

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КОЛЛОКВИУМУ 09 ДЕКАБРЯ
СЕМЕСТР 1, ЧАСТЬ II
17-45, ГЛАВНЫЙ КОРПУС НГУ, МА

Функции и отображения.

1. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение тождественного отображения.
2. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение вложения.
3. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение сужения отображения.
4. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение образа множества при отображении.
5. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение прообраза множества при отображении.
6. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение инъективного отображения.
7. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение сюръективного отображения.
8. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение биективного отображения.
9. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение обратного отображения.
10. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение композиции отображений.
11. СФОРМУЛИРОВАТЬ основные свойства композиции отображений.
12. ДОКАЗАТЬ, что операция композиции отображений ассоциативна.
13. ДОКАЗАТЬ, что композиция отображений на есть отображение на.
14. ДОКАЗАТЬ, что композиция однозначных отображений есть однозначное отображение.
15. ДОКАЗАТЬ, что обратное к композиции отображений есть композиция обратных.

Основные принципы анализа на $\mathbb{R}$

16. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о пересекающихся отрезках.
17. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о пересекающихся отрезках.
18. СФОРМУЛИРОВАТЬ принцип Коши — Кантора о вложенных отрезках.
19. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие конечного множества.
20. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие счётного множества.
21. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение не более чем счётного множества.
22. ДОКАЗАТЬ, что подмножество конечного множества конечно.
23. ДОКАЗАТЬ, что бесконечное подмножество счётного множества счётно.
24. ДОКАЗАТЬ, что множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счётно.
25. ДОКАЗАТЬ, что множество рациональных чисел счётно.
26. ДОКАЗАТЬ, что объединение не более чем счётного числа не более чем счётных множеств не более чем счётно.

27. ДОКАЗАТЬ теорему Кантора о несчётности отрезка $[0, 1]$.
28. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие покрытия множества.
29. ДОКАЗАТЬ, что для покрытия отрезка I интервалами найдётся такое $\delta > 0$, что любой отрезок длины не больше δ , содержащийся в I , целиком содержится в каком-либо из интервалов покрытия.
30. СФОРМУЛИРОВАТЬ принцип Бореля — Лебега о покрытии отрезка интервалами.
31. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ принцип Бореля — Лебега о покрытии отрезка интервалами.
32. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие элементарной окрестности точки на расширенной вещественной прямой.
33. СФОРМУЛИРОВАТЬ основные свойства элементарных окрестностей.
34. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие изолированной точки множества.
35. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие точки, предельной для множества.
36. СФОРМУЛИРОВАТЬ принцип Больцано — Вейерштрасса о предельной точке ограниченного множества.
37. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ принцип Больцано — Вейерштрасса о предельной точке ограниченного множества.
38. СФОРМУЛИРОВАТЬ расширенный принцип Больцано — Вейерштрасса о предельной точке бесконечного множества в $\mathbb{R}$.

Предел функции

39. СФОРМУЛИРОВАТЬ арифметическое определение конечного предела функции в точке $p \in \mathbb{R}$.
40. СФОРМУЛИРОВАТЬ арифметическое определение конечного предела функции в точке $+\infty$.
41. СФОРМУЛИРОВАТЬ арифметическое определение конечного предела функции в точке $-\infty$.
42. СФОРМУЛИРОВАТЬ арифметическое определение функции, стремящейся к $+\infty$ в точке $p \in \mathbb{R}$.
43. СФОРМУЛИРОВАТЬ арифметическое определение функции, стремящейся к $+\infty$ в точке $+\infty$.
44. СФОРМУЛИРОВАТЬ арифметическое определение функции, стремящейся к $+\infty$ в точке $-\infty$.
45. СФОРМУЛИРОВАТЬ арифметическое определение функции, стремящейся к $-\infty$ в точке $p \in \mathbb{R}$.
46. СФОРМУЛИРОВАТЬ арифметическое определение функции, стремящейся к $-\infty$ в точке $+\infty$.
47. СФОРМУЛИРОВАТЬ арифметическое определение функции, стремящейся к $-\infty$ в точке $-\infty$.

48. СФОРМУЛИРОВАТЬ топологическое определение предела функции.
49. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие предела функции слева.
50. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие предела функции справа.
51. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о пределе монотонно возрастающей функции.
52. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему о пределе монотонно возрастающей функции.
53. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о пределе монотонно убывающей функции.
54. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему о пределе монотонно убывающей функции.
55. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о пределе композиции функций.
56. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему о пределе композиции функций.
57. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий Гейне существования предела функции.
58. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ критерий Гейне существования предела функции.
59. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий Коши существования предела функции.
60. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ критерий Коши существования предела функции.
61. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие верхнего предела функции.
62. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие нижнего предела функции.
63. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий существования предела функции в терминах верхнего и нижнего пределов.
64. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий существования предела функции в терминах верхнего и нижнего пределов. ДОКАЗАТЬ, что если верхний и нижний предел равны одному и тому же вещественному числу, то существует предел функции, равный этому числу.
65. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий существования предела в терминах верхнего и нижнего пределов. ДОКАЗАТЬ, что если верхний предел функции равен $-\infty$, то существует предел функции, равный $-\infty$.
66. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий существования предела в терминах верхнего и нижнего пределов. ДОКАЗАТЬ, что если нижний предел функции равен $+\infty$, то существует предел функции, равный $+\infty$.

Асимптотические отношения

Ниже всюду в этом разделе там, где под знаками $=$, $\sim$, $\rightarrow$ нет приписки $x \rightarrow p$, $x \in A \setminus \{p\}$, она незримо присутствует.

67. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие o -малого.
68. ДОКАЗАТЬ, что $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow p$ тогда и только тогда, когда $f(x) = o(1)g(x)$ при $x \rightarrow p$.
69. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие O -большого.

70. ДОКАЗАТЬ, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow p$ тогда и только тогда, когда $f(x) = O(1)g(x)$ при $x \rightarrow p$.
71. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие асимптотической эквивалентности функций.
72. ДОКАЗАТЬ, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow p$ тогда и только тогда, когда $f(x) = u(x)g(x)$, где $u(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow p$.
73. ДОКАЗАТЬ, что отношение асимптотической эквивалентности
 рефлексивно: $f \sim f$;
 симметрично: если $f \sim g$, то $g \sim f$; и
 транзитивно: если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$.
74. ДОКАЗАТЬ, что если $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$, то $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.
75. ДОКАЗАТЬ, что если $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$, и функции g_1 и g_2 неотрицательны, то $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.
76. ДОКАЗАТЬ, что если $f \sim g$ и $g \rightarrow a$, то $f \rightarrow a$.
77. ДОКАЗАТЬ, что если $g(x) \neq 0$ при $x \rightarrow p$, то $f(x) \sim g(x)$ тогда и только тогда, когда $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$.
78. ДОКАЗАТЬ, что если $f = o(g)$, то $f = O(g)$.
79. ДОКАЗАТЬ, что если $f = o(g)$ и $g = O(h)$, то $f = o(h)$.
80. ДОКАЗАТЬ, что при $x \rightarrow 0$ всякий полином $P(x)$ эквивалентен своему младшему члену, а при $x \rightarrow \infty$ — старшему.
81. ПРИВЕСТИ вывод асимптотического разложения для функции $\exp x = 1 + x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$.
82. ПРИВЕСТИ вывод асимптотического разложения для функции $\ln(1 + x) = x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$.
83. ПРИВЕСТИ вывод асимптотического разложения для функции $\sin x = x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$.
84. ПРИВЕСТИ вывод асимптотического разложения для функции $\arcsin x = x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$.
85. ПРИВЕСТИ вывод асимптотического разложения для функции $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$.
86. ПРИВЕСТИ вывод асимптотического разложения для функции $\arccos x$ при $x \rightarrow 0$.
87. ПРИВЕСТИ вывод асимптотического разложения для функции $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$.
88. ПРИВЕСТИ вывод асимптотического разложения для функции $\operatorname{arctg} x = x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$.
89. ПРИВЕСТИ вывод асимптотического разложения для функции $(1 + x)^\alpha$ при $x \rightarrow 0$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
90. ДОКАЗАТЬ, что $e^x - \left(1 + \dots + \frac{x^7}{7!}\right) \sim \frac{x^8}{8!} \mid_{x \rightarrow 0}$.

91. ДОКАЗАТЬ, что $\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \sim \frac{x^3}{3} \mid x \rightarrow 0$.
92. ДОКАЗАТЬ, что $\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \sim \frac{x^5}{5!} \mid x \rightarrow 0$.
93. ДОКАЗАТЬ, что $\arcsin x - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) \sim \frac{3x^5}{40} \mid x \rightarrow 0$.
94. ДОКАЗАТЬ, что $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \sim \frac{x^4}{4!} \mid x \rightarrow 0$.
95. ДОКАЗАТЬ, что $\arccos x - \left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6}\right)\right) \sim \frac{3x^5}{40} \mid x \rightarrow 0$.
96. ДОКАЗАТЬ, что $\operatorname{tg} x - \left(x + \frac{x^3}{3}\right) \sim \frac{2x^5}{15} \mid x \rightarrow 0$.
97. ДОКАЗАТЬ, что $\arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \sim \frac{x^5}{5} \mid x \rightarrow 0$.

Непрерывные функции

98. СФОРМУЛИРОВАТЬ арифметическое определение функции, непрерывной в точке.
99. СФОРМУЛИРОВАТЬ топологическое определение функции, непрерывной в точке.
100. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение функции, непрерывной на множестве.
101. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение устранимого разрыва.
102. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение разрыва I рода.
103. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение разрыва II рода.
104. ДОКАЗАТЬ, что монотонная функция может иметь только разрывы I рода, причём не более чем счётное их число.
105. ДОКАЗАТЬ, функция Римана непрерывна в иррациональных точках и разрывна в рациональных.

Глобальные свойства непрерывных функций

106. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Вейерштрасса о функции, непрерывной на отрезке.
107. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему Вейерштрасса о функции, непрерывной на отрезке.
108. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Больцано — Коши о промежуточных значениях непрерывной функции.
109. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему Больцано — Коши о промежуточных значениях непрерывной функции.
110. СФОРМУЛИРОВАТЬ признак Больцано строгой монотонности непрерывной функции.
111. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак Больцано строгой монотонности непрерывной функции.
112. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о существовании непрерывной обратной функции.
113. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему о существовании непрерывной обратной функции.

Равномерная непрерывность

114. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение равномерной непрерывности.
115. СФОРМУЛИРОВАТЬ условие Липшица для функций.
116. СФОРМУЛИРОВАТЬ условие Гёльдера для функций.
117. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке.
118. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие модуля непрерывности.
119. ДОКАЗАТЬ, что функция, обладающая модулем непрерывности, равномерно непрерывна.
120. ДОКАЗАТЬ, что равномерно непрерывная функция обладает модулем непрерывности.