

1.2. Докажем второе тождество

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (1.1)$$

первое тождество доказывается аналогично. По определению мы имеем

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= \{x \mid x \in C \wedge (x \in A \vee x \in B)\}, \\ A \cap C &= \{x \mid x \in A \wedge x \in C\}, \quad B \cap C = \{x \mid x \in B \wedge x \in C\}. \end{aligned}$$

Используя вторую выносную строку, проанализируем выражение $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. Его смысл состоит в том, что элемент x всегда принадлежит C , но при этом может принадлежать или A , или B . А это, учитывая первую выносную строку, эквивалентно тому, что $x \in (A \cup B) \cap C$.

1.3.f. Докажем тождество

$$A \cap (B \setminus C) = (B \setminus C) \cap A = (A \cap B) \setminus (A \cap C). \quad (1.2)$$

Пусть $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. Это равносильно тому, что

$$x \in (A \cap B) \setminus ((A \cap C) \cap (A \cap B)) = (A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \cap B) \setminus C.$$

Но

$$(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C);$$

действительно, выражение $(A \cap B) \setminus C$ означает, что из множества $A \cap B$ мы убираем все элементы, принадлежащие C , а выражение $A \cap (B \setminus C)$ означает, что мы рассматриваем такие элементы x множества A , что $x \in B$, но $x \notin C$, поэтому и элементы множества $A \cap (B \setminus C)$ — это такие элементы множества $A \cap B$, которые не принадлежат C . Таким образом, тождество (1.2) доказано.

1.5. По определению мы имеем

$$\begin{aligned} A \Delta (B \Delta C) &= (A \setminus (B \Delta C)) \cup ((B \Delta C) \setminus A) \\ &= \left(A \setminus ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \right) \cup \left(((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \setminus A \right) = D_1 \cup D_2. \end{aligned}$$

Пусть $x \in D_1$. Тогда $x \in A$, и, поскольку $B \cup C = (B \Delta C) \cup (B \cap C)$, мы имеем следующие две возможности: 1^0 $x \in A$ и при этом $x \notin (B \cup C)$, 2^0 $x \in (A \cap B \cap C)$. Пусть $x \in D_2$. Тогда мы имеем следующие две возможности: $1'$ $x \in B$, $x \notin (A \cup C)$, $2'$ $x \in C$, $x \notin (B \cup C)$. Совокупность возможностей 1^0 , 2^0 , $1'$, $2'$ дает нам право сделать следующий вывод

$$A \Delta (B \Delta C) = \left((A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \right) \cup (A \cap B \cap C).$$

Далее заметим, что $(A\Delta B)\Delta C = C\Delta(A\Delta B)$. Тогда, применяя те же, что и в случае $A\Delta(B\Delta C)$, аргументы, мы выводим, что

$$C\Delta(A\Delta B) = \left((A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \right) \cup (A \cap B \cap C),$$

откуда и следует требуемое равенство.

1.8. Напомним, что множество R называется кольцом, если в нем определены две операции — сложением $+$ и умножением $\cdot$, обе коммутативные и ассоциативные, а также связанные законом дистрибутивности, причем сложение обладает обратной операцией — вычитанием:

1⁰ сложение коммутативно: $a + b = b + a$,

2⁰ сложение ассоциативно: $a + (b + c) = (a + b) + c$,

3⁰ умножение коммутативно: $a \cdot b = b \cdot a$,

4⁰ умножение ассоциативно: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

5⁰ сложение и умножение связаны законом дистрибутивности: $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

В качестве $+$ рассмотрим операцию Δ , в качестве $\cdot$ — операцию $\cap$. В этом случае свойства 1⁰, 3⁰ очевидны, свойство 2⁰ — задача 1.5, свойство 4⁰ проверяется элементарно непосредственно. Докажем свойство 5⁰, т. е.

