит из точек множества E и всех предельных точек этого множества:

$$\overline{E} = E \cup \mathcal{L}im\, E.$$

Точка p множества E называется *изолированной*, если существует элементарная окрестность $V \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что пересечение $V \cap E = \{p\}$, т. е. точка p не является предельной для множества E

В следующей задаче сформулировано характеристическое свойство предельной точки.

4.18. Задача. Доказать, что точка $p \in \overline{\mathbb{R}}$ будет предельной для множества $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность точек $s_n \in E \setminus \{p\}$, сходящаяся к точке p при $n \to \infty$.

Указание: Для доказательства достаточности следует рассмотреть базисную систему $\{\mathcal{O}_n\}$ окрестностей точки p свойства 5 в утверждении 4.13 и в каждой из них выбрать точку $s_n \in \mathcal{O}_n \cap A \setminus \{p\}$. Последовательность s_n сходится к точке p при $n \to \infty$.

4.6 Теорема о предельной точке $\sup E$. Предельные точки отрезка и множества всех натуральных чисел

4.19. Теорема о предельной точке $\sup E$ $(\inf E)$. *Если* $\sup E$ $(\inf E)$ *не принадлежит непустому множеству* E, *то* $\sup E$ $(\inf E)$ *— предельная точка этого множества.*

Доказательство. Очевидно $\sup E \neq -\infty$. Обозначим $p = \sup E$. Пусть $U \in \mathcal{N}_e(p)$ — произвольная окрестность точки p. Она содержит некоторый открытый интервал (a, p): $(a, p) \subset U$. По признаку 1.91 точной верхней границы существует число $x \in E$ такое, что $a < x \le p$. Так как $p \notin E$, то $a < x < p$, и поэтому $E \cap (a, p) \neq \emptyset$. Следовательно, $U \cap E \setminus \{p\} \neq \emptyset$, и поскольку окрестность $U \in \mathcal{N}_e(p)$ произвольная, то точка $p = \sup E$ — предельная для множества E.

Аналогично доказывается, что в условиях теоремы точка $\inf E$ — тоже предельная для множества E.

Из доказанной теоремы и предложения 1.93 получаем

4.20. Следствие. *Точка* $+\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ $(-\infty \in \overline{\mathbb{R}})$ *будет предельной для множества* $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ *тогда и только тогда, когда множество* $E \setminus \{-\infty, +\infty\}$ *не ограничено сверху (снизу) в* $\mathbb{R}$.

4.21. Следствие. *Совокупность предельных точек промежутка* $\langle a, b\rangle \subset \overline{\mathbb{R}}$ *совпадает с* $[a, b]$.

4.22. Задачи.

1) $\infty \in \overline{\mathbb{N}}$; $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}}$; $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

2) Если $S \subset T$, то $\overline{S} \subset \overline{T}$.

3) $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$.

4.6.1 Доказательство принципа Больцано — Вейерштрасса в $\overline{\mathbb{R}}$

Если $A \subset \mathbb{R}$ — ограниченное множество, то принцип доказан в разделе 4.10.

Пусть теперь множество $A \setminus \{+\infty\}$ ($A \setminus \{-\infty\}$) не ограничено сверху (снизу). Тогда в силу задачи 1.92 имеем $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$). По утверждению 4.19 мы выводим, что $+\infty$ ($-\infty$) — предельная точка множества $A \setminus \{+\infty\}$ ($A \setminus \{-\infty\}$), а следовательно и множества A.

4.7 Понятие окрестности на расширенной числовой прямой.

В этом разделе мы определим общее понятие окрестности точки в $\overline{\mathbb{R}}$, обобщающее понятие элементарной окрестности.

Напомним (ср. с разделом 4.5.1), что *элементарной окрестностью* точки $p \in \mathbb{R}$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$ называется всякий интервал вида $\mathcal{O}_\varepsilon(p) = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0, \infty)$. Такой интервал называют также *открытой* ε-окрестностью точки p. Тот же самый интервал $\mathcal{O}_\varepsilon(p)$ называется *элементарной окрестностью* точки $p \in \mathbb{R}$ и на расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}}$.

Элементарной окрестностью точки $+\infty$ (точки $-\infty$) на расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ будем называть всякий промежуток вида $(r, \infty]$ (вида $[-\infty, r)$).

4.7.1 Понятие окрестности точки

4.23. Определение. Множество $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ ($U \subset \mathbb{R}$) называют *окрестностью точки* $p \in \overline{\mathbb{R}}$ ($p \in \mathbb{R}$), если оно содержит некоторую элементарную окрестность этой точки.

Например, интервал (a, b) является окрестностью каждой своей точки, а отрезок $[a, b]$ — окрестностью любой точки интервала (a, b). Полуинтервал $(t, +\infty]$ является окрестностью любой своей точки.

Множество всех окрестностей точки $p \in \overline{\mathbb{R}}$ будем обозначать символом $\mathcal{N}(p)$. Очевидно, $\mathcal{N}(p) \supset \mathcal{N}_e(p)$.

4.7.2 Свойства окрестностей фиксированной точки

Приволимые ниже свойства системы окрестностей данной точки обобщают свойство раздела 4.5.2.

4.24. Свойства системы окрестностей в $\overline{\mathbb{R}}$. *Пусть $p \in \overline{\mathbb{R}}$ — произвольная фиксированная точка, а $\mathcal{N}(p)$ — совокупность окрестностей этой точки. Тогда*

1) *всякая окрестность точки p содержит эту точку: $p \in U$ для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(p)$;*

2) *пересечение любых двух окрестностей точки p является окрестностью этой точки: $U \cap V \in \mathcal{N}(p)$ для любых окрестностей $U, V \in \mathcal{N}(p)$;*

3) *множество, содержащее окрестность точки p, является окрестностью этой точки: если $U \in \mathcal{N}(p)$ и $V \supset U$, то $V \in \mathcal{N}(p)$;*

4) *любые две различные точки расширенной числовой прямой обладают непересекающимися окрестностями: если $p, q \in \overline{\mathbb{R}}$ и $p \neq q$, то существуют окрестности $U \in \mathcal{N}(p)$ и $V \in \mathcal{N}(q)$ такие, что $U \cap V = \emptyset$;*

5) *у каждой точки $p \in \overline{\mathbb{R}}$ имеется такая последовательность её окрестностей $\mathcal{O}_0 \supset \mathcal{O}_1 \supset \ldots \mathcal{O}_n \supset \ldots$, что всякая окрестность V этой точки содержит некоторую окрестность вида $\mathcal{O}_n$;*

6) *у каждой точки x элементарной окрестности $V \in \mathcal{N}_e(p)$, $p \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \neq p$, имеется элементарная окрестность $W \in \mathcal{N}_e(x)$ такая, что $W \subset V$ и $p \notin W$;*

7) *если $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a \neq b$, то существуют непересекающиеся элементарные окрестности $U \in \mathcal{N}_e(a)$ и $V \in \mathcal{N}_e(b)$. Следовательно, при условии $a < b$ $(a > b)$ имеем $x < y$ $(x > y)$ для любых точек $x \in U$ и $y \in V$.*

Последовательности окрестностей точки из свойства 5 называются *базисными системами окрестностей.*

4.25. Пример. Если $p \in \mathbb{R}$, то $\mathcal{O}_n = (p - 2^{-n}, p + 2^{-n})$, $n \in \mathbb{N}$;
если $p = \infty$, то $\mathcal{O}_n = (n, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$;
если $p = -\infty$, то $\mathcal{O}_n = [-\infty, -n)$, $n \in \mathbb{N}$.

4.26. Задача. Доказать сформулированные в разделе 4.24 свойства окрестностей.

4.8 Замкнутые и открытые множества. Замкнутость множества предельных точек на расширенной числовой прямой

Приводимое ниже определение предельной точки обобщает определение 4.9.

Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}$. Точка $p \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *предельной* для множества E, если для любой окрестности $V \in \mathcal{N}(p)$ пересечение $V \cap E \setminus \{p\}$ не пусто. Совокупность всех предельных точек множества E обозначается символом $\mathcal{L}im\, E$.

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ состоит из точек множества E и всех предельных точек этого множества:

$$\overline{E} = E \cup \mathcal{L}im\, E.$$

4.27. Определение. Множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. $\overline{A} \subset A$.

Множество $G \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется *открытым*, если оно является окрестностью любой своей точки, т. е. для любого $x \in G$ имеем $G \in \mathcal{N}(x)$.

4.28. Задача. Доказать, что замыкание множества — замкнутое множества.

4.29. Лемма. 1) *Дополнение к замкнутому множеству $A \subset \mathbb{R}$ открыто.*

2) *Дополнение к открытому множеству $G \subset \mathbb{R}$ замкнуто.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Если, напротив, $U = \mathbb{R} \setminus A$ не является окрестностью некоторой точки $x \in U$, то любая окрестность точки x пересекается с множеством A. Таким образом, x является предельной точкой для A, и в силу замкнутости множества A должна ему принадлежать, что противоречит выбору точки x.

Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что любая точка открытого множества G не может быть предельной точкой для дополнения к множеству G. Поэтому дополнение $\mathbb{R} \setminus G$ содержит все свои предельные точки и поэтому замкнуто.

В следующем утверждении мы формулируем основные свойства открытых и замкнутых множеств.

4.30. Лемма. 1) *Объединение произвольной совокупности открытых на $\overline{\mathbb{R}}$ множеств открыто.*

2) *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

3) *Пересечение произвольной совокупности замкнутых на $\overline{\mathbb{R}}$ множеств замкнуто.*

4) *Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. 1) Пусть $\{U_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — произвольное семейство открытых множеств, $U = \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} U_\xi$. Покажем, что U открыто. Пусть $x \in U$. Тогда $x \in U_\xi$ для некоторого $\xi \in \Xi$. Так как U_ξ открыто, то U_ξ является окрестностью точки x. Следовательно, и более широкое множество $U \supset U_\xi$ является окрестностью этой точки.

2) Достаточно показать, что если U и V — открытые множества, то $U \cap V$ открыто. Действительно, пусть $x \in U \cap V$. Тогда, так как U и V открыты, то каждое из них является окрестностью точки x. Следовательно, по свойствам системы окрестностей их пересечение $U \cap V$ также является окрестностью точки x.

Утверждения 3) и 4) получаются из предыдущих утверждений 1) и 2), примененных к дополнениям рассматриваемых множеств (см. лемму 4.29).

4.31. Теорема. 1) *Любое непустое открытое множество U на вещественной прямой $\mathbb{R}$ есть объединение не более чем счетной совокупности взаимно-непересекающихся интервалов.*

2) *Если открытое множество U равно объединению конечной совокупности промежутков, то оно представимо как объединение конечного числа взаимно-непересекающихся интервалов.*

Доказательство. 1) Назовем две точки $x, y \in U$ эквивалентными при выполнении следующего условия: $[x, y] \subset U$, если $x \le y$, или $[y, x] \subset U$, если $y \le x$. Эквивалентные точки $x, y \in U$ обозначаем символом $x \sim y$. Непосредственно проверяется, что введенное отношение является отношением эквивалентности, т. е., оно

1) рефлексивно: $x \sim x$;

2) симметрично: если $x \sim y$, то $y \sim x$;

3) транзитивно: если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$.

По известной теореме о разбиении на классы эквивалентности множество U разбивается на непересекающиеся непустые классы U_ξ, причем точки $x, y \in U$ входят в один класс тогда и только тогда, когда они эквивалентны. Заметим, что всякая точка x содержится в U вместе с некоторой своей окрестностью $V(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Поэтому, если эта точка принадлежит классу U_ξ, то окрестность $V(x)$ также содержится в U_ξ (применить свойство транзитивности). Таким образом, каждый класс U_ξ — это открытое множество. Поскольку в каждом открытом множестве U_ξ найдется рациональная точка и различные классы не пересекаются, то совокупность множеств U_ξ равномощна некоторому подмножеству множества рациональных чисел и, следовательно, она не более чем счетна.

Остается показать, что каждый класс U_ξ совпадает с открытым промежутком $(\inf U_\xi, \sup U_\xi)$, где $\inf U_\xi, \sup U_\xi \in \overline{\mathbb{R}}$. Очевидно

$$U_\xi \subset [\inf U_\xi, \sup U_\xi].$$

Заметим, что если $\inf U_\xi \in U_\xi$, то, с одной стороны, $\inf U_\xi \neq -\infty$, поскольку $U_\xi \subset U \subset \mathbb{R}$, а с другой стороны, $\inf U_\xi$ принадлежит U_ξ вместе с точками некоторой своей окрестности. В последнем случае найдется точка $x \in U_\xi$ такая, что $x < \inf U_\xi$. Последнее противоречит тому, что $\inf U_\xi$ является единственной нижней границей множества U_ξ. Следовательно, $\inf U_\xi \notin U_\xi$. Аналогично доказывается, что $\sup U_\xi \notin U_\xi$. Таким образом, доказано включение $U_\xi \subset (\inf U_\xi, \sup U_\xi)$.

Покажем теперь, что любая точка $x \in (\inf U_\xi, \sup U_\xi)$ принадлежит также U_ξ. Действительно, по определению нижней и верхней границ числового множества найдутся такие элементы $z, y \in U_\xi$, что $\inf U_\xi < z < x < y < \sup U_\xi$. Поскольку $z \sim y$, то $[z, y] \subset U$ и, следовательно, $[z, x] \subset U$. Таким образом, $z \sim x$ и поэтому $x \in U_\xi$. Включение $(\inf U_\xi, \sup U_\xi) \subset U_\xi$ доказано. Вместе с ним доказано также равенство $U_\xi = (\inf U_\xi, \sup U_\xi)$.

2) Доказательство второго свойства предоставляется читателю.

4.32. Теорема о замкнутости предельных точек. *Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}$. Тогда совокупность $\mathcal{L}im\, E$ предельных точек множества E замкнута.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}im\, E \neq \emptyset$. Требуется доказать, что $\mathcal{L}im\, E$ — замкнутое множество. Другими словами, надо доказать, что всякая предельная точка множества $\mathcal{L}im\, E$ будет также предельной и для множества E. Рассмотрим для этого предельную точку p множества $\mathcal{L}im\, E$. Тогда для любой элементарной окрестности $V \in \mathcal{N}(p)$ пересечение $V \cap \mathcal{L}im\, E \setminus \{p\}$ содержит точку $y \in \mathcal{L}im\, E$. Рассмотрим теперь элементарную окрестность $W \in \mathcal{N}(y)$ такую, что $W \subset V$ и $p \notin W$ (см. свойство 6 в 4.24). Тогда пересечение $W \cap E \setminus \{y\}$ содержит некоторую точку $x \neq p$.

Окончательно имеем: $x \in W \cap E \setminus \{y\} \subset V \cap E \setminus \{y, p\}$. Таким образом, теорема доказана.

4.33. Следствие. *Если $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ — замкнутое множество, то $\sup E \in E$ и $\inf E \in E$.*

Доказательство. Действительно, если, например, $\sup E \notin E$, то $\sup E \in \mathcal{L}im\, E$ по теореме 4.19. Так как $\mathcal{L}im\, E \subset E$, то следствие доказано.

5 Предел функции

5.1 Арифметическое определение предела в $\overline{\mathbb{R}}$ функции $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$. Примеры.

5.1. Определение. Рассмотрим функцию $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, определенную на множестве $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $p \in \mathbb{R}$ — произвольная предельная точка множества A. Число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *пределом* функции $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ при $x \to p$ по множеству A, если

1) в случае $a \in \mathbb{R}$: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $0 < \delta$ такое, что для всех $x \in A$ с условием $0 < |x - p| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon;$$

2) в случае $a = +\infty$: для любого $r \in \mathbb{R}$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in A$ с условием $0 < |x - p| < \delta$ выполняется неравенство

$$f(x) > r;$$

3) в случае $a = -\infty$: для любого $r \in \mathbb{R}$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in A$ с условием $0 < |x - p| < \delta$ выполняется неравенство

$$f(x) < r.$$

Вышесказанное записывают символически одним из способов:

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = a, \quad f(x) \underset{\substack{x \to p \\ x \in A}}{\to} a, \quad f(x) \to a \,|_{\substack{x \to p, \\ x \in A}} \quad f(x) \to a \text{ при } x \to p,\ x \in A,$$

либо без указания $x \in A$, когда ясно о какой области определения A идет речь.

5.2. Пример. В определении 5.1 типичной областью определения может быть конечный или бесконечный промежуток $\langle a, b\rangle$, а в качестве предельной точки p может быть либо любая его внутренняя точка, т. е. точка $p \in (a, b)$, либо граничная точка a или b, если она конечная.

5.3. Замечание. Условие $0 < |x - p| < \delta$ в определении предела означает, что предел не зависит от значения функции f в точке p. Более того, f может быть и не определена в точке p.

Условие $0 < |x - p| < \delta$ в определении предела (5.1) функции f в точке p означает также, что значение предела не зависит от того какие значения принимает функция f в точках, далеких от p.

Другими словами, определение предела имеет локальный характер, т. е. зависит лишь от поведения функции f вблизи точки p: если для функции $f : A \to \mathbb{R}$ существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x)$ то существует также и предел $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A\cap\mathcal{O}_\sigma(p)}} f(x)$ для любого $\sigma > 0$, совпадающий с первым. (ДОКАЗАТЬ!) Здесь во втором пределе рассматривается ограничение данной функций $f : A \to \mathbb{R}$ на пересечение $A \cap \mathcal{O}_\sigma(p)$, т. е. функция $f : A \cap \mathcal{O}_\sigma(p) \to \mathbb{R}$, значение которой в точке $x \in A \cap \mathcal{O}_\sigma(p)$ равно значению $f(x)$ функции $f : A \to \mathbb{R}$.

5.4. Примеры. 1) Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — произвольная точка, $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ — произвольное множество, а p — его предельная точка. Предел постоянной функции $f : A \to \{a\}$ равен a при $x \to p$ по множеству A.

2) Для функции $\operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$, предел в точке $p > 0$ ($p < 0$) равен 1 (-1), а предел в точке $p = 0$ не существует.

Вместе с тем существуют пределы $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\geq 0}} \operatorname{sign} x = 1$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\leq 0}} \operatorname{sign} x = -1$. Заметим, что в первом случае область определения $\operatorname{sign} x$ — это полуось $[0, +\infty)$, а во втором — полуось $(-\infty, 0]$. Верно также и следующее: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \operatorname{sign} x = 1$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \operatorname{sign} x = -1$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \exp x = 1$. Действительно, в силу оценки (3.11.61) при $n = 0$ имеем $|\exp x - 1| = |R_0(x)| < 2|x|$ для $|x| < 1$. Следовательно, полагая в определении предела $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$, получаем

$$|\exp x - 1| < 2\delta = \varepsilon$$

для любого x такого, что $|x| < \delta$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}} x \sin\frac{1}{x} = 0$. Действительно, существование пределы вытекает из оценки $\left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$ для любого $x \neq 0$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. В этом примере 0 — предельная точка для области определения $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6) $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = +\infty$. В этом примере $\frac{\pi}{2}$ — предельная точка для области определения $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

7) $\lim\limits_{x\to p} \exp x = \exp p$, $p \in \mathbb{R}$. Для доказательства следует воспользоваться основным свойством экспоненциальной функции и задачей 3: $|\exp x - \exp p| = \exp p \cdot |\exp(x - p) - 1|$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp x-1}{x}=1$, $p\in\mathbb{R}$. Для доказательства следует воспользоваться следствием 3.78: $\exp x=1+x+R_1(x)$, где $|R_1(x)|\le|x|^2$ при $|x|\le\frac{3}{2}$. Тогда $\left|\frac{\exp x-1}{x}-1\right|\le|x|$ при $|x|\le\frac{3}{2}$. Отсюда по определению предела получаем требуемое.

9) Функция $f(x)=e^{ix}$ имеет предел $f(p)=e^{ip}$ при $x\to p$, $p\in\mathbb{R}$.

В разделе 5.1 мы определили значение предела в том случае, когда предельная точка p конечная. Ниже мы определим значение предела в том случае, когда предельная точка множества A или $+\infty$, или $-\infty$.

5.5. Определение. Рассмотрим функцию $f:A\to\overline{\mathbb{R}}$, определенную на множестве $A\subset\overline{\mathbb{R}}$. Пусть $+\infty$ — предельная точка множества A. Функция $f:A\to\overline{\mathbb{R}}$ сходится к $a\in\overline{\mathbb{R}}$ при $x\to+\infty$ по множеству A тогда, когда

1) в случае $a\in\mathbb{R}$: для любого $\varepsilon>0$ существует число $L\in\mathbb{R}$ такое, что для всех $x\in A$ с условием $L<x$ выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$;

2) в случае $a=+\infty$: для любого $r\in\mathbb{R}$ существует число L такое, что для всех $x\in A$ с условием $L<x$ выполняется неравенство $f(x)>r$;

3) в случае $a=-\infty$: для любого $r\in\mathbb{R}$ существует число L такое, что для всех $x\in A$ с условием $L<x$ выполняется неравенство $f(x)<r$.

Вышесказанное записывают символически одним из способов:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in A}} f(x)=a,\quad f(x)\underset{\substack{x\to+\infty\\ x\in A}}{\to} a,$$
$$f(x)\to a\,|_{\substack{x\to+\infty,\\ x\in A}}\quad f(x)\to a \text{ при } x\to+\infty,\ x\in A,$$

либо без указания $x\in A$, когда ясно о какой области определения A идет речь.

5.6. Пример. В определении 5.5 типичной областью определения может быть бесконечный промежуток $\langle a,+\infty\rangle$. В этом случае точка $p=+\infty$ — предельная для промежутка $\langle a,+\infty\rangle$.

5.7. Примеры. 1) Если $A=\mathbb{N}$, то функция $f:\mathbb{N}\to\overline{\mathbb{R}}$ — это последовательность $x_n=f(n)$, $n\in\mathbb{N}$, а предел $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\in\mathbb{N}}} f(x)=a$ совпадает с пределом последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$.

2) Пусть $a\in\overline{\mathbb{R}}$ — произвольная точка, $A\subset\overline{\mathbb{R}}$ — произвольное множество, а $+\infty$ — его предельная точка. Предел постоянной функции $f:A\to\{a\}$ равен a при $x\to+\infty$.

3) Для функции $\operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$, предел равен 1 при $x \to +\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$. Действительно, имеем оценку $\exp x > 1+x > x$ для всех $x > 0$. Следовательно, полагая в определении 5.5 предела $L = r$ для любого $r > 0$, получаем

$$\exp x > x > r$$

для любого x такого, что $x > L$.

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

8) Пусть $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k$ — полином степени n: $a_n \neq 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_0 x^n}{P(x)} = 1$.

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0$ для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Для доказательства следует воспользоваться следующим неравенство: $\exp x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ для $x > 0$.

10) Функция $f(x) = \sin x$ не имеет предел при $x \to +\infty$.

5.8. Задача. Доказать, что в случае $A = \mathbb{N}$, $p = +\infty$, определение 5.5 предела функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ совпадает с определением 3.3 предела последовательности.

5.9. Определение. Рассмотрим функцию $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, определенную на множестве $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $-\infty$ — предельная точка множества A. Функция $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ сходится к $a \in \overline{\mathbb{R}}$ при $x \to -\infty$ по множеству A тогда, когда

4) в случае $a \in \mathbb{R}$: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $L \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $x \in A$ с условием $x < L$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$;

5) в случае $a = +\infty$: для любого $r \in \mathbb{R}$ существует число L такое, что для всех $x \in A$ с условием $x < L$ выполняется неравенство $f(x) > r$;

6) в случае $a = -\infty$: для любого $r \in \mathbb{R}$ существует число L такое, что для всех $x \in A$ с условием $x < L$ выполняется неравенство $f(x) < r$.

Вышесказанное записывают символически одним из способов:

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ x\in A}} f(x) = a, \quad f(x) \underset{\substack{x\to-\infty\\ x\in A}}{\longrightarrow} a,$$

$$f(x) \to a\,\Big|_{\substack{x\to-\infty\\ x\in A}}, \quad f(x) \to a \text{ при } x \to -\infty,\ x \in A,$$

либо без указания $x \in A$, когда ясно о какой области определения A идет речь.

5.10. Пример. В определении 5.9 типичной областью определения может быть бесконечный промежуток $\langle -\infty, a\rangle$. В этом случае точка $p = -\infty$ — предельная для промежутка $\langle -\infty, a\rangle$.

5.11. Примеры. 1) Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — произвольная точка, $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ — произвольное множество, а $-\infty$ — его предельная точка. Предел постоянной функции $f : A \to \{a\}$ равен a при $x \to -\infty$.

2) Для функции $\operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$, предел равен -1 при $x \to -\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ для любого четного $k \in \mathbb{N}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ для любого нечетного $k \in \mathbb{N}$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$. Для проверки последнего следует воспользоваться соотношением $\exp x = \frac{1}{\exp(-x)}$.

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

7) Пусть $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k$ — полином степени n: $a_0 \neq 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_0x^n}{P(x)} = 1$.

8) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k \exp x = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

9) Функция $f(x) = \cos x$ не имеет предел при $x \to -\infty$.

Далее мы определяем односторонние пределы.

5.12. Определение. Рассмотрим функцию $f : B \to \overline{\mathbb{R}}$, определенную на множестве $B \subset \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $p \in \mathbb{R}$ — произвольная точка, *предельная* для пересечения $A = (-\infty, p) \cap B$. Число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *пределом слева* функции $f : B \to \mathbb{R}$ при $x \to p$, $x < p$, если a является пределом сужения $f : A \to \mathbb{R}$ при $x \to p$ по множеству A.

Предел слева обозначается одним из символом

$$\lim_{\substack{x\to p-0\\ x\in A}} f(x) = a, \quad f(x) \to a\,|_{\substack{x\to p-0,\\ x\in A}} \quad f(x) \to a \text{ при } x \to p-0,\, x \in A.$$

Пусть $p \in \mathbb{R}$ — *предельная* точка для пересечения $A = (p, +\infty) \cap B$. Число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *пределом справа* функции $f : B \to \mathbb{R}$ при $x \to p$, $x > p$, если a является пределом сужения $f : A \to \mathbb{R}$ при $x \to p$ по множеству A.

Предел справа обозначается одним из символом

$$\lim_{\substack{x\to p+0\\ x\in A}} f(x)=a, \quad f(x)\to a\,|_{\substack{x\to p+0,\\ x\in A}} \quad f(x)\to a \text{ при } x\to p+0,\ x\in A.$$

5.13. Пример. В определении 5.12 типичной областью определения может быть конечный или бесконечный промежуток $\langle a,b\rangle$, а в качестве предельной точки p может быть любая его внутренняя точка, т. е. точка $p\in(a,b)$. В этом случае p является предельной как для множества $\langle a,p)$, так и для множества $(p,b\rangle$

5.14. Примеры. 1) Пусть $a\in\overline{\mathbb{R}}$ — произвольная точка, $B\subset\overline{\mathbb{R}}$ — произвольное множество, а p — предельная точка как для пересечения $A=(-\infty,p)\cap B$, так и для пересечения $A=(p,+\infty)\cap B$. Односторонние пределы постоянной функции $f: A\to\{a\}$ совпадают и равны a при $x\to p$ как по множеству $A=(-\infty,p)\cap B$, так и по множеству $A=(p,+\infty)\cap B$.

2) Для функции $\operatorname{sign} x$, $x\in\mathbb{R}$, односторонние пределы в точке $p=0$ различные: слева -1, а справа $+1$.

3) Для функции $\frac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, односторонние пределы в точке 0 различные: слева $-\infty$, а справа $+\infty$.

4) Для функции $\frac{1}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, односторонние пределы в точке 0 совпадают: слева $+\infty$ и справа $+\infty$.

5) Для функции $e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, односторонние пределы в точке 0 совпадают: слева 0 и справа 0.

В следующей серии задач сформулированы арифметические определения односторонних пределов.

5.15. Задачи. Рассмотрим функцию $f: B\to\overline{\mathbb{R}}$, определенную на множестве $B\subset\overline{\mathbb{R}}$. Пусть $p\in\mathbb{R}$ — предельная точка множества $A=(p,+\infty)\cap B$. Число $a\in\overline{\mathbb{R}}$ будет *пределом справа* функции $f: B\to\mathbb{R}$ при $x\to p$ по множеству A тогда и только тогда, когда

1) в случае $a\in\mathbb{R}$: для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех $x\in B$ с условием $p<x<p+\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$;

2) в случае $a=+\infty$: для любого $r\in\mathbb{R}$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех $x\in B$ с условием $p<x<p+\delta$ выполняется неравенство $f(x)>r$;

3) в случае $a=-\infty$: для любого $r\in\mathbb{R}$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\in B$ с условием $p<x<p+\delta$ выполняется неравенство $f(x)<r$.

4) Сформулировать аналогичные утверждения для левого предела функции f в точке p.

5.2 Топологическое определение предела в $\overline{\mathbb{R}}$ функции $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Примеры.

Многообразие приведенных в предыдущем разделе арифметических определений предела представляет определенные трудности при доказательстве свойств предела, так как рассуждать во многих случаях можно по аналогии, но приходится многократно тиражировать однотипные рассуждения. Это обстоятельство наводит на мысль, что должна быть обобщающая концепция, содержащая в качестве частного случая приведенные выше похожие друг на друга определения, и однотипные рассуждения. В качестве таковой предлагается следующее

5.16. Определение. Рассмотрим функцию $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, определенную на множестве $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $p \in \mathcal{L}im\, A$ — произвольная предельная точка множества A. Число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *пределом* функции $f : A \to \mathbb{R}$ при $x \to p$ по множеству A, если для любой элементарной окрестности $W \in \mathcal{N}_e(a)$ найдется элементарная окрестность $V \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что для любой точки $x \in V \cap A \setminus \{p\}$ имеем $f(x) \in W$.

