

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ 14 ЯНВАРЯ,  
АУД. ИМ. МАЛЬЦЕВА  
СЕМЕСТР 1, ЧАСТЬ III

*Производная.*

1. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение производной функции в точке.
2. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение левой производной в точке.
3. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение правой производной в точке.
4. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие касательной к графику функции.
5. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о разложении Лейбница для дифференцируемой функции.
6. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о разложении Лейбница для дифференцируемой функции.
7. СФОРМУЛИРОВАТЬ правила дифференцирования суммы и произведения функций.
8. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ правила дифференцирования суммы и произведения функций.
9. СФОРМУЛИРОВАТЬ правила дифференцирования обратной величины  $\frac{1}{g}$  и отношения  $\frac{f}{g}$  функций  $f$  и  $g$ .
10. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ правила дифференцирования обратной величины  $\frac{1}{g}$  и отношения  $\frac{f}{g}$  функций  $f$  и  $g$ .
11. СФОРМУЛИРОВАТЬ правило дифференцирования композиции функций.
12. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ правило дифференцирования композиции функций.
13. СФОРМУЛИРОВАТЬ правило дифференцирования обратной функции.
14. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ правило дифференцирования обратной функции.
15. ДОКАЗАТЬ, что функция  $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  имеет обратную  $\arcsin$ , и НАЙТИ производную обратной функции.
16. ДОКАЗАТЬ, что функция  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  имеет обратную  $\arccos$ , и НАЙТИ производную обратной функции.
17. ДОКАЗАТЬ, что функция  $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  имеет обратную  $\operatorname{arctg}$ , и НАЙТИ производную обратной функции.
18. ДОКАЗАТЬ, что функция  $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  имеет обратную  $\operatorname{arcctg}$ , и НАЙТИ производную обратной функции.
19. ДОКАЗАТЬ, что функция  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  имеет обратную  $\ln$ , и НАЙТИ производную обратной функции.
20. ДОКАЗАТЬ, что функция<sup>1</sup>  $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет обратную  $\operatorname{arsh}$ , и НАЙТИ производную обратной функции.

21. ДОКАЗАТЬ, что функция<sup>1</sup>  $\operatorname{ch} : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$  имеет обратную  $\operatorname{arch}$ , и НАЙТИ производную обратной функции.
22. ДОКАЗАТЬ, что функция<sup>1</sup>  $\operatorname{th} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет обратную  $\operatorname{arth}$ , и НАЙТИ производную обратной функции.

#### *Свойства дифференцируемых функций*

23. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие локального максимума функции.
24. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие локального минимума функции.
25. СФОРМУЛИРОВАТЬ лемму Ферма о необходимых условиях существования локального экстремума.
26. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ лемму Ферма о необходимых условиях существования локального экстремума.
27. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Ролля о среднем.
28. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему Ролля о среднем.
29. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему Лагранжа о среднем.
30. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему Лагранжа о среднем.
31. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему о приращениях дифференцируемой функции.
32. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о приращениях дифференцируемой функции.
33. ДОКАЗАТЬ, что  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$  при  $x, y \in \mathbb{R}$ .
34. ДОКАЗАТЬ, что  $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|$  при  $x, y \in \mathbb{R}$ .
35. ДОКАЗАТЬ, что  $\sin x < x$  при  $x > 0$ .
36. ДОКАЗАТЬ, что  $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$  при  $x > 0$ .
37. ДОКАЗАТЬ, что  $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$  при  $x > 0$ .

#### *Исследование функций*

38. СФОРМУЛИРОВАТЬ дифференциальный признак монотонного возрастания функции.
39. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ дифференциальный признак монотонного возрастания функции.
40. СФОРМУЛИРОВАТЬ дифференциальный признак монотонного убывания функции.
41. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ дифференциальный признак монотонного убывания функции.
42. СФОРМУЛИРОВАТЬ достаточные признаки локального минимума функции.
43. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ достаточные признаки локального минимума функции.

---

<sup>1</sup>Напоминаю, что гиперболические функции определяются как  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ , и связаны соотношением  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ .

44. СФОРМУЛИРОВАТЬ достаточные признаки локального максимума функции.
45. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ достаточные признаки локального максимума функции.
46. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие выпуклого множества.
47. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение выпуклой функции.
48. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение вогнутой функции.
49. СФОРМУЛИРОВАТЬ дифференциальные признаки выпуклой функции.
50. СФОРМУЛИРОВАТЬ дифференциальные признаки вогнутой функции.
51. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ дифференциальные признаки выпуклости функции.
52. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение выпуклой комбинации точек векторного пространства.
53. СФОРМУЛИРОВАТЬ барицентрический критерий выпуклости множества.
54. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ барицентрический критерий выпуклости множества.

