

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
Вопросы для подготовки к экзамену  
15 июня, ауд. 3107, 9:00  
СЕМЕСТР 2, ЧАСТЬ II

*Несобственный интеграл*

1. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие несобственного интеграла.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить значение интеграла

$$\int_2^{\infty} \frac{2}{x^2 - 1} dx.$$

2. ВАЖНЫЕ ЗАДАЧИ. При каких вещественных  $p$  сходится интегралы

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \quad \text{и} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}?$$

3. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ свойство линейности для несобственного интеграла.
4. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ формулу интегрирования по частям для несобственного интеграла.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить значение интеграла

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

5. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ формулу замены переменной для несобственного интеграла.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить значение интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}.$$

6. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ признак сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ. Исследуйте на сходимость интегралы (используются сравнения с интегралами из вопроса 2).

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \int_0^{1/2} \frac{dx}{\ln x}, \quad \int_{1/2}^2 \frac{dx}{\ln x}, \quad \int_0^{\infty} x^{2016} e^{-x} dx.$$

7. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятия абсолютной и условной сходимости для несобственного интеграла.
8. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ мажорантный признак (Вейерштрасса) абсолютной сходимости несобственного интеграла.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{x^2 + 1} dx.$$

9. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак Абеля сходимости несобственного интеграла.
10. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак Дирихле сходимости несобственного интеграла.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

#### *Признаки равномерной сходимости*

11. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие поточечной сходимости последовательности функций.
12. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие равномерной сходимости последовательности функций.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найти поточечный предел и исследовать на равномерную сходимость последовательность

$$f_n(x) = x^n - x^{2n} \quad \text{при} \quad x \in [0, 1].$$

13. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций.
14. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак Дини равномерной сходимости последовательности функций.
15. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + x^2} \quad \text{при} \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

16. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда.

17. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \quad \text{при } x \in (0, +\infty).$$

*Равномерная сходимость и предел*

18. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о перестановке пределов в равномерно сходящейся последовательности.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить значение предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}.$$

19. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найдите область определения функции  $\zeta$  и исследуйте её на непрерывность, если

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

20. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему об интегрируемости предела равномерно сходящейся последовательности.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n^2 x^2}{n^2 + x^2} dx.$$

21. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о дифференцируемости предела равномерно сходящейся последовательности.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найдите область определения функции  $f$  и исследуйте её на дифференцируемость, если

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}.$$

*Степенные ряды*

22. ДОКАЗАТЬ, что сумма степенного ряда непрерывна внутри интервала сходимости.

23. ДОКАЗАТЬ, что сумма степенного ряда дифференцируема внутри интервала сходимости и ВЫЧИСЛИТЬ её производную.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Используя почленное дифференцирование, ВЫЧИСЛИТЬ сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

24. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему Абеля о непрерывности степенного ряда на границе интервала сходимости.

*Нормированные пространства*

25. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение метрики и метрического пространства.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Докажите, что  $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$  является метрикой на  $\mathbb{R}$ .

26. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение нормы и нормированного пространства.

ЗАДАЧА. Докажите, что  $|x|_p = |(x_1, \dots, x_k)|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$  является нормой на  $\mathbb{R}^k$ .

ЗАДАЧА. Докажите, что  $|x|_{\infty} = |(x_1, \dots, x_k)|_{\infty} = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, k\}$  является нормой на  $\mathbb{R}^k$ .

27. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие полного нормированного пространства.

28. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ координатный критерий сходимости в  $(\mathbb{R}^k, |\cdot|_{\infty})$ .

29. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ теорему о частичных пределах в  $(\mathbb{R}^k, |\cdot|_{\infty})$ .

30. СФОРМУЛИРОВАТЬ теорему об эквивалентности норм в  $\mathbb{R}^k$ . ДОКАЗАТЬ, что любая норма эквивалентна норме  $|\cdot|_{\infty}$ .

ЗАДАЧА. Докажите, что если две нормы эквивалентны норме  $|\cdot|_{\infty}$ , то они эквивалентны друг другу.

31. СФОРМУЛИРОВАТЬ и ДОКАЗАТЬ критерий Коши в  $\mathbb{R}^k$ .

*Топология в  $\mathbb{R}^k$*

32. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятия (открытого) шара и окрестности в нормированном пространстве.

ЗАДАЧА. Докажите, что пересечение двух окрестностей точки — окрестность этой точки.

ЗАДАЧА. Докажите, что у двух различных точек нормированного пространства есть непересекающиеся окрестности.

ЗАДАЧА. Пусть  $B$  — шар в нормированном пространстве с центром в точке  $x$ . Докажите, что для любой точки  $y \in B \setminus \{x\}$  найдётся окрестность  $U$ , что  $U \subset B$  и  $x \notin U$ .

33. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие замкнутого множества.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ. Докажите, что следующие множества замкнуты:

- конечный набор чисел на вещественной прямой;

- отрезок вещественной прямой;
- замкнутый шар.

ЗАДАЧА. Докажите, что пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

ЗАДАЧА. Докажите, что объединение двух замкнутых множеств замкнуто.

34. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о замкнутости множества предельных точек.
35. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие замыкания множества.

ЗАДАЧА. Докажите, что замыкание множества замкнуто.

36. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие открытого множества.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ. Докажите, что следующие множества открыты:

- интервал вещественной прямой;
- открытый шар;
- $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ .

ЗАДАЧА. Докажите, что объединение любого числа открытых множеств открыто.

ЗАДАЧА. Докажите, что пересечение двух открытых множеств открыто.