Вышесказанное записывают символически одним из способов:

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = a, \quad f(x) \underset{\substack{x \to p \\ x \in A}}{\to} a, \quad f(x) \to a \,|_{\substack{x \to p, \\ x \in A}} \quad f(x) \to a \text{ при } x \to p,\, x \in A,$$

либо без указания $x \in A$, когда ясно о какой области определения A идет речь.

5.17. Теорема. *Рассмотрим функцию* $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, *определенную на множестве* $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. *Пусть* $p \in \overline{\mathbb{R}}$ *— произвольная предельная точка множества* $A \subset \mathbb{R}$. *Арифметические определения* 5.1, 5.5, 5.9, 5.12 *предела функции* $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ *в предельной точке* $p \in \mathcal{L}im\, A$ *при* $x \to p$ *по множеству* A *эквивалентны топологическому определению предела* 5.16

Доказательство. Докажем теорему для случая, когда $a \in \mathbb{R}$ и $p \in \mathbb{R}$: остальные доказываются аналогично. Для доказательства заметим следующее: условие того, что точка $x \in A$ удовлетворяет соотношениям

$$0 < |x - p| < \delta \quad \text{эквивалентно} \quad x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}, \tag{5.2.1}$$

а неравенство

$$|f(x)-a|<\varepsilon \quad \text{эквивалентно} \quad f(x)\in\mathcal{O}_\varepsilon(a). \tag{5.2.2}$$

Необходимость. Пусть выполнено первое определение в 5.1. Возьмем произвольную элементарную окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon(a)$ точки a. По $\varepsilon>0$ найдем $\delta>0$ такое, что для всех $x\in A$ с условием $0<|x-p|<\delta$ выполняется $|f(x)-a|<\varepsilon$. В силу (5.2.1) и (5.2.2) это то же самое, что для точек $x\in\mathcal{O}_\delta(p)\cap A\setminus\{p\}$ верно $f(x)\in\mathcal{O}_\varepsilon(a)$.

Достаточность. Пусть теперь выполняется условие 1) теоремы 5.17. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Для элементарной окрестности $\mathcal{O}_\varepsilon(a)$ найдется окрестность $\mathcal{O}_\delta(p)\in\mathcal{N}_e(p)$ такая, что для точек $x\in\mathcal{O}_\delta(p)\cap A\setminus\{p\}$ будет выполняться $f(x)\in\mathcal{O}_\varepsilon(a)$. В силу (5.2.1) и (5.2.2) это то же самое, что для точек $x\in A$ с условием $0<|x-p|<\delta$ верно $|f(x)-a|<\varepsilon$.

Окрестность $O_\delta(p)=(p-\delta,p+\delta)$. Понятно, что если $0<|x-p|<\delta$, то $x\in O_\delta(p)\setminus\{p\}$. Следовательно, имеем также и $|f(x)-a|<\varepsilon$. Теорема доказана.

Таким образом, утверждение 5.17 можно рассматривать как эквивалентное соответствующим определениям 1), 2) и 3) из 5.1.

В зависимости от задачи удобнее пользоваться тем или иным определениям. Удобство определений теоремы 5.17 состоит в том, что они не зависят от того является ли точка p собственной (т. е. $p\in\mathbb{R}$) или нет.

5.18. Задача. Доказать, что в определении 5.16 достаточно рассматривать только базисный набор элементарных окрестностей, а не все элементарные окрестности.

5.19. Задача. Доказать, что определение 5.16 в зависимости от конкретных значений a или p эквивалентно каждому из арифметических определений сходимости функции разделов 5.1.

5.20. Задачи. Рассмотрим функцию $f:A\to\overline{\mathbb{R}}$, определенную на множестве $A\subset\overline{\mathbb{R}}$. Пусть $p\in\overline{\mathbb{R}}$ — произвольная предельная точка множества A. Функция $f:A\to\overline{\mathbb{R}}$ сходится к $a\in\overline{\mathbb{R}}$ при $x\to p\in\mathbb{R}$ по множеству A тогда и только тогда, когда

1) в случае $a\in\mathbb{R}$: для любого $\varepsilon>0$ существует окрестность $V\in\mathcal{N}_e(p)$ такая, что для всех $x\in V\cap A\setminus\{p\}$ выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$;

2) в случае $a=+\infty$: для любого $r\in\mathbb{R}$ существует окрестность $V\in\mathcal{N}_e(p)$ такая, что для всех $x\in V\cap A\setminus\{p\}$ выполняется неравенство $f(x)>r$;

3) в случае $a = -\infty$: для любого $r \in \mathbb{R}$ существует окрестность $V \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что для всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$ выполняется неравенство $f(x) < r$.

Приводимые в следующих разделах свойства пределов можно рассматривать как обобщения аналогичных свойств предела последовательности.

5.3 Единственность предела функции.

Следующее свойство является обобщением теоремы 3.28.

5.21. Теорема о единственности предела. *Функция $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, может иметь только один предел при $x \to p \in \mathcal{L}im\, A$ по множеству A.*

Доказательство. Требуется доказать, что предел последовательности единствен. Для этого мы докажем, что $a = b$, если

$$\lim_{\substack{x\to -\infty \\ x\in A}} f(x) = a \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to -\infty \\ x\in A}} f(x) = b.$$

Пусть $a \neq b$. Известно, что существуют непересекающиеся окрестности $U \in \mathcal{N}_e(a)$ и $W \in \mathcal{N}_e(b)$. Тогда, с одной стороны, $f(x) \in U$ для всех $x \in V_1 \cap A \setminus \{p\}$, а с другой, $f(x) \in W$ для всех $x \in V_2 \cap A \setminus \{p\}$, где V_1 и V_2 — некоторые элементарные окрестности точки p. Известно, что пересечение $V = V_1 \cap V_2$ — тоже элементарная окрестность точки p. Тогда для $x \in V \cap A \setminus \{p\}$ имеем $f(x) \in U \cap W$. Таким образом, окрестности U и W имеют непустое пересечение, что противоречит их выбору.

5.22. Определение. Для всякого $x \in A \subset \overline{\mathbb{R}}$ рассмотрим некоторое высказывание $\Phi(x)$, о котором можно сказать истинно оно или ложно. Мы будем употреблять символ

$$\Phi(x)\,\Big|_{\substack{x\to p \\ x\in A}}$$

для обозначения того, что высказывание $\Phi(x)$ истинно для всех $x \in A\setminus\{p\}$ из некоторой окрестности $V \in \mathcal{N}_e(p)$, т. е. существует окрестность $V \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что $\Phi(x)$ истинно для всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$.

Используя это обозначение, определение предела можно записать в следующей форме: $\lim\limits_{\substack{x\to p \\ x\in A}} f(x) = a$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ имеем $f(x) \in U\,\Big|_{\substack{x\to p \\ x\in A}}$.

5.23. Задача. Доказать, что в случае

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = a \in \mathbb{R}$$

существует такое число $L \in \mathbb{R}$, что

$$|f(x)| \leq L \,|_{\substack{x \to p \\ x \in A}}.$$

Это свойство выражают такими словами: *функция, имеющая конечный предел в точке p, локально ограничена в точке p.*

5.4 Теорема о предельном переходе в неравенствах.

Следующее свойство является обобщением теоремы 3.39.

5.24. Теорема о неравенстве пределов. *Пусть даны две функции $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ и $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, для которых существуют пределы*

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = a \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} g(x) = b.$$

Если

1) $a < b$, *то* $f(x) < g(x) \,|_{\substack{x \to p \\ x \in A}}$;

2) $f(x) \leq g(x) \,|_{\substack{x \to p \\ x \in A}}$, *то* $a \leq b$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Рассмотрим для этого две непересекающиеся элементарные окрестности $U \in \mathcal{N}_e(a)$ и $W \in \mathcal{N}_e(b)$ (см. свойство 2 раздела 4.13). По условию теоремы существует окрестность $V_1 \in \mathcal{N}_e(p)$ ($V_2 \in \mathcal{N}_e(p)$) такая, что $f(x) \in U$ для всех $x \in V_1 \cap A \setminus \{p\}$ ($g(x) \in W$ для всех $x \in V_2 \cap A \setminus \{p\}$). Тогда для всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$, где $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_e(p)$, имеем $f(x) < g(x)$.

При доказательство второго свойства надо исключить возможность $b < a$. Если такое случилось, то в силу первого пункта имеем $g(x) < f(x) \,\Big|_{\substack{x \to p \\ x \in A}}$, что противоречит условию.

5.5 Теорема о пределе промежуточной функции.

Следующее утверждение является обобщением теоремы 3.40.

5.25. Теорема. *Пусть даны три функции $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $h : A \to \overline{\mathbb{R}}$ и $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, такие что*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \,|_{\substack{x \to p \\ x \in A}}.$$

Если существуют пределы

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = a \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to p\\ x\in A}} g(x) = a,$$

то существует также и предел

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in A}} h(x) = a.$$

Доказательство. Фиксируем произвольную элементарную окрестность $U \in \mathcal{N}_e(a)$. По условию теоремы существуют элементарные окрестности V_1, V_2 и V_3 точки p такие, что

1) $f(x) \in U$ для всех $x \in V_1 \cap A \setminus \{p\}$,

2) $g(x) \in U$ для всех $x \in V_2 \cap A \setminus \{p\}$,

3) $f(x) \le h(x) \le g(x)$ для всех $x \in V_3 \cap A \setminus \{p\}$.

Тогда для всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$, где $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3 \in \mathcal{N}_e(p)$, одновременно выполняются все три условия. Отсюда выводим, что $h(x) \in U$ при всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$. Таким образом, $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}} h(x) = a$.

5.6 Теорема о пределе монотонной функции.

5.26. Определение. 1) Функция $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, называется (*строго*) *возрастающей*, если $f(x) \le f(y)$ ($f(x) < f(y)$) для любых значений аргументов $x < y$ множества A.

2) Функция $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, называется (*строго*) *убывающей*, если $f(x) \ge f(y)$ ($f(x) > f(y)$) для любых значений аргументов $x < y$ множества A.

Определенные условиями 1) или 2) функции называются монотонными. Таким образом, монотоннная функция может быть (строго) возрастающей или (строго) убывающей.

5.27. Примеры. 1) Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — произвольная точка, $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ — произвольное множество. Постоянная функция $f : A \to \{a\}$ одновременно и возрастающая, и убывающая.

2) Функция $\operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$, возрастающая.

3) Функции $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, и $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, монотонные (первая строго возрастает, вторая строго возрастает).

4) Экспоненциальная функция $\exp x$, $x \in \mathbb{R}$, строго возрастает. В самом деле, надо проверить неравенство $\exp x < \exp y$ для любых действительных чисел $x < y$. По основному свойству экспоненциальной функции неравенство $\exp x < \exp y$ эквивалентно $1 < \exp(y - x)$ при

условии $y - x > 0$. Неравенство $\exp(y-x) > 1$ является следствием того, что $\exp(y-x)$ — это предел монотонно возрастающей последовательности $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(y-x)^k}{k!} > 1$ при всех $y - x > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$.

5) Функция $e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x > 0$, строго монотонная (возрастает она или убывает?).

Следующее утверждение является обобщением теоремы 3.30.

5.28. Теорема. *Пусть $A \subset [-\infty, p]$ и $p \in \mathcal{L}im\, A$. Монотонная функция $f : A \to \mathbb{R}$ всегда имеет предел при $x \to p$ по множеству A:*

1) *если f возрастает, то $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = \sup\limits_{x\in A\setminus\{p\}} f(x)$;*

2) *если f убывает, то $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = \inf\limits_{x\in A\setminus\{p\}} f(x)$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Напомним, что $\sup\limits_{x\in A\setminus\{p\}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A \setminus \{p\}\}$. Положим $a = \sup\limits_{x\in A\setminus\{p\}} f(x)$.

Если $a = -\infty$, то $f(x) = -\infty$ для всех $x \in A \setminus \{p\}$, т. е. $f(x)$ — постоянная функция на множестве $x \in A \setminus \{p\}$, и теорема в этом случае доказана.

Пусть $a \in \mathbb{R}$. Фиксируем элементарную окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ точки a, где $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. По признаку 1.91 точной верхней границы в множестве $\{f(x) : x \in A \setminus \{p\}\}$ существует элемент $f(x_0)$ такой, что, с одной стороны, $a - \varepsilon < f(x_0) \le a$, а с другой, $f(x_0) \le f(x) \le a$ для любого $x \in A \cap (x_0, p)$. Таким образом, $f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon \Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A}}$. В силу произвола в выборе ε имеем

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = a.$$

Пусть теперь $a = +\infty$. В качестве окрестности точки a рассмотрим произвольную элементарную окрестность $(r, \infty]$. По признаку 1.91 точной верхней границы $\{f(x) : x \in A \setminus \{p\}\}$ существует элемент $f(x_0)$ такой, что с одной стороны $r < f(x_0) \le +\infty$, а с другой $f(x_0) \le f(x) \le +\infty$ для любого $x \in A \cap (x_0, p)$. Таким образом, $f(x) \in (r, \infty]$, когда $x \in A \cap (x_0, p)$. В силу произвола в выборе элементарной окрестности имеем

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = +\infty.$$

5.29. Задача. Доказать следующий вариант теоремы 5.28.

Пусть $A \subset [q, +\infty]$ *и* $q \in \mathcal{L}im\, A$. *Монотонная функция* $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ *всегда имеет предел при* $x \to q$ *по множеству* A:

1) *если* f *возрастает, то* $\lim\limits_{\substack{x \to q \\ x \in A}} f(x) = \inf\limits_{x \in A \setminus \{q\}} f(x)$;

2) *если* f *убывает, то* $\lim\limits_{\substack{x \to q \\ x \in A}} f(x) = \sup\limits_{x \in A \setminus \{q\}} f(x)$.

5.30. Задача. Пусть $A \subset [-\infty, p]$, $p \in \mathcal{L}im\, A$ и $f : A \to \mathbb{R}$ — монотонная функция. Доказать, что

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \tag{5.6.3}$$

для любой последовательности точек $x_n \in A \setminus \{p\}$, сходящейся к p.

Решение. Рассмотрим произвольную последовательность точек $x_n \in A \setminus \{p\}$, сходящуюся к p. Надо проверить, что в (5.6.3) существует предел справа, равный пределу слева. Так как предел слева существует и равен $a \in \overline{\mathbb{R}}$, то для любой окрестности $W \in \mathcal{N}_e(a)$ существует окрестность $U \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что для любой точки $x \in U \setminus \{p\}$ верно $f(x) \in W$. С другой стороны, предел последовательности $x_n \in A \setminus \{p\}$ равен p. Следовательно, существует номер n_0 такой, что имеем $x_n \in U \setminus \{p\}$ для всех $n \geq n_0$. Отсюда выводим $f(x_n) \in W$ для всех $n \geq n_0$. Так как окрестность $W \in \mathcal{N}_e(a)$ произвольная, то $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$ и равенство (5.6.3) доказано.

5.31. Замечание. Из равенства (5.6.3) можно сделать такой вывод: предел монотонной функции может быть найден как предел правой части (5.6.3) для одной подходяще выбранной последовательности точек $x_n \in A \setminus \{p\}$, сходящейся к p.

5.7 Теорема о пределе композиции функций.

5.32. Теорема. *Пусть даны две функции* $f : A \to B$ *и* $g : B \to \overline{\mathbb{R}}$, $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$, *такие, что*

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = q, \quad \text{где} \quad p \in \mathcal{L}im\, A,$$

а

$$\lim_{\substack{y \to q \\ y \in B}} g(y) = s, \quad \text{где} \quad q \in \mathcal{L}im\, B.$$

Тогда при одном из следующих двух условий:

1) *либо* $f(x) \neq q \,\Big|_{\substack{x \to p, \\ x \in A}}$

2) *либо* $s = g(q)$

имеем

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} (g \circ f)(x) = s.$$

Доказательство. Для любой окрестности $W \in \mathcal{N}_e(s)$ существует окрестность $U \in \mathcal{N}_e(q)$ такая, что $g(y) \in W$ для любой точки $y \in U \cap B \setminus \{q\}$. Далее, существует окрестность $V_1 \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что $f(x) \in U$ для любой точки $x \in V_1 \cap A \setminus \{p\}$.

1) Если $f(x) \neq q \,\Big|_{\substack{x \to p, \\ x \in A}}$ то существует окрестность $V_2 \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что $f(x) \neq q$ для любой точки $x \in V_2 \cap A \setminus \{p\}$. Тогда имеем $g \circ f(x) \in W$ для любой точки $x \in V \cap A \setminus \{p\}$, где окрестность $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_e(p)$.

2) Если в окрестности V_1 могут быть точки x такие, что $f(x) = q$, в силу условия $s = g(q)$ в такой точке имеем $g \circ f(x) = g(q) = s \in W$. Последнее обеспечивает $g \circ f(x) \in W$ для любой точки $x \in V_1 \cap A \setminus \{p\}$. По определению предела имеем $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in A}} g \circ f(x) = s$.

5.33. Задача. Доказать, что «*невыполнение первого условия*» теоремы 5.32 эквивалентно тому, что точка p является предельной для множества $f^{-1}(q)$.

5.34. Задача. Проверить, что пример функций

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

и $\mathbb{R} \ni y \mapsto g(y) = |\operatorname{sign} y|$ показывает, что без второго условия теорема 5.32 неверна

5.8 Предел функции и алгебраические операции.

Следующее утверждение является обобщением теоремы 3.43.

5.35. Теорема. *Сумма пределов равна пределу суммы*: *если*

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = a, \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} g(x) = b,$$

и определена сумма $a+b$, то

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in A}}(f(x)+g(x)) = \lim_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) + \lim_{\substack{x\to p\\ x\in A}} g(x). \tag{5.8.4}$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in A}}(f(x)+g(x)) = \begin{cases} a+b, & \text{если } a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R},\\ +\infty, & \text{если } a>-\infty,\ b=+\infty,\\ -\infty, & \text{если } a<+\infty,\ b=-\infty. \end{cases} \tag{5.8.5}$$

Доказательство. Рассмотрим два случая, оставшийся рассматривается по аналогии.

1) $a, b\in\mathbb{R}$. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. По теореме 5.17 существует окрестность $V_1\in\mathcal{N}_e(p)$ такая, что для всех $x\in V_1\cap A\setminus\{p\}$ выполняется неравенство

$$|f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{2},$$

и существует окрестность $V_2\in\mathcal{N}_e(p)$ такая, что для всех $x\in V_2\cap A\setminus\{p\}$ выполняется неравенство

$$|g(x)-b|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для всех $x\in V\cap A\setminus\{p\}$, где $V=V_1\cap V_2\in\mathcal{N}_e(p)$, имеем

$$|(f(x)+g(x))-(a+b)|\le|f(x)-a|+|g(x)-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}}(f(x)+g(x)) = a+b$, и равенство (5.8.4) в этом случае доказано.

2) Пусть теперь $a>-\infty$, $b=+\infty$. В этом случае функция $f(x)$ ограничена снизу при x из A, достаточно близких к точке p: существуют число $L\in\mathbb{R}$ и окрестность $V_1\in\mathcal{N}_e(p)$ такие, что $f(x)\ge L$ для всех $x\in V_1\cap A$ (проверить это!). Фиксируем произвольное число $r\in\mathbb{R}$ и найдем окрестность $V_2\in\mathcal{N}_e(p)$ такую, что для всех $x\in V_2\cap A\setminus\{p\}$ выполняется неравенство

$$g(x)>r-L.$$

Тогда для всех $x\in V\cap A$, где $V=V_1\cap V_2\in\mathcal{N}_e(p)$, имеем

$$f(x)+g(x)>L+(r-L)=r.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}}(f(x)+g(x)) = +\infty$, и равенство (5.8.4) в этом случае также доказано.

5.36. Теорема. *Произведение пределов равно пределу произведения: если*

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = a, \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to p\\ x\in A}} g(x) = b,$$

и определено произведение $a \cdot b$, *то*

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x)\cdot g(x) = \begin{cases} a\cdot b, & \text{если } a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R},\\ (\operatorname{sign} a)\cdot\infty, & \text{если } a\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\},\ b=+\infty,\\ (-\operatorname{sign} a)\cdot\infty, & \text{если } a\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\},\ b=-\infty. \end{cases} \quad (5.8.6)$$

Доказательство. Рассмотрим два случая, остальные рассматриваются по аналогии.

1) $a, b \in \mathbb{R}$. Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ сходятся к числам в $\mathbb{R}$, то они ограничены при $x \to p$ по множеству A: существуют число $L \in (0, \infty)$ и окрестность $V_1 \in \mathcal{N}_e(p)$ такие, что $|f(x)| \le L$ и $|g(x)| \le L$ для всех $x \in V_1$ (проверить это!, см. задачу 5.23).

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует окрестность $V_2 \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что для всех $x \in V_2 \cap A \setminus \{p\}$ выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2L},$$

и существует окрестность $V_3 \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что для всех $x \in V_3 \cap A \setminus \{p\}$ имеем

$$|g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

Тогда для всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$, где $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3 \in \mathcal{N}_e(p)$, получаем

$$\begin{aligned} |f(x)\cdot g(x) - a\cdot b| &= |(f(x)-a)\cdot g(x) + a\cdot(g(x)-b)| \\ &\le |f(x)-a|\cdot|g(x)| + |a|\cdot|g(x)-b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2L}\cdot L + \frac{\varepsilon}{2L}\cdot L = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x)\cdot g(x) = a\cdot b$, и равенство (5.8.6) в этом случае доказано.

2) $a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, $b = +\infty$. Положим для определенности $a < 0$. Фиксируем произвольное число α между a и 0: $a < \alpha < 0$. По теореме 5.24 о неравенстве пределов найдется окрестность V_1 такая, что

$$f(x) < \alpha \quad \text{для всех } x \in V_1 \cap A \setminus \{p\}.$$

С другой стороны, для произвольного $r \in (-\infty, 0)$ найдется окрестность V_2 такая, что

$$g(x) > -\frac{r}{|\alpha|} \quad \text{для всех } x \in V_2 \cap A \setminus \{p\}.$$

Тогда для всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$, где $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_e(p)$, имеем

$$|f(x) \cdot g(x)| > |\alpha| \cdot \frac{-r}{|\alpha|} = -r.$$

Поскольку $f(x) \cdot g(x)$ — отрицательное число при $x \in V \cap A \setminus \{p\}$, то

$$f(x) \cdot g(x) < r.$$

Поэтому $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) \cdot g(x) = -\infty$, и равенство (5.8.6) в этом случае тоже доказано.

5.37. Теорема. *Если* $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = a \neq 0$, *то*

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x)}. \tag{5.8.7}$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{если } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } a = \pm\infty. \end{cases} \tag{5.8.8}$$

Доказательство. В случае $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ надо показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\Big| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a} \Big| = \frac{|f(x) - a|}{|f(x) \cdot a|} < \varepsilon \,\Big|_{\substack{x \to p \\ x \in A}}. \tag{5.8.9}$$

Фиксируем $0 < \varepsilon < |a|$. Тогда для некоторой окрестности V_1 имеем

$$|f(x) - a| < \frac{|a|^2 \varepsilon}{2}$$

для всех $x \in V_1 \cap A \setminus \{p\}$. По теореме о неравенстве пределов существует также окрестность V_2 такая, что

$$|f(x)| \geq \frac{|a|}{2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{2}{|a|}$$

для всех $x \in V_2 \cap A \setminus \{p\}$. Отсюда для всех $x \in V \cap A \setminus \{p\}$, где $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_e(p)$, имеем оценку сверху для правой части (5.8.9):

$$\frac{|f(x) - a|}{|f(x) \cdot a|} < \frac{|a|^2\varepsilon}{2} \cdot \frac{2}{|a| \cdot |a|} = \varepsilon.$$

Первый случай доказан.

Во втором случае для получения оценки

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$$

надо лишь найти такую окрестность V_0, начиная с которой будет справедливо неравенство $\varepsilon^{-1} < |f(x)|$. Существование такой окрестности V_0 гарантировано условием $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = \pm\infty$.

5.38. Задача. Если функция $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ сходится к числу $a \in \overline{\mathbb{R}}$ при $x \to p \in \mathcal{L}im\, A$ по множеству A, $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ сходится к числу $b \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ при $x \to p$ по множеству A, то существует предел отношения функций, равный отношению пределов, когда оно определено:

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}. \tag{5.8.10}$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{a}{b}, & \text{если } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } a \in \mathbb{R},\ b = \pm\infty. \end{cases} \tag{5.8.11}$$

5.9 Критерий Гейне сходимости функции.

5.39. Критерий сходимости Гейне. *Функция $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ имеет предел при $x \to p \in \mathcal{L}im\, A$ по множеству A тогда и только тогда, когда для каждой последовательности $s_n \in A \setminus \{p\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходящейся к p, последовательность $\{f(s_n)\}$ является сходящейся. Более того, все такие пределы $\lim\limits_{n \to \infty} f(s_n)$ совпадают и их общее значение равно $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = a$. Тогда для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ существует окрестность $V \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что $f(x) \in U$ для любой точки $x \in V \cap A \setminus \{p\}$. Пусть теперь

$s_n \in A \setminus \{p\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к точке p (такие последовательности существуют в соответствии с задачей 4.18). Тогда по теореме 5.32 о пределе композиции имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n) = a$.

Достаточность. Рассмотрим, прежде всего, две различные последовательности $\{s_n \in A \setminus \{p\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{s'_n \in A \setminus \{p\}\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящиеся к точке p, и покажем, что пределы

$$\lim_{n\to\infty} f(s_n) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} f(s'_n)$$

совпадают. Составим для этого третью последовательность

$$s_1, s'_1, s_2, s'_2, \ldots, s_n, s'_n, \ldots.$$

Понятно, что значения элементов этой последовательности принадлежат множеству $A \setminus \{p\}$ и сходятся к точке p. По условию теоремы последовательность $f(s_1), f(s'_1), f(s_2), f(s'_2), \ldots, f(s_n), f(s'_n), \ldots$ сходится, и тогда две ее подпоследовательности $f(s_n)$ и $f(s'_n)$ сходятся к одному и тому же пределу. Таким образом, все последовательности вида $\{f(s_n)\}$ при условии $A \setminus \{p\} \ni s_n \to p$ при $n \to \infty$ имеют общий предел, который мы обозначим буквой a.

Докажем теперь, что предел $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = a$. Рассмотрим произвольную базисную систему $\{B_n\}$ окрестностей точки p. Если неверно, что $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = a$, то найдется окрестность $U \in \mathcal{N}(a)$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $s_n \in B_n \cap A \setminus \{p\}$ такая, что $f(s_n) \notin U$. Тогда очевидно $s_n \to p$ при $n \to \infty$, а с другой $f(s_n) \notin U$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, предел последовательности $f(s_n)$ не может быть равным a. Получено противоречие с доказанным выше условием, что этот предел должен равняться a.

5.10 Критерий Коши существования предела функции

5.40. Критерий сходимости Коши. *Функция $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ имеет конечный предел при $x \to p \in \mathcal{L}im\, A$ по множеству A тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется элементарная окрестность $V \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что для любых точек $x, y \in V \cap A \setminus \{p\}$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = a$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что

$$|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для любой точки $x \in V \cap A \setminus \{p\}$. Пусть теперь $x, y \in V \cap A \setminus \{p\}$ — две произвольные точки. Тогда выводим

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - a| + |f(y) - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Дано, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется элементарная окрестность $V \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что для любых точек $x, y \in V \cap A \setminus \{p\}$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Покажем, что функция $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ удовлетворяет критерию 5.39 сходимости Гейне. Рассмотрим для этого произвольную последовательность точек $\{s_n \in A \setminus \{p\}\}_{n \in \mathbb{N}}$, сходящуюся к точке p, и покажем, что существует предел последовательности

$$\lim_{n \to \infty} f(s_n).$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Существует номер n_0 такой, что для всех $n \geq n_0$ будет выполняться $x_n \in V \cap A \setminus \{p\}$. Тогда для любых номеров $n, m \geq n_0$ имеем

$$|f(s_n) - f(s_m)| < \varepsilon.$$

Таким образом, проверено, что последовательность $\{f(s_n)\}$ фундаментальная. Следовательно, она сходится и ее предел конечен. Более того, выполняются условия сходимости Гейне и, следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = a \in \mathbb{R}$$

5.41. Задача. Сформулировать арифметический критерий Коши сходимости функции $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ при $x \to p \in \mathcal{L}im\, A$ по множеству A для случаев, когда

1) $p \in \mathbb{R}$;
2) $p = +\infty$;
3) $p = -\infty$.

Приводимые ниже понятия верхнего и нижнего пределов функции $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ в точке $p \in \mathcal{L}im\, A$ обобщают таковые для последовательностей.

