

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Вопросы для подготовки к I коллоквиуму
13 АПРЕЛЯ, АУД. 442, 16:20
СЕМЕСТР 2, ЧАСТЬ I

Числовые ряды

1. ОБЪЯСНИТЬ смысл, вкладываемый в символ *ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (общий член ряда, частичная сумма ряда, сумма ряда).

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ при $|q| < 1$.

2. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие сходящегося ряда. ПРИВЕСТИ ПРИМЕР сходящегося ряда.

ЗАДАЧА. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k$.

3. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие ряда, расходящегося к $+\infty$ (к $-\infty$). ПРИВЕСТИ ПРИМЕР ряда, расходящегося к $+\infty$.
4. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ критерий Коши для рядов.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Используя критерий Коши, доказать, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2)}{2^k}$.

5. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ необходимый признак сходимости ряда.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{k}$ расходится.

ЗАДАЧА. Пусть $a_k \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Сходится ли ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$? Ответ обосновать.

6. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ свойство линейности для рядов.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k})$.

7. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак сравнения для рядов с неотрицательными коэффициентами.

ЗАДАЧА. Пусть $a_k \geq 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Доказать, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

8. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак сравнения в терминах отношений коэффициентов $(\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k})$.

9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ телескопический признак сходимости ряда.

ЗАДАЧА. НАЙТИ все p , при которых сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$.

ЗАДАЧА. НАЙТИ все p , при которых сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln^p k}$.

10. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение перестановки ряда.

Абсолютная сходимость рядов

11. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие абсолютно сходящегося ряда.
12. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак сходимости абсолютно сходящегося ряда.

ПРИВЕСТИ ПРИМЕР ряда, который сходится, но не сходится абсолютно.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Доказать, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{2^k}$.

13. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему о перестановках абсолютно сходящегося ряда.
14. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ мажорантный признак Вейерштрасса абсолютной сходимости ряда.
15. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак Д'Аламбера абсолютной сходимости ряда.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$.

16. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак Коши абсолютной сходимости ряда.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k+3}{3k+2}\right)^k$.

17. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак Куммера абсолютной сходимости ряда.
18. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак Раабе абсолютной сходимости ряда.
19. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак Бертрانا абсолютной сходимости ряда.
20. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак Гаусса абсолютной сходимости ряда.
21. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие степенного ряда.
22. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ формулу Коши — Адамара для степенного ряда.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найти все x , при которых сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{\sqrt{k}}$.

Условная сходимость рядов

23. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему Римана о перестановках условно сходящихся рядов.
24. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ метод суммирования Абеля.
25. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак Абеля сходимости рядов.
26. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак Дирихле сходимости рядов.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Доказать, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi k}{2}}{k}$.

27. СФОРМУЛИРОВАТЬ признак Лейбница сходимости рядов.

ЗАДАЧА. НАЙТИ все p , при которых сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^p}$.

28. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие произведения рядов по Коши.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найти квадрат Коши ряда $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

29. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему Мертенса об умножении рядов.

Первообразные

30. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие (точной) первообразной функции.

31. ДОКАЗАТЬ, что две первообразные функции на одном и том же промежутке отличаются на постоянную величину.

32. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие неопределённого интеграла.

33. ДАТЬ обозначение для подынтегрального выражения и ПРИВЕСТИ их основные свойства.

34. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ свойство линейности для неопределённого интеграла.

35. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ приём интегрирования по частям для неопределённого интеграла.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить первообразную функции $\ln x$.

36. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ приём замены переменной в неопределённом интеграле.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить первообразную функции $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$, $x > 0$.

Интегрирование рациональных функций

37. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение рациональной функции.

38. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему о разложении рациональной функции в простые дроби.

ЗАДАЧА. ВЫВЕСТИ первообразную от выражения вида $\frac{1}{(x-c)^k}$, где $k \in \mathbb{N}$.

ЗАДАЧА. ВЫВЕСТИ первообразную от выражения вида $\frac{x}{(x^2+1)^k}$, где $k \in \mathbb{N}$.

39. ВЫВЕСТИ рекуррентные соотношения, позволяющие вычислить первообразную от выражения вида $\frac{1}{(x^2+1)^k}$.

ЗАДАЧА. ПОКАЗАТЬ, что заменой переменной выражение вида $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$ можно свести к линейной комбинации выражений $\frac{1}{(y^2+1)^k}$ и $\frac{y}{(y^2+1)^k}$. НАЙТИ эту замену.

