

1. Числа

Множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,
множество целых чисел $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$
и множество вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Аксиома 1. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$, $0 \in A$ и из $a \in A$ следует, что $a + 1 \in A$. Тогда $A = \mathbb{N}$.

Утверждение 1. (метод математической индукции) Пусть $\Phi(n)$, $n \in \mathbb{N}$ — высказывание, для которого можно определить истинность. Тогда, если

- 1) $\Phi(0)$ — истинно (база индукции),
 - 2) для любого $n \in \mathbb{N}$ из истинности $\Phi(n)$ следует истинность $\Phi(n + 1)$ (шаг индукции),
- то для любого $n \in \mathbb{N}$ высказывание $\Phi(n)$ истинно.

Утверждение 2. (бином Ньютона) $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.32] ▲

Утверждение 3. (неравенство Бернулли)

Пусть $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Тогда $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.31] ▲

Замечание 1. При $x \neq 0$ и $n \geq 2$ неравенство строгое: $(1 + x)^n > 1 + nx$.

Утверждение 4. (сравнение средних арифметического и геометрического)

Пусть $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Тогда $\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем методом индукции по n вспомогательное неравенство: если $y_i > -1$ и $\prod_{i=1}^n (1 + y_i) = 1$, то $\sum_{i=1}^n y_i \geq 0$. При $n = 1$ имеем $y_1 = 0$. Пусть неравенство выполнено для некоторого n . Рассмотрим набор y_i , удовлетворяющих условию. Если не все $y_i = 0$, то найдутся два y_i разных знаков. Переупорядочим набор $\{y_i\}$ так, чтобы $y_n > 0$ и $y_{n+1} < 0$. По условию $\left(\prod_{i=1}^{n-1} (1 + y_i) \right) (1 + y_n + y_{n+1} + y_n y_{n+1}) = 1$. Заметим, что $(1 + y_n + y_{n+1} + y_n y_{n+1}) = (1 + y_n)(1 + y_{n+1}) > 0$. Тогда по предположению индукции $\sum_{i=1}^{n+1} y_i \geq \sum_{i=1}^{n-1} y_i + (y_n + y_{n+1} + y_n y_{n+1}) \geq 0$.

Рассмотрим $y_i = \frac{x_i}{\prod_{i=1}^n x_i^{1/n}} - 1$. Имеем $\sum_{i=1}^n y_i \geq 0$, т. е. $\sum_{i=1}^n x_i \geq n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$. ▲

Определение 1. Наименьшим элементом множества $A \subseteq \mathbb{N}$ называется такой $a \in A$, что для любого $b \in A$ имеем $a \leq b$. Обозначим $a = \min A$.

Утверждение 5. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Тогда A содержит наименьший элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $B = \mathbb{N} \setminus A$. По определению $a = \min A$ когда $\{0, \dots, n - 1\} \subseteq B$ и $n \notin B$.

Предположим $0 \in B$ и из $\{0, \dots, n-1\} \subseteq B$ следует, что $\{0, \dots, n\} \subseteq B$. Тогда по индукции (аксиоме 1) имеем $B = \mathbb{N}$. Это противоречит условию. Следовательно, найдётся такой $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\{0, \dots, n_0-1\} \subseteq B$ и $\{0, \dots, n_0\} \not\subseteq B$. Тогда $n_0 = \min A$. $\blacktriangle$

Утверждение 6. (метод наименьшего контрпримера) Пусть $\Phi(n)$, $n \in \mathbb{N}$ — высказывание, для которого можно определить истинность. Тогда, если

- 1) $\Phi(0)$ — ложно,
 - 2) для любого $n \in \mathbb{N}$ из истинности $\Phi(n)$ следует, что найдётся такое $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, что $\Phi(m)$ истинно,
- то для любого $n \in \mathbb{N}$ высказывание $\Phi(n)$ ложно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n) \text{ истинно}\}$. По условию A не имеет наименьшего элемента. Тогда $A = \emptyset$. $\blacktriangle$

Утверждение 7. Для любого $k \in \mathbb{N}$ из $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$ следует $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$ и $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$. Тогда найдётся наименьшее $n \in \mathbb{N}$, что $n\sqrt{k} \in \mathbb{N}$. Выберем такое $m \in \mathbb{N}$, что $m < \sqrt{k} < m+1$. Рассмотрим $n' = n\sqrt{k} - mn$. Очевидно, что $n' < n$ и $n'\sqrt{k} \in \mathbb{N}$. Пришли к противоречию. $\blacktriangle$

2. Множества

Определение 2. Прямым (декартовым) произведением множеств A и B называется множество $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Определение 3. Для любых множеств X и Y отношение $F \subseteq X \times Y$ определяет функцию (или отображение) $f : X \rightarrow Y$, если для любого $x \in X$ найдётся единственный $y \in Y$ такой, что $(x, y) \in F$. Установленную зависимость выражают формулой $f(x) = y$.

Множество F называют *графиком* функции f , множество X — *областью определения* функции f и обозначают $\text{Dom} f$, элемент $f(x) \in Y$ называется *значением* функции f в точке $x \in X$.

Для произвольного $X_1 \subseteq X$ определим множество $f(X_1) = \{f(x) \mid x \in X_1\}$ — *образ* множества X_1 под действием отображения f . Множество $f(X)$ называется *областью значений* функции f и обозначается $\text{Im} f$. *Прообразом* множества $Y_1 \subseteq Y$ называется множество $f^{-1}(Y_1) = \{x \in X \mid f(x) \in Y_1\}$.

Определение 4.

Функция $f : X \rightarrow Y$ называется *инъективной*, если для любого $y \in f(X)$ прообраз $f^{-1}(\{y\})$ состоит из одного элемента, другими словами, из $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$.

Функция $f : X \rightarrow Y$ называется *сюръективной*, если $f(X) = Y$.

Функция называется *биективной* (*взаимно однозначной*), если она инъективна и сюръективна.

Определение 5. Композицией двух функций $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ называется функция $g \circ f = h : X \rightarrow Z$, определяемая равенством $h(x) = g(f(x))$.

Утверждение 8. (ассоциативность композиции) Пусть $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$,

$h : Z \rightarrow V$. Тогда $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.72] ▲

Обозначим через $\text{id}_X : X \rightarrow X$ тождественное отображение $\text{id}_X(x) = x$.

Определение 6. Функция $f^{-1} : Y \rightarrow X$ называется *обратной* к функции $f : X \rightarrow Y$, если $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ и $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$.

Утверждение 9. (существование обратного отображения) Функция f биективна тогда и только тогда, когда существует обратная функция f^{-1} .

3. Линейный порядок на множестве вещественных чисел

Определение 7. На множестве X задан *линейный порядок*, если задано отношение $\leq$, удовлетворяющее условиям: для всех $x, y, z \in X$ справедливо

- а) $x \leq y$ или $y \leq x$ (порядок линейный, а не частичный);
- б) $x \leq x$ (рефлексивность);
- в) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$ (антисимметричность);
- д) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (транзитивность).

Определение 8. Элемент $x \in A \subseteq X$ ($x = \min A$) называется *наименьшим* элементом множества A , если $x \leq a$ для всех $a \in A$. Элемент $x \in A \subseteq X$ ($x = \max A$) называется *наибольшим* элементом множества A , если $a \leq x$ для всех $a \in A$.

Определение 9. Порядок согласован с операциями сложения и умножения на множестве X , если

- 1) для любого $z \in X, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$;
- 2) для любого $z \in X, z \geq 0, x \leq y \Rightarrow zx \leq zy$.

"Естественный" порядок на $\mathbb{R}$ является линейным порядком и согласован с операциями сложения и умножения.

Утверждение 10. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ содержит конечное число элементов, тогда существуют $\max A$ и $\min A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.85] ▲

Утверждение 11. Множество $A \subset \mathbb{N}$ содержит конечное число элементов тогда и только тогда, когда существует $\max A$.