Пусть $p \in \mathbb{R}$. Как известно, всякому числу $\delta > 0$ соответствует элементарная окрестность $\mathcal{O}_\delta(p) \in \mathcal{N}_e(p)$. Сопоставим числу δ величины

$$u(\delta) = \sup_{x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}} f(x)$$

и

$$l(\delta) = \inf_{x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}} f(x).$$

В силу включения

$$\mathcal{O}_\delta(p) \subset \mathcal{O}_{\delta_1}(p) \quad \text{при} \quad \delta < \delta_1 \tag{5.11.12}$$

из задачи 2.61 выводим, что функция

$$0 < \delta \mapsto u(\delta)$$

монотонно возрастает: $u(\delta) \le u(\delta_1)$ при $0 < \delta < \delta_1$, а функция

$$0 < \delta \mapsto l(\delta)$$

монотонно убывает: $l(\delta) \ge l(\delta_1)$ при $0 < \delta < \delta_1$. При этом всегда верны соотношения

$$l(\delta_1) \le l(\delta) \le u(\delta) \le u(\delta_1), \quad 0 < \delta < \delta_1. \tag{5.11.13}$$

По теореме 5.28 заключаем, что существуют пределы функций $u(\delta)$ и $l(\delta)$ при $\delta \to 0+$. Первый из них называется *верхним пределом функции f в точке p по множеству A* и обозначается символом

$$\varlimsup_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = \lim_{\delta \to 0+} u(\delta) = \lim_{\delta \to 0+} \sup_{x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}} f(x). \tag{5.11.14}$$

Второй предел называется *нижним пределом функции f в точке p по множеству A* и обозначается символом

$$\varliminf_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = \lim_{\delta \to 0+} l(\delta) = \lim_{\delta \to 0+} \inf_{x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}} f(x). \tag{5.11.15}$$

Из соотношений (5.11.13) выводим неравенство

$$\varliminf_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) \le \varlimsup_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x). \tag{5.11.16}$$

Рассмотрение случая, когда предельной точкой является $+\infty$ или $-\infty$, можно свести к предыдущему следующим образом. Элементарную окрестность точки $+\infty$ удобно параметризовать действительным числом $\delta > 0$:

$$\mathcal{O}_\delta(+\infty) = \Big\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x > \frac{1}{\delta}\Big\}.$$

Аналогично

$$\mathcal{O}_\delta(-\infty) = \Big\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x < -\frac{1}{\delta}\Big\}.$$

Такое определение элементарных окрестностей несобственных точек согласуется с определением 4.12. Более того, для элементарных окрестностей $\mathcal{O}_\delta(+\infty)$ и $\mathcal{O}_\delta(-\infty)$ справедлива иерархия (5.11.12):

$$\mathcal{O}_\delta(+\infty) \subset \mathcal{O}_{\delta_1}(+\infty) \quad \text{при} \quad \delta < \delta_1$$

и

$$\mathcal{O}_\delta(-\infty) \subset \mathcal{O}_{\delta_1}(-\infty) \quad \text{при} \quad \delta < \delta_1.$$

Рассмотрим теперь функцию $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ и пусть $+\infty \in \mathcal{L}im\, A$. В определение величин $u(\delta)$ и $l(\delta)$ можно подставить элементарную окрестность $\mathcal{O}_\delta(+\infty)$, $\delta > 0$. Полученные функции будут обладать свойством монотонности, сформулированным выше. Поэтому определены величины

$$\varlimsup_{\substack{x\to+\infty\\ x\in A}} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} u(\delta) = \lim_{\delta\to 0+} \sup_{x\in\mathcal{O}_\delta(+\infty)\cap A\setminus\{+\infty\}} f(x) \qquad (5.11.17)$$

и

$$\varliminf_{\substack{x\to+\infty\\ x\in A}} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} u(\delta) = \lim_{\delta\to 0+} \sup_{x\in\mathcal{O}_\delta(+\infty)\cap A\setminus\{+\infty\}} f(x), \qquad (5.11.18)$$

называемые, соотвественно, *верхним и нижним пределами функции* f в точке $+\infty$ по множеству A. Для этих пределов справедливо неравенство (5.11.16) в точке $p = +\infty$.

Аналогично предыдущему определяются *верхний и нижний пределы функции* f в точке $-\infty$ по множеству A, который для которых также выполняется неравенство (5.11.16) в точке $p = -\infty$.

5.42. Задача. 1) Доказать, что верхний предел функции $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ в точке $p \in \mathcal{L}im\, A$ по множеству A равен

$$\sup_{\{s_n\}} \lim_{n\to\infty} f(s_n),$$

где верхняя грань берется по всем последовательностям $s_n \in A \setminus \{p\}$, $n \in \mathbb{N}$, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n)$.

2) Доказать, что нижний предел функции $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ в точке $p \in \mathcal{L}im\, A$ по множеству A равен

$$\inf_{\{s_n\}} \lim_{n\to\infty} f(s_n),$$

где нижний предел берется по всем последовательностям $s_n \in A \setminus \{p\}$, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n)$.

5.43. Признак существования предела. *Функция $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ имеет предел при $x \to p \in \mathcal{L}im\, A$ по множеству A тогда и только тогда, когда в неравенстве* (5.11.16) *имеет место равенство:*

$$\varliminf_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = \varlimsup_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x). \tag{5.11.19}$$

Доказательство. 1-ый случай: $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = a \in \mathbb{R}$.

Необходимость. По условию для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $\mathcal{O}_\delta(p) \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что

$$|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для любой точки $x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}$.

Отсюда выводим

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < a + \frac{\varepsilon}{2}$$

для любой точки $x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}$. Следовательно, имеем

$$u(\delta) = \sup_{x\in\mathcal{O}_\delta(p)\cap A\setminus\{p\}} f(x) \le a + \frac{\varepsilon}{2},$$

и

$$l(\delta) = \inf_{x\in\mathcal{O}_\delta(p)\cap A\setminus\{p\}} f(x) \ge a - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом,

$$\varlimsup_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} u(\delta) \le a + \frac{\varepsilon}{2},$$

а

$$\varliminf_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} l(\delta) \ge a - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь выводим

$$0 \le \varlimsup_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) - \varliminf_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как ε — произвольное положительное число, равенство верхнего предела с нижним доказано.

Достаточность. Пусть теперь верхний и нижний пределы совпадают и равны $a \in \mathbb{R}$. Тогда для любого ε найдется число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$a - \varepsilon < l(\delta) \le u(\delta) < a + \varepsilon$$

для любой точки $\delta \in (0, \delta_0)$. По определению величин $u(\delta)$ и $l(\delta)$ имеем

$$l(\delta) \le f(x) \le u(\delta)$$

для любой точки $x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}$. Из написанного выше находим

$$a - \varepsilon < l(\delta) \le f(x) \le u(\delta) < a + \varepsilon$$

для любой точки $x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}$. Отсюда выводим

$$|f(x) - a| < \varepsilon$$

для любой точки $x \in (\mathcal{O}_\delta(p) \cap A) \setminus \{p\}$. Так как выбор ε произволен, получаем требуемое: $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = a$.

2-ой случай: $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = +\infty$.

Необходимость. По условию для любого $L > 0$ существует окрестность $\mathcal{O}_\delta(p) \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что

$$f(x) > L$$

для любой точки $x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}$.

Отсюда выводим

$$l(\delta) = \inf_{x\in\mathcal{O}_\delta(p)\cap A\setminus\{p\}} f(x) \ge L.$$

Таким образом,

$$\varlimsup_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} u(\delta) \ge \varliminf_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} l(\delta) \ge L.$$

Так как L — произвольное число, выводим

$$\varlimsup_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = \varliminf_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = +\infty.$$

Достаточность. Пусть теперь верхний и нижний пределы совпадают и равны $+\infty$. Тогда для любого ε найдется число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$L < l(\delta)$$

для любой точки $\delta \in (0, \delta_0)$. По определению величины $l(\delta)$ имеем

$$l(\delta) \le f(x)$$

для любой точки $x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}$. Из написанного выше выводим

$$L < f(x)$$

для любой точки $x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}$. Так как выбор L произволен, получаем требуемое: $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = +\infty$.

3-ий случай: $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\in A}} f(x) = -\infty$ рассматривается аналогично. Доказать!

5.44. Примеры. Доказать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}$, не имеет предела в каждой точке области определения.

Указание. В любой окрестности точки $p \in \mathbb{R}$ есть как рациональные, так и иррациональные точки. Отсюда по определению верхнего и нижнего пределов получаем, что $\varlimsup\limits_{x\to p} D(x) = 1$, а $\varliminf\limits_{x\to p} D(x) = 0$, где $p \in \mathbb{R}$ — произвольная точка.

5.12 Асимптотические отношения сравнения. Символы O и o, правила оперирования с ними.

Пусть на множестве $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ заданы две функции f и g, и фиксирована точка $p \in \mathcal{L}im\, A$.

5.45. Определение. Будем говорить, что функция $f(x)$ *бесконечно мала относительно функции $g(x)$ при x, стремящемся к p по множеству A,* если для каждого $\varepsilon > 0$ справедливо следующее асимптотическое неравенство

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}.$$

В этом случае говорят также, что $f(x)$ *есть о-малое от $g(x)$ при $x \to p$ по множеству A*, и пишут $f(x) = o(g(x))\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$.

5.46. Основные свойства. 1) $f(x) = o(1)\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$ *тогда и только тогда, когда* $f(x) \to 0\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$.

2) $f(x) = o(g(x))\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$ *тогда и только тогда, когда существует функция* $\alpha(x) = o(1)$ *такая, что* $f(x) = \alpha(x)g(x)\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$.

Доказательство. Доказательство первого свойства вытекает непосредственно из сравнения двух определений.

Докажем второе свойство. Необходимость. Положим

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, & \text{если } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{5.12.20}$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ существует $V \in \mathcal{N}_e(p)$, что $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ для любого $x \in V \cap A \setminus \{p\}$, то для таких x одновременно получаем $f(x) = \alpha(x)g(x)$ и $|\alpha(x)| \leq \varepsilon$. Согласно арифметическому определению предела 5.1 имеем $\alpha(x) = o(1)$.

Достаточность очевидна.

5.47. Задача. Доказать, что если $g(x) \neq 0\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$, то $f(x) = o(g(x))\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$ тогда и только тогда, когда $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$.

5.48. Задача. Доказать, что

1) если $k < n$, то $x^n = o(x^k)\big|_{x\to 0}$ и $x^k = o(x^n)\big|_{x\to\infty}$;

2) $x^n = o(e^x)\big|_{x\to\infty}$ для любого положительного числа n.

5.49. Определение. Говорят, что $f(x)$ есть *O-большое от $g(x)$ при $x \to p$ по множеству A*, и пишут $f(x) = O(g(x))\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$, если найдётся такая константа $C < \infty$, что

$$|f(x)| \leq C|g(x)|\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}.$$

5.50. Задача. Доказать, что $f(x) = O(g(x))\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$ тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x)$, определенная формулой (5.12.20), асимптотически ограничена при $x \to p$ по множеству A, т. е. $\alpha(x) = O(1)\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$.

5.51. Определение. Будем говорить, что вещественнозназная функция $f(x)$ *эквивалентна функции* $g(x)$ *при* $x \to p$ *по множеству* A, и писать $f(x){\sim}g(x)$, если

$$f(x) - g(x) = o(g(x))\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}.$$

5.52. Предложение. *Доказать, что* $f(x) \sim g(x)\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$ *тогда и только тогда, когда существует вещественнозначная функция*

$$u(x) \to 1\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}} \quad \textit{такая, что} \quad f(x) = u(x)g(x)\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}.$$

Доказательство. Если $f \sim g$, то $f(x) - g(x) = \alpha(x)g(x)\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$, где

$$\alpha(x) \to 0\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}.$$

Отсюда выводим $f(x) = (1 + \alpha(x))g(x)$ и, стало быть, функция $u(x) = 1 + \alpha(x)$ удовлетворяет требуемым условиям: $u(x) \to 1\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$.

Если же $f(x) = u(x)g(x)$, где $u \to 1\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$, то

$$f(x) - g(x) = (1 - u(x))g(x) = o(g(x))\,\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}.$$

Функцию $u(x)$ со значениями в $\mathbb{R}$ называют *асимптотической единицей при* $x \to p$ по множеству A, если $u(x) \sim 1\Big|_{\substack{x\to p\\ x\in A\setminus\{p\}}}$.

Ниже всюду в этом разделе там, где под знаками $=$, $\sim$ *или* $\to$ *нет приписки* $x \to p$, $x \in A \setminus \{p\}$, *она незримо присутствует.*

5.53. Задачи. Основные свойства асимптотических сравнений.

1) Отношение асимптотической эквивалентности
рефлексивно: $f \sim f$;
симметрично: *если* $f \sim g$, *то* $g \sim f$; и
транзитивно: *если* $f \sim g$ *и* $g \sim h$, *то* $f \sim h$.

2) Если $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$, то $f_1f_2 \sim g_1g_2$. Если к тому же функции g_1 и g_2 неотрицательны, то $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.

3) Если $f \sim g$ и $g \to a$, то $f \to a$.

5.54. Задача. Доказать, что если $g(x) \neq 0$ при $x \to p$, то $f(x) \sim g(x)$ тогда и только тогда, когда $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$.

5.55. Задачи.

1) Если $f = o(g)$, то $f = O(g)$. Если $f \sim g$, то $f = O(g)$.

2) Если $f = o(g)$ и $g = O(h)$, то $f = o(h)$.

3) Если $f_1 = o(g_1)$ и $f_2 = O(g_2)$, то $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.

4) Если $f_1 = o(g_1)$ и $f_2 = o(g_2)$, то $f_1 + f_2 = o(|g_1| + |g_2|)$.

5) При $x \to 0$ всякий полином $P(x)$ эквивалентен своему младшему члену, а при $x \to \infty$ — старшему.

6) $e^x - \left(1 + \ldots + \frac{x^k}{k!}\right) \sim \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Big|_{x\to 0}$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

7) $\ln(1+x) - x \sim -\frac{x^2}{2} \Big|_{x\to 0}$.

8) $\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \sim \frac{x^3}{3} \Big|_{x\to 0}$.

9) $\sin x - x \sim -\frac{x^3}{3!} \Big|_{x\to 0}$.

10) $\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \sim \frac{x^5}{5!} \Big|_{x\to 0}$.

11) $\arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6} \Big|_{x\to 0}$.

12) $\arcsin x - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) \sim \frac{3x^5}{40} \Big|_{x\to 0}$.

13) $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2} \Big|_{x\to 0}$.

14) $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \sim \frac{x^4}{4!} \Big|_{x\to 0}$.

15) $\arccos x - \left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6}\right)\right) \sim \frac{3x^5}{40} \Big|_{x\to 0}$.

16) $\operatorname{tg} x - x \sim \frac{x^3}{3} \Big|_{x\to 0}$.

17) $\operatorname{tg} x - \left(x + \frac{x^3}{3}\right) \sim \frac{2x^5}{15} \Big|_{x\to 0}$.

18) $\arctan x - x \sim -\frac{x^3}{3} \Big|_{x\to 0}$.

19) $\arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \sim \frac{x^5}{5} \Big|_{x\to 0}$.

Приведенные асимптотические сравнения можно применять при раскрытии неопределенностей вида $\frac{0}{0}$.

5.56. Метод раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ с помощью асимптотических разложений. Рассмотрим отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ таких, что каждая из них имеет предел 0 при $x \to 0$. Такую ситуацию называют неопределенностью вида $\frac{0}{0}$.

Понятно, что общие теоремы вычисления пределов в этом случае не работают.

Способ нахождения пределов в этом случае состоит в следующем.

1) Находим порядок стремления к нулю знаменателя:

$$g(x) = bx^k + o(x^k), \quad \text{где} \quad k > 0, \quad \text{а} \quad b \neq 0;$$

2) находим порядок стремления к нулю числителя:

$$f(x) = ax^l + o(x^l), \quad \text{где} \quad l > 0, \quad \text{а} \quad a \neq 0;$$

3) тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^l + o(x^l)}{bx^k + o(x^k)};$$

4) дальнейший анализ сводится к рассмотрению трех случаев:

а) $k = l$: в этом случае

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^k + o(x^k)}{bx^k + o(x^k)} = \frac{a + o(1)}{b + o(1)} \to \frac{a}{b}\Big|_{x\to 0};$$

а) $l > k$: в этом случае

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^l + o(x^l)}{bx^k + o(x^k)} = \frac{ax^{l-k} + o(x^{l-k})}{b + o(1)} \to 0\,|_{x\to 0};$$

а) $l < k$: в этом случае

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^l + o(x^l)}{bx^k + o(x^k)} = \frac{a + o(1)}{bx^{k-l} + o(x^{k-l})} \to \pm\infty\,|_{x\to 0};$$

5.57. Примеры. 1) Применим изложенный выше метод для нахождения предела $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Очевидно здесь мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Делаем замену переменной $x - 1 = y$. Тогда

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^2 - 1}{2(1+y)^2 - (1+y) - 1}$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^2 - 1}{2(1+2y+y^2) - y - 2} = \lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^2 - 1}{3y + o(y)}$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{2y + o(y)}{3y + o(y)} = \frac{2}{3}.$$

2) Найти предел $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$. Опять неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Делаем замену переменной $x - 1 = y$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 1$. Знаменатель $x^{50} - 2x + 1 = (1+y)^{50} - 2(1+y) + 2 = (1+50y+o(y)) - 2(1+y) + 2 = 48y + o(y)$ при $y \to 0$. Аналогично числитель $x^{100} - 2x + 1 = 98y + o(y)$ при $y \to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{98y+o(y)}{48y+o(y)} = \frac{98}{48} = \frac{49}{24}$.

6 Непрерывные функции

6.1 Определение непрерывности функции в точке и ее свойства

Приведем классическое определение непрерывности.

6.1. Определение. Фиксируем множество $A \subset \mathbb{R}$, функцию $f : A \to \mathbb{R}$ и точку $p \in A$. Мы говорим, что функция $f : A \to \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* $p \in A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in A$ с условием $|x - p| < \delta$ выполняется соотношение

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon. \tag{6.1.1}$$

Функция $f : A \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной* на A, если она непрерывна в каждой точке множества A.

Понятно, что если p — изолированная точка множества A, то в такой точке функция $f : A \to \mathbb{R}$ всегда будет непрерывной (существует такое δ, что точка $x \in A$ с условием $|x - p| < \delta$ — только одна: сама точка p).

Если же p — предельная точка множества A, то приведенное определение эквивалентно следующему (см. теорему 5.17).

6.2. Лемма. *Фиксируем множество $A \subset \mathbb{R}$, функцию $f : A \to \mathbb{R}$ и точку $p \in A$, предельную для множества A. Функция $f : A \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $p \in A$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = f(p). \tag{6.1.2}$$

Лемма 6.2 говорит о том, что в предельной точке $p \in A$ функция f непрерывна в том случае, когда предел

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x)$$

существует и равен $f(p)$.

Заметим, что непрерывность — локальное свойство.

6.3. Предложение о локальном характере непрерывности. 1) *Пусть функция $f : A \to B$ непрерывна в точке $p \in A$. Тогда для любой окрестности $V \in \mathcal{N}_e(p)$ функция $f : A \cap V \to B$ непрерывна в точке p.*

2) *Пусть задана функция $f : A \to B$. Если имеется окрестность V такая, что функция $f : A \cap V \to B$ непрерывна в точке p, то и функция $f : A \to B$ непрерывна в точке p.*

6.4. Топологический критерий непрерывности. *Функция $f : A \to B$ непрерывна в точке $p \in A$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности $U \in \mathcal{N}_e(f(p))$ существует окрестность $V \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что для любой точки $x \in V \cap A$ имеем $f(x) \in U$.*

Доказательство. Эта теорема является прямым следствием топологического определения 5.16 предела функции.

6.5. Теорема о непрерывности композиции. *Если функция $f : A \to B$ непрерывна в точке $p \in A$, и функция $g : B \to S$ непрерывна в точке $q = f(p)$, то композиция $g \circ f : A \to S$ непрерывна в точке p.*

Доказательство. Если p — изолированная точка, то композиция непрерывна в точке p по определению. Действительно, если p — изолированная точка, то существует окрестность $V \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что $f(x) = q$ для любой точки $x \in V \cap A$. Тогда для любой точки $x \in V \cap A$ имеем $g \circ f(x) = g(q) = g \circ f(p)$. По определению композиция $g \circ f$ непрерывна в точке p.

Во всех остальных случаях теорема 6.5 является следствием теоремы 5.32 о пределе композиции.

6.1.1 Примеры и свойства непрерывных функций

1) Любая постоянная функция непрерывна.
2) Тождественное отображение $\mathrm{id}_A : A \to A$ непрерывно.
3) Сужение непрерывного отображения непрерывно.
4) Экспоненциальная функция $\exp x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

6.6. Предложение о наследовании непрерывности. *Если функция $f : A \to B$ непрерывна в точке $p \in A$, а функция $g : D \to B$ такова, что $p \in D$, $D \subset A$ и $f(x) = g(x)$ для всех точек $x \in D$, то функция $g : D \to B$ непрерывна в точке p.*

6.1.2 Непрерывность промежуточной функции

Следующая лемма — прямое следствие теоремы 5.25 и определения непрерывности.

6.7. Лемма о непрерывности промежуточной функции. *Если функции $f, u, v : A \to \mathbb{R}$ таковы, что $f(x) \in [u(x), v(x)]$ для всех $x \in A$, функции u, v непрерывны в точке $p \in A$ и $u(p) = v(p)$, то функция f также непрерывна в точке p.*

6.1.3 Асимптотическое свойство точечных неравенств для непрерывных функций

6.8. Предложение об асимптотическом неравенстве. *Если функции $f, g : A \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $p \in A$ и $f(p) < g(p)$, то $f(x) < g(x)$ в некоторой окрестности точки p, т. е. существует окрестность $V \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что*

$$f(x) < g(x) \quad \text{для всех} \quad x \in V \cap A \quad (\text{или } f(x) < g(x) \,|_{\substack{x \to p \\ x \in A}}).$$

Сформулированное утверждение — прямое следствие теоремы 5.24.

6.1.4 Непрерывность и арифметические операции.

Следствием утверждений раздела 3.7 является следующая

6.9. Теорема. *Сумма и произведение непрерывных функций непрерывны: если функции $f, g : A \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $p \in A$, то функции $f + g$ и $f \cdot g$ также непрерывны в этой точке.*

Если функция f непрерывна в точке p и $f(p) \neq 0$, то функция $\frac{1}{f}$ непрерывна в точке p.

6.10. Пример. Каждая рациональная функция, т. е. функция, представимая в виде отношения двух полиномов, непрерывна во всех точках, где знаменатель не обращается в нуль.

6.1.5 Критерий непрерывности Гейне

Прямым следствием критерия 5.39 и определения непрерывности является

6.11. Критерий непрерывности Гейне. *Функция $f : A \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $p \in A$ в том и лишь в том случае, когда она каждую последовательность $x_n \in A$, сходящуюся к p, переводит в последовательность $f(x_n)$, сходящуюся к $f(p)$.*

6.2 Точки разрыва функции.

6.12. Определение. Говорят, что функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ имеет в точке x области определения разрыв *первого рода*, если f имеет конечный предел слева в точке x:

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x < p}} f(x), \quad \text{обозначаемый символом } f(p - 0),$$

и конечный предел справа в точке x:

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x>p}} f(x), \quad \text{обозначаемый символом } f(p+0),$$

и при этом нарушается хотя бы одно из равенств в соотношениях

$$f(p-0) = f(p) = f(p+0). \tag{6.2.3}$$

Если же один из пределов не существует или равен бесконечности, то говорят, о разрыве *второго рода* с соответствующей стороны.

6.13. Задача. Доказать, что если в соотношениях (6.2.3) справедливы все равенства, то функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке p.

6.14. Задача. Приведите примеры функций, имеющих в заданной точке разрывы второго рода.

6.15. Пример. Функция Римана $[0,1] \ni x \mapsto \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \text{ где } m \text{ и } n \text{ — взаимно простые числа,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \end{cases}$$

разрывна при каждом рациональном значении x и непрерывна при каждом иррациональном значении x.

Разрывность функции Римана в рациональных точках, вытекает из критерия непрерывности Гейне. В самом деле, для точки $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ возьмем произвольную последовательность $[0,1] \setminus \mathbb{Q} \ni x_n \to x$. Тогда, с одной стороны, $f(x_n) = 0 \to 0$, а с другой $f(x) \neq 0$.

Пусть теперь $x \in [0,1]$ — произвольная иррациональная точка. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ — такие, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тогда имеем включения

$$\begin{aligned} \{x \in [0,1] : f(x) \geq \varepsilon\} &\subset \left\{x \in [0,1] : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \\ &\subset \left\{x = \frac{p}{q} \in [0,1] : p, q \in \mathbb{N},\ q \leq n,\ p \leq q\right\} = D_\varepsilon. \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Множество D_ε состоит из конечного набора рациональных точек и поэтому число $\delta = \min\{|t-x| : t \in D_\varepsilon\}$ строго положительное. Поэтому для любого $y \in [0,1]$ такого, что $|y-x| < \delta$, имеем

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y)| < \varepsilon.$$

Непрерывность в точке x доказана.

6.16. Пример. Функция Дирихле $[0,1] \ni x \mapsto \mathbb{R}$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in Q, \text{ где } x \text{ — рациональное число}, \\ 0, & \text{если } x \in [0,1] \setminus Q \text{ — иррациональное число}, \end{cases}$$

разрывна во всех точках отрезка $[0,1]$.

Для решения этой задачи, достаточно применить критерий непрерывности Гейне.

6.17. Теорема. *Всякая монотонная функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ может иметь разрывы только первого рода, причем не более чем в счетной совокупности точек.*

Доказательство. Пусть для определенности область определения функции $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ — открытый интервал и f — неубывающая функция. Тогда по теореме 5.28 функция f имеет предел слева в каждой точке p области определения:

$$f(p-0) = \lim_{\substack{x\to p\\ x<p}} f(x) = \sup_{x<p} f(x),$$

а по задаче 5.29 — предел справа

$$f(p+0) = \lim_{\substack{x\to p\\ x>p}} f(x) = \inf_{p<x} f(x).$$

Очевидно, $f(x) \le f(p)$ в каждой точке для $x < p$, поэтому $f(p-0) \le f(p)$ по теореме 5.24 о неравенстве пределов. Аналогично, $f(p) \le f(p+0)$. Таким образом, p — точка непрерывности, если $f(p-0) = f(p+0)$, и p — точка разрыва, если $f(p-0) < f(p+0)$.

Следовательно, каждой точке разрыва соответствует интервал

$$(f(p-0), f(p+0))$$

в области значений функции, имеющий ненулевую длину. При этом различным точкам разрыва соответствуют различные интервалы. В самом деле, если $p < q$ — точки разрыва, то для любых точек $p < x < z < y < q$ имеем $f(p) \le f(x) \le f(z) \le f(y) \le f(q)$. Отсюда по теореме 5.24 о неравенстве пределов выводим

$$f(p) \le f(p+0) \le f(z) \le f(q-0) \le f(q).$$

Из последних неравенств заключаем, что пересечение

$$(f(p-0), f(p+0) \cap (f(q-0), f(q+0))$$

пустое.

Таким образом, различным точка разрыва соответствуют непересекающиеся интервалы положительной длины. В каждом таком интервале выберем рациональную точку. Таким образом, мы получаем инъективное отображение из множества точек разрыва во множество рациональных точек.

Следовательно, совокупность точек разрыва или конечная, или счетная.

6.18. Теорема. *Всякая неубывающая функция $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ равна сумме двух функций:*

$$g = g_1 + g_2, \tag{6.2.5}$$

где $g_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ — неубывающая непрерывная функция, а $g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функция скачков:

$$g_2(x) = \sum_{k,\, c_k < x} g_k^+ + \sum_{k,\, c_k \le x} g_k^- . \tag{6.2.6}$$

6.3 Глобальные свойства непрерывных функций.

6.3.1 Теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях на замкнутом отрезке.

6.19. Теорема Вейерштрасса об экстремумах. *Любая непрерывная вещественная функция, определенная на ограниченном отрезке вещественной оси, обладает наибольшим и наименьшим значениями: если отображение $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывно, то найдутся такие точки $p, q \in [a, b]$, что*

$$f(p) \le f(x) \le f(q)$$

для любой точки $x \in [a, b]$.

Доказательство. Пусть $A = [a, b]$, $B = f(A)$, $M = \sup B$ и $y_n \in B$ — какая-нибудь последовательность, сходящаяся к M. Для каждого номера n найдётся точка $x_n \in A$ такая, что $y_n = f(x_n)$. По теореме Вейерштрасса о частичных пределах последовательность x_n обладает подпоследовательностью x_{n_k}, сходящейся к некоторой точке $q \in [a, b]$. Поскольку функция f непрерывна, то $f(x_{n_k}) \to f(q)\,|_{k\to\infty}$ по признаку

6.11 непрерывности Гейне. С другой стороны, так как $f(x_n) \to M\,|_{n\to\infty}$, то $f(x_{n_k}) \to M\,|_{k\to\infty}$. Ввиду единственности предела $f(q) = M$.

Следовательно, для всех $x \in [a, b]$ имеем $f(x) \leq f(q)$.

Существование наименьшего значения функции f устанавливается аналогично.

6.20. Следствие. *Всякая непрерывная $\mathbb{R}$-значная функция, определенная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, ограничена.*

6.21. Задача. Привести примеры, показывающие, что для разрывных функций на отрезке, а также для непрерывных функций на промежутках, отличных от отрезков, заключения предыдущих двух утверждений не верны.

6.3.2 Теорема Больцано — Коши о промежуточных значениях.

6.22. Теорема Больцано — Коши. *Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки y отрезка $[f(a), f(b)]$ (или отрезка $[f(b), f(a)]$) не пуст и, более того, содержит наибольший и наименьший элементы.*

Доказательство. Предположим для определённости, что $a \leq b$ и что $f(a) \leq f(b)$. Фиксируем произвольное число $y \in [f(a), f(b)]$. Докажем, что множество $f^{-1}(y)$ непустое.