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C). \quad (1.3)$$

Используя (1.1), мы получаем

$$((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cap C = ((A \setminus B) \cap C) \cup ((B \setminus A) \cap C). \quad (1.4)$$

С другой стороны, используя (1.2), мы можем записать

$$\begin{aligned} (A \cap C) \Delta (B \cap C) &= ((A \cap C) \setminus (B \cap C)) \cup ((B \cap C) \setminus (A \cap C)) \\ &= ((A \setminus B) \cap C) \cup ((B \setminus A) \cap C). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Сопоставляя (1.3) и (1.4), получаем (1.5).

1.9. По определению $f^{-1}(M) = \{x \in X \mid f(x) \in M\}$. Поэтому для любой точки $z \in f^{-1}(M)$ мы имеем $f(z) \in M$, что влечет включение $f(f^{-1}(M)) \subseteq M$. Пример отображения $f : X \rightarrow Y$, для которого включение строгое, следующий: $X = \{x_1, x_2\} \subset \mathbb{R}^2$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\} \subset \mathbb{R}^2$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $M = Y$. Тогда $f^{-1}(M) = \{x_1, x_2\}$, $f(f^{-1}(M)) = \{y_1, y_2\} \subset Y = M$ (отображение f в данном примере не сюръективно).

1.10. По определению $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$. Поэтому для любой точки $z \in f(E)$ мы имеем $x \in \{u \mid f(u) = z\}$, где $f(x) = z$, что влечет включение

$E \subseteq f^{-1}(f(E))$. Пример отображения $f : X \rightarrow Y$, для которого включение строгое, следующий: $X = \{x_1, x_2\} \subset \mathbb{R}^2$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\} \subset \mathbb{R}^2$, $f(x_1) = f(x_2) = y_1$, $E = \{x_1\}$. Тогда $f(E) = y_1$, $E \subseteq f^{-1}(f(E)) = \{x_1, x_2\}$ (отображение f в данном примере не инъективно).

1.24.

(1) Предположим, что f не сюръективно. Тогда $B \setminus f(A) \neq \emptyset$, откуда следует, что найдется элемент $y \in B \setminus f(A)$. При этом, так как $g \circ f$ — биекция, мы имеем $g(f(A)) = C$. С другой стороны, по условию $h \circ g$ — биекция, поэтому $g(y) \in C$, и, принимая во внимание тот факт, что $g(f(A)) = C$, мы получаем, что найдется элемент $x \in B$ такой, что $g(y) = g(x)$. Т. е. g — не инъективное отображение. Но тогда и $h \circ g$ — не инъективное отображение, что противоречит условию. Поэтому f — сюръективное отображение.

(2) Так как $g \circ f$, $h \circ g$ — биективные отображения, то f , g — инъективные отображения.

(3) Из (1), (2) вытекает, что f — биекция.

(4) Если g — не сюръективное отображение, то $g \circ f$ не может быть биективным отображением, что противоречит условию. Значит, g — сюръективное отображение, откуда, с учетом (2), отображение g является биективным.

(5) Если h — не инъективное отображение, то с учетом (4) отображение $h \circ g$ не биективно, что противоречит условию. Значит, отображение h инъективно.

(6) Если h — не сюръективное отображение, то с учетом (4) отображение $h \circ g$ не биективно, что противоречит условию. Значит, отображение h сюръективно.

(7) Из (5), (6) вытекает, что h — биективное отображение.

1.25.b. Из условия задачи сразу же вытекает, что отображения $f : A \rightarrow f(A)$, $g : B \rightarrow g(B)$ инъективны, а отображение $g : (f \circ h)(C) \rightarrow C$ сюръективно. Мы имеем $(f \circ h)(C) \subseteq B$, и если $B \setminus (f \circ h)(C) \neq \emptyset$, то это будет противоречить инъективности отображения $g : B \rightarrow g(B)$. Следовательно, $(f \circ h)(C) = B$, что влечет биективность отображения $g : B \rightarrow C$. Кроме того, тождество $(f \circ h)(C) = B$ влечет сюръективность отображения $f : h(C) \rightarrow (f \circ h)(C) = B$, что исключает «строгое» включение $h(C) \subset A$ (наличие такового противоречит инъективности $f : A \rightarrow f(A)$). Следовательно, мы имеем $h(C) = A$, что влечет биективность отображения $f : A \rightarrow B$ и сюръективность отображения $h : C \rightarrow A$. Предположим, что отображение $h : C \rightarrow A$ не инъективно. Но тогда, в силу биективности $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$, мы получаем, что отображение $g \circ h \circ g : B \rightarrow B$ не инъективно, что противоречит условию. Следовательно, отображение $h : C \rightarrow A$ инъективно.