Определение 10. Элемент $x \in X$ называется *нижней границей* (гранью) множества A , если $x \leq a$ для всех $a \in A$. Элемент $x \in X$ называется *верхней границей* (гранью) множества A , если $a \leq x$ для всех $a \in A$. Если множество имеет верхнюю и нижнюю границу, то оно называется *ограниченным*, если только верхнюю — *ограниченным сверху*, только нижнюю — *ограниченным снизу*.

Множество верхних граней множества A обозначается через $\Gamma_+(A)$, а нижних — $\Gamma_-(A)$.

Определение 11. Наименьшая (точная) верхняя граница множества A называется *супремумом* и обозначается через $\sup A$. Наибольшая (точная) нижняя граница множества A называется *инфимумом* и обозначается через $\inf A$.

Утверждение 12. (признак супремума (инфимума))

1) $a = \sup A$ тогда и только тогда, когда a — верхняя грань множества A и для любого $c < a$ найдётся такое $b \in A$, что $c \leq b \leq a$.

2) $a = \inf A$ тогда и только тогда, когда a — нижняя грань множества A и для любого $c > a$ найдётся такое $b \in A$, что $c \geq b \geq a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.22] ▲

Следствие 1.

1) Если $a \in A$ — наибольший элемент множества A , то $a = \sup A$.

2) Если $a \in A$ — наименьший элемент множества A , то $a = \inf A$.

Утверждение 13. Пусть $A \subseteq B$. Тогда $\sup A \leq \sup B$ и $\inf A \geq \inf B$.

Пусть $A, B \subseteq X$, будем писать $A \leq B$, если для всех $a \in A, b \in B$ выполнено неравенство $a \leq b$.

Аксиома 2. (аксиома непрерывности) Для любых двух непустых множеств $A, B \subseteq \mathbb{R}$, если $A \leq B$, то найдётся такое $c \in \mathbb{R}$, что $A \leq \{c\} \leq B$.

Теорема 1. Аксиома непрерывности эквивалентна утверждению: для любого непустого, ограниченного сверху $A \subseteq \mathbb{R}$ существует $\sup A \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $B = \Gamma_+(A)$. Из аксиомы непрерывности вытекает, что найдётся такое $c \in \mathbb{R}$, что $A \leq \{c\} \leq B$. Тогда $c = \sup A$ по определению. Наоборот, если $A \leq B$ и $A, B \neq \emptyset$, то A ограничено сверху. По определению супремума $A \leq \{\sup A\} \leq B$. ▲

Замечание 2. Справедливо аналогичное утверждение для инфимума.

Определение 12. Определим расширенную вещественную прямую $\overline{\mathbb{R}}$, добавив к множеству вещественных чисел два новых элемента $-\infty, +\infty$, т. е. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Линейный порядок распространяется на $\overline{\mathbb{R}}$ по правилу: $-\infty \leq x \leq +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Замечание 3. Арифметические операции распространяются на элементы $-\infty, +\infty$ по правилам:

для любого $x \in \mathbb{R}$ $-\infty + x = -\infty$, $+\infty + x = +\infty$;

для любого $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $-\infty \cdot x = -\infty$, $+\infty \cdot x = +\infty$, $-\infty \cdot (-x) = +\infty$, $+\infty \cdot (-x) = -\infty$.

Кроме того, $x / \pm \infty = 0$.

Результаты операций $-\infty + \infty$, $0 \cdot \pm \infty$ и $\pm \infty / \pm \infty$ неопределены.

Нетрудно видеть, что правила сложения и умножения в $\overline{\mathbb{R}}$ не удовлетворяют аксиомам поля, но расширенный порядок согласован с арифметическими операциями.

Теорема 2. Любое подмножество $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ имеет $\sup A$ и $\inf A$ в $\overline{\mathbb{R}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теоремы 1 для ограниченного множества и из определения ∞ для неограниченного. ▲

Теорема 3. (принцип Архимеда) Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ неограничено в $\mathbb{R}$, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $x < n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $A = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq x\}$. По признаку супремума найдётся $m' \in A$, для которого $\sup A - 1 < m'$. Тогда $n = m' + 1 \notin A$,

следовательно, $n > x$. ▲

Следствие 2. Пусть $\alpha, x \in \mathbb{R}$ и $\alpha > 0$. Тогда найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $x < \alpha n$.

Определение 13. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, определим равенствами $\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$ и $\lceil x \rceil = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq x\}$ операции взятия целой части числа (округления снизу) и округления сверху.

Утверждение 14. Для любого $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, верно, что $\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil \in \mathbb{N}$, $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$ и $0 \leq \lceil x \rceil - x < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$. Из принципа Архимеда следует, что A конечно. Поэтому $\lfloor x \rfloor = \sup A = \max A \in \mathbb{N}$. Непустое подмножество натурального ряда имеет наименьший элемент, поэтому $\lceil x \rceil \in \mathbb{N}$.

$\lfloor x \rfloor \leq x$, поскольку x — верхняя грань множества A . Если $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x$, то $\lfloor x \rfloor + 1 \in A$. А это противоречит определению $\lfloor x \rfloor$.

$\lceil x \rceil \geq x$, поскольку x — нижняя грань множества $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq x\}$. Неравенство $\lceil x \rceil - 1 \geq x$ противоречит определению $\lceil x \rceil$. ▲

Теорема 4. (о плотности рациональных чисел) Пусть $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, тогда найдутся такие $q \in \mathbb{Q}$ и $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, что $q, s \in (x, y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. [Водопьянов, с.36]) Пусть $0 < x$. По принципу Архимеда найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{n} < \frac{y-x}{2}$. Тогда

$$x < \frac{yn - 2}{n} < \frac{\lfloor yn \rfloor - 1}{n} < \frac{yn}{n} = y.$$

Таким образом, $q = \frac{\lfloor yn \rfloor - 1}{n} \in \mathbb{Q}$ и $q \in (x, y)$. В качестве $s \in (x, y) \setminus \mathbb{Q}$ можно взять $s = \frac{\lfloor yn \rfloor - (1/\sqrt{2})}{n}$.

Если $x < 0 < y$, то можно взять $q = 0$. Если $y < 0$, то достаточно найти $q \in (-y, -x) \cap \mathbb{Q}$. Тогда $-q \in (x, y) \cap \mathbb{Q}$. ▲

Определение 14. Промежутком называется такое множество $A \subseteq \mathbb{R}$, что для любых $a, b \in A$ и любого $c \in \mathbb{R}$, из $a \leq c \leq b$ следует $c \in A$.

Утверждение 15. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток. Тогда $A = \langle \inf A, \sup A \rangle$, где $\langle$ — это $[$ или $($, а $\rangle$ — это $]$ или $)$.

Определение 15. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Определим $\sup_A f \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{f(x) \mid x \in A\}$ и $\inf_A f \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{f(x) \mid x \in A\}$.

Утверждение 16. (свойства супремума функции)

1. Если $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in A$, то $\sup_A f \leq \sup_A g$ и $\inf_A f \leq \inf_A g$.
2. Если $A \subseteq B$, то $\sup_A f \leq \sup_B f$ и $\inf_A f \geq \inf_B f$.
3. $\sup_A f + \sup_A g \geq \sup_A (f + g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.72] ▲

4. Предел последовательности

Последовательностью называется функция $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. В этом случае функция обозначается через (x_n) , а значение функции $x(n)$ обозначается через x_n .

Определение 16. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом* последовательности, если для любого положительного числа ε найдётся такой номер n_0 (зависящий от ε), что для любого номера $n \geq n_0$ справедливо неравенство $|x_n - a| \leq \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon).$$

Определение 17. Последовательность имеет предел $+\infty$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow x_n > E),$$

соответственно $-\infty$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow x_n < -E).$$

Для обозначения предела используют формулы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ или $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

Если последовательность имеет конечный предел $a \in \mathbb{R}$, то говорят, что последовательность *сходится* (в $\mathbb{R}$).

