

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Вопросы для подготовки ко II части 3 семестра
(версия от 1 января 2017 г.)

Теоремы о сходимости в теории интеграла Лебега

1. СФОРМУЛИРОВАТЬ лемму о замкнутости пространства интегрируемых по Лебегу функций.

ДОКАЗАТЬ её.

ДОКАЗАТЬ, что если ряд из интегрируемых функций сходится нормально, то его сумма — интегрируемая функция.

2. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Беппо Леви о пределе монотонной последовательности интегрируемых функций.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^{2n}} dx.$$

3. СФОРМУЛИРОВАТЬ лемму о верхней огибающей.

СФОРМУЛИРОВАТЬ лемму о нижней огибающей.

ДОКАЗАТЬ её.

4. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Лебега о мажорируемой сходимости.

ДОКАЗАТЬ её для числовой функции.

ДОКАЗАТЬ её для функции, принимающей значения в произвольном банаховом пространстве.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^2 + n}{n^2 + n^2 x^2 - x^2} dx.$$

5. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Рисса о полноте пространства интегрируемых по Лебегу функций.

ДОКАЗАТЬ её.

Измеримые функции

6. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение измеримой функции.

ЗАДАЧИ. Пусть f, g измеримые вещественнозначные функции. ДОКАЗАТЬ, что измеримы функции $f + g$, $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $|f|$.

7. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение срезки функции.

8. СФОРМУЛИРОВАТЬ лемму о срезке.

ДОКАЗАТЬ её для $\text{cut}_h f$ в случае, когда h измерима, а f интегрируема.

ДОКАЗАТЬ её для $\text{cut}_h f$ в случае, когда h интегрируема, а f измерима.

9. СФОРМУЛИРОВАТЬ признак Лебега интегрируемости функции.

ДОКАЗАТЬ его.

10. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему об измеримости предела последовательности измеримых функций.

ДОКАЗАТЬ её.

11. СФОРМУЛИРОВАТЬ лемму Фату о пределе интегралов измеримых функций.

ДОКАЗАТЬ её.

Измеримые множества

12. СФОРМУЛИРОВАТЬ определения измеримого множества и меры измеримого множества.

ДОКАЗАТЬ, что измеримые множества образуют σ -кольцо.

ДОКАЗАТЬ, что мера, продолженная на измеримые множества, счётно-аддитивна.

ЗАДАЧА. Пусть набор измеримых множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ таков, что $A_n \subset A_{n+1}$.

ДОКАЗАТЬ, что

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

ЗАДАЧА. Пусть набор измеримых множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ таков, что $A_n \supset A_{n+1}$ и $\mu(A_1) < +\infty$. ДОКАЗАТЬ, что

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Связь измеримых функций и множеств

13. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение лебегова множества $E_f(a)$ вещественнозначной функции f .

ДОКАЗАТЬ, что если функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ измерима, то множество $E_f(a)$ измеримо для любого $a \in \mathbb{R}$.

ЗАДАЧИ. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. ДОКАЗАТЬ, что если все множества

$$E_f(a) = \{x \in \text{supp } f : f(x) \geq a\}, \quad a \in \mathbb{R},$$

измеримы, то измеримы также множества $\{x : f(x) > a\}$, $\{x : f(x) < a\}$, $\{x : f(x) \leq a\}$, $\{x : f(x) = a\}$, $\{x : f(x) \neq a\}$.

14. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие простой функции.

ДОКАЗАТЬ, что простая функция g измерима тогда и только тогда, когда измеримы все множества $\{x : g(x) = a\}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

15. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий Лебега измеримости вещественнозначной функции.

ДОКАЗАТЬ критерий Лебега для неотрицательной функции.

Считая критерий Лебега доказанным для неотрицательной функции, ДОКАЗАТЬ его для произвольной вещественнозначной функции.

16. СФОРМУЛИРОВАТЬ неравенство Чебышёва для интегрируемой вещественнозначной функции.