Пусть $X = \{x \in [a, b] : f(x) \leq y\}$ и $p = \sup X$. Поскольку $a \in X$ и $a \leq b$, то $p \in [a, b]$. По критерию точной верхней границы найдётся последовательность $x_n \in X$, сходящаяся к p. Так как функция f непрерывна, то $f(x_n) \to f(p)\,|_{n\to\infty}$. Поскольку $f(x_n) \leq y$, то по теореме о неравенстве пределов $f(p) \leq y$.

Покажем, что $y \leq f(p)$. Это так, если $p = b$. Поэтому будем предполагать, что $p < b$. Так как на полуинтервале $(p, b]$ нет точек множества X, то $f(t) > y$ для каждого $t \in (p, b]$. Пусть $t_n \in (p, b]$ — какая-нибудь последовательность, сходящаяся к p. В силу непрерывности функции f и по теореме о неравенстве пределов имеем $f(p) = \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) \geq y$.

Таким образом, $f(p) = y$, т. е. $p \in f^{-1}(y)$, причём $p = \max f^{-1}(y)$, так как $f(t) > y$ для всех $t \in (p, b]$.

Привести доказательство существования наименьшего элемента прообраза $f^{-1}(y)$.

6.23. Следствие. *Для всякой непрерывной $\mathbb{R}$-значной функции, определенной на замкнутом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, такой, что $f(a) \cdot f(b) < 0$*

(т. е. функция f принимает значения разных знаков на концах отрезка $[a, b]$), уравнение

$$f(x) = 0$$

имеет решение на отрезке $[a, b]$.

6.24. Задача. Многочлен нечетной степени имеет, по крайней мере, один вещественный корень.

6.25. Задача. Непрерывная вещественная функция преобразует промежутки в промежутки, а отрезки — в отрезки.

6.3.3 Признак Больцано строгой монотонности.

6.26. Признак Больцано строгой монотонности. *На всяком промежутке $T \subset \mathbb{R}$ любая непрерывная инъективная вещественная функция f строго монотонна.*

Доказательство. Достаточно показать, что если f строго возрастает на какой-нибудь паре точек $x, y \in T$, то на любой другой паре различных точек она также строго возрастает.

$1^{\text{ый}}$ шаг. Пусть $x < y$ и $f(x) < f(y)$, а точка $z \in T$ такова, что $x < y < z$.

Докажем, что вместе с $f(x) < f(y)$ имеем также и $f(y) < f(z)$. Допустим, что это не так: $f(y) > f(z)$. Тогда согласно теореме Больцано — Коши прообраз $f^{-1}(t)$ любой точки t интервала

$$(\max(f(x), f(z)), f(y))$$

имеет, по крайней мере, по одному прообразу на каждом из интервалов (x, y) и (y, z). Это несовместимо с инъективностью отображения f.

Аналогично можно доказать, что $f(z) < f(x)$ для любой точки $z < x$.

Если теперь $x < z < y$ и $f(x) < f(z)$, то по доказанному имеем $f(z) < f(y)$. Если же $f(x) > f(z)$, для функции $-f$ имеем $-f(x) < -f(z)$, откуда в силу доказанного получаем $-f(z) < -f(y)$. Из последних двух неравенств выводим $f(x) > f(y)$, что противоречит предположению.

Следовательно, если функция f возрастает на паре точек x и y, то она возрастает и на произвольной тройке точек, две из которых x и y.

$2^{\text{ой}}$ шаг. Из доказанного на первом шаге вытекает, что функция f строго возрастает на произвольной четвёрке точек, две из которых x и y, а две другие точки z, u промежутка T произвольные.

Действительно, пусть, например, $x < z < y$. Тогда в силу доказанного имеем $f(x) < f(z) < f(y)$. Если $z < y < u$, то в силу доказанного получаем $f(z) < f(y) < f(u)$. Все остальные случаи взаимного расположения точек рассматриваются аналогично.

6.3.4 Теорема о существовании непрерывной обратной функции.

6.27. Теорема об обратной функции. *Если $f : T \to \mathbb{R}$ — непрерывная и строго возрастающая функция на промежутке $T \subset \overline{\mathbb{R}}$, то*

1) *образ $f(T)$ промежутка T является промежутком того же типа, что и T, с концами $\inf f(T)$, $\sup f(T)$;*

2) *отображение $f : T \to f(T)$ обратимо;*

3) *обратное к нему отображение $g : f(T) \to T$ непрерывное и строго возрастающее.*

Доказательство. Будем полагать, что промежуток T содержит, по крайней мере, две точки. Тогда и образ содержит не менее двух точек.

1) Воспользуемся предложением 1.95 для проверки того, что образ $X = f(T)$ является промежутком. Фиксируем две произвольные точки $a, b \in X$ и докажем, что $[a, b] \subset X$. Так как $a = f(x)$ и $b = f(y)$ для некоторых $x, y \in T$, $x < y$, то по теореме Больцано — Коши о промежуточных значениях для любой точки $c \in (a, b)$ найдется точка $z \in (x, y)$ такая, что $f(z) = c$. Следовательно, $[a, b] \subset X$ и X — промежуток.

Так как функция f строго возрастает на T, точка $u \in T$ будет минимальным (максимальным) элементом промежутка T тогда и только тогда, когда её образ $f(u)$ окажется минимальным (максимальным) элементом промежутка X.

2) Отображение $f : T \to X = f(T)$ инъективно и сюръективно, т. е. биективно и, значит, обратимо.

3) Легко видеть, что обратное отображение $g = f^{-1} : X \to T$ строго возрастающее. Покажем, что оно непрерывно в каждой точке $p \in X$. Пусть U — какая-либо элементарная окрестность точки $q = g(p)$. Согласно топологическому критерию непрерывности нам достаточно установить наличие такой элементарной окрестности V точки p, что

$$g(V \cap X) \subset U.$$

Допустим, что q — внутренняя точка промежутка T. В этом случае можно считать, что $U = (q - \varepsilon, q + \varepsilon) \subset T$, $\varepsilon > 0$. Согласно пункту 1) множество $f(U)$ является интервалом и, значит, содержит некоторую элементарную окрестностью V точки p. Поскольку отображения f и g взаимно обратны, то $g(V) \subset g(f(U)) = U$.

Допустим теперь, что q — крайняя точка промежутка T, например, его левый конец. Рассмотрим два случая:

1) $q \in \mathbb{R}$;

2) $q = -\infty$.

В первом случае $U = (q-\varepsilon, q+\varepsilon)$ содержит промежуток $S = [q, q+\varepsilon) \subset T$. Согласно пункту 1) имеем $f(S) = [f(q), f(q+\varepsilon))$. Пусть $f(q+\varepsilon) = f(q)+\delta$ (т. е. $f(q) \in \mathbb{R}$), $\delta > 0$. Положим $V = (f(q)-\delta, f(q)+\delta)$. Если же $f(q) = -\infty$, то положим $V = [-\infty, f(q+\varepsilon)$. В обоих случаях $V \cap X = f(S)$, а так как отображения f и g взаимно обратны, то $g(V \cap X) = g(f(S)) = S \subset U$. Тем самым, в любом из двух возможных случаев V является нужной элементарной окрестностью точки $p = f(q)$.

Во втором случае в качестве элементарной окрестности точки $-\infty$ возьмем произвольный промежуток $S = [-\infty, r) \subset T$. Согласно пункту 1) имеем $f(S) = [f(q), f(r))$. Если $f(q) = -\infty$, положим $V = [-\infty, f(r))$. Если же $f(q) \in \mathbb{R}$, положим $V = (f(q)-\delta, f(q)+\delta)$, где $\delta = f(r) - f(q)$. В обоих случаях $V \cap X = f(S)$, а так как отображения f и g взаимно обратны, то $g(V \cap X) = g(f(S)) = S \subset U$. Тем самым, в любом из двух возможных случаев V является нужной элементарной окрестностью точки $p = f(q)$.

6.28. Примеры. Примеры обратимых отображений:

1) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, обратная функция $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

2) $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$, обратная функция $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$;

3) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, обратная функция $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

4) $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, обратная функция $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$;

5) $2^x : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, обратная функция $\log_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

6.3.5 Равномерная непрерывность, теорема Кантора и модуль непрерывности

6.29. Определение. Фиксируем множество $A \subset \mathbb{R}$, функцию $f : A \to \mathbb{R}$. Мы говорим, что функция $f : A \to \mathbb{R}$ *равномерно непрерывна на* A, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x, y \in A$ с условием $|x-y| < \delta$ выполняется соотношение

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{6.3.7}$$

6.30. Примеры. 1) Если функция $f : A \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на A, то f непрерывна в каждой точке множества A. Поэтому функция $\operatorname{sign} x$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

2) Постоянная функция $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = a \in \mathbb{R}$ для всех $x \in A$, равномерно непрерывна на множестве A.

3) Тождественная функция $\mathrm{id}_A : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \in \mathbb{R}$ для всех $x \in A$, равномерно непрерывна на множестве A.

4) Функция x^2 равномерно непрерывна на любом промежутке $[a,b] \subset \mathbb{R}$, но не является таковой на $\mathbb{R}$.

5) Функция $\frac{1}{x}$ равномерно непрерывна на $[a,+\infty)$ для любого $a > 0$, но не является равномерно непрерывной на $(0,+\infty)$.

6.31. Теорема Кантора. *Пусть дан промежуток $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Всякая непрерывная на $[a,b]$ функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. По условию теоремы функция

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

непрерывна во всех точках отрезка $[a,b]$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $x \in [a,b]$ найдется элементарная окрестность $\mathcal{O}_{\delta_x}(x) = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ такая, что выполняется неравенство

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для любой точки } y \in [a,b] \cap \mathcal{O}_{\delta_x}(x) \ . \tag{6.3.8}$$

Семейство интервалов $S = \{\mathcal{O}_{\delta_x}(x) \mid x \in [a,b]\}$ образует покрытие отрезка $[a,b]$:

$$[a,b] \subset \bigcup_{x \in [a,b]} \mathcal{O}_{\delta_x}(x).$$

По теореме 4.6 существует положительное число δ такое, что всякий отрезок $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, длина $\beta - \alpha$ которого не превосходит δ, принадлежит какому-нибудь интервалу покрытия S. Тогда две произвольные точки $y, z \in [a,b]$ такие, что $|y - z| < \delta$, принадлежат какому-нибудь интервалу покрытия покрытия S, например $y, z \in \mathcal{O}_{\delta_{x_0}}(x_0)$. Оценим теперь приращение функции f в точках y, z: из неравенства (6.3.8) имеем

$$|f(y) - f(z)| \le |f(y) - f(x_0)| + |f(z) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для произвольных точек $y, z \in [a,b]$ таких, что $|y - z| < \delta$, имеем $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$.

Следовательно, данная функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывная.

6.32. Определение. Пусть даны множество $A \subset \mathbb{R}$ и функция $f : A \to \mathbb{R}$. Функция $\omega : [0,h) \to \mathbb{R}$, где $0 < h \le \infty$, называется *модулем непрерывности* функции f на множестве A, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) ω — неотрицательная возрастающая функция;

2) имеет предел в 0, равный нулю:

$$\lim_{t\to 0}\omega(t) = 0.$$

3) для любых $x_1, x_2 \in A$ таких, что $|x_1 - x_2| < h$, выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|).$$

6.33. Предложение. *Если функция $f : A \to \mathbb{R}$ имеет модуль непрерывности, то она равномерно непрерывна.*

Доказательство. Действительно, предположим, что для данной функции f существует функция $\omega : [0, h) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям 1) – 3) определения 6.32. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Так как $\omega(t) \to 0$ при $t \to 0$, то найдется $\delta \in (0, h)$ такое, что $\omega(t) < \varepsilon$ для любого $0 \leq t < \delta$. Возьмем произвольно точки $x_1, x_2 \in A$, для которых $|x_1 - x_2| < \delta$. Тогда $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|) < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то, тем самым, равномерная непрерывность функции f доказана.

6.34. Определение. Говорят, что функция $f : A \to \mathbb{R}$ удовлетворяет *условию Липшица*, если функция $t \in [0, \infty) \mapsto Ct$, где $C > 0$ — постоянная, является ее модулем непрерывности:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad \text{для всех } x, y \in A.$$

Если функция $t \in [0, h) \mapsto Ct^\alpha$, где C и α постоянные, причем $C > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$, есть модуль непрерывности функции f, то говорят, что f удовлетворяет *условию Гёльдера* с показателем α:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \text{для всех } x, y \in A,\ |x - y| \leq h.$$

Следующая теорема является обратной к предложению 6.33.

6.35. Теорема. *Пусть даны множество $A \subset \mathbb{R}$ и функция $f : A \to \mathbb{R}$. Предположим, что функция f равномерно непрерывна. Тогда функция $f : A \to \mathbb{R}$ имеет модуль непрерывности.*

В качестве такового можно взять функцию

$$\omega(t) = \{\sup_{x_1, x_2 \in A} |f(x_1) - f(x_2)| : |x_1 - x_2| \leq t\}. \tag{6.3.9}$$

Найдется $h > 0$ такое, что при $0 \leq t < h$ величина $\omega(t)$ конечна и обладает свойствами определения 6.32.

Доказательство. Пусть даны множество $A \subset \mathbb{R}$ и функция $f : A \to \mathbb{R}$. Для произвольного $t \geq 0$ определим величину $\omega(t)$ как указано в (6.3.9).

При всяком $t \geq 0$ функция $\omega(t)$ равна точной верхней грани некоторой неотрицательной функции. Отсюда выводим, что $\omega(t) \geq 0$ для всех $t \geq 0$.

Пусть t_1, t_2 таковы, что $0 \leq t_1 < t_2$. Если $x_1, x_2 \in A$ и $|x_1 - x_2| \leq t_1$, то имеем также $|x_1 - x_2| \leq t_2$. Следовательно, значение $\omega(t_2)$ определяется по более широкому набору пар (x_1, x_2) сравнительно со значением $\omega(t_1)$, и, значит, ее значение не может быть меньше значения $\omega(t_1)$. Таким образом, в силу известных свойств точной верхней грани функции отсюда вытекает, что

$$\omega(t_1) = \{\sup_{x_1,x_2\in A} |f(x_1) - f(x_2)| : |x_1 - x_2| \leq t_1\}$$
$$\leq \{\sup_{x_1,x_2\in A} |f(x_1) - f(x_2)| : |x_1 - x_2| \leq t_2\} = \omega(t_2) \quad (6.3.10)$$

Таким образом, первое условие определения 6.32 модуля непрерывности для функции ω выполнено.

По условию функция $f : A \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Согласно определению равномерной непрерывности, по нему найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $x_1, x_2 \in A$ таковы,

$$\text{что } |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon), \text{ то } |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.3.11)$$

Отсюда следует, во-первых, что для $\varepsilon = 1$ имеем

$$\omega(\delta(1)) = \{\sup_{x_1,x_2\in A} |f(x_1) - f(x_2)| : |x_1 - x_2| \leq \delta(1)\} \leq 1/2.$$

Следовательно, для $t \in [0, h]$, где $h = \delta(1)$, значение $\omega(t)$ конечное.

Во-вторых, из (6.3.11) вытекает, что для $t \in [0, \delta(\varepsilon))$ имеем

$$\omega(t) = \{\sup_{x_1,x_2\in A} |f(x_1) - f(x_2)| : |x_1 - x_2| \leq t\} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Так как для этого потребовалось лишь, чтобы выполнялось неравенство $t < \delta$, то, тем самым, доказано, что $\omega(t) \to 0$ при $t \to 0+$, так что для функции ω выполняется также и второе условие определения 6.32.

Пусть точки $x_1, x_2 \in A$ таковы, что $|x_1 - x_2| < h$. Положим $t = |x_1 - x_2|$. Тогда в силу (6.3.9), очевидно, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(t) = \omega(|x_1 - x_2|)$. Мы получаем, что третье условие определения 6.32 также выполняется с функцией ω, определенной формулой (6.3.9).

Теорема доказана.

7 Основные элементарные функции

7.1 Линейные функции и их функциональное описание. Существование разрывной линейной функции.

Аддитивной функцией, определенной на $\mathbb{R}$, называется функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающая свойством

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{7.1.1}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Пример аддитивной функции хорошо известен: легко проверить, что линейная функция $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$, где $a \in \mathbb{R}$ — фиксированное число, аддитивна. Мы сейчас докажем, что при одном дополнительном условии всякая аддитивная функция будет линейной функцией, указанной в этом примере.

7.1. Теорема. *Если аддитивная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ либо непрерывна, либо монотонна, то $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$, для некоторого числа $a \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Из условия (7.1.1) получаем, что $f(0) = 0$ и далее $f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) = 0$. Следовательно, линейная функция нечетная. Пусть $f(1) = a$.

Для любого фиксированного $x \in (0, \infty)$ по индукции имеем $f(nx) = nf(x)$, где $n \in \mathbb{N}$ — натуральное число. Полагая в последнем равенстве $x = \frac{1}{m}$, а $n = m$, получаем $mf(\frac{1}{m}) = f(1) = a$. Следовательно, $f(\frac{1}{m}) = a \cdot \frac{1}{m}$. С другой стороны, $f(\frac{n}{m}) = nf(\frac{1}{m}) = a \cdot \frac{n}{m}$. Таким образом, для любого рационального числа $q \in \mathbb{Q}$ имеем $f(q) = a \cdot q$.

Далее, в случае непрерывной линейной функции f рассмотрим произвольную точку $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и последовательность рациональных чисел $q_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда имеем

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} a \cdot q_n = a \cdot x, \tag{7.1.2}$$

так что в этом случае теорема доказана.

Если же линейная функция f монотонна (например, монотонно возрастает), то для произвольно выбранной точки $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ рассмотрим две последовательности рациональных точек $q_n < x$ и $x < s_n$ такие, что $s_n - q_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $0 \le f(s_n) - f(q_n) = a \cdot s_n - a \cdot q_n = a \cdot (s_n - q_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, x не является точкой разрыва монотонной функции f и поэтому функция f непрерывна. В силу доказанного выше она линейна.

Всякую аддитивную непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию будем называть *линейной*.

7.2 Экспонента и натуральный логарифм

Напомним, что функция

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

называется *экспоненциальной.*

7.2. Свойства экспоненциальной функции.

1) $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$;

2) $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ — *непрерывная и строго монотонно возрастающая функция*;

3) $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ — *биективное отображение.*

Доказательство. Первое свойство экспоненты доказано в теореме 3.101.

Докажем, что функция $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ непрерывная и строго возрастающая. Действительно, очевидно $\exp x > 1$, если $x > 0$. Для положительного $x \in \mathbb{R}$ по свойству (3.79) имеем $\exp x \cdot \exp(-x) = \exp 0 = 1$, откуда $\exp(-x) = [\exp x]^{-1} > 0$. Если $x < y$ — два числа, то $\exp(y-x) = \exp y \cdot \exp(-x) = \exp y \cdot [\exp x]^{-1} > 1$. Следовательно, $\exp x < \exp y$.

Непрерывность экспоненты в точке $x \in \mathbb{R}$ проверяется непосредственно: с учетом (3.11.61) выводим

$$\exp y - \exp x = \exp x \cdot (\exp(y-x) - 1) = \exp x \cdot O(y-x) = O(y-x)$$

при $y \to x$.

Заметим, что из неравенства $0 < x < \exp x$ непосредственно выводим $\lim\limits_{x\to\infty} \exp x = \infty$, и, следовательно, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$.

По теореме 6.27 функция $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ имеет непрерывную обратную. Обратную функцию называют *натуральным логарифмом* и обозначают символом ln.

7.3. Свойства натурального логарифма.

1) $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ — *биективное отображение;*

2) $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ — *непрерывная и строго монотонно возрастающая функция;*

3) $\ln xy = \ln x + \ln y$.

Доказательство. Первые два свойства выводим из теоремы об обратной функции. Для доказательства третьего рассмотрим $\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x)\exp(\ln y) = xy = \exp(\ln xy)$. Отсюда в силу биективности экспоненты получаем 3).

7.2.1 Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Для этого сделаем следующую замену: $\ln(1+x)=y$. Так как $\ln$ — непрерывная функция, то $y\to 0$ при $x\to 0$. Из равенства $\ln(1+x)=y$ выводим $x=\exp y-1$. По теореме о замене переменной в предельных переходах получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\exp y-1}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{y+o(y)}=1$$

(здесь в последнем переходе использовано асимптотическое разложение (3.11.61) при $n=1$).

7.4. Задача. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$ для любого положительного $\alpha\in\mathbb{R}$.

Свойство логарифма, сформулированное в этой задаче выражают словами: *логарифм растет медленнее любой степени* x.

Указание: С помощью замены $\ln x=y$ задача сводится к пределу $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}=0$.

7.3 Определения показательной и логарифмической функций. Их характеристические свойства.

По свойству (3.79) экспонента удовлетворяет следующему функциональному соотношению

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \tag{7.3.3}$$

для всех значений $x,y\in\mathbb{R}$.

Заметим, что этому же соотношению удовлетворяет также функция

$$f_a(x)=\exp(x\ln a), \tag{7.3.4}$$

где $a\in(0,\infty)$ — произвольное положительное число. Из школьного курса математики известно, что функции вида (7.3.4) называются показательными и обозначаются символом a^x. Наша ближайшая цель — показать, что при одном дополнительном условии все функции, удовлетворяющие функциональному соотношению (7.3.3), суть функции вида (7.3.4) (т. е. показательные).

7.5. Теорема. *Пусть $a \in (0, \infty)$, а функция $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) $g_a(1) = a$ *(условие нормировки),*

2) $g_a(x + y) = g_a(x) \cdot g_a(y)$ *для всех* $x, y \in \mathbb{R}$ *(экспоненциальное свойство или свойство показательной функции).*

Тогда функция $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *тождественно совпадает с функцией* $f_a(x) = \exp(x \ln a)$, *определенной в* (7.3.4).

Доказательство. Пусть $a \in (0, \infty)$ — фиксированное число. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ положим $f_a(x) = \exp(x \ln a)$. Функция f_a монотонна непрерывна и обладает свойствами 1 и 2. Функция g_a из условия теоремы обладает следующими свойствами:

a) $g_a(0) = 1$, ибо $a = g_a(1 + 0) = g_a(1) \cdot g_a(0) = a \cdot g_a(0)$;

b) $g_a(-x) = 1/g_a(x)$ для каждого $x \in \mathbb{R}$;

c) $g_a\left(\frac{m}{n}\right) = f_a\left(\frac{m}{n}\right)$, поскольку

$$g_a\left(\frac{m}{n}\right)^n = \underbrace{g_a\left(\frac{m}{n}\right) \cdot \ldots \cdot g_a\left(\frac{m}{n}\right)}_{n \text{ раз}} = g_a\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = g_a(m)$$

$$= \underbrace{g_a(1) \cdot \ldots \cdot g_a(1)}_{m \text{ раз}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}} = \underbrace{f_a(1) \cdot \ldots \cdot f_a(1)}_{m \text{ раз}} = f_a\left(\frac{m}{n}\right)^n.$$

Из свойств a)–b) вытекает, что любые две функции, обладающие свойствами 1 и 2, совпадают на множестве рациональных чисел. Если при этом они обе непрерывные, то они совпадают также и на множестве действительных чисел, так как $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.

Если же функция g_a монотонная, например, возрастающая, то фиксируем точку $x \in \mathbb{R}$ и рассмотрим произвольные последовательности рациональных чисел $u_n < p$ и $v_n > p$, сходящиеся к точке p. Тогда для функций f_a и g_a получаем

$$f_a(u_n) = g_a(u_n) \leq g_a(p) \leq g_a(v_n) = f_a(v_n).$$

Так как функция f_a непрерывная, то

$$f_a(p) = \lim_{n \to \infty} f_a(u_n) \leq g_a(p) \leq \lim_{n \to \infty} f_a(v_n) = f_a(p).$$

Следовательно, $f_a(p) = g_a(p)$ для всех $p \in \mathbb{R}$.

Функцию f_a называют *показательной функцией*, а число a — ее основанием. Значение этой функции в точке $x \in \mathbb{R}$ обозначают символом a^x.

7.6. Следствие.

1) $e^x = \exp x$, $x \in \mathbb{R}$;

2) $a^x = \exp(x \cdot \ln a)$, $x \in \mathbb{R}$, *и поэтому*

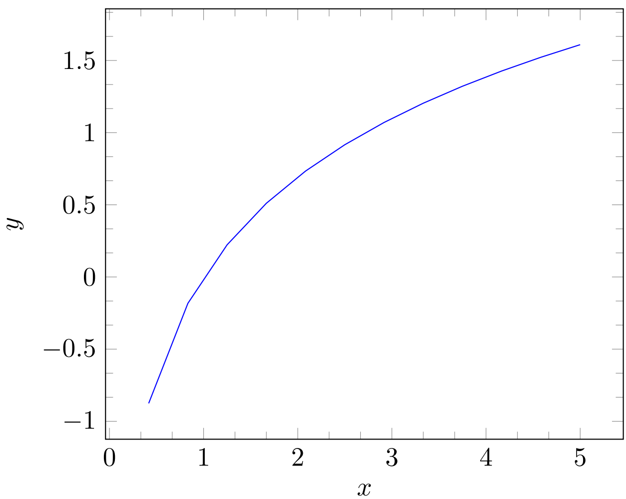
$$a^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(x \ln a)^k}{k!}.$$

Функция $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ переменной x при $a \neq 1$ обратима согласно теореме 6.27. Обратную к ней функцию обозначают $\log_a$ и называют *логарифмом по основанию* a. Функция $\log_a$ непрерывная и строго монотонная. Характеристические свойства логарифмической функции состоят в том, что

1) $\log_a a = 1$;

2) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

Логарифмическая функция



7.4 Определение степенной функции. Свойства степенной функции.

Степенной функцией называется функция вида

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x), \tag{7.4.5}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ — фиксированное число, а переменная x принимает значения из $(0, \infty)$, значение функции x^α всегда неотрицательно. Определенная равенством (7.4.5) степенная функция обладает при $x, y > 0$ известным из школьного курса математики свойствами (Проверить):

1) $x^\alpha \cdot y^\alpha = (x \cdot y)^\alpha$;
2) $\big(x^\alpha\big)^\beta = x^{\alpha\beta} = \big(x^\beta\big)^\alpha$;
3) $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$;
4) $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$;
5) $\big(\frac{x}{y}\big)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$.

Таким образом, степенная функция удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{при любых положительных } x, y \in \mathbb{R}. \tag{7.4.6}$$

7.7. Теорема. *Единственной функцией, не равной тождественно нулю, определенной и непрерывной в промежутке* $(0, \infty)$ *и удовлетворяющей на нем условию* (7.4.6), *является степенная функция вида* (7.4.5).

Доказательство. Из условия (7.4.6) при $x = y$ имеем $f(x^2) = f(x)^2 \geq 0$. Так как любое число $y \in (0, \infty)$ можно представить в виде $y = x^2$, выводим, что функция f из условия теоремы принимает неотрицательные значения.