Утверждение 17. (единственность предела) Если предел последовательности существует, то он единственный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.99] ▲

Замечание 4. Если последовательности отличаются в конечном числе элементов, то они имеют одинаковый предел или не имеют предела одновременно.

Лемма 1. (о предельном переходе в неравенствах)

Пусть существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тогда

1) если $a < b$, то существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $x_n < y_n$ при $n \geq n_0$;

2) если $x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.108], [Шведов, с.20] ▲

Теорема 5. (о зажатой последовательности)

Пусть существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ и существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $x_n \in [y_n, z_n]$ при всех $n \geq n_0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.109] ▲

Теорема 6. (Вейерштрасса о монотонной последовательности)

Если последовательность (x_n) монотонно возрастает, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, а если (x_n) монотонно убывает, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.91] ▲

Утверждение 18. (арифметические свойства предела)

Пусть существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тогда

1) если $a + b$ определено, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$;

- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -a$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$;
- 4) если $1/a$ определено, то $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/x_n = 1/a$;
- 5) если ab определено, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.112-115] ▲

Утверждение 19. Пусть (x_n) — ограниченная сверху последовательность, тогда последовательность $y_n = \sup\{x_k \mid n \leq k\}$ убывает. Пусть (x_n) — ограниченная снизу последовательность, тогда последовательность $z_n = \inf\{x_k \mid n \leq k\}$ возрастает.

Определение 18.

Для ограниченной сверху последовательности (x_n) определим *верхний предел* $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Если (x_n) неограничена сверху, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Для ограниченной снизу последовательности (x_n) определим *нижний предел* $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Если (x_n) неограничена снизу, то $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Замечание 5. По теореме Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности верхний и нижний пределы имеются у любой последовательности.

Утверждение 20.

- 1) Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
- 2) Если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

Определение 19. Подпоследовательностью последовательности $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ называется композиция $x \circ n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, где $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — строго возрастающая функция.

Множество $n(\mathbb{N})$ называется множеством индексов подпоследовательности. Подпоследовательность часто обозначается через (x_{n_k}) , где $x_{n_k} = x(n(k))$.

Определение 20. Пределы подпоследовательностей последовательности (x_n) называются *частичными пределами* последовательности (x_n) .

Утверждение 21. Если последовательность имеет предел, то тот же предел имеет любая её подпоследовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов, с.23] ▲

Теорема 7. (о наибольшем и наименьшем частичных пределах)

- 1) Верхний предел последовательности (x_n) является наибольшим частичным пределом последовательности (x_n) .
- 2) Нижний предел последовательности (x_n) является наименьшим частичным пределом последовательности (x_n) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Водопьянов, с.118-119], [Шведов, с.23-24])
 1) Пусть (x_n) неограничена сверху. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого $n_k \in \mathbb{N}$ найдётся такое $n > n_k$, что $x_n > k$. Следовательно, существует подпоследовательность (x_{n_k}) , для которой $x_{n_k} > k$. То есть $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty$.

Пусть (x_n) ограничена сверху. Докажем сначала, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ для любой сходящейся подпоследовательности (x_{n_k}) . Действительно $x_{n_k} \leq y_{n_k}$, где $y_m = \sup\{x_n \mid m \leq n\}$. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Построим подпоследовательность сходящуюся к верхнему пределу по индукции. Пусть $n_0 = 0$. Выберем $n_1 \in \mathbb{N}$ так, что $x_{n_1} > y_1 - 1 = \sup\{x_m \mid (n_0 + 1) \leq m\} - 1$. Предположим мы выбрали k элементов подпоследовательности так, что $x_{n_{i+1}} > y_{n_{i+1}} - \frac{1}{i+1} = \sup\{x_m \mid (n_i + 1) \leq m\} - \frac{1}{i+1}$ при $i = 0, \dots, k-1$. Из признака супремума следует, что мы можем выбрать $x_{n_{k+1}}$, удовлетворяющий тому же свойству, причём $n_{k+1} > n_k$. Таким образом, элементы x_{n_k} образуют подпоследовательность и по лемме о предельном переходе в неравенстве имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_{k+1}} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Пункт 2) можно доказать аналогичным образом. ▲

Теорема 8. (Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности)

- 1) Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.
- 2) Из любой последовательности можно выделить подпоследовательность имеющую предел.

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О . Если нижний или верхний предел последовательности конечен, то по теореме о верхнем и нижнем пределах имеется сходящаяся к нему подпоследовательность. Если последовательность неограничена (например сверху), то теореме о верхнем и нижнем пределах имеется подпоследовательность с бесконечным пределом. ▲

Утверждение 22. Пусть $\mathbb{N} = I_1 \cup \dots \cup I_m$, где I_i бесконечные подмножества $\mathbb{N}$. Если для любого j , $1 \leq j \leq m$, подпоследовательность последовательности (x_n) с множеством индексов I_j имеет предел, то множество частичных пределов последовательности (x_n) совпадает с множеством этих пределов.

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О . Рассмотрим некоторый частичный предел, подпоследовательность (x_{n_k}) , которая к нему сходится, и соответствующее ей множество индексов J . Ясно, что найдётся $i \in \{1, \dots, m\}$ такое, что пересечение $J' = J \cap I_i$ бесконечно. Множество J' можно рассматривать как множество индексов некоторой подпоследовательности (x_{n_m}) (см. теорему 27), которая одновременно является подпоследовательностью подпоследовательностей (x_{n_k}) и (x_{n_i}) с множествами индексов J и I_i соответственно. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i}$. ▲

Определение 21. Последовательность (x_n) называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \varepsilon).$$

Теорема 9. (критерий Коши) Последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда является фундаментальной.

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О . (см. также [Водопьянов, с.124], [Шведов, с.25]) Пусть последовательность (x_n) имеет конечный предел $a \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

найдётся такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что $|x_n - a| < \varepsilon/2$ для всех $n \geq n_0$. Тогда для любых $n_1, n_2 \geq n_0$ имеем

$$|x_{n_1} - x_{n_2}| \leq |x_{n_1} - a| + |a - x_{n_2}| < \varepsilon,$$

то есть последовательность (x_n) фундаментальна.

Пусть последовательность (x_n) фундаментальна. Тогда она ограничена. Действительно, для $\varepsilon = 1$ найдётся такой номер $n' \in \mathbb{N}$, что $|x_n - x_{n'}| < 1$ для всех $n \geq n'$. То есть $|x_n| < |x_{n'}| + 1$. Из теоремы Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности следует существование подпоследовательности, такой что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $n' \in \mathbb{N}$, что $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon/2$ для всех $n \geq n'$. Кроме того, найдётся такой $k \in \mathbb{N}$, что $n_k \geq n'$ и $|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$. Тогда для всех $n \geq n'$ имеем

$$|x_n - a| \leq |x_{n_k} - a| + |x_n - x_{n_k}| < \varepsilon.$$

▲

Утверждение 23. Пусть $t \in \mathbb{R}$. Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$ возрастает при $n \geq |t| + 1$, причём строго если $t \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Решетняк, с.190-192])

Неравенства $\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{t}{n+1}\right)^{n+1}$ и $\frac{1}{1+\frac{t}{n}} < \left(\frac{1+\frac{t}{n+1}}{1+\frac{t}{n}}\right)^{n+1}$ равносильны. Из неравенства Бернулли (при $|\frac{t}{(n+1)(t+n)}| < 1$) имеем

$$\left(\frac{1 + \frac{t}{n+1}}{1 + \frac{t}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{t}{(n+1)(t+n)}\right)^{n+1} > 1 - \frac{t}{t+n} = \frac{1}{1 + \frac{t}{n}}.$$

▲

Утверждение 24. Пусть $t \in \mathbb{R}$. Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$ имеет конечный предел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Решетняк, с.190-192])

Имеем $\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n < 1$. Тогда из предыдущего утверждения при $n > n_0 = \lceil |t| + 1 \rceil$ имеем $0 < \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n < 1 / \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{t}{n_0}\right)^{-n_0}$. По теореме Вейерштрасса монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел. ▲

Определение 22. Определим функцию $\exp(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$.