ДОКАЗАТЬ его.

Повторный интеграл

17. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие произведения мер $\mu \times \nu$ на декартовом произведении множеств с мерой (X, μ) , (Y, ν) .

ДОКАЗАТЬ, что таким образом введённое произведение является счётно-аддитивной мерой.

18. СФОРМУЛИРОВАТЬ элементарную теорему Фубини.

ДОКАЗАТЬ её.

19. СФОРМУЛИРОВАТЬ лемму о повторной норме.

ДОКАЗАТЬ её.

20. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Фубини для интегрируемых функций.

ДОКАЗАТЬ её.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy,$$

где область Ω ограничена кривыми $y = x^2$, $y = 1$, $y = 4$.

21. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Тонелли для неотрицательных измеримых функций.

ДОКАЗАТЬ её.

22. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу Кавальери — Лебега.

ДОКАЗАТЬ её.

Измеримость и отображения

23. СФОРМУЛИРОВАТЬ свойство регулярности меры Лебега на измеримых множествах.

ДОКАЗАТЬ, что всякое измеримое множество A конечной меры можно вложить в открытое множество U так, что $|U \setminus A| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЬ, что во всякое измеримое множество A конечной меры можно вложить компакт K так, что $|A \setminus K| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЬ, что всякое измеримое множество конечной меры можно вложить в борелевское множество той же меры.

ДОКАЗАТЬ, что во всякое измеримое множество конечной меры можно вложить борелевское множество той же меры.

24. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие σ -алгебры борелевских множеств.

ДОКАЗАТЬ, что образ открытого множества при непрерывном отображении борелевский.

25. СФОРМУЛИРОВАТЬ N -свойство Лузина для отображений.

ДОКАЗАТЬ, что непрерывное отображение с N -свойством переводит измеримое множество в измеримое.

ДОКАЗАТЬ, что липшицевы отображения обладают N -свойством.

ДОКАЗАТЬ, что локально липшицевы отображения обладают N -свойством.

ДОКАЗАТЬ, что непрерывно дифференцируемые отображения обладают N -свойством.

Искажение меры Лебега при отображениях

26. СФОРМУЛИРОВАТЬ лемму о двоичных кубах.

ДОКАЗАТЬ, что для любого измеримого $A \subset \mathbb{R}^k$ и $v \in \mathbb{R}$ выполнено $|v+A| = |A|$.

ДОКАЗАТЬ, что для любого измеримого $A \subset \mathbb{R}^k$ и $\lambda > 0$ выполнено $|\lambda A| = \lambda^k |A|$.

Пусть $\Lambda(x_1, \dots, x_k) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_k x_k)$, где $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, k$. ДОКАЗАТЬ, что для любого измеримого $A \subset \mathbb{R}^k$ выполнено $|\Lambda(A)| = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_k |A|$.

27. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие искажения меры $J(L)$ при линейном отображении $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$.

ДОКАЗАТЬ, что для любого линейного отображения $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ существует такое число $J(L)$, что $|L(A)| = J(L)|A|$ для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^k$.

ДОКАЗАТЬ, что если $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ — линейное отображение и $\det L = 0$, то $J(L) = 0$.

ДОКАЗАТЬ, что если $U : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ — ортогональное отображение, то $J(U) = 1$.

ДОКАЗАТЬ, что если $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ — линейное отображение и $\det L \neq 0$, то $J(L) = |\det L|$.

28. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие локального искажения меры $J(x, f)$ при непрерывном отображении f .

ДОКАЗАТЬ, что если непрерывное отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ дифференцируемо в точке $x \in U$ и $\det Df(x) = 0$ то $J(x, f) = 0$.

ДОКАЗАТЬ, что если непрерывное отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ дифференцируемо в точке $x \in U$ и $\det Df(x) \neq 0$ то $J(x, f) = |\det Df(x)|$.