2.9. Докажем вспомогательное двойное неравенство

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}. \quad (2.1)$$

Действительно

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} &= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}, \\ 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} &= \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Таким образом, двойное неравенство (2.1) доказано. Полагая в (2.1) $n = 2, \dots, n$, получим

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2,$$

откуда получаем

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1. \quad (2.2)$$

Очевидно, что $2\sqrt{2} < 3$, поэтому из (2.2) вытекает, что

$$2\sqrt{n} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1. \quad (2.3)$$

Полагая в (2.3) $n = 1000000$, мы получаем

$$1998 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 1999.$$

Следовательно, целая часть числа $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$ равна 1998.

2.10. УКАЗАНИЕ. Вам существенно поможет известное тригонометрическое тождество $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$.

2.11. Используем метод математической индукции. Очевидно, что $2\sin\left(a_1 \frac{\pi}{4}\right) = a_1\sqrt{2}$ при $a_1 = \pm 1$. Предположим, что сформулированное в условии задачи равенство выполняется (индукционное предположение). Тогда для завершения доказательства нам необходимо проверить тождество

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{2^2} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{2^{n-1}} + \frac{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}}{2^n}\right)\right) \\ = a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \dots + a_{n+1} \sqrt{2}}}, \end{aligned}$$

которое (с учетом индукционного предположения) эквивалентно тождеству

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{\pi a_1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{a_2 a_3}{2} + \dots + \frac{a_2 \dots a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\right)\right) \\ = a_1 \sqrt{2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(a_2 + \frac{a_2 a_3}{2} + \dots + \frac{a_2 \dots a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\right)}. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Обозначим

$$a_2 + \frac{a_2 a_3}{2} + \cdots + \frac{a_2 \cdot \dots \cdot a_{n+1}}{2^{n-1}}.$$

Тогда (2.4) записывается в виде

$$2 \sin \left(\frac{\pi a_1}{4} \left(1 + \frac{A}{2} \right) \right) = a_1 \sqrt{2 + 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} A \right)}. \quad (2.5)$$

Тождество (2.5) легко проверяется непосредственно.

2.14. Рассмотрим множество A_1 такое, что $|A_1| = 1$. Очевидно, что все подмножества такого множества состоят из $\emptyset$ и A_1 , т. е. число всех подмножеств 1-элементного множества равно 2. Предположим, что число всех подмножеств любого n -элементного множества A_n равно 2^n . Рассмотрим некоторое $n+1$ -элементное множество A_{n+1} . Очевидно, что его подмножествами будут все подмножества B_n^i , $i = 1, \dots, 2^{n-1}$, его n -элементного подмножества A_n . Остальные же подмножества множества A_{n+1} представляют собой множества $B_n^i \cup \{a_{n+1}\}$, $i = 1, \dots, 2^n$, где $\{a_{n+1}\} = A_{n+1} \setminus A_n$. Таким образом суммарно количество всех подмножеств $n+1$ -элементного множества A_{n+1} равно $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

2.16. 2^{n-1} .

2.18. Каждый элемент множества A можно отобразить на какой-нибудь элемент множества B m -способами, и при этом $|A| = n$. Следовательно, общее число отображений множества A в множество B равно m^n .

2.19. $m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)$.