Замечание 6. Число $\exp(1)$ называется *постоянной Эйлера* e .

Утверждение 25. При $|t| < 1$ справедливы неравенства $1 + t < \exp(t) < \frac{1}{1-t}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Решетняк, с.192-193])

При $n > n_0 = \lceil |t| + 1 \rceil$ имеем $\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{t}{n_0}\right)^{-n_0}$. Переходя к пределу в неравенстве получаем $\exp(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{t}{n_0}\right)^{-n_0}$.

Из неравенства Бернулли $\left(1 - \frac{t}{n_0}\right)^{-n_0} < \frac{1}{1-t}$.

С другой стороны при $n > n_0 = \lceil |t| + 1 \rceil$ имеем $\left(1 + \frac{t}{n_0}\right)^{n_0} < \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n < \exp(t)$.

Из неравенства Бернулли $1 + t < \left(1 + \frac{t}{n_0}\right)^{n_0}$. ▲

Утверждение 26. Для любого $t \in \mathbb{R}$ $\exp(t) \exp(-t) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства Бернулли при $n > n_0 = \lceil |t| + 1 \rceil$ имеем

$$1 - \frac{t^2}{n} \leq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \leq 1.$$

По теореме о пределе зажатой последовательности получаем требуемое. ▲

Утверждение 27. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ $\exp(a) \exp(b) = \exp(a + b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Решетняк, с.194-195])

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n^2}\right)^n = 0$ для любого $c \in \mathbb{R}$. Действительно, для достаточно больших n имеем $0 < \left(1 + \frac{c}{n^2}\right)^{n^2} < \exp(c)$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n^2}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(c))^{1/n} = 1$. Пусть $a, b > 0$. Тогда

$$\left(1 + \frac{a+b}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{a+b}{n}\right)^n \left(1 + \frac{ab}{n^2}\right)^n.$$

По теореме о пределе зажатой последовательности получаем требуемое.

Если $a < 0 < b$ и $b - a > 0$, то по доказанному выше $\exp(b + a) \exp(-a) = \exp(b + a - a) = \exp(b)$. Тогда из $\exp(-a) = 1/\exp(a)$ имеем требуемое. Остальные случаи можно доказать аналогичным образом. ▲

Утверждение 28. Для любого $p \in \mathbb{Q}$ $\exp(p) = e^p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(\exp(\frac{m}{n}))^n = \exp(m) = (\exp(1))^m$. ▲

Определение 23. Для любой последовательности (x_n) выражение $\sum_{n \geq 0} x_n$ называется

числовым *рядом*, а суммы $s_n = \sum_{i=0}^n x_i$ называются *частичными суммами* этого ряда.

Ряд называется *сходящимся*, если последовательность (s_n) сходится, в противном случае ряд называется *расходящимся*. Предел последовательности частичных сумм обозначается через $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ и называется *суммой ряда*.

Утверждение 29.

Пусть $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Тогда $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Пусть $0 < |q| < 1$. Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Утверждение 30. (необходимый признак сходимости ряда) Если ряд $\sum_{n \geq 0} x_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.236] ▲

Утверждение 31. (критерий Коши сходимости ряда)

Ряд $\sum_{n \geq 0} x_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n \geq n_0 \left| \sum_{i=n}^m x_i \right| < \varepsilon$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.238] ▲

Пример 1. Ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Утверждение 32. (признак сравнения)

Если $|x_n| \leq y_n$ при $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum_{n \geq 1} y_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n \geq 0} x_n$ сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов, с.29] ▲

Утверждение 33. (признак Даламбера)

Пусть $\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq q < 1$ при всех $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum_{n \geq 0} x_n$ сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов, с.29] ▲

Следствие 3. Пусть существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = q < 1$. Тогда ряд $\sum_{n \geq 0} x_n$ сходится.

Утверждение 34. (признак Коши)

Пусть $|x_n|^{1/n} \leq q < 1$ при всех $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum_{n \geq 0} x_n$ сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов, с.29] ▲

Следствие 4. Пусть существует $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{1/n} = q < 1$. Тогда ряд $\sum_{n \geq 0} x_n$ сходится.

Утверждение 35. (телескопический признак сходимости ряда) Пусть (x_n) — монотонно убывающая последовательность и $x_n \geq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда ряды $\sum_{n \geq 1} x_n$ и

$\sum_{n \geq 0} 2^n x_{2^n}$ сходятся или расходятся одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.242-243] ▲

5. Предел вещественной функции

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — интервал и $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 24. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом* функции f в точке $x_0 \in I$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$ (зависящее от ε), что для любого числа $x \in I$ из неравенств $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon).$$

Определение 25. Функция f в точке $x_0 \in I$ имеет предел $+\infty$, если

$$\forall E > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > E),$$

соответственно $-\infty$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -E).$$

Для обозначения предела используют формулы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ или $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a$.

Определение 26. Функция f называется *непрерывной* в точке $x_0 \in I$, если её предел совпадает со значением, т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Утверждение 36. (единственность предела) Если предел функции f в точке существует, то он единственный.

Лемма 2. (о предельном переходе в неравенствах)

Пусть существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Тогда

- 1) если $a < b$, то существует такое $\delta > 0$, что $f(x) < g(x)$ при $0 < |x - x_0| < \delta$;
- 2) если существует такое $\delta' > 0$, что $f(x) \leq g(x)$ при $0 < |x - x_0| < \delta'$, тогда $a \leq b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Найдётся такое $\delta > 0$, что из $0 < |x - x_0| < \delta$ следует, что $|f(x) - a| < \varepsilon$ и $|g(x) - b| < \varepsilon$. Тогда $f(x) < a + \varepsilon = b - \varepsilon < g(x)$. Если a или b равно бесконечности, то утверждение можно доказать аналогично.

- 2) Если $a > b$, то из п.1 имеем $f(x) > g(x)$ при $0 < |x - x_0| < \delta$. Противоречие. $\blacktriangle$

Теорема 10. (о зажатой функции)

Пусть существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ и существует такое $\delta > 0$, что $f(x) \in [g(x), h(x)]$ при $0 < |x - x_0| < \delta$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Найдётся такое $\delta > 0$, что из $0 < |x - x_0| < \delta$ следует, что $|h(x) - a| < \varepsilon$ и $|g(x) - a| < \varepsilon$ (или $h(x) > \varepsilon$ и $g(x) > \varepsilon$ в случае $a = \infty$). Тогда $a - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < a + \varepsilon$ (или $f(x) > \varepsilon$ в случае $a = \infty$). $\blacktriangle$

Замечание 7. Аналогичные лемма и теорема справедливы и при $x_0 = \pm\infty$.

Пример 2. $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1$.

Утверждение 37. (арифметические свойства предела)

Пусть существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Тогда

- 1) если $a + b$ определено, то $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -a$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$;
- 4) если $1/a$ определено, то $\lim_{x \rightarrow x_0} 1/f(x) = 1/a$;
- 5) если ab определено, то $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab$;
- 6) если a/b определено, то $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x)) = a/b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.166-170], [Шведов, с.40-41] $\blacktriangle$

Следствие 5. Любой многочлен $P(x)$ непрерывен в любой точке $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 11. (теорема о пределе композиции) Пусть $g : T \rightarrow I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = a$. Если выполнено одно из условий $g(t) \neq a$ при $t \neq t_0$ или $f(a) = b$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} f(g(t)) = b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.165], [Шведов, с.42] ▲

Утверждение 38. (непрерывность элементарных функций) Функции $\exp(x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\ln x$ непрерывны в точках из их областей определения.

