

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

3 семестр

$\mathbb{R}^n$ как векторное пространство.
Линейные преобразования из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.
Нормы в $\mathbb{R}^n$.
Евклидова структура в $\mathbb{R}^n$.
Норма линейного отображения.
Дифференцируемость и дифференциал функции в точке.
Линейность операции дифференцирования.
Дифференцирование суперпозиции дифференцируемых отображений.
Дифференциал и частные производные.
Координатное представление дифференциала.
Матрица Якоби.
Непрерывность, частные производные и дифференцируемость функции в точке.
Теорема Эйлера об однородных функциях.
Теорема о симметричности вторых смешанных производных.
Формула Тейлора для функций многих переменных.
Дифференциалы высших порядков.
Рекуррентное правило вычисления дифференциалов высших порядков.
Необходимые и достаточные условия экстремума функции во внутренней точке области определения.
Теорема об обратной функции.
Понятие диффеоморфизма для открытых множеств в $\mathbb{R}^n$.
Понятие криволинейной системы координат в пространстве.
Теорема о неявных функциях.
Теорема о выпрямляющем диффеоморфизме.
Теорема о функциональной зависимости системы функций.
Дифференцируемые многообразия в пространстве $\mathbb{R}^n$.
Строение множества, определяемого системой уравнений. Примеры.
Касательное пространство.
Понятие градиента.
Базис нормального пространства к многообразию, задаваемому системой уравнений.
Условные экстремумы (постановка задачи).
Принцип множителей Лагранжа. Достаточное условие экстремума.
Понятие дробящейся системы. Примеры (система S^k k -мерных сегментов в $\mathbb{R}^k$).
Понятие меры на дробящейся системе и понятие пространства с мерой.
Пространство ступенчатых функций.
Интегрирование ступенчатых функций.
Свойства элементарного интеграла.
Принцип исчерпывания.
Элементарная теорема Беппо Леви для ступенчатых функций.

Элементарная теорема Фубини для ступенчатых функций.
 Понятие интегральной оценки (внешнего интеграла). Свойства.
 Пренебрежимые множества и функции. Их свойства.
 Термин “почти всюду его свойства”.
 Понятие интеграла Лебега. Свойства интеграла.
 Пространство $L_1(\mathbb{X}; \mathbb{E})$ суммируемых функций.
 Теорема о нормально сходящихся рядах.
 Теорема Беппо Леви.
 Теорема Ф. Рисса о полноте.
 Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Контрпримеры.
 Связь интеграла Лебега с интегралом Римана в пространстве $\mathbb{R}^k$.
 Измеримые функции.
 Теорема об измеримости предела последовательности измеримых функций.
 Признак интегрируемости Лебега.
 Теорема об измеримости почти непрерывной функции.
 Определение интеграла неотрицательной измеримой функции. Лемма Фату.
 Понятия меры и измеримого множества.
 Совокупность измеримых множеств как σ -кольцо.
 Измеримость множеств Лебега измеримой функции.
 Характеризация измеримой функции через множества Лебега.
 Теоремы Фубини и Тонелли.
 Формула Кавальери — Лебега.
 Свойство регулярности меры Лебега.
 Борелевские множества, их связь с измеримыми множествами.
 Двоичные кубы. Разбиения на двоичные кубы.
 Поведение меры относительно изометрических и подобных преобразований.
 Искажение меры Лебега при линейных невырожденных преобразованиях.
 Лемма о $\mathcal{N}$ -свойстве гладкого отображения.
 Лемма о локальном искажении меры при гладких гомеоморфизмах.
 Основная лемма об искажении меры при гладких отображениях.
 Теоремы о замене переменной в интеграле Лебега.
 Объем шара в $\mathbb{R}^k$.
 Интегрирование особенностей вида $|x|^m$ в $\mathbb{R}^k$ в окрестности 0 и ∞ .
 Теоремы о предельном переходе по параметру, непрерывности по параметру, дифференцируемости по параметру (правило Лейбница).
 Гамма и бета функции Эйлера. Область определения, формулы понижения, формулы Эйлера — Гаусса, формула дополнения, связь между эйлеровыми функциями.
 Интеграл Эйлера — Пуассона: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.