2.20. Пусть $\{f_M\}$ — множество отображений $f_M : A \rightarrow B$ таких, что $M \subset B$, $f_M^{-1}(M) = \emptyset$ (прообраз M пуст). Соответственно, мы имеем $|M| = 1, \dots, m-1$. Пусть $\{B_1, \dots, B_m\} = B$, тогда все M такие, что $|M| = 1$, совпадают с совокупностью M_1 множеств $C_i = B \setminus B_i$, все M такие, что $|M| = 2$, совпадают с совокупностью M_2 всевозможных множеств $C_i \cup C_j$, $i \neq j$, все M такие, что $|M| = k$, совпадают с совокупностью M_k множеств $C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_k}$, где все i_l различны. Мы имеем $|M_k| = C_m^k$, см. задачу 2.23, и $|F_k| = (m-k)^n$, где F_k — совокупность всех отображений вида $f_{C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_k}}$, см. задачу 2.18. Тогда, используя задачу 2.57, мы получаем, что

$$|\{f_M\}| = |F_1| - |F_2| + \dots + (-1)^{m-1} |F_{m-1}|,$$

поэтому, учитывая, что общее число отображений $f : A \rightarrow B$ равно m^n , мы получаем ответ на поставленный в задаче 2.20 вопрос:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \cdot C_m^k \cdot (m-k)^n.$$

2.21. Множество, состоящее из n элементов, называется упорядоченным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n . Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов (т. е. могут быть получены из того же самого множества), называются перестановками этого (упорядоченного) множества.

Любой элемент a_1 множества A можно разместить на n мест n способами. После этого свободными останутся $n - 1$ мест, и разместить на эти $n - 1$ мест некоторый элемент $a_2 \in A \setminus a_1$ можно $n - 1$ способами. Таким образом элементы a_1, a_2 на n мест можно $n \cdot (n - 1)$ способами. После этого свободными останутся $n - 2$ мест, и разместить на эти $n - 2$ мест некоторый элемент $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$ можно $n - 2$ способами. Таким образом элементы a_1, a_2, a_3 на n мест можно $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$ способами, и т. д. Поэтому число перестановок конечного n -элементного множества A равно $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$

2.22. $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$.

2.23. Обозначим символом C_n^m количество m -элементных подмножеств n -элементного множества A . Чтобы построить m -элементное подмножество множества A , нужно к некоторому $(m - 1)$ -элементному подмножеству присоединить один из оставшихся $n - m + 1$ элементов. Поскольку $(m - 1)$ -элементных подмножеств имеется C_n^{m-1} и каждое из них можно сделать m -элементными $n - m + 1$ способами, то таким образом мы получим $(n - m + 1)C_n^{m-1}$ подмножеств. Но не все они будут разными, так как каждое m -элементное множество можно построить m способами: присоединением каждого из m его элементов. Тогда $mC_n^m = (n - m + 1)C_n^{m-1}$. Отсюда найдем

$$C_n^m = \frac{n - m + 1}{m} C_n^{m-1} = \frac{(n - m + 1)(n - m + 2)}{m(m - 1)} C_n^{m-2} = \dots = \frac{(n - m + 1) \cdot \dots \cdot (n - 1)}{m(m - 1) \cdot \dots \cdot 2} C_n^1. \quad (2.6)$$

Но число 1-элементных подмножеств C_n^1 множества A равно n , поэтому, учитывая (2.6), мы получаем, что $C_n^m = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

2.24. C_{2m}^m в случае $n = 2m$, $C_{2m+1}^m = C_{2m+1}^{m+1}$ в случае $n = 2m + 1$. (УКАЗАНИЕ. Используйте равенство $C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$.)

2.25. $\frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$. (УКАЗАНИЕ. $\frac{n!}{n_1! \dots n_k!} = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \dots \cdot C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k}$.)