Утверждение 39. (классические пределы)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Решетняк, с.198-199, с.200-201, с.219-222] ▲

Определение 27. Частичным пределом функции $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 называется предел последовательности $f(x_n)$, где последовательность (y_n) такова, что $y_n \in I \setminus \{x_0\}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$.

Теорема 12. (критерий Гейне)

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, то все частичные пределы равны a , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = a$, для любой такой последовательности (y_n) , что $y_n \in I \setminus \{x_0\}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$.

2. Пусть для любой такой последовательности (y_n) , что $y_n \in I \setminus \{x_0\}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$, последовательность $f(y_n)$ имеет предел. Тогда эти пределы равны и совпадают с пределом функции $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Водопьянов, с.170-171], [Шведов, с.42])

1. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, найдётся такое $\delta > 0$, что из $0 < |x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - a| < \varepsilon$ (или $f(x) > \varepsilon$, если $a = +\infty$).

Рассмотрим произвольную последовательность (y_n) , удовлетворяющую условиям. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$, найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $|y_n - x_0| < \delta$ при $n \geq n_0$. И $|y_n - x_0| > 0$ по условию. Тогда $|f(y_n) - a| < \varepsilon$ (или $f(y_n) > \varepsilon$, если $a = +\infty$). Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = a$.

2. Вначале покажем, что все частичные пределы совпадают. Пусть (y_n) и (y'_n) — две последовательности, удовлетворяющие условиям. Определим последовательность (z_n) равенствами $z_{2n} = y_{2n}$ и $z_{2n+1} = y'_{2n+1}$. Очевидно (z_n) также удовлетворяет условиям. Тогда последовательность $(f(z_n))$ имеет некоторый предел $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_{2n}) = a.$$

Аналогично $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y'_n) = a$.

Предположим, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq a$. Тогда найдётся такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любой проколотой окрестности $U_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \setminus \{x_0\}$ найдётся точка $y_n \in U_n$, для которой $|f(y_n) - a| > \varepsilon_0$ (или $f(y_n) < \varepsilon_0$, если $a = +\infty$). Тогда последовательность (y_n) удовлетворяет условию, но $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \neq a$. Пришли к противоречию.

В случае $x_0 = \pm\infty$ доказательство теоремы аналогично. ▲

Теорема 13. (критерий Коши для предела функции)

Конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in I \setminus \{x_0\} \quad (0 < |x_1 - x_0| < \delta(\varepsilon), 0 < |x_2 - x_0| < \delta(\varepsilon)) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Водопьянов, с.171-172]) Рассмотрим произвольную последовательность (y_n) такую, что $y_n \in I \setminus \{x_0\}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $|y_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$ при любом $n \geq n_0$. Тогда по условию $|f(y_n) - f(y_{n'})| < \varepsilon$ при $n, n' \geq n_0$. Таким образом последовательность $(f(y_n))$ фундаментальна. По критерию Коши для последовательностей $(f(y_n))$ имеет конечный предел. Тогда по критерию Гейне функция f в точке x_0 имеет такой же предел. $\blacktriangle$

Пусть функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ определена на конечном или бесконечном интервале $I = (x_0, x_1)$.

Определение 28. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом справа* функции f в конечной точке x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad (0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon),$$

соответственно в точке $x_0 = -\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in I \quad (x < -\Delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon).$$

Определение 29. Функция f в конечной точке x_0 имеет предел справа равный $+\infty$, если

$$\forall E > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad (0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > E),$$

соответственно в точке $x_0 = -\infty$, если

$$\forall E > 0 \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in I \quad (x < -\Delta \Rightarrow f(x) > E).$$

Предел слева определяется аналогичным образом. Предел справа обозначается через $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, а слева $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$.

Пусть I — конечный или бесконечный промежуток. Всюду ниже в граничных точках промежутка рассматриваются односторонние пределы.

6. Непрерывные функции

Определение 30. Функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывной на множестве* I , если она непрерывна в каждой точке множества I .

Множество функций непрерывных на I обозначается через $C(I)$.

Утверждение 40. (свойства непрерывных функций)

1. Пусть $f \in C(I)$. Тогда $-f \in C(I)$ и, если при всех $x \in I$ $f(x) \neq 0$, то $1/f \in C(I)$.
2. Пусть $f, g \in C(I)$. Тогда $(f + g) \in C(I)$, $(f \cdot g) \in C(I)$.
3. Пусть $g : T \rightarrow I$ и $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывные функции. Тогда их композиция $f \circ g : T \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

4. $f \in C(I)$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся в I последовательности (x_n) , т. е. $x_n \in I$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in I$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов, с.46]▲

Пусть I — конечный или бесконечный интервал.

Определение 31. Функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ терпит *разрыв* в точке $x_0 \in I$, если она не является непрерывной в этой точке. Говорят, что функция имеет разрыв *1-го рода* в точке x_0 , если функция терпит разрыв в этой точке и имеет в ней конечные пределы справа и слева. В остальных случаях разрыв называется разрывом *2-го рода*.

Теорема 14. (о пределе монотонной функции) Пусть f — возрастающая на интервале I функция, $x_0 \in I$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \leq \inf_{x > x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Водопьянов, с.164], [Шведов, с.37])▲

В граничных точках интервала I выполняется левое или правое равенство. Аналогичное утверждение верно для убывающей функции.

Определение 32. Говорят, что высказывание $\Phi(x)$ верно асимптотически при $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$, если $\exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \Phi(x))$.

Аналогично определяется асимптотическая истинность высказывания $\Phi(x)$ при $x \rightarrow x_0 \pm 0$ и при $x \rightarrow \pm \infty$.

Определение 33. Говорят, что функция $f(x)$ является *о-малой* относительно $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если функции f и g определены в некоторой окрестности точки x_0 , возможно, за исключением самой точки x_0 и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \quad \text{при } x \rightarrow x_0.$$

Определение 34. Говорят, что функция $f(x)$ является *О-большой* относительно $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если функции f и g определены в некоторой окрестности точки x_0 , возможно, за исключением самой точки x_0 и

$$\exists C > 0 \quad |f(x)| \leq C |g(x)| \quad \text{при } x \rightarrow x_0.$$

О-большое и *о-малое* обозначаются соответственно как $f(x) = O(g(x))$ и $f(x) = o(g(x))$. В частности, если $f(x) \equiv 1$, то используют обозначения $g(x) = o(1)$ и $g(x) = O(1)$.

Утверждение 41. (свойства асимптотических выражений)

1. Если $f(x) = o(h(x) \cdot g(x))$ при $x \rightarrow x_0$, то $f(x) = h(x) \cdot o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$.
2. Если $f_1(x) = o(g(x))$ и $f_2(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$, то $(f_1 + f_2)(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$.
3. Если $f_1(x) = o(g(x))$ и $f_2(x) = O(h(x))$ при $x \rightarrow x_0$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(gh(x))$ при $x \rightarrow x_0$.
4. Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$ и $h(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} x_0$, причём $h(t) \neq x_0$ при $t \neq t_0$, то $f(h(t)) = o(g(h(t)))$ при $t \rightarrow t_0$.

Следствие 6.

1. $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = g(x)o(1)$.
2. $o(1) + o(1) = o(1)$.
3. $o(1)O(1) = o(1)$.

Утверждение 42. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо асимптотическое равенство $x^\alpha = o(e^x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Основные асимптотические равенства при $x \rightarrow 0$:

- a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;
- b) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$;
- c) $\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$;
- d) $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$;
- e) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + C_\alpha^n x^n + o(x^n)$, где $C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Определение 35. На множестве X задана эквивалентность, если задано отношение $\simeq$, удовлетворяющее условиям: для всех $x, y, z \in X$ справедливо

- a) $x \simeq x$ (рефлексивность);
- b) $x \simeq y \Rightarrow y \simeq x$ (симметричность);
- c) $x \simeq y, y \simeq z \Rightarrow x \simeq z$ (транзитивность).