Пусть в точке $x \in (0, \infty)$ функция $f(x) \neq 0$. Существует число $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $f(x) = x^\alpha$. Покажем, что для любого рационального числа вида $p = \frac{n}{m}$, $m > 0$, имеем равенство

$$f(x^p) = \big(x^p\big)^\alpha. \tag{7.4.7}$$

Действительно,

$$f\big(x^{\frac{1}{m}}\big)^m = \underbrace{f\big(x^{\frac{1}{m}}\big) \cdot \ldots \cdot f\big(x^{\frac{1}{m}}\big)}_{m \text{ раз}} = f\big(\underbrace{x^{\frac{1}{m}} \cdot \ldots \cdot x^{\frac{1}{m}}}_{m \text{ раз}}\big) = f(x) = x^\alpha.$$

Отсюда имеем $f\big(x^{\frac{1}{m}}\big) = \big(x^{\frac{1}{m}}\big)^\alpha$. Далее, выводим

$$f\big(x^{\frac{n}{m}}\big) = f\big(\underbrace{x^{\frac{1}{m}} \cdot \ldots \cdot x^{\frac{1}{m}}}_{n \text{ раз}}\big) = \underbrace{f\big(x^{\frac{1}{m}}\big) \cdot \ldots \cdot f\big(x^{\frac{1}{m}}\big)}_{n \text{ раз}}$$
$$= \underbrace{\big(x^{\frac{1}{m}}\big)^\alpha \cdot \ldots \cdot \big(x^{\frac{1}{m}}\big)^\alpha}_{n \text{ раз}} = \Big(\big(x^{\frac{1}{m}}\big)^\alpha\Big)^n = \big(x^{\frac{n}{m}}\big)^\alpha.$$

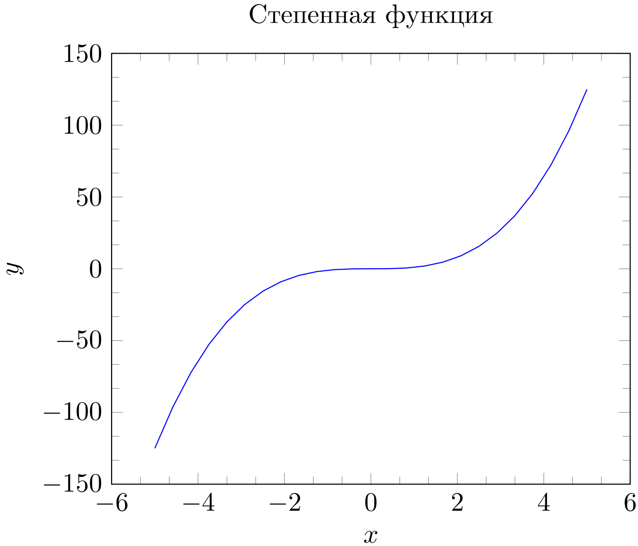
Пусть теперь $y > 0$, и $y = x^\beta$, где $\beta \in \mathbb{R}$. Пусть последовательность $\{p_n\}$ рациональных точек сходится к β. В силу (7.4.7) имеем

$$f(x^{p_n}) = \big(x^{p_n}\big)^\alpha. \tag{7.4.8}$$

Так как левая и правая части равенства (7.4.8) непрерывны, можно перейти к пределу при $n \to \infty$ и получить равенство

$$f(x^\beta) = \left(x^\beta\right)^\alpha.$$

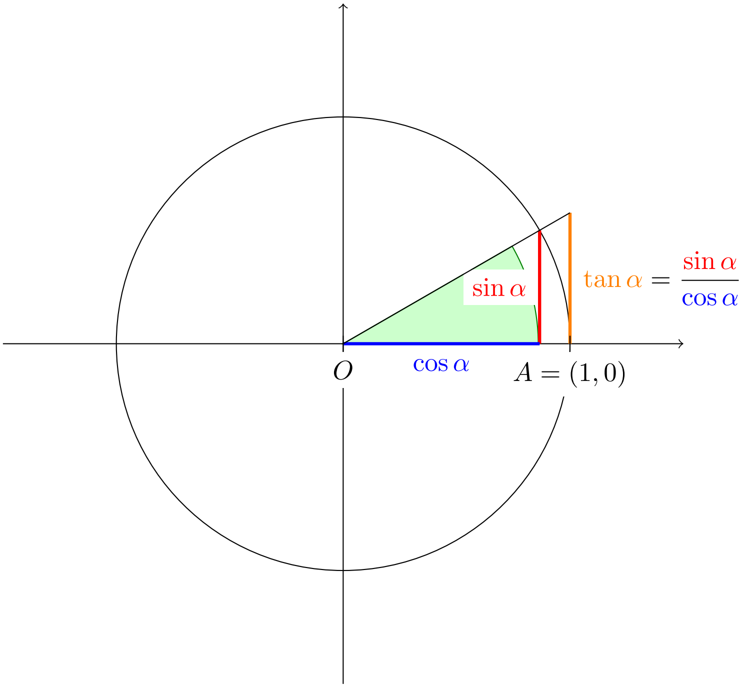
Отсюда выводим равенство $f(y) = y^\alpha$, справедливое для любого $y \in (0, \infty)$.



7.5 Тригонометрические функции.

7.5.1 Определение тригонометрических функций

Напомним известные из школьного курса математики функции $\sin x$ и $\cos x$. Для этого рассмотрим окружность S на координатной плоскости с центром в начале координат O и радиуса 1. Отложим от оси абсцисс против часовой стрелки угол α. Величина этого угла равна «длине дуги окружности», заключенной между сторонами угла. Пусть точка B — это пересечение луча OB, не лежащего на оси абсцисс, с окружностью. Тогда абсцисса точки B — это косинус угла α, а ордината этой точки — синус угла α (см. рисунок ниже).



В вышеприведенном определении остается лишь выяснить понятие «длины дуги окружности». Заметим, что определенная для всех действительных значений $x \in \mathbb{R}$ функция

$$\exp(ix) = f(x) + ig(x) \tag{7.5.9}$$

имеет действительную и мнимую части $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$f^2(x) + g^2(x) = 1 \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}, \tag{7.5.10}$$

так как $f^2(x)+g^2(x) = |\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\cdot\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\cdot\exp(-ix) = \exp 0 = 1$ в силу задачи 3.99.

Таким образом, мы имеем непрерывное отображение

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{ix} \in S, \tag{7.5.11}$$

которое называется *параметризацией* окружности S. Свойства этой параметризации установлены в следующем утверждении.

7.8. Лемма. *Существует* $\delta > 0$, *что*

1) *отображение* $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \ni \beta \mapsto e^{i\beta}$ *инъективно при любом фиксированном* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

2) *длина дуги окружности* $e^{i[0,\alpha]}$ *равна* α*;*

3) $f(\alpha) = \cos\alpha$, $g(\alpha) = \sin\alpha$ *для всех* $\alpha \in (-\delta, \delta)$.

Доказательство. Предположим $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&|e^{i\alpha} - e^{i\beta}| = |e^{i\beta}| \cdot |e^{i(\alpha-\beta)} - 1| = |e^{i(\alpha-\beta)} - 1| \\
&= |i(\alpha-\beta) + o(\alpha-\beta)| = |\alpha-\beta| \cdot |i + o(1)| \geq |\alpha-\beta| \cdot |1 - |o(1)|| > 0
\end{aligned}
$$

при $|\alpha - \beta| \to 0$. Понятно, что равенство $|\alpha - \beta| \cdot |i + o(1)| = 0$ невозможно, если $|\alpha - \beta|$ достаточно мало. Таким образом, первое утверждение доказано.

Из (3.13.82) и (7.5.9) выводим

$$
\begin{aligned}
\exp(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = f(x) + ig(x) \qquad (7.5.12)
\end{aligned}
$$

Отсюда имеем

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \\
g(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $g(x) > 0$ при $x \in (0, \alpha)$, где при необходимости число $\alpha > 0$ из предыдущего рассуждения следует уменьшить. Следовательно, увеличению параметра x от нуля соответствует движение точки e^{ix} вдоль единичной окружности против часовой стрелки.

7.9. Определение. *Длина дуги окружности* определяется как верхняя граница длин вписанных в дугу ломаных. Формально рассмотрим для этого разбиение $\mathcal{P} = \{0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n = \alpha\}$ отрезка $[0, \alpha]$. Назовем *диаметром* разбиения $\mathcal{P}$ величину

$$
\Delta(\mathcal{P}) = \max_{k=1,\ldots,n} |\alpha_k - \alpha_{k-1}|.
$$

Разбиению $\mathcal{P}$ соответствует ломаная, вписанная в дугу $e^{i[0,\alpha]}$, с узлами в точках $e^{i\alpha_k}$, $k = 1, \dots, n$. Длина ломаной равна сумме длин составляющих ее отрезков:

$$\sum_{i=1}^{n} |e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_{k-1}}|.$$

Длина дуги $e^{i[0,\alpha]}$ равна по определению

$$\sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} |e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_{k-1}}|. \tag{7.5.13}$$

Понятно, что при измельчении разбиения длина вписанной ломаной лишь увеличивается. Поэтому переход к верхней границе в (7.5.13) происходит при $\Delta(\mathcal{P}) \to 0$.

Продолжение доказательства леммы 7.8. Заметим, что аналогично началу доказательства можно написать

$$\sum_{i=1}^{n} |e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_{k-1}}| = \sum_{i=1}^{n} |e^{i(\alpha_k - \alpha_{k-1})} - 1|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \cdot |i + o(1)|,$$

где для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что $|o(1)| < \varepsilon$ как только $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$. Поскольку $1 - |o(1)| \le |i + o(1)| \le 1 + |o(1)|$, то при $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$ получаем

$$\alpha(1 - \varepsilon) \le \sum_{i=1}^{n} |e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_{k-1}}| \le \alpha(1 + \varepsilon),$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) = \alpha$.

Следовательно,

$$\sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} |e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_{k-1}}| = \alpha. \tag{7.5.14}$$

Поскольку дуга $e^{i[0,\alpha]}$ находится на единичной окружности, то ее длина в точности равна величине угла $\angle AOB$, где $B = e^{i\alpha}$. В соответствии со школьным курсом математики абсцисса $f(\alpha)$ точки B — это в точности $\cos\alpha$, а ее ордината $g(\alpha)$ — это $\sin\alpha$.

7.5.2 Предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

7.10. Следствие. *Справедливо равенство*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{7.5.15}$$

Доказательство. Доказательство очевидно, так как $g(x) = \sin x = x + o(x)$.

7.5.3 Формула Эйлера. Функциональное описание тригонометрических функций

7.11. Теорема. *Справедлива формула Эйлера:*

$$e^{ix} = \exp(ix) = \cos x + i \sin x \tag{7.5.16}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Справедливость формулы Эйлера при малых значениях параметра x вытекает из леммы 7.8. Действительно, при достаточно малых значениях параметра x точка e^{ix} лежит на единичной окружности в первом квадранте координатной плоскости. Ее действительная часть — это проекция точки e^{ix} на ось абсцисс, т. е. совпадает с $\cos x$, а ее мнимая часть — проекция точки e^{ix} на ось ординат совпадает с $\sin x$.

Для доказательства формулы (7.5.16) остается показать ее справедливость при остальных значениях аргумента. Это мы получим как следствие доказываемой ниже теоремы 7.12.

Известные из школьного курса математики функции $\sin x$ и $\cos x$ удовлетворяют соотношению

$$\cos(y \pm x) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}. \tag{7.5.17}$$

Кроме того, имеем $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$. С учетом (7.5.9) отсюда имеем

$$\begin{aligned} f(x+y) + ig(x+y) &= (f(x) + ig(x)) \cdot (f(y) + ig(y)) \\ &= f(x)f(y) - g(x)g(y) + i(f(x)g(y) + f(y)g(x)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y) \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}, \tag{7.5.18}$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}. \tag{7.5.19}$$

Аналогично из соотношений $e^{i(x-y)} = e^{ix} \cdot e^{-iy}$ и $e^{-iy} = f(y) - ig(y)$ выводим

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}, \tag{7.5.20}$$

$$g(x-y) = f(x)g(y) - f(y)g(x) \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}. \tag{7.5.21}$$

Складывая (7.5.18) и (7.5.20), получаем

$$f(y+x) + f(y-x) = 2f(x) \cdot f(y) \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}. \tag{7.5.22}$$

Из (7.5.17) выводим, что $\cos x$ тоже удовлетворяет соотношению (7.5.22).

Основная цель данного раздела — доказать, что $f(x)$ совпадает с функцией $\cos x$.

Установим для этого следующий результат.

7.12. Теорема. *Единственной функцией* φ,

1) *определенной и непрерывной на* $\mathbb{R}$,

2) *удовлетворяющей условию* (7.5.22),

3) *не равной тождественно нулю и*

4) *принимающей в любой окрестности нуля значения, меньшие единицы,*

является функция $\cos ax$, *где* $a \in (0, \infty)$ *— некоторое положительное вещественное число.*

Доказательство. Полагая в соотношении

$$\varphi(y+x) + \varphi(y-x) = 2\varphi(x) \cdot \varphi(y) \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R} \tag{7.5.23}$$

$x = 0$, получаем $2\varphi(y) = 2\varphi(0) \cdot \varphi(y)$. Так как $\varphi(y) \neq 0$ для некоторого $y \in \mathbb{R}$, то $\varphi(0) = 1$. Если положим в (7.5.23) $y = 0$, то получим $\varphi(-x) = \varphi(x)$, т. е. $\varphi(x)$ — четная функция.

Так как $\varphi(x)$ — непрерывная функция, то найдется такое положительное число c, что $\varphi(x) > 0$ для всех $x \in [0, c]$. По условию 4) теоремы можно считать, что $0 < \varphi(c) < 1$. Так как функция $\cos x$ непрерывна, найдется такое $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, что $\varphi(c) = \cos\theta$. Если в (7.5.23) положить $x = y = \frac{1}{2}c$, то получим

$$\left[\varphi\left(\frac{1}{2}c\right)\right]^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(c)}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2} = \left[\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right]^2. \tag{7.5.24}$$

Так как оба значения $\varphi\left(\frac{1}{2}c\right)$ и $\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ неотрицательны, то из полученного соотношения получаем

$$\varphi\left(\frac{1}{2}c\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right). \tag{7.5.25}$$

Равенство (7.5.25) является базой индукции: если соотношение

$$\varphi\Big(\frac{1}{2^n}c\Big)=\cos\Big(\frac{1}{2^n}\theta\Big) \tag{7.5.26}$$

доказано, то подставляя в (7.5.25) $\frac{1}{2^n}c$ вместо c, и $\frac{1}{2^n}\theta$ вместо θ, получаем

$$\varphi\Big(\frac{1}{2^{n+1}}c\Big)=\cos\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\theta\Big).$$

Далее, из (7.5.23) имеем

$$\varphi(y+x)=2\varphi(x)\cdot\varphi(y)-\varphi(y-x)\quad \text{для всех } x,y\in\mathbb{R}. \tag{7.5.27}$$

Подставляя $x=y=\frac{c}{2^n}$ в (7.5.27), с помощью равенства (7.5.26) выводим

$$\varphi\Big(2\cdot\frac{c}{2^n}\Big)=2\Big[\varphi\Big(\frac{c}{2^n}\Big)\Big]^2-1=2\Big[\cos\Big(\frac{\theta}{2^n}\Big)\Big]^2-1=\cos\Big(2\cdot\frac{\theta}{2^n}\Big). \tag{7.5.28}$$

При $x=\frac{c}{2^n}$, $y=2\frac{c}{2^n}$ с помощью равенств (7.5.28) из (7.5.27) выводим

$$\begin{aligned}\varphi\Big(3\cdot\frac{c}{2^n}\Big)&=2\varphi\Big(\frac{c}{2^n}\Big)\varphi\Big(2\frac{c}{2^n}\Big)-\varphi\Big(\frac{c}{2^n}\Big)\\&=2\cos\Big(\frac{\theta}{2^n}\Big)\cos\Big(2\frac{\theta}{2^n}\Big)-\cos\Big(\frac{\theta}{2^n}\Big)=\cos\Big(3\cdot\frac{\theta}{2^n}\Big).\end{aligned}$$

Если доказано равенство

$$\varphi\Big(m\cdot\frac{c}{2^n}\Big)=\cos\Big(m\cdot\frac{\theta}{2^n}\Big), \tag{7.5.29}$$

то подставляя в (7.5.27) $x=\frac{c}{2^n}$, $y=m\frac{c}{2^n}$ с помощью (7.5.29) получаем

$$\begin{aligned}\varphi\Big((m+1)\cdot\frac{c}{2^n}\Big)&=2\varphi\Big(\frac{c}{2^n}\Big)\varphi\Big(m\frac{c}{2^n}\Big)-\varphi\Big(\frac{c}{2^n}\Big)\\&=2\cos\Big(\frac{\theta}{2^n}\Big)\cos\Big(m\frac{\theta}{2^n}\Big)-\cos\Big(\frac{\theta}{2^n}\Big)=\cos\Big((m+1)\cdot\frac{\theta}{2^n}\Big).\end{aligned}$$

Таким образом, равенство (7.5.29) для всех $m\in\mathbb{Z}$ и $n\in\mathbb{N}$ доказано. Поскольку совокупность двоично-рациональных чисел плотна в $\mathbb{R}$ (см. задачу 1.71), справедливо равенство

$$\varphi(x\cdot c)=\cos(x\cdot\theta) \tag{7.5.30}$$

для всех $x\in\mathbb{R}$. Полагая $x=\frac{t}{c}$, $a=\frac{\theta}{c}$, получаем утверждение теоремы.

7.13. Следствие. *Формула Эйлера* (7.5.16) *справедлива при всех значениях аргумента* x.

Доказательство. Поскольку формула Эйлера уже доказана при малых значениях параметра x, то число θ из начала доказательства теоремы 7.12 очевидно совпадает с аргументом c. Так что $f(x) = \cos x$ для всех значений аргумента x.

Совпадение $g(x) = \sin x$ можно получить из формул $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ и $g(x) = \sqrt{1 - f(x)^2}$ с учетом доказанного равенства $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, нечетности функции $g(x)$, и положительности $g(x)$ при $x \in (0, \pi)$. Докажите!

7.14. Следствие. **Функции** $\cos$ **и** $\arccos$. *Функция* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна. Функция* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *обратима согласно теореме* 6.27. *Обратную к ней функцию обозначают* $\arccos$. *Функция* $\arccos$ *непрерывная и строго убывающая.*

7.15. Следствие. **Функции** $\sin$ **и** $\arcsin$. *Функция* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна. Функция* $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ *обратима по теореме* 6.27. *Обратную к ней функцию обозначают* $\arcsin$. *Функция* $\arcsin$ *непрерывна и строго возрастающая.*

7.16. Следствие. **Функции** $\tan$ **и** $\arctan$. *Функция*

$$\tan = \frac{\sin}{\cos} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

обратима согласно теореме 6.27. *Обратную к ней функцию будем обозначать* $\arctan$. *Обе функции* $\tan$ *и* $\arctan$ *непрерывные и строго возрастающие.*

8 Дифференциальное исчисление функций одной переменной

8.1 Определение производной

Будем говорить, что функция f *дифференцируема в точке* p и писать $f \in \mathcal{D}(p)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{f(t) - f(p)}{t - p},$$

рассматриваемое как функция переменной t, имеет *конечный* предел при t, стремящемся к p. Этот предел

$$\lim_{t \to p} \frac{f(t) - f(p)}{t - p},$$

называется *производной* функции f в точке p и обозначается одним из символов $f'(p)$ или $Df(p)$. Символ $\mathcal{D}(p)$ обозначает класс всех функций, дифференцируемых в точке p. Функцию f называют дифференцируемой, если она дифференцируема в каждой точке своей области определения $\operatorname{Dom} f$.

Множество всех точек, в которых функция f дифференцируема, будем обозначать $\operatorname{Dom} f'$ или $\operatorname{Dom} Df$. Функцию, которая каждой точке $t \in \operatorname{Dom} f'$ сопоставляет число $f'(t)$, называют *производной* функции f и обычно обозначают одним из следующих символов

$$f', \ Df, \ \frac{df}{dx}.$$

Последний символ используют в том случае, когда выражение f кроме x содержит другие буквы, которые в данный момент негласно предполагаются постоянными, а f рассматривают как функцию переменной x. Например,

$$\frac{d}{dx}(x - y) = 1, \ \frac{d}{dy}(x - y) = -1.$$

8.2 Односторонние производные

Если разностное отношение

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

функции f в точке p имеет предел при x, стремящемся к p справа, то этот предел называют *правой производной* функции f в точке p и обозначают либо $D_+ f(p)$, либо $f'_+(p)$.

8.1. Задачи. 1) Привести определение левой производной $D_- f(p)$ функции f в точке p.

2) Функция f дифференцируема в точке p в том и лишь в том случае, когда она определена в некоторой окрестности этой точки и обладает конечными и равными между собой односторонними производными $D_- f(p)$ и $D_+ f(p)$. В этом случае $D_- f(p) = D_+ f(p) = Df(p)$.

8.3 Кинематическая интерпретация производной

Со времён Ньютона выражение $f(t)$ обычно интерпретируют как положение движущейся точки в момент времени t. В этом случае дробь

$$\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$$

называют средней скоростью на промежутке времени от p до t, а её предел при t, стремящемся к p, т. е. производную $f'(p)$ называют (мгновенной) скоростью функции f в момент времени p.

8.4 Геометрическая интерпретация производной.

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая в точке p функция. Отметим какую-нибудь точку $q \in X$ и рассмотрим прямую L_q на плоскости $\mathbb{R}^2$, проходящую через точки $(p, f(p))$ и $(q, f(q))$ графика Γ_f функции f. Эта прямая является графиком функции

$$l_q(x) = \; f(p) + k_q \cdot (x-p),$$

где $k_q = \frac{f(q)-f(p)}{q-p}$ — угловой коэффициент прямой L_q. Если q приближать к p, то k_q устремится к $f'(p)$ и, следовательно, прямая L_q будет стремиться занять положение прямой K, являющейся графиком функции

$$l(x) = f(p) + f'(p) \cdot (x-p). \tag{8.4.1}$$

Эту прямую называют *касательной* к графику функции f в точке $(p, f(p))$. Позже будут указаны более глубокие причины такого названия. Таким образом, значение производной есть угловой коэффициент касательной к графику исходной функции в соответствующей точке графика.

8.5 Теорема о лейбницевом разложении

Функция $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется линейной, если она непрерывна и аддитивна. Напомним, что для любой линейной функции существует число $a \in \mathbb{R}$ такое, что $A(v) = a \cdot v$. Заметим, что $a = A(1)$, и поэтому определяется единственным образом.

8.2. Теорема о лейбницевом разложении. *Функция f дифференцируема в точке p в том и только в том случае, когда она определена в некоторой окрестности этой точки и существует такое линейное отображение $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что*

$$f(x) = f(p) + A(x-p) + o(x-p) \quad \textit{при } x \to p. \tag{8.5.2}$$

В этом случае $A(v) = f'(p)v$ *для всех* $v \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Допустим, что $f \in \mathcal{D}(p)$. Для каждого $v \in \mathbb{R}$ положим $A(v) = Df(p)v$, и пусть $\varphi(x) = f(x) - (f(p) + A(x-p))$.

Тогда

$$\frac{\varphi(x)}{x-p} = \frac{f(x) - f(p) - Df(p)(x-p)}{x-p} = \frac{f(x) - f(p)}{x-p} - Df(p) \underset{x \to p}{\to} 0.$$

Пусть теперь функция f и линейное отображение $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таковы, что справедлива формула (8.5.2). Поскольку отображение A линейное, то существует такое число $a \in \mathbb{R}$, что для любого $v \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $A(v) = a \cdot v \ \ (a = A(1))$. Таким образом,

$$f(x) - (f(p) + a \cdot (x-p)) \underset{x \to p}{=} o(x-p),$$

стало быть,

$$\frac{f(x) - f(p)}{x-p} = \frac{a \cdot (x-p) + o(x-p)}{x-p} \underset{x \to p}{\to} a,$$

т. е. $a = Df(p)$.

8.3. Замечание. Из уравнения касательной (8.4.1) и разложения (8.5.2) можно сделать такой вывод:

$$f(x) - l(x) = o(x-p) \quad \text{при } x \to p.$$

Другими словами, разность между значениями функции f и касательной l в точке x отличаются на величину более высокого порядка сравнительно с разностью $x - p$. Это свойство касательной полностью ее характеризует: никакая другая прямая, проходящая через точку $(p, f(p))$, таким свойством не обладает.

8.6 Определение дифференциала

Линейное отображение A, для которого справедлива формула (8.5.2), называют *дифференциалом* функции f в точке p и обозначают $df(p)$. Образ элемента $v \in \mathbb{R}$ при отображении $df(p)$ будем обозначать $df(p)v$ или $df(p)\langle v \rangle$ и называть значением дифференциала df в точке p на элементе (векторе) v. Особо отметим формулу

$$df(p)\langle v \rangle = f'(p) \cdot v \text{ для всех } v \in \mathbb{R}. \tag{8.6.3}$$

8.4. Задачи. 1) Всякая постоянная функция $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема. В любой точке $p \in \mathbb{R}$ её производная и дифференциал равны нулю: $Dc(p) = 0 \in \mathbb{R}$, а $dc(p) = 0$ — нулевое отображение, т. е. $dc(p)v = 0$ для всех $v \in \mathbb{R}$.

2) Каждое линейное отображение $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируемо. Его дифференциал в любой точке $p \in \mathbb{R}$ совпадает с ним самим, а производная постоянна.

3) Если $f \in \mathcal{D}(p)$, то $f(x) - f(p) \underset{x\to p}{=} O(x-p)$. Например,

$$|f(x) - f(p)| \underset{x\to p}{\leq} \Big(|Df(p)| + \frac{1}{5}\Big)|x-p|.$$

Класс функций, непрерывных в точке p и равных нулю в этой точке обозначим $C_0(p)$.

4) Лемма об отношении "o-малое". Пусть φ — функция, определённая в окрестности точки p и равная нулю в этой точке. Тогда

$$\varphi(x) \underset{x\to p}{=} o((x-p)^k), \quad k \in \mathbb{N},$$

в том и лишь в том случае, когда функция φ представима в виде

$$\varphi(x) = o(1)(x-p)^k \quad \text{при } x \to p.$$

Указание: Вытекает непосредственно из определений.

5) Следствие. Функция, дифференцируемая в точке p, непрерывна в этой точке.

Указание: Действительно,

$$f(x) = f(p) + Df(p)(x-p) + o(1)(x-p) = f(p) + o(1) \quad \text{при } x \to p.$$

8.7 Основные правила дифференцирования.

8.5. Правила дифференцирования суммы и произведения. *Если функции f и g дифференцируемы в точке p, то функции $f+g$ и fg также дифференцируемы в этой точке, причём*

$$D(f+g)(p) = Df(p) + Dg(p)$$

и

$$D(fg)(p) = Df(p)g(p) + f(p)Dg(p) \quad \text{— \textit{формула Лейбница}.}$$

Доказательство. Область задания как функции $f+g$, так и функции fg есть множество $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \in \mathcal{N}(p)$. Лейбницево разложение 8.2 функций f и g имеет вид

$$f(x) = f(p) + Df(p)(x-p) + o(1)(x-p),$$
$$g(x) = g(p) + Dg(p)(x-p) + o(1)(x-p)$$

при $x \to p$. Поэтому

$$f(x)+g(x) = (f(p)+g(p)) + (Df(p)+Dg(p))(x-p) + (o(1)+o(1))(x-p),$$

$$f(x)g(x) = f(p)g(p) + (Df(p)g(p) + f(p)Dg(p)) + \gamma(x)(x-p),$$

где $\gamma(x)$ — сумма шести слагаемых, каждое из которых стремится к нулю при $x \to p$: $\gamma(x) = [f(p)o(1)+Df(p)(x-p)(Dg(p)+o(1))+o(1)(g(p)+Dg(p)(x-p) + o(1)(x-p))]$. Таким образом, $\gamma(x) = o(1)$ при $x \to p$. Остаётся воспользоваться теоремой о лейбницевом разложении.

8.6. Правило дифференцирования дроби. *Если функции f и g дифференцируемы в точке p и $g(p) \neq 0$, то функция $\frac{f}{g}$ также дифференцируема в точке p и справедлива формула*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'\bigg|_p = \frac{f'g - fg'}{g^2}\bigg|_p.$$

Доказательство. Поскольку функция g непрерывна в точке p и $g(p) \neq 0$, то $|g| > 0$ в некоторой окрестности этой точки (по лемме о неравенстве пределов) и потому $\operatorname{Dom} \frac{1}{g} \in \mathcal{N}(p)$. Вычислим производную функции $\frac{1}{g}$:

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(p)}}{x-p} = \frac{g(p)-g(x)}{g(x)g(p)(x-p)} \underset{x\to p}{\longrightarrow} -\frac{g'(p)}{(g(p))^2}.$$

Остаётся продифференцировать произведение $f \cdot \frac{1}{g}$.

8.7. Правило дифференцирования композиции. *Если функция f дифференцируема в точке p, а функция g дифференцируема в точке $q = f(p)$, то функция $g \circ f$ дифференцируема в точке p и имеет место формула*

$$D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \cdot Df(p). \tag{8.7.4}$$

Доказательство. Установим, что $\mathrm{Dom}\, g \circ f \in \mathcal{N}(p)$. Поскольку функции f и g дифференцируемы в точках p и q, то множества $\mathrm{Dom}\, f$ и $\mathrm{Dom}\, g$ являются окрестностями точек p и q соответственно. Так как функция f непрерывна в точке p, то согласно топологическому определению предела 5.16 у точки p имеется такая окрестность V, что

$$f(V \cap \mathrm{Dom}\, f) \subset \mathrm{Dom}\, g.$$

Следовательно, $V \cap \mathrm{Dom}\, f \subset \mathrm{Dom}\, g \circ f$ и потому множество $\mathrm{Dom}\, g \circ f$ является окрестностью точки p.

По лемме об "o-малом" лейбницево разложение функции g принимает вид

$$g(y) = g(q) + Dg(q)(y - q) + \beta(y)(y - q),$$

где $\beta \in C_0(q)$. Отсюда

$$g(f(x)) = g(f(p)) + Dg(f(p))(f(x) - f(p)) + \beta(f(x))(f(x) - f(p)). \quad (8.7.5)$$

Поскольку функция $f \in \mathcal{D}(p)$, то для справедливо лейбницево разложение в точке p:

$$f(x) - f(p) = Df(p)(x - p) + o(1)(x - p) \quad \text{при } x \to p.$$

Подставляя в (8.7.5) лейбницево разложение разности $f(x) - f(p)$ в точке p, имеем

$$\begin{aligned} g(f(x)) = g(f(p)) &+ Dg(f(p))Df(p)(x - p) \\ &+ Dg(f(p))o(1)(x - p) + \beta(f(x))(Df(p) + o(1))(x - p) \end{aligned}$$

при $x \to p$. Теперь остается заметить, что выражение

$$[Dg(f(p))o(1) + \beta(f(x))(Df(p) + o(1))]$$

есть величина $o(1)$ при $x \to p$ (Почему!). Таким образом,

$$g(f(x)) = g(f(p)) + Dg(f(p))Df(p)(x - p) + o(1)(x - p) \quad \text{при } x \to p.$$

Отсюда получаем правило (8.7.4) дифференцирования композиции.

8.8. Правило дифференцирования обратной функции. *Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ — взаимно обратные отображения подмножеств числовой прямой и пусть f дифференцируемо в точке $p \in X$. В такой ситуации отображение g дифференцируемо в точке $q = f(p)$ в том и лишь в том случае, когда*

1) *производная* $Df(p) \neq 0$,

2) *отображение* g *непрерывно в точке* q,

3) *множество* Y *является окрестностью точки* q.