#### *Неравенства*

55. СФОРМУЛИРОВАТЬ неравенство Йенсена для выпуклых функций.
56. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ неравенство Йенсена для выпуклых функций.
57. СФОРМУЛИРОВАТЬ неравенство Юнга для набора чисел.
58. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ неравенство Юнга для набора чисел.
59. СФОРМУЛИРОВАТЬ неравенство Гёльдера для набора чисел.
60. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ неравенство Гёльдера для набора чисел.
61. СФОРМУЛИРОВАТЬ неравенство Минковского для набора чисел.
62. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ неравенство Минковского для набора чисел.

#### *Правило Лопиталья*

63. СФОРМУЛИРОВАТЬ правило Лопиталья для нахождения пределов.
64. СФОРМУЛИРОВАТЬ правило Лопиталья для нахождения пределов. ДОКАЗАТЬ, что если в условиях теоремы Лопиталья  $f \rightarrow 0$ ,  $g \rightarrow 0$  и  $\frac{f'}{g'} \rightarrow 0$ , то и  $\frac{f}{g} \rightarrow 0$ .
65. СФОРМУЛИРОВАТЬ правило Лопиталья для нахождения пределов. ДОКАЗАТЬ, что если в условиях теоремы Лопиталья  $g \rightarrow +\infty$  и  $\frac{f'}{g'} \rightarrow 0$ , то и  $\frac{f}{g} \rightarrow 0$ .
66. СФОРМУЛИРОВАТЬ правило Лопиталья для нахождения пределов. Считая случай  $\frac{f'}{g'} \rightarrow 0$  разобранным, ДОКАЗАТЬ, что если  $\frac{f'}{g'} \rightarrow c \in \mathbb{R}$ , то и  $\frac{f}{g} \rightarrow c$ .

#### *Многократная дифференцируемость*

67. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие функции,  $k$  раз дифференцируемой в точке.
68. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие функции, бесконечно дифференцируемой в точке.

69. СФОРМУЛИРОВАТЬ правила взятия  $k$ -й производной суммы и произведения функций.
70. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ правила взятия  $k$ -й производной суммы и произведения функций.
71. ДОКАЗАТЬ, что композиция  $k$  раз дифференцируемых функций  $k$  раз дифференцируема.
72. ДОКАЗАТЬ, что если  $f, g \in D^k(p)$  и  $f(p) \neq 0$ , то  $\frac{1}{f}, \frac{g}{f} \in D^k(p)$ .
73. ДОКАЗАТЬ, что если  $f \in D^k(p)$ ,  $f'(p) \neq 0$  и  $g$  — обратная к  $f$ , то  $g \in D^k(f(p))$ .

#### Аппроксимация многочленами

74. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ лемму о степенной оценке приращения.
75. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для  $k$  раз дифференцируемой функции в точке.
76. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для  $k$  раз дифференцируемой функции. ДОКАЗАТЬ, что если существует многочлен, аппроксимирующий функцию с нужным порядком, то он единствен.
77. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для  $k$  раз дифференцируемой функции. ДОКАЗАТЬ, что если  $g \in D^k(p)$  и  $D^j g(p) = 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ , то  $g(x) = o(|x - p|^k)$ .
78. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для  $k + 1$  раз дифференцируемой функции.
79. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для  $k + 1$  раз дифференцируемой функции.
80. ДОКАЗАТЬ, что  $\cos x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$  для  $x \in \mathbb{R}$ .
81. ДОКАЗАТЬ, что  $\sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$  для  $x \in \mathbb{R}$ .
82. ДОКАЗАТЬ, что  $\ln(1+x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$  для  $x \in (-1, 1)$ .
83. ДОКАЗАТЬ, что  $\operatorname{arctg} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$  для  $x \in (-1, 1)$ .

#### Элементарные функции

84. ДОКАЗАТЬ, что если аддитивная функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна, то  $f(x) = ax$ .
85. ДОКАЗАТЬ, что если аддитивная функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  монотонна, то  $f(x) = ax$ .
86. ДОКАЗАТЬ, что для каждого  $a > 0$  существует единственная непрерывная функция  $g_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющая условиям  $g_a(1) = a$  и  $g_a(x+y) = g_a(x) \cdot g_a(y)$ .