40. СФОРМУЛИРОВАТЬ метод Остроградского для выделения рациональной части первообразной.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Применяя метод Остроградского, найдите первообразную функции $\frac{1}{(x^2+1)^2}$.

Разбиения и ступенчатые функции

41. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение характеристической функции (индикатора) множества.
42. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение конечного разбиения отрезка.
43. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие подразбиения.
44. ДОКАЗАТЬ, что у любых двух разбиений отрезка существует общее подразбиение.
45. ДОКАЗАТЬ, что у открытого покрытия отрезка интервалами существует подчинённое ему разбиение.
46. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение ступенчатой функции на отрезке.

ЗАДАЧА. ДОКАЗАТЬ, что сумма двух ступенчатых функций есть ступенчатая функция.

ЗАДАЧА. ДОКАЗАТЬ, что произведение двух ступенчатых функций есть ступенчатая функция.

ЗАДАЧА. ДОКАЗАТЬ, что максимум из двух ступенчатых функций есть ступенчатая функция.

ЗАДАЧА. ДОКАЗАТЬ, что минимум из двух ступенчатых функций есть ступенчатая функция.

Мера и элементарный интеграл

47. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение конечно-аддитивной меры на отрезке.
48. ОПРЕДЕЛИТЬ меру Лебега на отрезке.
ЗАДАЧА. Доказать, что мера Лебега является конечно-аддитивной мерой.
49. ОПРЕДЕЛИТЬ меру Дирака на отрезке.
ЗАДАЧА. Доказать, что мера Дирака является конечно-аддитивной мерой.
50. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие элементарного интеграла от ступенчатой функции по конечно-аддитивной мере.
ЗАДАЧА. ДОКАЗАТЬ, что определение элементарного интеграла корректно.
ЗАДАЧА. ДОКАЗАТЬ свойство линейности элементарного интеграла.
ЗАДАЧА. ДОКАЗАТЬ свойство ограниченности элементарного интеграла.
ЗАДАЧА. ДОКАЗАТЬ свойство монотонности элементарного интеграла.
51. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие элементарного интеграла по произвольному промежутку. ДОКАЗАТЬ свойство аддитивности элементарного интеграла.
52. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ неравенство Чебышёва для ступенчатых функций.

Интегральная норма и пространство интегрируемых функций

53. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение интегральной нормы Дарбу на пространстве ограниченных функций.

ЗАДАЧА. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ свойство однородности интегральной нормы.

ЗАДАЧА. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ свойство монотонности интегральной нормы.

ЗАДАЧА. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ неравенство треугольника для интегральной нормы.

ЗАДАЧА. Вычислить интегральную норму функции Дирихле по мере Лебега на отрезке $[0, 1]$.

54. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие интегрируемой функции и интеграла по конечно-аддитивной мере.

ЗАДАЧА Пусть $c \in [a, b]$, δ_c — мера Дирака на $[a, b]$ и $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция. ДОКАЗАТЬ, что $\int_a^b f d\delta_c = f(c)$.

ЗАДАЧА. ДОКАЗАТЬ, что определение интеграла по конечно-аддитивной мере корректно.

ЗАДАЧА. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ свойство линейности интеграла по конечно-аддитивной мере.

ЗАДАЧА. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ свойство ограниченности интеграла по конечно-аддитивной мере.

ЗАДАЧА. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ свойство монотонности интеграла по конечно-аддитивной мере.

ЗАДАЧА. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ свойство аддитивности интеграла по конечно-аддитивной мере.

55. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие интегрируемой по Риману функции и интеграла Римана.

ЗАДАЧА. Функция Дирихле $\chi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ определяется как $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Доказать по определению, что функция Дирихле не интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$.

56. СФОРМУЛИРОВАТЬ свойство аддитивности для интеграла Римана.
57. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о замкнутости пространства интегрируемых функций.

Классические критерии интегрируемости

58. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение колебания функции на множестве.
59. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение колебания функции в точке.

ЗАДАЧА. Вычислить колебание в нуле функции $f(x) = (x^2 + 1) \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$.

60. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ I критерий интегрируемости в терминах колебаний.
61. ДОКАЗАТЬ, что непрерывная функция на отрезке интегрируема по Риману.
62. ДОКАЗАТЬ, что монотонная функция на отрезке интегрируема по Риману.
63. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ II критерий интегрируемости в терминах колебаний.
64. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение верхнего интеграла Дарбу.
65. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение нижнего интеграла Дарбу.