Кроме того,

$$Dg(q) = \frac{1}{Df(g(q))}.$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Действительно, если $g \in \mathcal{D}(q)$, то $Y \in \mathcal{N}(q)$ и g непрерывна в точке q. Более того, композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке p и значение производной равно 1:

$$g'(f(p)) \cdot f'(p)) = 1.$$

Отсюда $f'(p) = \frac{1}{g'(q)} \neq 0$.

Докажем достаточность. Так как функция $f \in \mathcal{D}(p)$, то её можно представить в виде

$$f(x) = f(p) + Df(p)(x-p) + \alpha(x)(x-p),$$

где $\alpha \in C_0(p)$. Отсюда для каждого $y \in Y$ ввиду равенства $f(g(y)) = y$ имеем

$$y = q + Df(p)(g(y) - g(q)) + \alpha(g(y))(g(y) - g(q)).$$

И поскольку $Df(p) \neq 0$, а функция $\alpha(g(y)) \in C_0(q)$, то

$$g(y) - g(q) = \frac{1}{Df(p)}(y-q) + \frac{\alpha(g(y))}{Df(p)} \cdot \frac{g(y)-g(q)}{y-q} \cdot (y-q).$$

Так как $\alpha(g(y)) \to 0$ при $y \to q$, то полученное разложение будет лейбницевым для функции g в точке q, если отношение

$$\frac{g(y)-g(q)}{y-q} = O(1) \quad \text{при } y \to q.$$

Действительно, полагая $y = f(x)$ и учитывая, что $x \to p$ при $y \to q$, имеем

$$\frac{g(y)-g(q)}{y-q} = \frac{x-p}{f(x)-f(p)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(p)}{x-p}} = \frac{1}{Df(p)+o(1)} = O(1)$$

при $y \to q$.

8.9. Задачи. 1) Составить и запомнить таблицу производных известных функций.

2) Дифференцируемость, производная и дифференциал суть локальные понятия: если функции f и g совпадают в некоторой окрестности точки p и $f \in \mathcal{D}(p)$, то $g \in \mathcal{D}(p)$, $Dg(p) = Df(p)$, $dg(p) = df(p)$.

3) Лемма о производной промежуточной функции: если функции $f, u, v : X \to \mathbb{R}$ таковы, что $f(x) \in [u(x), v(x)]$, $u, v \in \mathcal{D}(p)$, $u(p) = v(p)$, $u'(p) = v'(p)$, то $f \in \mathcal{D}(p)$ и $Df(p) = u'(p)$.

4) Условия 2 и 3 правила дифференцирования обратного отображения без ущерба для истины можно отбросить, если отображение $f : X \to Y$ непрерывно.

5) Пусть $f \in \mathcal{D}(p)$, а x_n и y_n — такие сходящиеся к точке p последовательности, что $x_n \neq y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \underset{n\to\infty}{\to} Df(p),$$

если выполнено хотя бы одно из двух следующих условий:

1) $p \in [x_n, y_n]$;

2) функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки p, а её производная непрерывна в точке p.

Без дополнительных условий утверждение неверно. Привести примеры.

6) Пусть $w_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — такая 2^{1-n}-периодическая функция, что $w_n(x) = |x|$ при $x \in [-2^{-n}, 2^{-n}]$, и пусть $w(x) = \sum\limits_{n\geq 0} w_n(x)$ Функция w непрерывна, но в любой точке не дифференцируема. Такие функции впервые обнаружил Вейерштрасс.

8.10. Замечание.

1) На практике выражения типа x^2 и e^x трактуют и как функции переменной x, и как значения этих функций в точке x. Выбор трактовки диктуется смыслом текста (контекстом).

2) Результат вычисления производной функции $f(x)$ переменной x часто записывают так: $(f(x))' = g(x)$ или $\frac{df(x)}{dx} = g(x)$. Например,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx}t^x = t^x \ln t.$$

Такая форма записи равенства функций формально некорректна, так как, заменив букву x именем конкретного числа, можно получить неверное и даже нелепое равенство.

Чтобы узаконить использование равенств типа $(f(x))' = g(x)$, можно считать такое равенство синонимом следующих высказываний: «функции $(f(x))'$ и $g(x)$ переменной x совпадают на множестве $\mathrm{Dom}\, f'$», «для всех $p \in \mathrm{Dom}\, f'$ верно $(f(x))'|_p = g(p)$.»

3) В подобных ситуациях букву x полезно трактовать как функцию переменной x, т. е. как тождественное отображение $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, поскольку оно определяется формулой $\mathrm{id}(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

8.11. Лемма о знаке производной. **I**. *Если* $D_+ f(p) > 0$ (< 0), *то* $f(x) \underset{x \to p+0}{>} f(p)$ $(f(x) \underset{x \to p+0}{<} f(p))$.

II. *Если* $D_- f(p) > 0$ (< 0), *то* $f(x) \underset{x \to p-0}{<} f(p)$ $(f(x) \underset{x \to p-0}{>} f(p))$.

Доказательство. Пусть $D_- f(p) > 0$. Поскольку

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \underset{x \to p-0}{\to} D_- f(p) > 0,$$

то по теореме о неравенстве пределов $\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \underset{x \to p-0}{>} 0$, и, следовательно, $f(x) - f(p) \underset{x \to p-0}{<} 0$.

Другие утверждения леммы устанавливаются аналогично.

8.12. Следствие. *Если* $f \in \mathcal{D}(p)$ *и* $Df(p) > 0$, *то у точки* p *имеется такая окрестность* $(q < r)$, *что* $f(t) < f(p)$ *для всех* $t \in (q < p)$ *и* $f(t) > f(p)$ *для всех* $t \in (p < r)$.

Говорят, что p есть *точка минимума* (*строгого минимума*) *функции* $f : X \to \mathbb{R}$, если

$$f(x) \geq f(p) \quad \text{для всех} \quad x \in X$$

(если $f(x) > f(p)$ для всех $x \in X \setminus \{p\}$). Говорят, что p есть *точка локального минимума* (*строгого локального минимума*) *функции* $f : X \to \mathbb{R}$, если у точки p имеется такая окрестность U, что p является точкой минимума (строгого минимума) функции $f : U \cap X \to \mathbb{R}$. Аналогично определяются *точки максимума, строгого максимума, локального максимума и строгого локального максимума функции.* Точки локального минимума и точки локального максимума называют *точками локального экстремума.*

8.8 Необходимое условие локального экстремума.

8.13. Лемма Ферма. *Если p — точка локального экстремума функции f, то либо*

1) f недифференцируема в этой точке, либо

2) f дифференцируема в этой точке, и в этом случае $Df(p) = 0$.

Доказательство. Если $f \in \mathcal{D}(p)$ и $Df(p) \neq 0$, то по следствию леммы о знаке производной, p не может быть точкой локального экстремума функции f.

8.14. Теорема Ролля о среднем. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a < b]$ и дифференцируема в каждой его внутренней точке, и если $f(a) = f(b)$, то имеется такая точка $p \in (a, b)$, что $Df(p) = 0$.*

Доказательство. Согласно теореме Вейерштрасса об экстремумах, на отрезке $[a, b]$ имеются такие точки p, q, что $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ при любом $x \in [a < b]$. Если $f(p) = f(q)$, то f постоянна на $[a < b]$ и, стало быть, $Df = 0$ на всём интервале $(a < b)$.

В ином случае одна из отмеченных точек принадлежит интервалу $(a < b)$ и, значит, в силу леммы Ферма является искомой.

8.15. Теорема Лагранжа о среднем. *Если функция f непрерывна на ограниченном отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в каждой его внутренней точке, то на интервале (a, b) найдётся такая точка p, что*

$$Df(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказательство. Пусть $l(t)$ — функция, график которой — это прямая на плоскости $\mathbb{R}^2$, проходящая через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, т. е.

$$l(t) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a).$$

Функция $(f - l)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля и, значит, имеется такая точка $p \in (a, b)$, что $Df(p) - Dl(p) = 0$. Остаётся заметить, что $Dl(p) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Заключение теоремы Лагранжа эквивалентно утверждению: касательная к графику Γ_f, в точке $(p, f(p))$ параллельна прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Почему?

Разность $f(b) - f(a)$ называют *приращением функции* f от a до b и ее обозначают символом $f\big|_a^b$.

8.16. Теорема о приращениях. *Если функции f и h непрерывны на отрезке $[a \le b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ и $|f'(x)| \le h'(x)$ для всех $x \in [a,b]$, за исключением, быть может, конечной совокупности точек, то*

$$\left|f\Big|_a^b\right| \le h\Big|_a^b.$$

Доказательство. Достаточно считать, что неравенство $|f'(t)| \le h'(t)$ выполнено в каждой точке $t \in (a,b)$. (Почему?) Неравенство $|f'| \le h'$ эквивалентно следующей паре неравенств $-h' \le f' \le h'$, которая, в свою очередь равносильна следующей паре неравенств $h' + f' \ge 0$ и $h' - f' \ge 0$.

Пусть $g = h - f$. Функция g непрерывна на отрезке $[a,b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ и $g'(t) \ge 0$ в каждой внутренней точке этого отрезка. Из теоремы Лагранжа следует, что для всякой пары точек $x < y$ интервала (a,b) $g(x) \le g(y)$. Так как функция g непрерывна, то по теореме о неравенстве пределов $g(a) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) \le g(y)$ для всякого $y \in (a,b)$. Отсюда по той же причине $g(a) \le \lim\limits_{y \to b-0} g(y) = g(b)$. Тем самым $f\Big|_a^b \le h\Big|_a^b$.

Аналогично устанавливается неравенство $-h\Big|_a^b \le f\Big|_a^b$.

9 Приложения дифференциального исчисления

9.1 Производная и монотонные функции.

9.1. Теорема о дифференциальных признаках монотонности. *Если функция f непрерывна на промежутке T и если её производная неотрицательна (положительна) в каждой его внутренней точке, то функция f возрастает (строго возрастает) на этом промежутке.*

Доказательство. Если $0 \le Df$, то согласно теореме о приращениях $f\Big|_x^y = f(y) - f(x) \ge 0$ для любой пары точек $x < y$ промежутка T.

Если же $Df > 0$, то f возрастает и если бы на T была бы такая пара точек $x < y$, что $f(x) = f(y)$, то на отрезке $[x,y]$ функция f была бы постоянной и, стало быть, имела нулевую производную.

9.2. Задача. Сформулировать и доказать аналогичные дифференциальные признаки убывания.

9.2 Дифференциальные признаки экстремума.

9.3. Достаточные признаки локального экстремума.

I. *Если функция f непрерывна на интервале $T = (a, b)$, $a < b$, и $p \in T$ — такая точка, что на интервале (a, p) производная $f' < 0$, а на интервале (p, b) производная $f' > 0$, то p есть точка строгого минимума функции f на T.*

II. *Если $f'(p) = 0$, а $f''(p) > 0$ (< 0), то p является точкой строгого локального минимума (максимума) функции f.*

Доказательство. I. Первое утверждение — это прямое следствие признаков строгого убывания и возрастания.

9.4. Пример. $f(x) = \sqrt{|\sin x|}$, $T = [-1, 1]$, $p = 0$.

II. Функция f' определена на некоторой окрестности точки p, ибо обладает производной $f''(p)$. В таком случае согласно условию $f''(p) > 0$ и лемме 8.11 о знаке производной у точки p имеется такая окрестность $(a < b)$, что $f'(t) < f'(p) = 0$ для всех $t \in (a < p)$, $f'(t) > f'(p) = 0$ для всех $t \in (p < b)$. Пункт **I** говорит о том, что p есть точка строгого минимума функции f на окрестности (a, b) точки p.

9.3 Выпуклые функции.

Пусть E — какое-нибудь векторное пространство (например, $\mathbb{R}^2$). Множество $B \subset E$ называют выпуклым, если оно вместе с любой парой своих точек p, q содержит отрезок $[p, q]$, их соединяющий:

$$\begin{aligned}[p, q] &= \{x = p + t(q - p) : t \in [0, 1]\}\\ &= \{x = \tau_1 p + \tau_2 q : \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}_+,\ \tau_1 + \tau_2 = 1\}.\end{aligned}$$

9.5. Определение. Говорят, что функция f *является выпуклой на промежутке* T, если *надграфик*

$$H_f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in T,\ y \geq f(x)\}$$

функции $f : T \to \mathbb{R}$ является выпуклым подмножеством плоскости $\mathbb{R}^2$.

Функцию f называют *вогнутой на промежутке* T, если на этом промежутке функция $-f$ выпуклая.

9.6. Задачи. Функция $f : T \to \mathbb{R}$ является выпуклой тогда и только тогда, когда всякая хорда, соединяющая какие-либо точки графика, находится выше дуги графика, соединяющей эти же точки.

9.7. Дифференциальные признаки выпуклости. **I**. *Если функция f дифференцируема на промежутке T и её производная возрастает на этом промежутке, то функция f выпукла на T.*

II. *Если функция f дважды дифференцируема на промежутке T и её вторая производная неотрицательна на этом промежутке, то функция f выпукла на T.*

Доказательство. **I**. Пусть (a, y) и (b, z) — какие-либо точки надграфика функции f, т. е. такие точки, что $a, b \in T$, $f(a) \leq y$, $f(b) \leq z$. Допустим, что $a < b$, и пусть

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto l(t) = y + \frac{z - y}{b - a}(t - a)$$

— функция, график которой есть прямая, проходящая через рассматриваемые точки. Наша цель — показать, что отрезок, соединяющий точки (a, y) и (b, z), лежит выше графика функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, т. е. что $f(t) \leq l(t)$ при любом $t \in [a, b]$. Для этого достаточно установить, что функция $h = f - l \leq 0$ на $[a, b]$.

Так как $f(a) \leq y = l(a)$ и $f(b) \leq z = l(b)$, то $h(a) \leq 0$ и $h(b) \leq 0$. Допустим, что на нашем отрезке есть точка c, где $h(c) > 0$. В этом случае $h\Big|_a^c > 0$. По теорема Лагранжа 8.15 о среднем существует точка $p \in (a, c)$ такая, что $Dh(p) > 0$. Поэтому $Dh(t) > 0$ для всех $t \in [p, b]$, ибо функция Dh возрастающая. Следовательно, $h(b) \geq h(c) > 0$ в то время, как $h(b) \leq 0$.

II. Этот признак является простым следствием предыдущего.

9.8. Определение. *Выпуклой комбинацией точек* $p_1, \ldots, p_k$ пространства E называют всякую точку вида $\tau_1 p_1 + \ldots + \tau_k p_k$, где $\tau_1, \ldots, \tau_k$ — неотрицательные числа такие, что $\tau_1 + \ldots + \tau_k = 1$.

9.9. Физическая интерпретация. *Пару (p, m), где $p \in E$, $m \in \mathbb{R}_+$ назовём массивной точкой, а число m — её массой. Барицентром (центром масс) системы массивных точек $(p_1, m_1), \ldots, (p_k, m_k)$ называют точку*

$$p = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{k} m_i p_i,$$

где $m = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i$ — масса рассматриваемой системы массивных точек. Тем самым, выпуклую комбинацию $\tau_1 p_1 + \ldots + \tau_k p_k$ можно трактовать как барицентр системы точек тотальной единичной массы.

9.10. Барицентрический критерий выпуклости. *Множество $B \subset E$ выпукло в том и только в том случае, когда каждая выпуклая комбинация любой системы его точек является точкой этого множества (барицентрическое условие выпуклости).*

Доказательство. Достаточность барицентрического условия является прямым следствием определения выпуклости.

Допустим, что множество B выпуклое и покажем, что любая выпуклая комбинация k его точек принадлежит B при $k \geq 2$. Если $k = 2$, то это утверждение истинно. Пусть рассматриваемое утверждение верно для некоторого $k \geq 2$.

Рассмотрим $k+1$ точку $p_0, \ldots, p_k \in B$ и неотрицательные числа $\tau_0, \ldots, \tau_k$ такие, что $\sum\limits_{n=0}^{k} \tau_n = 1$. Положим $p = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\tau_i}{\tau} p_i$ при условии, что $\tau = \sum\limits_{i=1}^{k} \tau_i > 0$ (случай $\tau = 0$ очевиден). Согласно индукционному предположению $p \in B$. Поэтому

$$\sum_{i=0}^{k} \tau_i p_i = \tau_0 p_0 + \tau \sum_{i=1}^{k} \frac{\tau_i}{\tau} p_i = \tau_0 p_0 + \tau p \in B,$$

ибо $p_0, p \in B$, $\tau_0 + \tau = 1$, а множество B выпуклое.

9.11. Неравенство Йенсена. *Пусть f — выпуклая функция на промежутке T. Тогда для любой выпуклой комбинации $\tau_1 x_1 + \ldots + \tau_k x_k$ точек $x_1, \ldots, x_k \in T$ имеет место неравенство*

$$f(\tau_1 x_1 + \ldots + \tau_k x_k) \leq \tau_1 f(x_1) + \ldots + \tau_k f(x_k),$$

где τ_i — произвольные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\tau_1 + \ldots + \tau_k = 1$.

Доказательство. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \tau_i x_i$ — какая-либо выпуклая комбинация точек промежутка T, а $y = \sum\limits_{i=1}^{k} \tau_i f(x_i)$, где

$$\tau_i \geq 0, \quad \tau_1 + \ldots + \tau_k = 1.$$

Точки

$$(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_k, f(x_k))$$

принадлежат надграфику H_f, являющемуся выпуклым множеством. Благодаря барицентрическому критерию выпуклости имеем

$$(x,y) = \Big(\sum \tau_i x_i, \sum \tau_i f(x_i)\Big) = \sum \tau_i \cdot (x_i, f(x_i)) \ \in H_f.$$

Это означает, что $f(x) \le y$.

9.12. Пример. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{3} \ge \frac{1}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$ для всех точек $\alpha,\beta,\gamma \in [0,\pi]$.

9.13. Неравенство Юнга.

$$a_1^{\tau_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{\tau_k} \le \tau_1 a_1 + \ldots + \tau_k a_k \tag{9.3.1}$$

для любых положительных чисел $a_1,\ldots,a_k$, $\tau_1,\ldots,\tau_k$ таких, что $\tau_1 + \ldots + \tau_k = 1$. Знак равенства в (9.3.1) *возможен тогда и только тогда, когда $a_1 = \ldots = a_k$.*

В частности, отсюда выводим неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим:

$$\sqrt[k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k} \le \frac{1}{k}(a_1 + \ldots + a_k).$$

Доказательство. Функция e^x выпуклая. Поэтому в силу неравенства Йенсена имеем

$$a_1^{\tau_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{\tau_k} = e^{\tau_1 \ln a_1} \cdots e^{\tau_k \ln a_k} = e^{\tau_1 \ln a_1 + \ldots + \tau_k \ln a_k} \le$$

$$\le \tau_1 e^{\ln a_1} + \ldots + \tau_k e^{\ln a_k} = \tau_1 a_1 + \ldots + \tau_k a_k.$$

В силу строгой выпуклости функции e^x равенство "=" вместо "$\le$" здесь возможно тогда и только тогда, когда все числа $a_1,\ldots,a_k$ равны между собой.

9.14. Неравенство Гёльдера. *Пусть $x_i \ge 0$, $y_i \ge 0$, $i = 1,\ldots,n$, — два набора неотрицательных вещественных чисел, и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p \in (1,\infty)$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \le \Big(\sum_{i=1}^n x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^n y_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{9.3.2}$$

Знак равенства в (9.3.2) *возможен тогда и только тогда, когда векторы $(x_1^p,\ldots,x_n^p)$ и $(y_1^q,\ldots,y_n^q)$ пропорциональны.*

Доказательство. Пусть $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p > 0$ и $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q > 0$. Полагая в (9.3.1) $a_1 = \frac{x_i^p}{X}$, $a_2 = \frac{y_i^q}{Y}$, имеем

$$\frac{x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}\frac{x_i^p}{X} + \frac{1}{q}\frac{y_i^q}{Y}.$$

Суммируя эти неравенства по i от 1 до n, получаем

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} \le 1.$$

Из последнего выводим (9.3.2).

Поскольку знак равенства в (9.3.1) при $k = 2$ возможен лишь при $a_1 = a_2$, заключаем что в (9.3.2) он возможен лишь при пропорциональности $x_i^p = \lambda y_i^q$ или $y_i^q = \mu x_i^p$, $i = 1, \ldots, n$, где $\lambda, \mu \in [0, \infty)$.

9.15. Неравенство Минковского. *Пусть* $x_i \ge 0$, $y_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$, *— два набора неотрицательных вещественных чисел, и число* $p \in (1, \infty)$. *Тогда*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (9.3.3)$$

Доказательство. Применим неравенство Гёльдера к каждой сумме в правой части тождества

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i (x_i + y_i)^{p-1}.$$

Тогда левая часть будет оценена сверху в соответствии с неравенством Гёльдера величиной

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

После деления полученного неравенства на $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$ (если она отлична от нуля) приходим к (9.3.3).

9.16. Задачи. Пусть f — функция, выпуклая на интервале T. Тогда

1) функция f непрерывна на интервале T.

2) в каждой точке интервала T функция f обладает односторонними производными.

3) На T функции $D_- f$ и $D_+ f$ возрастают, причём $D_- f \leq D_+ f$.

Указание. Ниже рассматриваются лишь точки интервала $T = (a < b)$.

Для каждой пары различных точек p, q положим

$$k_{p,q} = \frac{f(q) - f(p)}{q - p} \quad \text{и} \quad l_{p,q}(t) = f(p) + k_{p,q}(t - p).$$

График функции $l_{p,q}(t)$ есть прямая, проходящая через точки $(p, f(p))$ и $(q, f(q))$, а $k_{p,q} =$ (угловой коэффициент этой прямой) $=$(средняя скорость функции f на участке $[p, q]$) $= Dl_{p,q}$.

1) Для любых x и y имеем $f(t) \leq l_{x,y}(t)$ на $[x, y]$ и $f(t) \geq l_{x,y}(t)$ вне $[x, y]$.

Пусть $x < y < z$ — произвольные точки интервала T.

2) $f(t) \in [l_{x,y}(t), l_{y,z}(t)]$ при $t \in [x, z]$.

Поэтому функция f непрерывна в каждой точке $t \in T$ согласно теореме о непрерывности промежуточной функции.

3) $k_{x,y} \leq k_{x,z} \leq k_{y,z}$.

4) Функции $k_{x,y}$ и $k_{y,z}$ переменной y возрастают на интервалах $(x < b)$ и $(a < z)$, соответственно.

5) Существуют $\lim\limits_{y \to z-0} k_{y,z} = D_- f(z)$ и $\lim\limits_{y \to x+0} k_{x,y} = D_+ f(x)$, причём

6) $D_+ f(x) \leq k_{x,z} \leq D_- f(z)$, если $x < z$.

7) $k_{x,y} \leq k_{y,z} \Rightarrow D_- f(y) \leq k_{y,z} \leq D_+ f(y) \Rightarrow D_- f(y) \leq D_+ f(y)$.

В итоге: если $x < z$, то $D_- f(x) \leq D_+ f(x) \leq D_- f(z) \leq D_+ f(z)$.

9.4 Правило Лопиталя.

9.17. Правило Лопиталя. *Если функции f и g дифференцируемы на полуинтервале $T = [a, b) \subset \overline{\mathbb{R}}$ и если*

1) *либо* $\lim\limits_{x \to b|_T} f(x) = \lim\limits_{x \to b|_T} g(x) = 0$, *либо* $\lim\limits_{x \to b|_T} g(x) = \infty$,

2) $\frac{Df(x)}{Dg(x)} \underset{x \to b|_T}{\longrightarrow} c$ *и* $Dg \neq 0$ *на* T,

то $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to b|_T}{\longrightarrow} c$.

Доказательство. Так как $Dg \neq 0$ на T, то отображение $g : T \to \mathbb{R}$ будет строго монотонным (в противном случае в силу теоремы Ролля производная равна нулю в некоторой точке). Поэтому знак её производной постоянен на T. Будем для определенности предполагать, что $Dg > 0$, а под знаком $\to$ всюду незримо присутствует приписка $x \to b-0$.

I. Пусть $f \to 0$ и $g \to 0$. Положим $f(b) = g(b) = 0$. Теперь преобразованные функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$.

1) Допустим, что $c = 0$. В этом случае для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая точка $p < b$, что

$$|Df(t)| \leq \varepsilon Dg(t) \quad \text{для всех} \quad t \in [p, b).$$

Поэтому согласно теореме о приращениях для всякого $x \in (p, b)$ имеем $|f(x)| = \left|f\big|_x^b\right| \leq \varepsilon g\big|_x^b = \varepsilon |g(x)|$. Следовательно, $\frac{f}{g} \to 0 = c$.

2) Если $c \in \mathbb{R}$, то $\frac{Df - cDg}{Dg} \to 0$. В соответствии с предыдущим пунктом

$$\frac{f}{g} - c = \frac{f - cg}{g} \to 0.$$

3) Если $c = \infty$, то существует такая точка $a' < b$, что $Df > Dg > 0$ на полуинтервале $[a', b)$. Значит, на $[a', b)$ функции f и g строго возрастают и, стало быть, отличны от нуля, ибо $f(b) = 0 = g(b)$.

Поскольку $\frac{Dg}{Df} \to 0$, то $\frac{g}{f} \to 0$ согласно пункту 1. И, значит,

$$\frac{f}{g} \to \infty = c.$$

II. Пусть теперь $g \to \infty$. Предположим сначала, что $c = 0$. В этом случае для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая точка p, что для любого $t \in [p < b)$ выполнено неравенство $|Df(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} Dg(t)$ и потому в силу теоремы о приращениях для каждого $x \in [p, b)$ будем иметь:

$$|f(x)| = \left|f(p) + f\big|_p^x\right| \leq |f(p)| + \left|f\big|_p^x\right| \leq \\ |f(p)| + \frac{\varepsilon}{2} g\big|_p^x = |f(p)| - \frac{\varepsilon}{2} g(p) + \frac{\varepsilon}{2} g(x).$$

Поскольку $g \to \infty$, то на интервале (p, b) имеется такая точка q, что $\frac{\varepsilon}{2} g(x) \geq |f(p)| - \frac{\varepsilon}{2} g(p)$ для всякого $x \in [q, b)$. Сопоставляя полученные неравенства, видим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $q \in [p, b)$ такое, что для всех $x \in (q, b)$ имеем соотношение

$$|f(x)| < \varepsilon g(x).$$

Отсюда выводим $\frac{f}{g} \to 0 = c$.

Случаи $c \in \mathbb{R}$ и $c = \infty$ исследуются так же, как и в ситуации **I**.

10 Многократная дифференцируемость

Для каждой функции f и для любого натурального числа k определим *k-ю производную* $D^k f$ следующим образом:

$$D^0 f = f,\ D^1 f = Df,\ \ldots,\ D^k f = D(D^{k-1} f).$$

10.1. Определение. Будем говорить, что *функция f дифференцируема один раз в точке p, если она дифференцируема в этой точке.* При $k \geq 2$ будем говорить, что *функция f дифференцируема k раз в точке p* и писать $f \in \mathcal{D}^k(p)$, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки p, а её производная Df дифференцируема $k-1$ раз в точке p.

Если $f \in \mathcal{D}^k(p)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то будем говорить, что *функция f бесконечно дифференцируема* в точке p, и писать $f \in \mathcal{D}^\infty(p)$. Будем говорить, что *функция f дифференцируема k раз на множестве M* и писать $f \in \mathcal{D}^k(M)$, если $f \in \mathcal{D}^k(x)$ для всех $x \in M$. Если $f \in \mathcal{D}^k(\operatorname{Dom} f)$, то будем писать $f \in \mathcal{D}^k$.

10.2. Задачи. 1) *Лемма о локализации.* Многократная дифференцируемость является локальным понятием: если функции f и g совпадают в некоторой окрестности точки p и $g \in \mathcal{D}^k(p)$, то $f \in \mathcal{D}^k(p)$ и $D^k f(p) = D^k g(p)$.

2) Если $f \in \mathcal{D}^{k+1}(p)$, то у точки p имеется такая окрестность U, что $f \in \mathcal{D}^k(U)$.

10.3. Сумма функций класса $\mathcal{D}^k$. *Если функции $f, g \in \mathcal{D}^k(p)$, то $(f+g) \in \mathcal{D}^k(p)$ и*

$$D^k(f+g)\big|_p = (D^k f + D^k g)\big|_p.$$

10.4. Произведение функций класса $\mathcal{D}^k$. *Если функции $f, g \in \mathcal{D}^k(p)$, то $fg \in \mathcal{D}^k(p)$ и справедлива формула Лейбница:*

$$D^k(fg)\big|_p = \Big(\sum_{i=0}^{k} C_k^i D^{k-i} f D^i g\Big)\Big|_p. \tag{10.0.1}$$

Доказательство. При $k = 1$ теорема верна. Допустим, что она истинна для некоторого $k \geq 1$, и рассмотрим какие-нибудь функции f и g класса $\mathcal{D}^{k+1}(p)$. В этой ситуации у точки p найдётся такая окрестность U, что функции f, g принадлежат классу $\mathcal{D}^k(U)$, и, стало быть, утверждение (10.0.1) истинно для каждого $x \in U$. А так как все производные порядка $\leq k$ функций f и g принадлежат классу $\mathcal{D}^1(p)$, то правая часть формулы (10.0.1), а вслед за ней и левая, принадлежат этому классу.

