

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Вопросы для подготовки к I части 3 семестра

Приложения дифференциального исчисления

1. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие положительной определённости (полуопределённости) для дифференциала порядка n .

СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие отрицательной определённости (полуопределённости) для дифференциала порядка n .

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить второй дифференциал функции $f(x, y) = x^3 + y^2$. Исследовать знакоопределённость второго дифференциала в зависимости от точки.

2. СФОРМУЛИРОВАТЬ необходимое условие существования экстремума функции нескольких переменных во внутренней точке.

ДОКАЗАТЬ необходимое условие существования экстремума функции нескольких переменных во внутренней точке.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найти критические точки функции

$$f(x, y) = x^2 y(x + y - 1).$$

3. СФОРМУЛИРОВАТЬ достаточное условие существования экстремума функции нескольких переменных во внутренней точке.

ДОКАЗАТЬ достаточное условие существования экстремума функции нескольких переменных во внутренней точке.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найти локальные экстремумы функции

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

4. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение класса функций, непрерывно дифференцируемых до порядка r .

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Какому классу D^r и какому классу C^r принадлежит эта функция?

5. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие гомеоморфизма.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Отображение $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ вида

$$f(t) = (\sin t, \cos t)$$

переводит промежуток в окружность. Является ли оно гомеоморфизмом промежутка и окружности?

6. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о локальном гомеоморфизме.

7. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие C^r -диффеоморфизма.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ задано как

$$f(x, y) = (x^3, y^3).$$

Является ли оно гомеоморфизмом? Является ли оно диффеоморфизмом?

8. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему об обратной функции к непрерывно-дифференцируемой функции.

9. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ условия, при которых обратная к C^r -гладкой функции — C^r -гладкая функция.

10. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие неявной функции.

11. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о неявной функции.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Пусть $x + y = e^y$. При каких условиях в этом уравнении можно выразить y через x ? Найдите производную $y'(x)$.

ЗАДАЧА. Доказать, что неявная функция в C^r -гладкой системе уравнений C^r -гладкая.

12. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ первую теорему о выпрямлении.

13. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ вторую теорему о выпрямлении.

14. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о ранге.

15. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие функциональной независимости системы уравнений.

16. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ признак функциональной зависимости системы C^1 -гладких уравнений.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Проверить, является ли функционально независимой система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Основы гладкого анализа

17. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие гладкого вложенного многообразия с краем.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ. Являются ли вложенными многообразиями

- точка на плоскости;
- множество натуральных чисел на прямой;
- множество рациональных чисел на прямой;
- открытый круг на плоскости;

- замкнутый круг на плоскости;
- пара параллельных прямых на плоскости;
- пара пересекающихся прямых на плоскости.

18. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о крае многообразия.

19. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о графике отображения.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Является ли многообразием поверхность $z = \sin x \cdot \cos y$ в $\mathbb{R}^3$? Какой размерности и какой гладкости это многообразие? Есть ли у него край?

20. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие регулярного решения системы уравнений.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найдите все регулярные решения уравнения $xy = 0$.

21. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о регулярных решениях системы уравнений.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Является ли многообразием множество решений системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z \geq 1. \end{cases}$$

Какой размерности и какой гладкости это многообразие? Есть ли у него край?

22. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о гладком вложении области.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Является ли многообразием множество точек (x, y, z) таких, что

$$\begin{cases} x = r + s^2, \\ y = r - s^2, & r \in (-1, 1), \\ z = s, & s \in (-1, 1). \end{cases}$$

Какой размерности и какой гладкости это многообразие? Есть ли у него край?

23. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие касательного вектора к множеству.

24. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие касательного конуса к множеству.

ДОКАЗАТЬ, что касательный конус является коническим множеством.

25. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о касательном пространстве.

26. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о градиентах.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найти касательную прямую и нормальную плоскость к кривой, заданной системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ 2x - 3y + 2z = 4, \end{cases}$$

в точке $(3, 4, 5)$.

27. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ необходимое условие экстремума функции на многообразии.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найдите локальные экстремумы функции

$$f(x, y) = y + x^4$$

на кривой $y = x^4$.

28. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ метод множителей Лагранжа для нахождения условного экстремума.

29. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ достаточное условие экстремума на многообразии.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найдите локальные экстремумы функции

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y$$

на поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Системы множеств и ступенчатые функции

30. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие k -мерного промежутка в $\mathbb{R}^k$.

31. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие дробящейся системы множеств.

ДОКАЗАТЬ, что система промежутков S^1 на прямой $\mathbb{R}$ является дробящейся системой.