Определение 36. Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ асимптотически эквивалентны при $x \rightarrow x_0$ и пишут $f \sim g$, если $f(x) - g(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$.

Определение 37. Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ асимптотически эквивалентны по порядку величины при $x \rightarrow x_0$ и пишут $f \asymp g$, если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \rightarrow x_0$.

Утверждение 43. Отношения $f \sim g$ и $f \asymp g$ являются отношениями эквивалентности.

Теорема 15. (Вейерштрасса об экстремумах непрерывной функции) Пусть $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда найдутся $a, b \in [\alpha, \beta]$ такие, что $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ для любого $x \in [\alpha, \beta]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Водопьянов с.187-188]) Пусть $B = \{f(x) \mid x \in [\alpha, \beta]\}$. По признаку супремума либо $\sup B \in B$ — значит существует $b \in [\alpha, \beta]$ для которой $f(b) = \sup B$; либо найдётся такая последовательность (x_n) , что $x_n \in [\alpha, \beta]$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \sup B$. По теореме Вейерштрасса из (x_n) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (x_{n_k}) . Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = b$. Поскольку $x_{n_k} \in [\alpha, \beta]$, по лемме о предельном переходе в неравенствах имеем $b \in [\alpha, \beta]$. По критерию Гейне $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \sup B$. Из непрерывности функции f имеем $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$. Таким образом, $f(b) = \sup\{f(x) \mid x \in [\alpha, \beta]\}$. Аналогично можно доказать существование точки $a \in [\alpha, \beta]$, в которой достигается инфимум множества значений функции. ▲

Следствие 7. Непрерывная функция ограничена на отрезке.

Теорема 16. (Больцано – Коши о промежуточных значениях) Пусть $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$

— непрерывная функция и $\min\{f(\alpha), f(\beta)\} \leq c \leq \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$. Тогда найдётся $x_0 \in [\alpha, \beta]$ такое, что $f(x_0) = c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Водопьянов с.188], [Шведов, с.47]) Пусть $c < f(\beta)$. Рассмотрим $X = \{x \in [\alpha, \beta] \mid f(x) \leq c\}$. Рассмотрим $x_0 = \sup X$. Покажем, что $x_0 \in X$. Действительно, если $x_0 \notin X$, то по признаку супремума найдётся последовательность (y_n) , $y_n \in X$ и $y_n \rightarrow x_0$. По критерию Гейне $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \leq c$. Рассмотрим последовательность (z_n) , $z_n \in (x_0, \beta)$, $z_n \rightarrow x_0$. По определению множества X имеем $f(z_n) > c$. По критерию Гейне $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \geq c$. Тогда $f(x_0) = c$.

Если $c > f(\beta)$, то вместо $\sup X$ нужно рассмотреть $\inf X$. ▲

Следствие 8. Пусть I — промежуток и $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда $f(I)$ — промежуток.

Следствие 9. Пусть I — промежуток. Монотонная функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда $f(I)$ — промежуток.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(I)$ — промежуток. Если монотонная (возрастающая) функция имеет разрыв в точке x_0 , то для любых $y, z \in I$, $y < x_0 < z$ имеем $f(y) \leq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A < f(x_0) \leq f(z)$ или $f(y) \leq f(x_0) < A = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \leq f(z)$. Таким образом, функция не принимает значений из промежутка $(A, f(x_0))$ или $(f(x_0), A)$. ▲

Следствие 10. (признак Больцано строгой монотонности) Пусть I — промежуток. Непрерывная функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ инъективна тогда и только тогда, когда строго монотонна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Шведов, с.48]) Очевидно, что строго монотонная функция инъективна. Пусть f не строго монотонна. Если $f(x_1) = f(x_2)$ при $x_1 < x_2$, то f — не инъективна. Если $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ при $x_1 < x_2 < x_3$, то по теореме о промежуточных значениях f принимает значение $f(x_3)$ на промежутке (x_1, x_2) (при $f(x_3) \in (f(x_1), f(x_2))$) или $f(x_1)$ на промежутке (x_2, x_3) (при $f(x_1) \in (f(x_3), f(x_2))$). ▲

Утверждение 44. Многочлен нечётной степени имеет вещественный корень.

Теорема 17. (об обратной функции) Пусть I — промежуток и $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная строго возрастающая функция. Тогда $f(I)$ — промежуток и существует непрерывная строго возрастающая обратная функция $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 8, множество $f(I)$ — промежуток. Поскольку отображение $f : I \rightarrow f(I)$ строго возрастает, оно биективно. Следовательно, существует строго возрастающее обратное отображение $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$, область значений которого промежуток I . Тогда по следствию 9 функция f^{-1} непрерывна. ▲

Аналогичное утверждение верно для строго убывающей функции.

Пример 3. $\ln = \exp^{-1}$, $\arcsin = \sin^{-1}$, $\arccos = \cos^{-1}$, $\operatorname{arctg} = \operatorname{tg}^{-1}$, $x^{1/\alpha}$ обратная к x^α .

7. Модели множества вещественных чисел

Множеством *вещественных чисел* называется множество $\mathbb{R}$ с определёнными на нём операциями $+$, $\cdot$ и отношением порядка $\leq$, которые удовлетворяют следующим аксиомам.

Аксиомы алгебраической структуры поля:

1. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $a + b = b + a$ (*коммутативность сложения*).
2. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $a + (b + c) = (a + b) + c$ (*ассоциативность сложения*).
3. Существует (единственный) элемент $0 \in \mathbb{R}$ такой, что для любого $a \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $a + 0 = a$.
4. Для любого $a \in \mathbb{R}$ найдётся (единственный) такой элемент $-a \in \mathbb{R}$, что выполняется равенство $a + (-a) = 0$ (существование *противоположного* элемента).
5. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $ab = ba$ (*коммутативность умножения*).
6. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $a(bc) = (ab)c$ (*ассоциативность умножения*).
7. Существует (единственный) элемент $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, такой, что для любых $a \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $a \cdot 1 = a$.
8. Для любого $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ найдётся такой элемент $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$, что выполняется равенство $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (существование *обратного* элемента).
9. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $a(b + c) = (ab) + (ac)$ (*дистрибутивность*).

Аксиомы линейного порядка (см. § 3):

10. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо $a \leq b$ или $b \leq a$.
11. Для любого $a \in \mathbb{R}$ справедливо $a \leq a$.
12. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ из $a \leq b$, $b \leq a$ следует $a = b$.
13. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ из $a \leq b$, $b \leq c$ следует $a \leq c$.

Аксиомы, связывающие порядок с операциями умножения и сложения:

14. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ если $a \leq b$, то $a + c \leq b + c$.
15. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ если $0 \leq a$ и $0 \leq b$, то $0 \leq ab$.

Аксиома непрерывности

16. Для любых двух непустых множеств $A, B \subseteq \mathbb{R}$, если $A \leq B$ (т. е. $a \leq b$ для всех $a \in A, b \in B$), то существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что $A \leq \{c\} \leq B$.

Определение 38. Моделью множества вещественных чисел называется множество с определёнными на нём операциями (система), построенное из рациональных чисел в рамках теории множеств и удовлетворяющее аксиомам 1–16.

Определение 39. Две системы $(X, +_1, \cdot_1, \leq_1)$ и $(Y, +_2, \cdot_2, \leq_2)$ называются *изоморфными*, если существует *изоморфизм*, т. е. такое взаимно однозначное отображение $\varphi : X \rightarrow Y$, что $\varphi(a) +_2 \varphi(b) = \varphi(a +_1 b)$, $\varphi(a) \cdot_2 \varphi(b) = \varphi(a \cdot_1 b)$ и $\varphi(a) \leq_2 \varphi(b) \Leftrightarrow a \leq_1 b$ для любых $a, b \in X$.