2.26. Рассмотрим все натуральные числа от 1 до $n + m + 1$ включительно. Рассмотрим произвольные натуральные числа $a_1, \dots, a_{m-1} \in \{2, \dots, n + m\}$, $a_i <$

a_{i+1} . Тогда числа $x_1 = a_1 - 2$, $x_2 = a_2 - a_1 - 1$, $\dots$, $x_m = n + m + 1 - a_{m-1} - 1 = n + m - a_{m-1}$ являются неотрицательными решениями уравнения $x_1 + \dots + x_m = n$. Действительно,

$$\sum_{i=1}^m x_i = a_1 - 2 + n + m - a_{m-1} + \sum_{i=2}^{m-1} (a_i - a_{i-1} - 1) = n.$$

С другой стороны, если набор $(x_1, \dots, x_m)$ является неотрицательным решением уравнения $x_1 + \dots + x_m = n$, то при помощи соотношений $x_1 + 2 = a_1$, $x_2 + a_1 + 1 = a_2$, $x_3 + a_2 + 1 = a_3$, $\dots$, $x_{m-1} + a_{m-2} + 1 = a_{m-1}$ определяются $m-1$ чисел $a_1, \dots, a_{m-1}$, из определения которых вытекают соотношения

$$a_1 \geq 2, \quad a_i > a_{i-1}, \quad i = 2, \dots, m-1, \quad n + m - x_m = a_{m-1} (\Rightarrow a_{m-1} \leq n + m).$$

Поэтому число неотрицательных решений уравнения $x_1 + \dots + x_m = n$ совпадает с количеством всевозможных $(m-1)$ -элементных подмножеств $(n+m-1)$ -элементного множества, т. е. C_{n+m-1}^{m-1} .

2.27. C_{n-1}^{m-1} . (Рассмотрим интервал $I = [1, n] = \bigcup_{i=1}^{n-1} I_i$, где $I_i = [i, i+1]$. Исходная задача эквивалентна следующему вопросу: сколькими различными $(m-1)$ -способами мы можем «разорвать» I на $m-1$ частей так, чтобы точки «разрывов» совпадали с серединами отрезков I_i , $i = 1, \dots, n-1$).

2.28. УКАЗАНИЕ. Используйте результат задачи 2.26.

2.31. Нетрудно понять, что после умножения $(a+b)^n = (a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)$ мы получим сумму вида $\sum_{k=0}^n A_k b^{n-k} a^k$, $A_k \in \mathbb{N}$. Необходимо понять, чему равны A_k . Для произвольного $k = 0, \dots, n$ произведение $b^{n-k} a^k$ получается оно следующим образом: из произведения n -скобок $(a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)$ мы выбираем произвольно k скобок, каждая из них дает в произведение $b^{n-k} a^k$ множитель b , остальные множители a появляются из оставшихся $(n-k)$ скобок произведения $(a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)$. Таким образом, $A_k = C_n^k$.

2.33. УКАЗАНИЕ. Разложить, используя бином Ньютона, правую и левую части тождества $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$ и сравнить коэффициенты при x^n , предварительно доказав тождество $C_n^k = C_n^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

2.34. УКАЗАНИЕ. *Способ 1.* Используйте задачи 2.14 и 2.22. *Способ 2.* Используйте бином Ньютона.

2.35. УКАЗАНИЕ. Используйте задачу 2.25.

2.37. УКАЗАНИЕ. Разложить по биному Ньютона выражения $(1+x)^n$, $(1+x)^m$, перемножить эти разложения и сравнить коэффициент при x^k с коэффициентом при x^k в разложении по биному Ньютона выражения $(1+x)^{n+m}$.

2.40. Поставленная задача эквивалентна следующей: доказать равенство

$$1 + (n+1)C_n^0 + \frac{n+1}{2}C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^{n+1}.$$

Заметим, что $1 = C_{n+1}^0$, $(n+1)C_n^0 = C_{n+1}^1$, $\frac{n+1}{2}C_n^1 = C_{n+1}^2$, ..., $C_n^n = C_{n+1}^{n+1}$. После используйте задачу 2.34.