ДОКАЗАТЬ, что система k -мерных промежутков S^k в $\mathbb{R}^k$ является дробящейся системой.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ. Являются ли следующие системы множеств вещественной прямой дробящимися системами?

- все открытые множества;
- все ограниченные множества;
- все конечные множества;

32. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие элементарного множества.

33. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие кольца множеств.

34. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ критерий кольца множеств (не нужно проверять все аксиомы, если этого не требуется в билете; достаточно проверить замкнутость относительно соответствующих операций).

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ. Являются ли следующие системы множеств на вещественной прямой кольцами?

- все открытые множества;
- все ограниченные множества;
- все конечные множества.

35. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие алгебры множеств.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ. Являются ли следующие системы множеств на вещественной прямой алгебрами?

- $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$;
- $\{\emptyset, (-\infty, 0), [0, +\infty), (-\infty, +\infty)\}$;
- все конечные множества и дополнения к ним;
- все не более чем счётные множества и дополнения к ним.

36. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие σ -алгебры множеств.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ. Являются ли следующие системы множеств на вещественной прямой σ -алгебрами?

- $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$;
- $\{\emptyset, (-\infty, 0), [0, +\infty), (-\infty, +\infty)\}$;
- все конечные множества и дополнения к ним;
- все не более чем счётные множества и дополнения к ним.

37. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение ступенчатой функции на $\mathbb{R}^k$.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Докажите, что если φ — ступенчатая функция, то множество $\{x : \varphi(x) > 1\}$ — элементарное множество.

Мера и элементарный интеграл

38. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие счётно-аддитивной меры на дробящейся системе.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Доказать, что считающая мера $\#A$, сопоставляющая множеству A количество точек в нём, является счётно-аддитивной на всех подмножествах в $\mathbb{R}$.

39. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие меры Лебега в $\mathbb{R}^k$.

ДОКАЗАТЬ свойство регулярности меры Лебега в $\mathbb{R}^k$.

ДОКАЗАТЬ счётную аддитивность меры Лебега в $\mathbb{R}^k$.

40. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие элементарного интеграла от ступенчатой функции.

ЗАДАЧИ. Доказать следующие свойства элементарного интеграла.

- Корректная определённость (независимость от представления ступенчатой функции).
- Линейность.
- Монотонность (интеграл от большей функции больше).
- Ограниченность (модуль интеграла не превосходит интеграла модуля).

41. СФОРМУЛИРОВАТЬ принцип исчерпывания для элементарного интеграла.

ДОКАЗАТЬ принцип исчерпывания для характеристической функции множества (ступенчатой функции с одной ступенью).

ДОКАЗАТЬ принцип исчерпывания для произвольной ступенчатой функции, считая его доказанным для отдельной ступени.

42. ДОКАЗАТЬ, что из принципа исчерпывания следует счётная аддитивность меры.

Интегральная норма

43. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятия интегральной оценки и интегральной нормы.

ЗАДАЧИ. Доказать следующие свойства интегральной нормы:

- Для ступенчатой функции интегральная норма совпадает с элементарным интегралом от модуля.
- Однородность.
- Неравенство треугольника.
- Монотонность.

44. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ счётное неравенство треугольника для интегральной нормы ряда из неотрицательных функций.

45. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятия носителя функции.

46. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие пренебрежимой функции.

47. ДОКАЗАТЬ, что f пренебрежима тогда и только тогда, когда $\chi_{\text{supp} f}$ пренебрежима.

48. ДОКАЗАТЬ, что χ_A пренебрежима тогда и только тогда, когда A — множество меры нуль.

49. ДОКАЗАТЬ, что если $\|f\| < \infty$, то f конечна почти всюду.

Интеграл Лебега

50. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие интеграла Лебега.

ЗАДАЧИ. Доказать следующие свойства интеграла Лебега.

- Корректность (независимость от выбора последовательности ступенчатых функций).
- Линейность.
- Ограниченность (модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля).
- Монотонность (интеграл от большей функции больше).
- Произведение двух интегрируемых функций интегрируемо.
- Максимум двух интегрируемых функций интегрируем.
- Минимум двух интегрируемых функций интегрируем.

51. ДОКАЗАТЬ, что множество интегрируемых функций замкнуто по интегральной норме.
52. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о нормально сходящихся рядах.
53. ДОКАЗАТЬ, что из сходящейся по интегральной норме последовательности можно выбрать сходящуюся почти всюду подпоследовательность.
54. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему Бешпо Леви о пределе монотонной ограниченной последовательности функций.