Условимся считать $C_n^s\varphi = 0$ для любых $n, s \in \mathbb{Z}$ и любой функции φ, если либо $s < 0$, либо $s > n$.

Так как формула (10.0.1) выполняется в любой точке $x \in U$ и все функции, участвующие в этой формуле, дифференцируемы в точке p, то в этой точке выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned}
D^{k+1}(fg) &= D(D^k fg) = D\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} C_k^i D^{k-i} f D^i g\Big) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} C_k^i D^{k+1-i} f D^i g + \sum_{s\in\mathbb{Z}} C_k^s D^{k-s} f D^{s+1} g \\
&\overset{s=i-1}{=} \sum_i C_k^i D^{k+1-i} f D^i g + \sum_i C_k^{i-1} D^{k+1-i} f D^i g \\
&= \sum_i (C_k^i + C_k^{i-1}) D^{k+1-i} f D^i g = \sum_{i\in\mathbb{Z}} C_{k+1}^i D^{k+1-i} f D^i g \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i D^{k+1-i} f D^i g.
\end{aligned}$$

10.5. Композиция функций класса $\mathcal{D}^k$. *Если $f \in \mathcal{D}^k(p)$, а $g \in \mathcal{D}^k(f(p))$, то $g \circ f \in \mathcal{D}^k(p)$.*

Доказательство. Теорема справедлива для $k = 1$ согласно правилу дифференцирования композиции. Предположим теперь, что она верна для некоторого $k \geq 1$, и пусть $f(x)$ и $g(y)$ — какие-либо функции классов $\mathcal{D}^{k+1}(p)$ и $\mathcal{D}^{k+1}(q)$, $q = f(p)$, соответственно. В этом случае функции f и g дифференцируемы на некоторых окрестностях X и Y точек p и q, соответственно. Так как функция f непрерывна в точке p, то согласно топологическому критерию непрерывности существует такая окрестность U точки p, что для всех $x \in U \cap X$ имеем $f(x) \in Y$. Тем самым множество $V = U \cap X$ является окрестностью точки p такой, что для всех $x \in V$ имеем $f \in \mathcal{D}(x)$, а $g \in \mathcal{D}(f(x))$. Поэтому согласно правилу дифференцирования композиции в любой точке $x \in V$ функция $g \circ f$ дифференцируема и справедлива формула

$$D(g \circ f)|_x = Dg(f(x)) \cdot Df(x) = (((Dg) \circ f) \cdot Df)\,|_x. \qquad (10.0.2)$$

Поскольку $f, Df \in \mathcal{D}^k(p)$, а $Dg \in \mathcal{D}^k(f(p))$, то согласно индукционному предположению $(Dg) \circ f \in \mathcal{D}^k(p)$ и, следовательно, функция

$((Dg)\circ f)\cdot Df$ дифференцируема k раз в точке p, будучи произведением функций класса $\mathcal{D}^k(p)$.

Согласно формуле (10.0.2) функции $D(g\circ f)$ и $((Dg)\circ f)\cdot Df$ совпадают на окрестности V точки p и потому $D(g\circ f)\in\mathcal{D}^k(p)$. Значит, $g\circ f\in\mathcal{D}^{k+1}(p)$.

Согласно принципу математической индукции рассматриваемая теорема верна для каждого натурального $k\geq 1$, а, следовательно, и для $k=\infty$.

10.6. Следствие. *Если $f\in\mathcal{D}^k(p)$ и $f(p)\neq 0$, то $\frac{1}{f}\in\mathcal{D}^k(p)$.*

10.7. Признак k-кратной дифференцируемости обратной функции. *Пусть f и g — такие взаимно обратные отображения, что $f\in\mathcal{D}^{k\geq 2}(p)$, $Df(p)\neq 0$. Тогда $g\in\mathcal{D}^k(q)$, где $q=f(p)$.*

Доказательство. Допустим, что $Df(p)>0$. Так как $k\geq 2$, то функция Df непрерывна в точке p и, стало быть, $Df>0$ на некотором интервале T, содержащем p. Следовательно, функция f непрерывна и строго возрастает на T. Поэтому функция g непрерывна на интервале $X=f(T)$ (теорема об обратной функции). Согласно правилу дифференцирования обратной функции для всех $x\in X$ имеем

$$g\in\mathcal{D}(x) \quad \text{и} \quad Dg(x)=(Df(g(x)))^{-1}=\omega\circ(Df\circ g)|_x, \tag{10.0.3}$$

где $\omega:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ — отображение, задаваемое формулой $\omega(r)=r^{-1}$.

Опираясь на предыдущую теорему, формулу (10.0.3), и лемму о локализации, получаем следующую цепочку заключений.

Так как $g\in\mathcal{D}^1(q)$, $Df\in\mathcal{D}^{k-1}(f(q))$, $\omega\in\mathcal{D}^\infty$, то $\omega\circ(Df\circ g)\in\mathcal{D}^1(q)$. Следовательно, $Dg\in\mathcal{D}^1(q)$ и поэтому $g\in\mathcal{D}^2(q)$.

Так как $g\in\mathcal{D}^2(q)$, $Df\in\mathcal{D}^{k-1}(f(q))$, $\omega\in\mathcal{D}^\infty$, то $\omega\circ(Df\circ g)\in\mathcal{D}^2(q)$. Следовательно, $Dg\in\mathcal{D}^2(q)$. Отсюда $g\in\mathcal{D}^3(q)$.

Продолжая этот процесс, получаем $g\in\mathcal{D}^k(q)$.

Итак, теорема справедлива для каждого натурального числа $k\geq 2$, а, стало быть, и для $k=\infty$.

10.1 Локальная аппроксимация функций полиномами

10.8. Лемма о степенно́й оценке приращения. *Если функция g непрерывна на отрезке $[p,q]$ и для любой точки $t\in(p,q)$ имеем $|Dg(t)|\leq c|t-p|^s$, где $s>-1$, то*

$$\left|g\big|_p^t\right|\leq\frac{c}{s+1}|t-p|^{s+1}$$

для всех $t \in [p, q]$.

Доказательство. Пусть $h(x) = \frac{c}{s+1}|x-p|^{s+1} \operatorname{sign}(q-p)$. Функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, причём $Dh(x) = c|x-p|^s$ в любой точке $x \in \mathbb{R} \setminus \{p\}$. Согласно теореме о приращениях для всякого $t \in [p, q]$ имеем

$$\left|g\Big|_p^t\right| \leq \left|h\Big|_p^t\right|.$$

(Модуль в правой части необходим, когда $q < p$.)

10.2 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

10.9. Теорема о разложении Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. *Если $f \in \mathcal{D}^k(p)$, то имеется, и к тому же лишь один, полином*

$$P(x-p) = a_0 + a_1(x-p) + \ldots + a_k(x-p)^k$$

степени, не большей k, такой, что

$$f(x) = P(x-p) + \varphi(x),$$

где $\varphi(x) \underset{x \to p}{=} o((x-p)^k)$. В этом случае $a_j = \frac{D^j f(p)}{j!}$ для всех $j \in \{0, \ldots, k\}$.

Доказательство. 1) Если полином $P(z) = \sum\limits_{i \geq 0} c_i z^i \underset{z \to 0}{=} o(z^k)$, то $c_0 = \ldots = c_k = 0$.

Для $k = 0$ имеем $c_0 = \lim\limits_{z \to 0} P(z) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{P(z)}{z^k} z^k = 0$. Допустим, что уже установлены равенства $c_0 = \ldots = c_{j-1} = 0$, где $j \leq k$. Тогда $P(z) = \sum\limits_{n \geq j} c_n z^n$ и потому $c_j = \lim\limits_{z \to 0} \frac{P(z)}{z^j} = \lim\limits_{z \to 0} \frac{P(z)}{z^k} z^{k-j} = 0$, если $j \leq k$. Таким способом, по индукции легко доберёмся до c_k.

2) Если функция $g \in \mathcal{D}^k(p)$ такова, что $D^0 g(p) = \ldots = D^k g(p) = 0$, где $k \geq 1$, то $g(x) \underset{x \to p}{=} o((x-p)^k)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $D^{k-1} g(p) = 0$ и $D(D^{k-1} g)(p) = 0$, то $D^{k-1} g(x) \underset{x \to p}{=} o(|x-p|)$ (лейбницево разложение функции $D^{k-1} g$). Поэтому найдётся такой отрезок $T = [r < p < q]$, что $|D^{k-1} g(t)| \leq \varepsilon |t-p|^1$ для каждого $t \in T$.

Отсюда, последовательно применяя лемму 10.8 о степенно́й оценке приращения, получаем неравенство

$$|D^0 g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{k!} |x-p|^k,$$

справедливое для каждого $x \in T$. Тем самым

$$g(x) = D^0 g(x) \underset{x \to p}{=} o(|x-p|^k).$$

3) Если $g(x) = f(x) - \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{D^j f(p)}{j!}(x-p)^j$, то $D^0 g(p) = \ldots = D^k g(p) = 0$.

Из пункта 1 следует единственность искомого полинома, а пункты 2 и 3 доказывают существование и указывают его вид.

10.10. Определение. Полином

$$P(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{D^j f(p)}{j!}(x-p)^j$$

называют k-ым *полиномом Тейлора функции* $f(x)$ *в точке* p, а ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j f(p)}{j!}(x-p)^j$$

— *рядом Тейлора функции* f в точке p. Понятно, что ряд Тейлора функции f в точке p можно написать лишь в том случае, когда $f \in \mathcal{D}^\infty(p)$.

10.11. Задачи. 1) Ряд Тейлора производной равен ряду производных ряда Тейлора. Точнее: производная $(n+1)$-го члена ряда Тейлора функции f является n-ым членом ряда Тейлора функции Df.

2) Найти ряды Тейлора в точке 0 следующих функций: $\exp x$, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^s$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\arctan x$.

10.3 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

10.12. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. *Допустим вещественная функция* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *дифференцируема* $k+1$ *раз во всех точках интервала* (a,b) *и* $D^k f \in C[a,b]$. *Пусть* $p, x \in [a,b]$. *Тогда существует точка* θ, *лежащая между* p *и* x, *такая, что*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{D^j f(p)}{j!}(x-p)^j + \frac{D^{k+1} f(\theta)}{(k+1)!}(x-p)^{k+1}. \qquad (10.3.4)$$

При $k = 0$ это утверждение превращается в теорему Лагранжа о среднем значении. В общем случае теорема показывает, что функцию f можно приблизить многочленом степени k; равенство (10.3.4) позволяет оценить погрешность приближения, если известна верхняя граница величины $|D^{k+1}f(\theta)|$.

Доказательство. Пусть M — число, определяемое равенством

$$f(x) = P(x) + M(x-p)^{k+1}, \tag{10.3.5}$$

и пусть

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t-p)^{k+1} \quad (a \le t \le b), \tag{10.3.6}$$

где $P(t)$ — k-ый *полиномом Тейлора функции* $f(t)$ в точке p. Нам надо показать, что $(k+1)!M = D^{k+1}f(\theta)$ при некотором θ, лежащем между p и x.

Из (10.3.6) имеем

$$D^{k+1}g(t) = D^{k+1}f(t) - (k+1)!M \quad (a < t < b). \tag{10.3.7}$$

Значит, доказательство будет закончено, если мы проверим, что $D^{k+1}g(\theta) = 0$ при некотором θ, лежащем между p и x.

Так как

$$D^l P(p) = D^l \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{D^j f(p)}{j!}(t-p)^j \right)\Bigg|_{t=p} = D^l f(p).$$

при $l = 0, 1, \ldots, k$, мы имеем

$$g(p) = g'(p) = \ldots = D^k g(p) = 0. \tag{10.3.8}$$

Число M было выбрано так, что $g(x) = 0$. Поэтому согласно теореме Лагранжа о среднем $g'(x_1) = 0$ при некотором x_1, лежащем между p и x. Так как $g'(p) = 0$, то подобным же образом мы заключаем, что $g''(x_2) = 0$ при некотором x_2, лежащем между p и x_1. После $k+1$ шагов мы придем к выводу, что $g^{(k+1)}(x_{k+1}) = 0$ при некотором x_{k+1}, лежащем между p и x_k, т. е. между p и x. Очевидно в качестве θ следует взять x_{k+1}.

10.13. Лагранжева оценка остатка разложения Тейлора. *Если функция f дифференцируема $k+1$ раз на отрезке $[p, x]$ и*

$$|D^{k+1}f(t)| \le M$$

при любом $t \in [p, x]$, то

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{D^n f(p)}{n!}(x-p)^n \right| \le \frac{M}{(k+1)!}|x-p|^{k+1}.$$

Доказательство. Приведенная оценка очевидно вытекает из формулы (10.3.4). Однако мы приведем также и независимое доказательство.

Пусть $g(t) = f(t) - \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{D^j f(p)}{j!}(x-p)^j$. Тогда $D^0 g(p) = \ldots = D^k g(p) = 0$, а $|D^{k+1} g(t)| = |D^{k+1} f(t)| \le M$ для всех $t \in [p, x]$.

Отсюда, применяя последовательно лемму о степенно́й оценке приращения к функции g, получаем нужное неравенство:

$$|g(x)| \le \frac{M}{(k+1)!}|x-p|^{k+1}.$$

10.14. Знаменитые разложения в степенные ряды.

1) $e^z = \sum\limits_{j \ge 0} \frac{z^j}{j!}$ *для всех* $z \in \mathbb{C}$.

2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$.

3) $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$.

4) $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \ldots$ *для всех* $t \in [-1, 1]$.

5) $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots$ *для всех* $t \in (-1, 1]$ (*формула Н. Меркатора*).

6) *Ньютоново разложение бинома:*

$(1+x)^s = 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3 + \ldots$ *для всех* $x \in (-1, 1)$.

Доказательство. 1) Для вещественных z — это следствие равенства $e^z = \exp z$. Для комплексных — определение.

2) Поскольку $|D^j \cos x| \le 1$, то ввиду лагранжевой оценки остатка разложения Тейлора

$$\left| \cos x - \sum_{j=0}^{k} \frac{D^j \cos 0}{j!} x^n \right| \le \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \underset{k \to \infty}{\to} 0.$$

Следовательно, $\cos x = \lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{D^j \cos(0)}{j!} x^n$.

3) Устанавливается аналогично предыдущему пункту.

4) Пусть $g_k(t) = \arctan t - \sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{t^{2j+1}}{2j+1}$. Тогда

$$|Dg_k(t)| = \Big|\frac{1}{1+t^2} - \sum_{j=0}^{k}(-t^2)^j\Big| = \Big|\frac{1}{1+t^2} - \frac{1-(-t^2)^{k+1}}{1+t^2}\Big| = \frac{t^{2k+2}}{1+t^2} \leq t^{2k+2}.$$

Отсюда, опираясь на лемму о степенно́й оценке приращения, получаем

$$|g_k(t)| \leq \frac{|t|^{2k+3}}{2k+3} \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

для всякого $t \in [-1,1]$. Следовательно, $\arctan t = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{t^{2j+1}}{2j+1}$.

5) Для каждого $t > -1$ положим $g_k(t) = \ln(1+t) - \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j t^{j+1}}{j+1}$. Тогда

$$|Dg_k(t)| = \Big|\frac{1}{1+t} - \sum_{j=0}^{k}(-t)^j\Big| = \frac{|t|^{k+1}}{1+t}.$$

Отметим какую-нибудь точку $u > -1$. Тогда для каждого $t > u$ справедливо неравенство $|Dg_k(t)| \leq \frac{|t|^{k+1}}{1+u}$. Отсюда, опираясь на лемму о степенно́й оценке приращения, заключаем, что

$$|g_k(t)| \leq \frac{|t|^{k+2}}{(k+2)(1+u)} \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

для всех $t \in [u,1]$. Поскольку u — произвольная точка интервала $(-1,0)$, то $|g(t)| \underset{k\to\infty}{\to} 0$ для всех $t \in (-1,1]$. Следовательно,

$$\ln(1+t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j t^{j+1}}{j+1}.$$

Доказательство разложения 6) предоставляется читателю.

Приведем еще одно доказательство знаменитой формулы Эйлера.

10.15. Формула Эйлера.

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Доказательство. Доказательство очевидно заключено в следующих соотношениях:

$$
\begin{aligned}
e^{it} &= \sum_{k\geq 0} \frac{(it)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} i \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos t + i \sin t.
\end{aligned}
$$

10.4 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши

Хотя формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, ввиду его простоты, удобно пользоваться, все же в отдельных случаях эта форма непригодна для оценки остатка. В таких случаях приходится прибегать к другим формам остаточного члена, менее простым. Сформулируем ниже следующий результат.

10.16. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши. *Допустим вещественная функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *дифференцируема* $k + 1$ *раз во всех точках интервала* (a, b) *и* $D^k f \in C[a, b]$. *Пусть* $p, x \in [a, b]$. *Тогда существует число* $\eta \in (0, 1)$ *такое, что что*

$$
f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{D^j f(p)}{j!} (x-p)^j + \frac{D^{k+1} f(p + \eta(x-p))}{k!} (1-\eta)^k (x-p)^{k+1}. \tag{10.4.9}
$$

11 Теория рядов

11.1 Ряды

11.1.1 Понятие ряда. Примеры. Необходимый признак сходимости. Признак Коши сходимости ряда

Рядом принято называть символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{11.1.1}$$

который имеет следующее содержательный смысл:

1) последовательность $\{a_k \in \mathbb{R}\}$, $k \in \mathbb{N}$, элементы которой называют *членами ряда*: говорят, что $\{a_k\}$ — *общий* член;

2) знак суммы означает, что члены ряда складываются по следующему правилу: последовательности членов ряда соответствует последовательность *частичных сумм*

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ &\ldots\ldots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ &\ldots\ldots. \end{aligned} \tag{11.1.2}$$

3) *Суммой S ряда* (11.1.1) называют *предел*, если он существует, *частичных сумм* (11.1.2):

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{11.1.3}$$

Если $S \in \mathbb{R}$, то ряд называется *сходящимся* (или *суммируемым*). Если $S = \pm\infty$, то говорят, что ряд *расходится* к $\pm\infty$.

Очевидно, что если ряд (11.1.3) сходится, то сходится также и ряд

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k, \tag{11.1.4}$$

где k_0 — произвольное натуральное число. Таким образом, никакое конечное число членов ряда не влияет на его сходимость.

Основная проблема теории рядов состоит в том, чтобы по поведению членов ряда сделать вывод о его сходимости.

11.1. Необходимый признак сходимости. *Если ряд сходится, его общий член стремится к нулю.*

Доказательство. В самом деле, $a_k = S_k - S_{k-1}$. Так как последовательности $\{S_k\}$ и $\{S_{k-1}\}$ имеют общий предел при $k \to \infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

11.2. Примеры. 1) Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$ называется *бесконечной геометрической прогрессией.* Очевидно, что при $|q| \geq 1$ не выполняется необходимый признак сходимости. При $|q| < 1$ для нахождения частичной суммы этого ряда воспользуемся формулой 1.11.20: имеем

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

На основании формулы (1.11.20) находим значение суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^k + \ldots.$$

2) Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ расходится. Здесь последовательность частичных сумм S_n имеет два различных частичных предела: $S_{2n} = 0 \to 0$ при $n \to \infty$, и $S_{2n+1} = -1 \to -1$ при $n \to \infty$, и поэтому не может быть сходящейся.

3) Гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится. Сделаем следующее наблюдение:

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2} \to \infty \end{aligned}$$

при $n \to \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n} = \infty$, и гармонический ряд расходится.

3) Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится. Действительно, достаточно проверить, что последовательность $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}$ частичных сумм ряда монотонна и ограничена. Из соотношения $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ выводим монотонность:

$S_{n+1} > S_n$, $n \in \mathbb{N}$. Далее получаем ограниченность сверху частичных сумм:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot n} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)} \\ &\le 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= 1 + \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \ldots + \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) \\ &= 2 - \frac{1}{n+1} \le 2 \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

4) Знакопеременный гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ сходится. В этом случае

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \ldots + \Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\Big) \\ &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n} \\ &\le 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, монотонно возрастающая (Почему?) последовательность S_{2n} ограничена сверху и, следовательно, сходится. С другой стороны, последовательность

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

сходится к тому же пределу. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. (Доказать?)

5) Экспоненциальный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ сходится для любого $x \in \mathbb{R}$. Сходимость этого ряда непосредственно выводится из следствия 3.78.

11.3. Критерий Коши сходимости ряда. *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{11.1.5}$$

сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для любых $m \geq l \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=l}^{m} a_k \right| < \varepsilon. \tag{11.1.6}$$

Доказательство. Для вывода критерия Коши сходимости ряда применим критерий Коши 3.74 к последовательности частичных сумм $\{S_n\}$: последовательность $\{S_n\}$ сходится $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_1 \in \mathbb{N}$ такой, что для любых $m \geq l \geq n_1$ выполняется неравенство $|S_m - S_l| < \varepsilon$. Последнее удобно переписать в виде неравенства $|S_m - S_{l-1}| < \varepsilon$, справедливого для любых $m \geq l \geq n_1 + 1$. Заметим теперь, что

$$|S_m - S_{l-1}| = \left| \sum_{k=l}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Последнее эквивалентно (11.1.6) для $m \geq l \geq n_0 = n_1 + 1$.

11.1.2 Действия над рядами

Рассмотрим сходящиеся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{11.1.7}$$

Сопоставим этим рядам их линейную комбинацию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{11.1.8}$$

11.4. Предложение. *Если ряды* (11.1.7) *сходятся, то сходится также и их линейная комбинация* (11.1.8). *Более того, сумма линейной комбинации* (11.1.8) *равна линейной комбинации сумм:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Доказательство. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{m} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{m} a_n + \beta \sum_{n=1}^{m} b_n.$$

Так как пределы в правой части этого равенства при $n \to \infty$ существуют, то существует также и предел слева.

11.1.3 Абсолютно сходящиеся ряды и их перестановки

11.5. Определение. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$, составленный из модулей членов исходного ряда.

11.6. Теорема. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится. Обратное неверно.*

Доказательство этой теоремы вытекает из доказываемого ниже мажорантного признака при $b_k = |a_k|$, см. теорему 11.9.

Ряд примера 4 из 11.2 сходится неабсолютно.

11.7. Определение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{11.1.9}$$

и произвольное *биективное* отображение $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Ряду и отображению σ сопоставим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n}. \tag{11.1.10}$$

Ряд (11.1.10) называется *перестановкой* ряда (11.1.9).

Заметим, что значения частичных сумм рядов (11.1.9) и (11.1.10) могут значительно отличаться друг от друга. Естественно, возникает вопрос как могут отличаться суммы этих рядов, если только оба ряда сходятся, или что можно сказать о сумме одного из рядов, если другой ряд сходится.

11.8. Теорема. *Если ряд* (11.1.9) *сходится абсолютно, то любая его перестановка* (11.1.10) *также сходится, причем его сумма равна сумме исходного ряда.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n \geq n_0$ верно неравенство

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $m_0 = \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \dots, \sigma^{-1}(n_0)\}$. Понятно, что $m_0 \geq n_0$. Для любого $n \geq m_0$ имеем

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \supset \{1, 2, \dots, n_0\},$$
$$\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \subset \{1, 2, \dots, n_0, \dots, L\},$$

где $L = \max\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$. Отсюда получаем оценки

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma_k}\Big| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n_0+1}^{L} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное число, из последних неравенств выводим как сходимость ряда (11.1.10), так и совпадение суммы переставленного ряда с суммой исходного.

11.1.4 Мажорантные признаки сходимости

11.9. Теорема. *Пусть даны ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

1) *Если для членов этих рядов выполняется соотношение:*

$$|a_k| \leq L \cdot b_k \,|_{k\to\infty}, \tag{11.1.11}$$

где $L \in (0, \infty)$ *— фиксированное число, то из сходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *вытекает абсолютная сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

2) *Если для членов этих рядов выполняется соотношение:*

$$0 \leq a_k \leq L \cdot b_k \,|_{k\to\infty}, \tag{11.1.12}$$

где $L \in (0, \infty)$ *— фиксированное число, то из расходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *вытекает расходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство. 1) Пусть условие $|a_k| \leq b_k$ выполняется для всех $k \geq n_1$. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Lb_k$ сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ вытекает существование n_2 такого, что при всех $m \geq n \geq n_2$ выполняется соотношение

$$L \cdot \sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon.$$

Отсюда для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ имеем соотношения

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{m} |a_k| \le L \cdot \sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon$$

для всех $m \ge n \ge n_0 = \max(n_1, n_2)$. Отсюда по критерию Коши 11.3 сходимости ряда получаем как сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, так сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$, т. е. его абсолютную сходимость.

2) Пусть условие $0 \le a_k \le b_k$ выполняется для всех $k \ge n_1$. Из неравенства

$$\sum_{k=n_1}^{m} a_k \le L \cdot \sum_{k=n_1}^{m} b_k$$

выводим расходимость ряда $\sum\limits_{k=n_1}^{\infty} b_k$, так как по условию $\sum\limits_{k=n_1}^{m} a_k = +\infty$.

11.10. Теорема. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится (расходится) и*

$$\frac{a_k}{b_k} \to K \in (0, \infty) \quad \text{при } k \to \infty, \tag{11.1.13}$$

то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится (расходится).*

Доказательство. Из условия (11.1.13) получаем, что

$$\frac{a_k}{b_k} \in \left(\frac{K}{2}, \frac{3K}{2}\right)\Big|_{k\to\infty}.$$

Отсюда имеем $b_k \le \frac{2}{K} a_k \;\Big|_{k\to\infty}$. В силу теоремы 11.9 имеем сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, если только ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Если же он расходится, то по той же теореме расходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, так как верна оценка $a_k \le \frac{3K}{2} b_k \;\Big|_{k\to\infty}$.

11.11. Теорема. *Пусть даны ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. *Если*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \le \frac{b_{k+1}}{b_k}\;\Big|_{n\to\infty}, \tag{11.1.14}$$

то

1) *из сходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *вытекает сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, *а*

2) *из расходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *вытекает расходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство. Действительно, по условию теоремы соотношение (11.1.14) выполняется для всех $k \geq n$, где $n \in \mathbb{N}$ — некоторое число. Тогда для $k > n$ имеем соотношения

$$\begin{gathered}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n},\\ \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}},\\ \cdots\cdots\cdots\\ \frac{a_k}{a_{k-1}} \leq \frac{b_k}{b_{k-1}}.\end{gathered}$$

Перемножая почленно эти неравенства выводим

$$\frac{a_k}{a_n} \leq \frac{b_k}{b_n} \quad \text{для всех } k > n.$$

Отсюда имеем

$$a_k \leq \frac{a_n}{b_n} b_k \quad \text{для всех } k > n.$$

Доказываемые утверждения мы выводим теперь из теоремы 11.9.

11.1.5 Телескопический признак сходимости

11.12. Теорема. *Пусть члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *неотрицательны и монотонно стремятся к нулю. Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}. \tag{11.1.15}$$

Доказательство. Пусть данный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — последовательность его частичных сумм. Обозначим символом $T_n =$

$\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{k-1}a_{2^k}$ последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}. \tag{11.1.16}$$

В этих обозначениях по индукции имеем оценки

$$\begin{aligned}
S_2 &= a_1 + a_2 \geq a_2 = T_1,\\
S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq a_2 + 2a_{2^2} = T_2,\\
&\ldots\ldots\\
S_{2^l} &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^l} \geq T_{l-1} + a_{2^{l-1}+1} + \ldots + a_{2^l}\\
&\geq T_{l-1} + 2^{l-1}a_{2^l} = T_l.\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Следовательно, монотонная последовательность частичных сумм T_l ограничена сверху и поэтому в силу теоремы 3.30 существует конечный предел $\lim\limits_{l\to\infty} T_l$. Таким образом, в силу соотношения (11.1.16) ряд (11.1.15) сходится.

Пусть теперь сходится ряд (11.1.15). В предыдущих обозначениях по индукции имеем оценки

$$\begin{aligned}
a_1 + 2T_1 &= a_1 + 2a_2 \geq a_1 + a_2 + a_3 = S_3,\\
a_1 + 2T_2 &= a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} \geq S_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = S_7,\\
&\ldots\ldots\\
a_1 + 2T_l &= a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^l a_{2^l} \geq S_{l-1} + a_{2^l} + \ldots + a_{2^{l+1}-1} = S_{2^{l+1}-1}.\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Следовательно монотонная подпоследовательность $S_{2^{l+1}-1}$ последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм данного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничена сверху. Поэтому в силу теоремы 3.30 подпоследовательность $S_{2^{l+1}-1}$ сходится. В силу задачи 3.60 монотонная последовательность S_n также является сходящейся. Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ доказана.

11.1.6 Признак сходимости Д'Аламбера

11.13. Теорема. *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{11.1.17}$$

сходится абсолютно при условии

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1. \tag{11.1.18}$$

Если же

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1\,|_{k\to\infty}, \tag{11.1.19}$$

то ряд (11.1.17) *расходится.*

Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq 1 \leq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}. \tag{11.1.20}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (11.1.18). Возьмем произвольное промежуточное число α, удовлетворяющее соотношениям

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < \alpha < 1.$$

В силу задачи 3.65 существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < \alpha < 1$$

для всех $k \geq l$. Тогда для произвольного $k > l$ имеем

$$\begin{aligned} |a_k| &= \frac{|a_k|}{|a_{k-1}|} \cdot \frac{|a_{k-1}|}{|a_{k-2}|} \cdot \ldots \cdot \frac{|a_{l+1}|}{|a_l|} \cdot |a_l| \\ &< \alpha^{k-l} \cdot |a_l| = \frac{|a_l|}{\alpha^l} \cdot \alpha^k. \end{aligned} \tag{11.1.21}$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{|a_l|}{\alpha^l} \cdot \alpha^k$ сходится, то в силу мажорантного признака сходимости 11.9 ряд (11.1.17) сходится абсолютно.