Теорема 18. Любые две модели вещественных чисел изоморфны.

Сечением (Дедекинда) множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ называется множество A , удовлетворяющее условиям: $A \neq \mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$, $\mathbb{Q} \setminus A \leq A$ и A не имеет наименьшего

элемента. Любому рациональному числу q соответствует сечение $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > q\}$.

Если A и B — сечения и найдётся $a \in A \setminus B$, то определим $A \leq B$ и $A \neq B$, т. е. $A < B$. Определим операцию сложения сечений $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, причём нулевое сечение определяется как $O = \{x > 0 \mid x \in \mathbb{Q}\}$ и для иррациональных сечений $-A = \{x \mid x + a > 0 \ \forall a \in A\}$. Определим операцию умножения сечений $A \cdot B = AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$, если $O \leq A$ и $O \leq B$; $A \cdot B = -(A(-B))$, если $O \leq A$ и $B \leq O$; $A \cdot B = -((-A)B)$, если $O \leq B$ и $A \leq O$; $A \cdot B = (-A)(-B)$, если $A \leq O$ и $B \leq O$.

Теорема 19. Система сечений является моделью вещественных чисел.

Рассмотрим множество $F(\mathbb{Q})$ фундаментальных последовательностей (x_n) , $x_n \in \mathbb{Q}$. Определим на $F(\mathbb{Q})$ отношение: $(x_n) \simeq (y_n)$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$. В этом случае в определениях предела и фундаментальной последовательности подразумеваются только рациональные ε .

Утверждение 45. Отношение $\simeq$ является отношением эквивалентности на $F(\mathbb{Q})$.

Определим операции сложения и умножения классов эквивалентности с помощью формул

$$\begin{aligned} X + Y &= \{(x_n + y_n) \mid (x_n) \in X, (y_n) \in Y\}, \\ X \cdot Y &= \{(x_n y_n) \mid (x_n) \in X, (y_n) \in Y\}. \end{aligned}$$

На множестве классов эквивалентности фундаментальных последовательностей зададим отношение порядка: $X \leq Y$ тогда и только тогда, когда найдутся представители классов $(x_n) \in X$ и $(y_n) \in Y$ такие, что $x_m \leq y_m$ при каждом $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 20. Система классов эквивалентности фундаментальных последовательностей является моделью вещественных чисел.

Рассмотрим множество неотрицательных бесконечных десятичных дробей $a_0, a_1 \dots a_k \dots$, где $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ при $k \in \mathbb{N}$ без 9 в периоде. Определим на этом множестве лексикографический порядок: $a_0, a_1 \dots a_k \dots < b_0, b_1 \dots b_k \dots$, если найдётся $k \geq 0$ такое, что $a_i = b_i$ при $i = 0, \dots, k-1$ и $a_k < b_k$. Этот линейный порядок естественным образом распространяется на отрицательные десятичные дроби.

Пусть $a_0, a_1 \dots a_k \dots$ — десятичная дробь. Определим рациональные числа $\langle a \rangle_k = a_0, a_1 \dots a_k 0 \dots 0 \dots$, $\langle a \rangle^k = \langle a \rangle_k + 10^{-k}$. Суммой двух десятичных дробей $a_0, a_1 \dots a_k \dots$ и $b_0, b_1 \dots b_k \dots$ назовём такую десятичную дробь $c_0, c_1 \dots c_k \dots$, что при любом $k \in \mathbb{N}$ имеем $\langle a \rangle_k + \langle b \rangle_k \leq c_0, c_1 \dots c_k \dots \leq \langle a \rangle^k + \langle b \rangle^k$.

Произведением двух положительных десятичных дробей $a_0, a_1 \dots a_k \dots$ и $b_0, b_1 \dots b_k \dots$ назовём такую десятичную дробь $c_0, c_1 \dots c_k \dots$, что при любом $k \in \mathbb{N}$ имеем $\langle a \rangle_k \cdot \langle b \rangle_k \leq c_0, c_1 \dots c_k \dots \leq \langle a \rangle^k \cdot \langle b \rangle^k$. Естественным образом распространим операцию умножения на отрицательные десятичные дроби.

Теорема 21. Система десятичных дробей является моделью вещественных чисел.

8. Топология вещественной прямой

Определение 40. Элементарной окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$. Элементарной окрестностью $+\infty$ называется множество $(E, +\infty]$, а $-\infty$ — множество $[-\infty, E)$, $E \in \mathbb{R}$. Окрестностью точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$

называется множество такое $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, что найдётся элементарная окрестность точки a , содержащаяся в нём.

Множество всех окрестностей точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ обозначается через $\mathcal{N}(a)$.

Говорят, что $b \in \overline{\mathbb{R}}$ является *пределом* функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x_0 \in X$, $X \in \mathcal{N}(x_0)$, если

$$\forall U \in \mathcal{N}(b) \exists V \in \mathcal{N}(x_0) f(V \setminus \{x_0\}) \subseteq U.$$

Утверждение 46. (свойства окрестностей)

1. Если $A \in \mathcal{N}(a)$ и $B \subset \mathbb{R}$, то $A \cup B \in \mathcal{N}(a)$.
2. Если $A, B \in \mathcal{N}(a)$, то $A \cap B \in \mathcal{N}(a)$.

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О . см. [Водопьянов, с.149]▲

Определение 41. Множество, являющееся окрестностью всех своих точек, называется *открытым*.

Пример 4. Любой интервал, $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$ являются открытыми множествами. Отрезки и $\mathbb{Q}$ — нет.

Определение 42. Если любая окрестность точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ содержит точки множества $X \subseteq \mathbb{R}$, отличные от a , то a называется *предельной* точкой множества X .

Множество предельных точек множества X обозначается через $\mathcal{L}im(X)$.

Отметим, что множество предельных точек зависит от того $\mathbb{R}$ или $\overline{\mathbb{R}}$ выбрано в качестве множества всех точек.

Пример 5. $\mathcal{L}im(\langle a, b \rangle) = [a, b]$, $\mathcal{L}im(\mathbb{N}) = +\infty$, $\mathcal{L}im(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{R}}$.

Определение 43. *Замыканием* X называется множество $\overline{X} = X \cup \mathcal{L}im(X)$, точки этого множества называются точками *прикосновения*. Точки множества X , не являющиеся предельными, называются *изолированными*. Множество $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. $\mathcal{L}im(A) \subseteq A$.

Утверждение 47. (свойства предельных точек)

1. $a \in \mathcal{L}im(X)$ тогда и только тогда, когда найдётся такая последовательность $(x_n) \in X \setminus \{a\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
2. $a \in \mathcal{L}im(X)$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки a имеется бесконечно много точек множества X .

Теорема 22. Пусть $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

1. Множество $\mathcal{L}im(A)$ — замкнуто.
2. Множество $A \cup \mathcal{L}im(A)$ — замкнуто.

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О . (см. также [Водопьянов, с.150]) 1. Обозначим $B = \mathcal{L}im(A)$. Пусть $z \in \mathcal{L}im(B)$. Рассмотрим произвольную окрестность $U \in \mathcal{N}(z)$, и в ней элементарную окрестность $(z - \varepsilon, z + \varepsilon) \subset U$ (или $(\varepsilon, z]$ если $z = +\infty$). Пусть $b \in B \cap (z - \varepsilon, z + \varepsilon)$. Рассмотрим такую окрестность $V \in \mathcal{N}(b)$, что $V \subset (z - \varepsilon, z + \varepsilon)$. В ней бесконечно много точек множества A . Тогда и в U бесконечно много точек из A . Тогда из произвольности U получаем, что $z \in \mathcal{L}im(A) = B$. То есть B замкнуто.