37. ДОКАЗАТЬ, что дополнение открытого множества замкнуто.
38. ДОКАЗАТЬ, что дополнение замкнутого множества открыто.
39. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие компактного множества в нормированном пространстве.
40. ДОКАЗАТЬ, что компактное множество в  $\mathbb{R}^k$  замкнуто и ограничено.
41. ДОКАЗАТЬ, что замкнутое и ограниченное множество в  $\mathbb{R}^k$  компактно.
42. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятия граничной точки и границы множества.

*Непрерывные отображения нормированных пространств*

43. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему Вейерштрасса об экстремумах непрерывной функции.
44. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему об образе компакта при непрерывном отображении.
45. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции на компакте.
46. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие гомеоморфизма.
47. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о гомеоморфности обратного отображения к непрерывному на компакте.

*Линейные отображения*

48. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение нормы линейного отображения.

ЗАДАЧА. Доказать, что норма линейного отображения является нормой.

49. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение ограниченного линейного отображения.
50. ДОКАЗАТЬ, что линейное отображение ограничено тогда и только тогда, когда оно непрерывно.
51. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ лемму о строении линейного отображения над  $\mathbb{R}^k$ .
52. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие дуального базиса в  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ .

*Дифференцируемость в  $\mathbb{R}^k$*

53. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие производной вдоль вектора.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить производную функции  $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$  в нуле вдоль вектора  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ .

54. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие частной производной.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить частные производные функции

$$f(x, y) = |x + y| - |x - y|$$

в точке  $(0, 0)$ .

55. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие дифференциала отображения в точке.

ЗАДАЧА. Доказать, что дифференциал суммы равен сумме дифференциалов.

56. ДОКАЗАТЬ, что дифференциал отображения в точке единствен.
57. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ связь между дифференциалом и производной вдоль вектора.
58. СФОРМУЛИРОВАТЬ координатное представление дифференциала.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить дифференциал функции  $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ .

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найти касательную плоскость к поверхности  $z = x^2 + y^2$  в точке  $(1, 2, 5)$ .

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Дифференцируема ли функция  $f(x, y) = |xy|$  в точке  $(0, 0)$ ? Чему равен её дифференциал?

59. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие градиента функции в точке.
60. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие матрицы Якоби функции в точке.  
ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найти дифференциал отображения  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , действующего по правилу  $f(x, y) = (x^2, y^2, x - y)$ .
61. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о дифференцировании композиции.  
ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Доказать, что если  $\cdot : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  — скалярное произведение, то  $D(x \cdot y) = x \cdot Dy + y \cdot Dx$ .  
ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найти дифференциал функции  $f$ , если  $f(x, y) = g(xy, \frac{x}{y})$ , где  $g(u, v)$  — некоторая дифференцируемая функция.
62. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ достаточный признак существования дифференциала.

63. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о дифференциале обратного отображения.

*Теоремы о приращениях*

64. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ формулу конечных приращений для отображения со значениями в  $\mathbb{R}$ .

ЗАДАЧА. Оценить приращение функции  $|f(2, 2) - f(1, 1)|$ , если

$$f(x, y) = \int_0^{xy} \frac{dt}{t^{10} + 1}.$$

65. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о конечных приращениях для отображения со значениями в нормированном пространстве.

*Однородные функции*

66. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие конического множества.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Является ли коническим множеством верхняя полуплоскость  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ ? Ответ обосновать.

67. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие однородной функции.

ЗАДАЧА. Доказать, что норма является однородной функцией. Чему равна её степень однородности?

ЗАДАЧА. Доказать, что если  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  однородна степени 0 и непрерывна в нуле, то  $f$  — постоянная.

ЗАДАЧА. Пусть  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  однородна степени  $r$  и дифференцируема. Однородны ли её частные производные? Какова их степень однородности?

68. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему Эйлера об однородных функциях.

*Полилинейные отображения*

69. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие полилинейного отображения.

70. СФОРМУЛИРОВАТЬ определение нормы полилинейного отображения.

ЗАДАЧА. Доказать, что норма полилинейного отображения однородна.

ЗАДАЧА. Доказать, что норма полилинейного отображения удовлетворяет неравенству треугольника.

*Второй дифференциал*

71. Сформулировать понятие второй частной производной в точке.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Найти все первые и вторые частные производные функции  $f(x, y) = x^3 + xy$ .

72. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие второго дифференциала отображения в точке.

73. СФОРМУЛИРОВАТЬ координатное представление второго дифференциала.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Вычислить второй дифференциал функции  $f(x, y) = 2xy$ .

74. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ теорему о симметричности второго дифференциала.

*Дифференциалы старших порядков*

75. СФОРМУЛИРОВАТЬ понятие дифференциала порядка  $n$  отображения нормированных пространств.

ЗАДАЧА. Доказать, что  $D^m(D^n f)(p) = D^{m+n} f(p)$ .

ЗАДАЧА. Доказать, что  $n$ -ый дифференциал является симметричным  $n$ -линейным отображением.

76. СФОРМУЛИРОВАТЬ координатное представление  $n$ -ого дифференциала.

77. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ формулу Тейлора для функции нескольких переменных.

78. СФОРМУЛИРОВАТЬ координатное представление для формулы Тейлора.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ. Разложить функцию  $f(x, y) = \ln(x + y)$  по формуле Тейлора до второго порядка в точке  $(1, 0)$ .

79. ДОКАЗАТЬ, что многочлен Тейлора — единственный многочлен, приближающий  $n$  раз дифференцируемую функцию в точке с точностью до  $o$ -малого  $n$ -ого порядка.