Если же выполнено условие (11.1.19), то существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1 \tag{11.1.22}$$

для всех $k \geq m$. Применим соотношение (11.1.21) с числом m вместо l. С учетом (11.1.22) приходим к соотношениям

$$|a_k| = \frac{|a_k|}{|a_{k-1}|} \cdot \frac{|a_{k-1}|}{|a_{k-2}|} \cdot \ldots \cdot \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} \cdot |a_m| \geq |a_m|$$

для любого $k \geq m$. Так как $a_m \neq 0$, для ряда (11.1.17) не выполняется необходимый признак сходимости и он расходится.

Для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ выполняется условие (11.1.20), однако первый ряд расходится, а второй сходится.

Для ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

имеем

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0,$$
$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k = +\infty.$$

11.14. Пример. Применим признак Д'Аламбера для доказательства сходимость экспоненциального ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Здесь для фиксированного $x \in \mathbb{R}$ имеем общий член $a_k = \frac{x^k}{k!}$ и поэтому

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|x|^k} = \frac{|x|}{k+1} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Следовательно, выполнено условие (11.1.18) и поэтому экспоненциальный ряд сходится абсолютно.

11.1.7 Признак Коши сходимости

11.15. Теорема. *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{11.1.23}$$

сходится абсолютно при условии

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1. \tag{11.1.24}$$

Если же для некоторой подпоследовательности $\{k_l\}$ справедливо

$$\sqrt[k_l]{|a_{k_l}|} \geq 1 \,|_{l\to\infty}, \tag{11.1.25}$$

то ряд (11.1.23) расходится.

Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1. \tag{11.1.26}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (11.1.24). Возьмем произвольное промежуточное число α, удовлетворяющее соотношениям

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \alpha < 1.$$

В силу задачи 3.65 существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sqrt[k]{|a_k|} < \alpha < 1$$

для всех $k \geq n$. Тогда для произвольного $k \geq 1$ имеем

$$|a_k| < \alpha^k.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha^k$ сходится, то в силу мажорантного признака сходимости 11.9 ряд (11.1.23) сходится абсолютно.

Если же выполнено условие (11.1.25), то существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sqrt[k_l]{|a_{k_l}|} \geq 1$$

для всех $l \geq m$. Отсюда имеем $|a_{k_l}| \geq 1$ для всех $l \geq m$. Следовательно, для ряда (11.1.23) не выполняется необходимый признак сходимости и он расходится.

Контпримеры к условию (11.1.26) такие же, как и в предыдущей теореме.

11.16. Задача. Доказать, что условие (11.1.25) вытекает из неравенства

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1. \tag{11.1.27}$$

Понятно, что условие (11.1.27) формально сильнее условия (11.1.25). Существует ли ряд, для которого выполняется условие (11.1.25), но не выполняется условие (11.1.27)?

11.1.8 Признаки сходимости Куммера, Раабе, Бертрана и Гаусса

11.17. Теорема. *Пусть последовательность $\{c_n > 0\}$ такова, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} \tag{11.1.28}$$

расходится. Ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{11.1.29}$$

с положительными членами сопоставим последовательность

$$\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}. \tag{11.1.30}$$

Если

$$\mathcal{K}_n \geq \delta > 0 \,|_{n\to\infty}, \tag{11.1.31}$$

то ряд (11.1.29) *сходится.*

Если

$$\mathcal{K}_n \leq 0 \,|_{n\to\infty}, \tag{11.1.32}$$

то ряд (11.1.29) *расходится.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}_n \geq \delta > 0$ для всех $n \geq n_0$. Тогда для $n \geq n_0$ имеем

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \delta a_{n+1}. \tag{11.1.33}$$

Отсюда выводим $c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq 0$ или $c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1}$ Таким образом, монотонно убывающая последовательность $c_n a_n$ имеем предел $\alpha > 0$.

Следовательно, ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})$$

сходится. Из (11.1.33) и мажорантного признака сходимости выводим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Если же для всех $n \geq n_0$ имеем

$$\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0,$$

то верно также и такое неравенство:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left.\frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}\right|_{n\to\infty}.$$

Из теоремы 11.11 получаем расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ расходящийся по условию теоремы.

11.18. Задача. Доказать, что условие (11.1.32) расходимости в признаке Куммера вытекает из соотношения

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathcal{K}_n < 0. \tag{11.1.34}$$

Понятно, что условие (11.1.34) формально сильнее условия (11.1.31).

Существует ли ряд, для которого выполняется условие (11.1.31), но не выполняется условие (11.1.34).

11.19. Следствие. *Полагая в признаке Куммера $c_n = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, получаем признак сходимости Д'Аламбера.*

Доказательство. Действительно, в этом случае

$$\mathcal{K}_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\mathcal{D}_n} - 1,$$

где $\mathcal{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Если выполняется условие (11.1.31), то $\varliminf_{n\to\infty} \mathcal{K}_n > 0$, и следовательно, $\varlimsup_{n\to\infty} \mathcal{D}_n < 1$. Легко проверить, что верно и обратное: из $\varlimsup_{n\to\infty} \mathcal{D}_n < 1$ имеем $\varliminf_{n\to\infty} \mathcal{K}_n > 0$. Следовательно, оба эти признака в этом случае эквивалентны.

Заметим еще, что условие $\mathcal{K}_n \le 0$ эквивалентно $\mathcal{D}_n \ge 1$.

Следствие доказано.

11.20. Признак Раабе. *Полагая в признаке Куммера $c_n = n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, получаем признак сходимости Раабе: составим для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ последовательность*

$$\mathcal{R}_n = n \cdot \Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big). \tag{11.1.35}$$

Если $\varliminf_{n\to\infty} \mathcal{R}_n > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если $\mathcal{R}_n \le 1|_{n\to\infty}$, то этот ряд расходится.

Доказательство. Положим в условии признака Куммера $c_n = n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, как известно, расходится.

Тогда последовательность $\mathcal{K}_n$ в признаке Куммера можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{K}_n = n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = n \cdot \Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) - 1 = \mathcal{R}_n - 1. \tag{11.1.36}$$

Теперь очевидно, что условие $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathcal{R}_n > 1$ $(\mathcal{R}_n \le 1\,|_{n\to\infty})$ эквивалентно условию $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathcal{K}_n > 0$ $(\mathcal{K}_n \le 0\,|_{n\to\infty})$.

11.21. Признак Бертрана. *Полагая в признаке Куммера* $c_n = n\ln n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *получаем признак сходимости Бертрана: составим для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *последовательность*

$$\mathcal{B}_n = \ln n \cdot \Big[n \cdot \Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) - 1\Big]. \tag{11.1.37}$$

Если $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathcal{B}_n > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Если* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathcal{B}_n < 1$, *то этот ряд расходится.*

Доказательство. Положим в условии признака Куммера $c_n = n\ln n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$, как известно, расходится.

Тогда последовательность $\mathcal{K}_n$ в признаке Куммера можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_n &= n \cdot \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) \\ &= \ln n \cdot \Big[n \cdot \Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) - 1\Big] - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1} \\ &= \mathcal{B}_n - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1}.\end{aligned} \tag{11.1.38}$$

Очевидно, что условие $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathcal{B}_n > 1$ $(\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathcal{B}_n < 1)$ эквивалентно условию $\varliminf\limits_{n\to\infty} \mathcal{K}_n > 0$ $(\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathcal{K}_n < 0)$.

11.22. Признак Гаусса. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— ряд с положительными членами. Предположим, что отношение* $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ *может быть записано в следующей асимптотической форме:*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad \text{при } n \to \infty, \tag{11.1.39}$$

где θ_n — *ограниченная величина. Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\text{\textit{сходится, если}} \quad \begin{cases} \lambda > 1, \\ \lambda = 1, \mu > 1, \end{cases} \tag{11.1.40}$$

и

$$\text{\textit{расходится, если}} \quad \begin{cases} \lambda < 1, \\ \lambda = 1, \mu \le 1. \end{cases} \tag{11.1.41}$$

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda$, то случай $\lambda \neq 1$ сводится к признаку Д'Аламбера.

Пусть теперь $\lambda = 1$. Тогда

$$\mathcal{R}_n = n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) = \mu + \frac{\theta_n}{n}.$$

Поэтому случай $\mu \neq 1$ сводится к признаку Раабе.

Если $\mu = 1$, то имеем

$$\mathcal{B}_n = \ln n\,(\mathcal{R}_n - 1) = \frac{\ln n}{n} \cdot \theta_n \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

так что сходимость ряда в этому случае вытекает из признака Бертрана.

11.1.9 Степенные ряды в действительной области. Формула Коши — Адамара

Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{11.1.42}$$

Здесь числа $a_n \in \mathbb{R}$ фиксированы, $n \in \mathbb{N}$, а $x \in \mathbb{R}$ — произвольное действительное число. Ряды вида (11.1.42) называются *степенными*. Числа $a_n \in \mathbb{R}$ называются *коэффициентами* степенного ряда.

Основной вопрос при исследовании сходимости степенного ряда состоит в том, чтобы по каэффициентам степенного ряда найти совокупность всех $x \in \mathbb{R}$, при которых ряд (11.1.42) сходится.

11.23. Формула Коши — Адамара. *Пусть дан степенной ряд* (11.1.42). *Положим*

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{11.1.43}$$

Тогда

1) *для всех* $x \in \mathbb{R}$ *таких, что* $|x| < R$, *ряд* (11.1.42) *сходится абсолютно.*

2) *для всех* $x \in \mathbb{R}$ *таких, что* $|x| > R$, *ряд* (11.1.42) *расходится.*

Доказательство. Для проверки сходимости степенного ряда при $|x| < R < \infty$ применим признак Коши сходимости ряда: при

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k||x^k|} < 1$$

ряд (11.1.42) сходится. Левая часть последнего неравенства равна $|x|R^{-1}$. Условие $|x|R^{-1} < 1$ сходимости ряда очевидно эквивалентно соотношению $|x| < R$.

Рассмотрим теперь случай $R = \infty$. Имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Фиксируем число $q \in (0,1)$. Возьмем произвольное число $x \in \mathbb{R}$ и найдем n_0 так, чтобы

$$\sqrt[n]{|a_n||x|^n} = |x|\sqrt[n]{|a_n|} < q$$

для всех $n \geq n_0$. Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x^n|} \leq q < 1$$

и поэтому ряд (11.1.42) сходится абсолютно.

Пусть теперь a_{n_k} — такая подпоследовательность, что $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \frac{1}{R}$. Тогда из условия $|x| > R$ получаем $|x| > \left.\frac{1}{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}}\right|_{k\to\infty}$. Следовательно, $\left.|x^{n_k}a_{n_k}| > 1\right|_{k\to\infty}$. Таким образом, не выполняется необходимый признак сходимости, и ряд (11.1.42) расходится.

Возникает вопрос: что какая сходимость может быть на границе круга сходимости, т. е. в точках $|x| = R$. Рассмотрим несколько примеров раздела 10.14.

11.24. Примеры. 1) $\operatorname{arctg} t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \ldots$ для всех $t \in [-1,1]$.

Признаку Коши — Адамара имеем условие $\sqrt[n]{\frac{t^{2n+1}}{2n+1}} = \frac{t^{2+\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{2n+1}} \to t^2 < 1$ для сходимости ряда. Таким образом, ряд сходится при всяком $|t| < 1$, и расходится при $|t| > 1$. При $t = \pm 1$ имеем ряд $\pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, сходящийся по признаку Лейбница (см. ниже 11.30).

2) $\ln(1+t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots$ для всех $t \in (-1, 1]$ (*формула Н. Меркатора*).

Признаку Коши — Адамара имеем условие $\sqrt[n]{\frac{|t|^n}{n}} = \frac{|t|}{\sqrt[n]{n}} \to |t| < 1$ для сходимости ряда. Таким образом, ряд сходится при всяком $|t| < 1$, и расходится при $|t| > 1$. При $t = 1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, сходящийся по признаку Лейбница (см. ниже 11.30). При $t = -1$ имеем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

6) *Биномиальный ряд:*

$1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{s(s-1)(s-2)\cdot\ldots\cdot(s-(n-1))x^n}{n!} = 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3 + \ldots$ сходится для всех $x \in (-1, 1)$. Чтобы это проверить, применим признак Д'Аламбера. Общий член ряда равен $a_n = \frac{s(s-1)(s-2)\cdot\ldots\cdot(s-(n-1))x^n}{n!}$. Отсюда

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|s(s-1)(s-2)\cdot\ldots(s-(n-1))|\cdot(s-n)|x|^{n+1}n!}{|s(s-1)(s-2)\cdot\ldots\cdot(s-(n-1))||x|^n(n+1)!} = \frac{|s-n||x|}{n+1} \to |x|.$$

Следовательно, при $|x| < 1$ биномиальный ряд сходится абсолютно, а при $|x| > 1$ ряд расходится.

Читатель может продолжить дальнейшее исследование и показать, что сходимость в граничных точках зависит от s:

1) если $s > 0$, то биномиальный ряд сходится также и в граничных точках $x = -1$ и $x = 1$;

2) если $-1 < s < 0$, то биномиальный ряд сходится в граничной точке $x = 1$ и расходится в граничной точке $x = -1$;

3) если $s \leq -1$, то биномиальный ряд расходится в граничных точках $x = -1$ и $x = 1$.

Отметим, что в качестве частного случая при $s = -1$ получаем бесконечную геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \ldots.$$

11.1.10 Условно сходящиеся ряды и их перестановки. Признаки сходимости Абеля и Дирихле

11.25. Определение. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, но не абсолютно (т. е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$, составленный из модулей членов исходного ряда, расходится).

11.26. Предложение. *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{+} = +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-} = +\infty,$$

где $a_k^{+} = \frac{|a_k|+a_k}{2}$, $a_k^{-} = \frac{|a_k|-a_k}{2}$.

Доказательство. Действительно, имеем $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{+} - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{-}$. Отсюда вытекает, что если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{+}$ сходится, то сходится также и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{-}$. Тогда из соотношения $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{+} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{-}$ вытекает, что сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Таким образом, предположение о сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{+}$ приводит к противоречию.

Аналогично предыдущему мы прийдем к противоречию предположив сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{-}$.

11.27. Теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов. *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, то для любого $A \in \mathbb{R}$ существует перестановка σ этого ряда такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = A. \tag{11.1.44}$$

Доказательство. Обозначим символами $p_1, p_2, p_3, \ldots$ неотрицательные члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ в том порядке, в каком они встречаются, и пусть

$q_1, q_2, q_3, \ldots$ — абсолютные величины отрицательных членов исходного ряда также в их естественном порядке.

Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k$ отличаются от рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^-$ только нулевыми членами и поэтому расходятся.

Мы построим две последовательности $\{m_n\}$, $\{k_n\}$ натуральных чисел такие, что ряд

$$p_1 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - \ldots - q_{k_1} \\ + p_{m_1+1} + \ldots + p_{m_2} - q_{k_1+1} - \ldots - q_{k_2} + \ldots, \quad (11.1.45)$$

являющийся перестановкой исходного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, будет сходящимся и удовлетворять условию (11.1.44).

Пусть m_1, k_1 — наименьшие из натуральных чисел, удовлетворяющих условиям

$$p_1 + \ldots + p_{m_1} > A,$$
$$p_1 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - \ldots - q_{k_1} < A;$$

пусть m_2, k_2 — наименьшие из натуральных чисел, удовлетворяющих условиям

$$p_1 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - \ldots - q_{k_1} + p_{m_1+1} + \ldots + p_{m_2} > A,$$
$$p_1 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - \ldots - q_{k_1} + p_{m_1+1} + \ldots + p_{m_2} - q_{k_1+1} - \ldots - q_{k_2} < A,$$

и т. д. Мы можем продолжить этот выбор так как ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k$ расходящиеся.

Если символами A_n и B_n обозначить обозначить частичные суммы ряда (11.1.45), последние члены которых p_{m_n} и $-q_{k_n}$, то

$$|A_n - A| \le p_{m_n}, \quad |B_n - A| \le q_{k_n}.$$

Следовательно, $A_n \to A$ и $B_n \to A$, так как $p_n \to 0$ и $q_n \to 0$ при $n \to \infty$.

По построению перестановки ясно, что никакое число, отличное от A, не может быть частичным пределом последовательности частичных сумм ряда (11.1.45).

11.28. Метод суммирования Абеля. *Пусть даны две последова-*

тельности $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $k \geq 0$, *и положим*

$$A_k = \sum_{j=k}^{p} a_j, \quad \text{где } 0 \leq k \leq p \text{ — фиксированное число,} \tag{11.1.46}$$

$$A_{-1} = 0. \tag{11.1.47}$$

Тогда для любых натуральных $0 \leq p \leq q$ *имеем*

$$\sum_{k=p}^{q} a_k b_k = \sum_{k=p}^{q-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p.$$

Доказательство. Заметим, что $a_k = A_k - A_{k-1}$. Для натуральных $0 \leq p \leq q$ имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{q} a_k b_k &= \sum_{k=p}^{q} (A_k - A_{k-1}) b_k \\
&= \sum_{k=p}^{q} A_k b_k - \sum_{k=p}^{q} A_{k-1} b_k = \sum_{k=p}^{q} A_k b_k - \sum_{k=p-1}^{q-1} A_k b_{k+1} \\
&= \sum_{k=p}^{q-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p.
\end{aligned} \tag{11.1.48}$$

11.29. Признак сходимости Дирихле. *Пусть дан ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k. \tag{11.1.49}$$

Тогда при выполнении условий

$\mathcal{D}1)$ *частичные суммы ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *ограничены в совокупности, т. е. для некоторой постоянной* $L \in (0, \infty)$ *имеем соотношение*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq L$$

для всех $n \in \mathbb{N}$;

$\mathcal{D}2)$ *последовательность* b_k *монотонно сходится к нулю*

ряд (11.1.49) *сходится.*

Доказательство. Для определенности будем предполагать, что b_k монотонно убывает. Тогда $b_k - b_{k-1} \geq 0$ для всех $k \geq 1$.

Покажем, что для ряда (11.1.49) выполняется критерий Коши. Для оценки суммы $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k b_k$, где $0 \leq p \leq q$, применим метод суммирования Абеля (11.28). Полагая $A_k = \sum\limits_{j=0}^{k} a_j$, имеем

$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=p}^{q-1} |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| + |A_q| \cdot |b_q| + |A_{p-1}| \cdot |b_p|$$

$$\leq L\left(\sum_{k=p}^{q-1}(b_k - b_{k+1}) + b_q + b_p\right) = 2Lb_p. \quad (11.1.50)$$

Так как $b_p \to 0$ при $p \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$, существует n_0 такое, что для всех $p \geq n_0$ верно неравенство $|b_p| \leq \frac{\varepsilon}{2L}$. Тогда для всех $q \geq p \geq n_0$ из (11.1.50) выводим

$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k b_k\right| < \varepsilon.$$

Таким образом, для ряда (11.1.49) выполняется критерий Коши.

В качестве следствия мы получаем

11.30. Признак сходимости Лейбница. *Знакопеременный ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k, \quad (11.1.51)$$

в котором последовательность $\{b_k\}$ *монотонно стремится к нулю при* $k \to \infty$*, сходится.*

Доказательство. Действительно, полагаем $a_k = (-1)^k$ в признаке Дирихле 11.29. Тогда очевидно выполняются условия $\mathcal{D}1$ и $\mathcal{D}2$ признака Дирихле и поэтому ряд (11.1.51) сходится.

11.31. Признак сходимости Абеля. *Пусть дан ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k. \quad (11.1.52)$$

Тогда при выполнении условий

$\mathcal{A}1$) *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *сходится;*

$\mathcal{A}2$) *последовательность* b_k *монотонна и ограничена*

ряд (11.1.52) *сходится.*

Доказательство. Для определенности будем предполагать, что b_k монотонно убывает и $|b_k| \leq K$ для любого k. Тогда $b_k - b_{k+1} \geq 0$ для всех $k \geq 0$.

Покажем, что для ряда (11.1.52) выполняется критерий Коши. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для оценки суммы $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k b_k$, где $0 < p \leq q$, применим метод суммирования Абеля (11.28). Так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится, существует l такое, что для любого $k \geq l$ будем иметь $|A_k| < \frac{\varepsilon}{2K}$, где $A_k = \sum\limits_{j=l}^{k} a_j$. Тогда для $l \leq p \leq q$ имеем

$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=p}^{q-1} |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| + |A_q| \cdot |b_q| + |A_{p-1}| \cdot |b_p|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2K} \cdot \left(\sum_{k=p}^{q-1} (b_k - b_{k+1}) + b_q + b_p\right) = \frac{\varepsilon}{2K} \cdot 2b_p \leq \varepsilon. \quad (11.1.53)$$

Таким образом, для всех $q \geq p \geq l$ из (11.1.53) выводим

$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k b_k\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, для ряда (11.1.52) выполняется критерий Коши.

11.32. Замечание. Признак Абеля можно получить также как прямое следствие признака Дирихле. Действительно, по условию теоремы Абеля существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$. Положим $\beta_k = b - b_k$. Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \beta_k$$

сходится по признаку Дирихле. Но сумма двух сходящихся рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \beta_k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k b$$

равна сумме исходного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_k$. Следовательно, он сходится.

11.33. Пример. В качестве примеров условно сходящихся рядов рассмотрим классические ряды Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}. \tag{11.1.54}$$

Сходимость этих рядов удобно исследовать одновременно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}. \tag{11.1.55}$$

Полагаем в признаке Дирихле $a_n = e^{in}$, $b_n = \frac{1}{n}$. Очевидно, что b_n монотонно стремится к нулю. Остается проверить, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничены в совокупности. Действительно, по формуле (1.11.20) для суммы геометрической прогрессии имеем

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik} = 1 + e^i + e^{2i} + \ldots + e^{in} = \frac{e^{i(n+1)-1}}{e^i - 1} = \frac{(e^{i(n+1)} - 1)(e^{-i} - 1)}{(e^i - 1)(e^{-i} - 1)}$$

$$= \frac{e^{in} - e^{i(n+1)} - e^{-i} + 1}{2 - (e^i + e^{-i})} = \frac{e^{in} - e^{i(n+1)} - e^{-i} + 1}{2(1 - \cos 1)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left| \sum_{k=0}^{n} e^{ik} \right| \leq \frac{2}{1 - \cos 1}$$

Таким образом, мы видим, что оценки

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \cos k \right| \leq \frac{2}{1 - \cos 1} \quad \text{и} \quad \left| \sum_{k=0}^{n} \sin k \right| \leq \frac{2}{1 - \cos 1}$$

не зависят от n. Следовательно, для рядов (11.1.54) выполняются условия признака Дирихле и поэтому они сходятся.

Докажем, что ряды (11.1.54) не являются абсолютно сходящимися. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2 n}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n}{n} = \infty,$$

ибо $|\cos n| \geq \cos^2 n, \ \ |\sin n| \geq \sin^2 n$. Для этого заметим, что

$$\sum_n \frac{\cos^2 n}{n} + \sum_n \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_n \frac{1}{n} = \infty.$$

Следовательно, одна из рассматриваемых сумм также равна ∞. Но так как $\cos^2 n - \sin^2 n = \cos 2n$, а сумма ряда $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos 2n}{n}$ согласно предыдущим рассуждениям конечна, то и сумма каждого из рассматриваемых рядов бесконечна.

11.1.11 Умножение рядов

Пусть даны ряды $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j$. Сопоставим этим двум рядам третий ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$, где

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{11.1.56}$$

Члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ в этой теореме сформированы по правилу умножения полиномов. Его обычно называют *произведением* (*по Коши*) *рядов* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j$.

Ниже формулируются достаточные условия, при которых произведение рядов сходится и его сумма равна произведению сумм.

11.34. Теорема Мертенса об умножении рядов. *Если ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ *сходится абсолютно, а ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$, *где* c_k *определены формулой* (11.1.56), *сходится и*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\Big).$$

Доказательство. Достаточно установить, что последовательность

$$x_n = \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\Big) - \sum_{k=0}^{n} c_k$$

стремится к нулю.

Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно условию теоремы, последовательности $A_n = \sum\limits_{i=n}^{\infty} |a_i|$ и $B_n = \sum\limits_{j=n}^{\infty} b_j$ сходятся к нулю. Поэтому имеются такая константа $C \in \mathbb{R}$ и номер m, что

$$A_n \le C \quad \text{и} \quad |B_n| \le C \quad \text{при любом } n \in \mathbb{N}, \text{ и}$$
$$A_n \le \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{и} \quad |B_n| \le \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{при любом } n \ge m.$$

Поскольку

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{i+j\le n} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i \sum_{j=0}^{n-i} b_j\Big),$$

то для каждого номера $n \ge 2m$ имеем

$$|x_n| = \Big|\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{\infty} b_j - \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n-i} b_j\Big| = \Big|\sum_{i=0}^{n} a_i\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j - \sum_{j=0}^{n-i} b_j\Big)\Big|$$
$$= \Big|\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=n-i+1}^{\infty} b_j\Big| = \Big|\sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i+1}\Big| \le \sum_{i=0}^{n} |a_i||B_{n-i+1}|$$
$$= \sum_{i=0}^{m} |a_i||B_{n-i+1}| + \sum_{i=m+1}^{n} |a_i||B_{n-i+1}|$$
$$\le \sum_{i=0}^{m} |a_i|\frac{\varepsilon}{2C} + \sum_{i=m+1}^{n} |a_i|C \le A_0\frac{\varepsilon}{2C} + A_{m+1}C \le C\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C}C = \varepsilon.$$

11.35. Контрпример. Пусть $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ сходятся условно, однако, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, являющийся их произведением по Коши, сходящимся не является ибо его члены не стремятся к нулю. Действительно, в этом случае

$$c_n = (-1)^{n-1}\Big(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{l}\cdot\sqrt{n-l+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\Big).$$

Каждое слагаемое в скобках больше $\frac{1}{n}$, поэтому $|c_n| > 1$ при $n > 1$. Необходимый признак сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ не выполняется.

11.36. Задача. Получить *основное свойство* экспоненциальной функции: $\exp(x+y) = (\exp x)\cdot(\exp y)$ для любых x, y, как следствие теоремы об умножении рядов 11.34 и разложения бинома 1.11.23.

Список литературы

[1] Берс Л. *Математический анализ.* Т. 1–2. М.: Высшая школа, 1975.

[2] Водопьянов С. К. *Пределы. Непрерывность. Дифференцируемость.* Новосибирск: Изд-во НГУ, 2011. (Электронный вариант.)

[3] Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе.* М.: Мир, 1967.

[4] Грешнов А. В., Малюгин С. А., Потапов В. Н. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* 1-й семестр. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2008.

[5] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* М.: АСТ, 2009.

[6] Дьедонне Ж. *Современный анализ.* М.: Мир, 1964.

[7] Зорич В. А. *Математический анализ.* Т. 1. М.: Наука, 1981.

[8] Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. *Сборник задач по математическому анализу.* Т. 3. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003.

[9] Никольский С. М. *Курс математического анализа.* М.: Наука, 1975.

[10] Решетняк Ю. Г. *Курс математического анализа. Ч.* 1*, Книга* 1. Новосибирск: Изд-во Института математики, 1999.

[11] Рудин У. *Основы математического анализа.* М.: Мир, 1976.

[12] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 1–3. М.: Наука, 1969.

[13] Шведов И. А. *Компактный курс математического анализа. Ч.* 1. *Функции одной переменной.* Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003. 112 с.

Приложение. Вещественные числа по Вейерштрассу.

Исходный материал — арифметика рациональных чисел.

Пусть в этом пункте буквы $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ обозначают последовательности Коши рациональных чисел. Сумма и произведение последовательностей определяются следующими формулами:

$$(\alpha+\beta)_n := \alpha_n+\beta_n, \quad (\alpha\cdot\beta)_n := \alpha_n\cdot\beta_n.$$

Будем говорить, что последовательности α и β сближаются, и писать $\alpha\sim\beta$, если $|\alpha_n-\beta_n| \underset{n\to\infty}{\to} \varepsilon$, для всякого рационального числа $\varepsilon>0$, т. е. если $\alpha_n-\beta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Вещественным числом (по Вейерштрассу) называют всякое множество вида $[\alpha] := \{\beta : \beta\sim\alpha\}$.

Множество всех вейерштрассовских чисел обозначим через WR и снабдим его операциями сложения и умножения, а также отношением порядка следующим образом. Пусть x и y — произвольные вейерштрассовские числа. Выберем любые последовательности $\alpha\in x$ и $\beta\in y$ и положим

$$x+y := [\alpha+\beta],\ x\cdot y := [\alpha\cdot\beta].$$

Кроме того, будем считать, что $x\le y$, если имеются такие последовательности $\alpha\in x$ и $\beta\in y$, что $\alpha_n\le\beta_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

Упражнения. 0. Отношение сближения $\sim$ является отношением эквивалентности, т.е. рефлексивно, симметрично и транзитивно.

1. Операции $+$ и $\cdot$ определены корректно, т. е. не зависят от выбора представителей α и β чисел $x,y\in WR$.

2. Система вейерштрассовских чисел $(WR,+,\cdot,\le)$ обладает всеми свойствами системы вещественных чисел, приведенными в разделе 1.2.