2.46. Вычтем из равенства задачи 2.40 равенство, которое нам необходимо доказать. В результате получим

$$2C_n^0 + \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{2}{5}C_n^4 + \dots + \frac{2}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}}{n+1}, \quad (2.7)$$

если n — четное, или

$$2C_n^0 + \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{2}{5}C_n^4 + \dots + \frac{2}{n}C_n^{n-1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}, \quad (2.8)$$

если n — нечетное. Рассмотрим, например, равенство (2.8). После элементарных преобразований его можно записать как

$$(n+1)C_n^0 + \frac{n+1}{3}C_n^2 + \frac{n+1}{5}C_n^4 + \dots + \frac{n+1}{n}C_n^{n-1} = 2^n,$$

или же

$$C_n^0 + C_n^1 + C_{n+1}^3 + C_{n+1}^5 + \dots + C_{n+1}^n = 2^n. \quad (2.9)$$

Далее, используем результат задачи 2.30 и убеждаемся, учитывая задачу 2.14, в справедливости имеем тождества (2.9). Таким образом, равенство (2.8) доказано. Равенство (2.7) доказывается в точности также, как и (2.8).

2.48. УКАЗАНИЕ. Все числа C_p^k , $k = 1, \dots, p-1$, — натуральные, а p — простое.

2.49. Используя бином Ньютона, найдем, что $(2 + \sqrt{5})^p + (2 - \sqrt{5})^p$ — целое число. Мы имеем $-1 < (2 - \sqrt{5})^p < 0$, следовательно,

$$\begin{aligned} [(2 + \sqrt{5})^p] &= (2 + \sqrt{5})^p + (2 - \sqrt{5})^p \\ &= 2 \left(2^p + C_p^2 2^{p-2} 5 + C_p^4 2^{p-4} 5^2 + \dots + C_p^{p-1} \cdot 2^{\frac{p-1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Задача 2.49 вытекает из (2.10) и задачи 2.48.

2.50. При каждом фиксированном k равенство

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) \cdot \dots \cdot (i+k-1) = \frac{n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k)}{k+1} \quad (2.11)$$

доказывается методом математической индукции. Приведем универсальное (для произвольных $k, n \in \mathbb{N}$) доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i(i+1) \cdot \dots \cdot (i+k-1) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(k+i)!}{i!} \\ &= k! \left(1 + \frac{(k+1)!}{1!k!} + \frac{(k+2)!}{2!k!} + \dots + \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!} \right) = k! \left(C_{k+1}^0 + \sum_{i=1}^{n-1} C_{k+i}^i \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Последовательно применяя равенство из задачи 2.30 к правой части (2.12), мы получим, что

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) \cdot \dots \cdot (i+k-1) = k! C_{k+n}^{n-1},$$

откуда и вытекает равенство (2.11).

2.52. Доказывается от противного. Предположим, что для какого-то натурального числа $n > 2$ у пары F_{n+1}, F_n есть общий делитель $d > 1$. Тогда, используя равенство $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, получаем, что F_{n-1} также делится на d , и т. д. В результате получим, что и F_2 также делится на $d > 1$, но этого не может быть, поскольку $F_2 = 1$.

2.53. Сначала докажем методом математической индукции формулу

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}. \quad (2.13)$$

Индукцию будем проводить по m . При $m = 1$ формула (2.13) очевидна. При $m = 2$ мы имеем

$$F_{n+2} = F_{n-1}F_2 + F_nF_3 = F_{n-1}F_2 + 2F_n = F_{n+1} + F_n.$$

Теперь предположим, что формула (2.13) верна при $m = k$ и $m = k + 1$. Покажем, что она справедлива и при $m = k + 2$. Мы имеем

$$\begin{aligned} F_{n+k} &= F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}, \\ F_{n+k+1} &= F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2}. \end{aligned}$$

Складывая последние два равенства почленно, мы получаем $F_{n+k+2} = F_{n-1}F_{k+2} + F_nF_{k+3}$. Таким образом, формула (2.13) доказана. Теперь перейдем непосредственно к решению задачи 2.53. Докажем достаточность. Пусть k делит n , т. е. $n = km$. Доказательство будем вести индукцией по m . Если $m = 1$, то F_k делит F_n очевидным образом. Предположим, что F_{km} делится на F_m . Рассмотрим $F_{(k+1)m} = F_{km+m}$. Используя формулу (2.13), мы получаем

$$F_{km+m} = F_{km-1}F_m + F_{km}F_{m+1}.$$

Первое слагаемое правой части очевидно делится на F_m , второе слагаемое делится на F_m в силу индукционного предположения. Таким образом, достаточность доказана.