29. СФОРМУЛИРОВАТЬ лемму о множестве точек вырождения дифференцируемого отображения.

ДОКАЗАТЬ её.

30. СФОРМУЛИРОВАТЬ лемму о сходимости в среднем.

ДОКАЗАТЬ её.

31. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему об искажении меры при непрерывно дифференцируемом отображении.

ДОКАЗАТЬ её.

32. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу замены переменной в интеграле Лебега.

ДОКАЗАТЬ её для ступенчатой функции и диффеоморфной замены переменной.

ДОКАЗАТЬ её для интегрируемой функции, считая доказанной для ступенчатой.

ДОКАЗАТЬ её в случае гомеоморфной замены переменной, считая доказанной для диффеоморфизма.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Пусть $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Подходящей заменой переменной свести тройной интеграл к одинарному:

$$\iiint_B f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Интеграл Лебега с параметром

33. СФОРМУЛИРОВАТЬ достаточные условия сходимости по параметру в интеграле Лебега.

ДОКАЗАТЬ их.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найти предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^\alpha \sin \frac{1}{x} dx.$$

34. СФОРМУЛИРОВАТЬ достаточные условия непрерывности по параметру в интеграле Лебега.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. При каких α определена функция $I(\alpha)$? Будет ли она непрерывна?

$$I(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^{-\alpha} dx.$$

35. СФОРМУЛИРОВАТЬ достаточные условия дифференцируемости по параметру в интеграле Лебега.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. При каких α определена функция $I(\alpha)$? Будет ли она дифференцируема? Чему равна её производная?

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x\alpha}}{x} dx.$$

Эйлеровы функции

36. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение В-функции Эйлера.

ДОКАЗАТЬ, что В-функция непрерывна в своей области определения.

ЗАДАЧА. Вычислить $V(1, x)$.

ЗАДАЧА. Вычислить $V(n, x)$ при целых n .

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Свести к В-функции интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx.$$

37. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение Г-функции Эйлера.

ДОКАЗАТЬ, что Г-функция непрерывна в своей области определения.

ДОКАЗАТЬ, что Г-функция дифференцируема в своей области определения.

ЗАДАЧА. Вычислить $\Gamma(n)$ при целых n .

ЗАДАЧА. Вычислить $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ при целых n .

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Свести к Г-функции интеграл

$$\int_0^1 \ln^p \frac{1}{x} dx.$$

38. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу понижения для Г-функции.

ДОКАЗАТЬ её.

39. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу Эйлера — Гаусса.

ДОКАЗАТЬ её.

40. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу дополнения для Γ -функции.

ДОКАЗАТЬ её.

41. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу связи между Γ - и Ψ -функциями Эйлера.

ДОКАЗАТЬ её.

42. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу Муавра — Стирлинга.

Какие-то шаги доказательства? Я подумаю.

Несобственный интеграл с параметром

43. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие равномерной сходимости интеграла по параметру.

СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий Коши равномерной сходимости интеграла по параметру.

44. СФОРМУЛИРОВАТЬ достаточные условия непрерывности несобственного интеграла по параметру.

ДОКАЗАТЬ их.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. При каких α определена функция $I(\alpha)$? Непрерывна ли она?

$$I(\alpha) = \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx.$$

45. СФОРМУЛИРОВАТЬ достаточные условия дифференцируемости несобственного интеграла по параметру.

ДОКАЗАТЬ их.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. При каких α определена функция $I(\alpha)$? Дифференцируема ли она? Чему равна её производная?

$$I(\alpha) = \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-x^\alpha} dx.$$

46. СФОРМУЛИРОВАТЬ признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

ДОКАЗАТЬ его.

47. СФОРМУЛИРОВАТЬ признак Абеля равномерной сходимости.

ДОКАЗАТЬ его.

48. СФОРМУЛИРОВАТЬ признак Дирихле равномерной сходимости.

ДОКАЗАТЬ его.

Это всё.