ЗАДАЧА. Функция Дирихле $\chi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ определяется как $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

ВЫЧИСЛИТЬ верхний и нижний интегралы Дарбу для функции Дирихле на отрезке $[0, 1]$.

66. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ критерий интегрируемости Дарбу.

Критерий интегрируемости Лебега

67. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие множества меры нуль.

ЗАДАЧА. Доказать, что подмножество множества меры нуль является множеством меры нуль.

ЗАДАЧА. Доказать, что конечное множество является множеством меры нуль.

ЗАДАЧА. Доказать, что счётное множество является множеством меры нуль.

68. ПРИВЕСТИ построение канторова множества.

ЗАДАЧА. Доказать, что канторово множество является множеством меры нуль.

ЗАДАЧА. Доказать, что канторово множество несчётно.

69. ДОКАЗАТЬ, что объединение не более чем счётного семейства множеств меры нуль есть множество меры нуль.
70. ОБЪЯСНИТЬ значение термина «почти всюду».

ЗАДАЧА. Верно ли утверждение «почти все числа иррациональны»? Ответ обосновать.

71. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий Лебега интегрируемости по Риману.

ЗАДАЧА. Будет ли интегрируема по Риману характеристическая функция Канторова множества на отрезке $[0, 1]$? Ответ обосновать.

ЗАДАЧА. Используя критерий Лебега доказать, что произведение интегрируемых функций — интегрируемая функция.

72. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий Лебега интегрируемости по Риману. ДОКАЗАТЬ необходимость критерия Лебега.
73. СФОРМУЛИРОВАТЬ критерий Лебега интегрируемости по Риману. ДОКАЗАТЬ достаточность критерия Лебега.

Первообразные функций, интегрируемых по Риману

74. ДОКАЗАТЬ, что если функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то функция $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ дифференцируема почти всюду на $[a, b]$.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислите производную функции $f(x) = \int_x^{x^2} \cos(t^2) dt$.

75. ДОКАЗАТЬ, что если функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то функция $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ удовлетворяет условию Липшица.
76. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие первообразной ограниченной функции, имеющей конечное число точек разрыва.
77. ДОКАЗАТЬ, что две первообразные ограниченной функции, имеющей конечное число точек разрыва, отличаются на постоянную величину.

Основные формулы интегрального исчисления

78. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ формулу Ньютона — Лейбница для определённого интеграла.
79. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ формулу интегрирования по частям в определённом интеграле.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. С помощью формулы интегрирования по частям вычислите значение интеграла $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$.

80. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу замены переменной.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. С помощью формулы замены переменной вычислите значение интеграла $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx$.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. В интеграле $\int_0^{2\pi} f(t) \cos t dt$ сделайте замену переменной $x = \sin t$.

81. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу замены переменной. ДОКАЗАТЬ формулу замены переменной для ступенчатой функции.
82. СФОРМУЛИРОВАТЬ формулу замены переменной. Считая формулу доказанной для ступенчатой функции, ДОКАЗАТЬ её для произвольной интегрируемой функции.
83. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ первую теорему о среднем.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. С помощью первой теоремы о среднем найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

84. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ вторую теорему о среднем.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. С помощью второй теоремы о среднем оценить значение интеграла $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

Приложения определённого интеграла

85. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие параметризованной кривой (пути).

86. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие длины параметризованной кривой.

87. ДОКАЗАТЬ, что длина параметризованной кривой аддитивна.

88. ДОКАЗАТЬ формулу длины для параметризованной кривой.

ЗАДАЧА. ВЫВЕСТИ из общей формулы длины формулу для плоской кривой, заданной как график в декартовых координатах $y = f(x)$.

ЗАДАЧА. ВЫВЕСТИ из общей формулы длины формулу для плоской кривой, заданной как график в полярных координатах $r = g(\varphi)$.

89. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие площади плоской фигуры.

ЗАДАЧА. Доказать, что площадь обладает свойством монотонности.

ЗАДАЧА. Доказать, что площадь обладает свойством аддитивности.

90. ВЫВЕСТИ формулу площади для криволинейной трапеции.

91. ВЫВЕСТИ формулу площади для области, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах.

92. ВЫВЕСТИ формулу объёма для тела вращения.

93. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.