Докажем необходимость. Предположим, что F_k делит F_n , но при этом $n = ak + l$, $a, l \in \mathbb{N}$, $l < k$, и при этом необходимость доказана для всех $F_{n'}$, где $n' < n$. По формуле (2.13) мы имеем

$$F_n = F_{ak+l} = F_{(a-1)k+l+k} = F_{(a-1)k+l-1}F_k + F_{(a-1)k+l}F_{k+1}.$$

Следовательно, учитывая задачу 2.52, число $F_{(a-1)k+l}$ делится на F_k , откуда, используя индукционное предположение, мы получаем, что $l = 0$, т. е. n делится на k .

2.54.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right), \\ & \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) = 1. \end{aligned}$$

2.57. Задача решается методом математической индукции. Для двух множеств A, B мы очевидно имеем

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad (2.14)$$

Предположим, формула включения и исключения верна для $n-1$ множеств. Докажем ее для n множеств. Используя формулу (2.14), индукционное предположение, а также задачу 1.2, мы имеем

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2 \cup \dots \cup A_n| - |(A_1 \cap A_2) \cup \dots \cup (A_1 \cap A_n)| \\ &= |A_1| + (S_1(A_2, \dots, A_n) - S_2(A_2, \dots, A_n) + \dots + (-1)^n S_{n-1}(A_2, \dots, A_n)) \\ &\quad - (S_1(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) - S_2(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) \\ &\quad + \dots + (-1)^n S_{n-1}(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n)), \end{aligned}$$

где $S_k(A_1, \dots, A_n)$ есть сумма чисел $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$ по всевозможным пересечениям ровно k разных множеств из множеств $A_1, \dots, A_n$. Для того, чтобы окончить доказательство формула включения и исключения, остается заметить, что

$$\begin{aligned} |A_1| + S_1(A_2, \dots, A_n) &= S_1(A_1, \dots, A_n), \\ S_2(A_2, \dots, A_n) + S_1(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) &= S_2(A_1, \dots, A_n), \\ S_k(A_2, \dots, A_n) + S_{k-1}(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) &= S_k(A_1, \dots, A_n), \\ S_{n-1}(A_1 \cap A_2, \dots, A_1 \cap A_n) &= S_n(A_1, \dots, A_n). \end{aligned}$$

2.61. Доказательство будем проводить по индукции. При $n = 1, 2$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение выполняется для всех $k = 1, \dots, n$. Докажем утверждение для $n + 1$. Из чисел $1, 2, \dots, 2n + 1, 2n + 2$ рассмотрим его произвольное подмножество T_{n+2} , $|T_{n+2}| = n + 2$. Если в T_{n+2} найдется $n + 1$ число, принадлежащее множеству $\{1, 2, \dots, 2n - 1, 2n\}$, то справедливость утверждения вытекает из индукционного предположения. Следовательно, $\{2n + 1, 2n + 2\} \in T_{n+2}$, $(T_{n+2} \setminus \{2n + 1, 2n + 2\}) = A_{n+2} \subset \{1, 2, \dots, 2n - 1, 2n\}$, $|A_{n+2}| = n$. Число $n + 1$ и его делители не могут принадлежать множеству A_{n+2} , поскольку $2n + 2 \in T_{n+2}$. Также число 1 не принадлежит множеству A_n . Следовательно, множество $A_{n+2} \cup \{n + 1\}$ состоит чисел таких, что никакие два из них не будут делиться друг на друга. Но $A_{n+2} \cup \{n + 1\} \subset \{1, 2, \dots, 2n - 1, 2n\}$, а значит по предположению индукции в множестве $A_{n+2} \cup \{n + 1\}$ должны обнаружиться хотя бы два числа, одно из которых делится на другое. Противоречие.