2. Обозначим $C = A \cup \mathcal{L}im(A)$. Пусть $z \in \mathcal{L}im(C)$. Рассмотрим последовательность (x_n) , $x_n \in C$ и $x_n \rightarrow z$. В (x_n) бесконечно много точек из A или из $\mathcal{L}im(A)$. В первом

случае $z \in \mathcal{L}im(A)$ по определению, во втором $z \in \mathcal{L}im(A)$ по п.1. Таким образом $z \in C$. ▲

Теорема 23. Пусть $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Множество A — замкнуто тогда и только тогда, когда $\overline{\mathbb{R}} \setminus A$ — открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Водопьянов, с.152]) Пусть A замкнуто. Тогда любая точка $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus A$ не является предельной для A . Тогда найдётся такая $U \in \mathcal{N}(x)$, что $U \cap A = \emptyset$. Тогда $U \subset \overline{\mathbb{R}} \setminus A$. То есть множество $\overline{\mathbb{R}} \setminus A$ открыто.

Наоборот, если множество $\overline{\mathbb{R}} \setminus A$ открыто, то любая его точка содержится в нём вместе с некоторой своей окрестностью. Тогда любая точка множества $\overline{\mathbb{R}} \setminus A$ не является предельной точкой множества A . Тогда $\mathcal{L}im(A) \subseteq A$. ▲

Теорема 24. (принцип Коши — Кантора о пересечении вложенных отрезков) Пересечение семейства вложенных отрезков $[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots$ непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.141], [Зорич, с.68]▲

Заметим, что если длина отрезков стремится к 0, то пересечение состоит из одной точки.

Определение 44. Открытым покрытием множества A называется такое семейство открытых множеств $\{U_\alpha\}$, что $A \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Определение 45. Множество A называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.

Теорема 25. (принцип Бореля — Лебега о компактности) Любой отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ компактен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.142-143], [Зорич, с.69]▲

Теорема 26. (принцип Больцано — Вейерштрасса о предельных точках) Если множество $A \subseteq \mathbb{R}$ — ограничено и бесконечно, то $\mathbb{R} \cap \mathcal{L}im(A) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.143-144], [Зорич, с.69-70]▲

9. Мощность множества и несчётность отрезка вещественной прямой

Определение 46. Множества A и B называются равномощными, если существует взаимно однозначное отображение $f : A \rightarrow B$.

Очевидно, что свойство быть равномощным является отношением эквивалентности.

Определение 47. Множество A , равномощное некоторому отрезку натурального ряда $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, называется конечным.

Определение 48. Множество A , равномощное $\mathbb{N}$, называется счётным.

Теорема 27. Бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ является счётным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.86], [Зорич, с.71-72] ▲

Следствие 11. Бесконечное подмножество счётного множества является счётным.

Из аксиом теории множеств можно показать, что любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Утверждение 48. Пусть A — счётное множество, тогда найдётся вложение (т. е. инъективное отображение) $f : A \rightarrow A$ такое, что $f(A) \neq A$.

Следствие 12. Множество A — бесконечное тогда и только тогда, когда найдётся вложение $f : A \rightarrow A$ такое, что $f(A) \neq A$.

Теорема 28. Декартово произведение счётных множеств является счётным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.89] ▲

Следствие 13. Объединение счётного или конечного числа счётных множеств является счётным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.90] ▲

Следствие 14. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является счётным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.91] ▲

Теорема 29. Множество точек разрыва монотонной функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является конечным или счётным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.186] ▲

Теорема 30. (Кантора) Отрезок $[0, 1]$ не является счётным множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов, с.142], [Зорич, с.73] ▲

Определение 49. Говорят, что множество A имеет мощность *континуума*, если A равномощно множеству $[0, 1]$.

Теорема 31. (Цермело) Для любых двух множеств существует вложение $f : A \rightarrow B$ или вложение $g : B \rightarrow A$.

Теорема 32. (Кантора — Бернштейна) Если существуют вложения $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$, то множества A и B равномощны.

Таким образом сравнение множеств по мощности ($A \leq B$, если A вкладывается в B) удовлетворяет аксиомам линейного порядка.

10. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Определение 50. Функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* в точке $x_0 \in (a, b)$, если имеется конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. Конечный или бесконечный предел $f'(x_0)$ называется *производной* функции f в точке x_0 .

Множество дифференцируемых в x_0 функций обозначают через $D(x_0)$.

Определение 51. Функцию называют дифференцируемой на (a, b) , если она дифференцируема в каждой точке $x \in (a, b)$.

Множество дифференцируемых на (a, b) функций обозначают через $D(a, b)$.

Утверждение 49. $f \in D(x_0)$ тогда и только тогда, когда $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$ для некоторого $A \in \mathbb{R}$ и некоторой функции $\alpha(x) = o(1)$ при $x \rightarrow x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.210] ▲

Заметим, что при выполнении условий утверждения $A = f'(x_0)$ и без ограничения общности можно считать, что $\alpha(0) = 0$.

Утверждение 50. (арифметические свойства операции дифференцирования)

Пусть $f, g \in D(x)$. Тогда

1. $f + g \in D(x)$ и $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
2. $f \cdot g \in D(x)$ и $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. $f/g \in D(x)$ и $(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ при условии $g(x) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов с.53-54] ▲

Утверждение 51. (о производной композиции) Пусть $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ и $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$, причём $f \in D(x)$ и $g \in D(f(x))$. Тогда $g \circ f \in D(x)$ и $(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов с.54] ▲

Утверждение 52. (о производной обратной функции) Пусть непрерывная функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \in D(x)$ строго монотонна и $f'(x) \neq 0$. Тогда f имеет обратную, причём функция f^{-1} дифференцируема в точке $y = f(x) \in \mathbb{R}$ и $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов с.55] ▲

Определение 52. Пределы $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$ называются соответственно *правой и левой производными*.

Утверждение 53.

1. Если $f'_+(x_0) > 0$, то существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f(x) > f(x_0)$.

2. Если $f'_+(x_0) < 0$, то существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f(x) < f(x_0)$.

3. Если $f'_-(x_0) > 0$, то существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f(x) < f(x_0)$.

4. Если $f'_-(x_0) < 0$, то существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f(x) > f(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов с.57] ▲

Следствие 15. Пусть $f \in D(a, b)$.

1. Если $\forall x \in (a, b) f'(x) > 0$, то f — строго возрастает.

2. Если $\forall x \in (a, b) f'(x) < 0$, то f — строго убывает.

Определение 53. Точка $x_0 \in X$ называется *локальным максимумом* функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, если найдётся такая окрестность $U \in \mathcal{N}(x)$, что $f(x_0) = \max\{f(x) \mid x \in X \cap U\}$. Аналогично определяется точка *локального минимума* функции. Точки локального минимума и точки локального максимума называются точками *локального экстремума*.

Следствие 16. (теорема Ферма) Если $f \in D(x_0)$ и x_0 — локальный экстремум функции f , то $f'(x_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов с.57] ▲

Теорема 33. (Ролля) Пусть непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на (a, b) , причём $f(a) = f(b)$. Тогда найдётся такое $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.217], [Шведов с.57] ▲

Теорема 34. (Лагранжа) Пусть непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на (a, b) . Тогда найдётся такое $c \in (a, b)$, что $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.217], [Шведов с.58] ▲

Теорема 35. (Коши) Пусть непрерывные функции $g, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$. Тогда найдётся такое $c \in (a, b)$, что $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Зорич, с.214] ▲

Следствие 17. (теорема о приращении) Пусть непрерывные функции $g, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) < f'(x)$ при $x \in (a, b)$. Тогда $g(b) - g(a) < f(b) - f(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Водопьянов с.217], [Шведов с.58]) Рассмотрим функцию $F = f - g$. По теореме Лагранжа $F(b) - F(a) = F'(c)(b - a)$ для некоторого $c \in (a, b)$ и $F'(c) > 0$ по условию. Тогда $f(b) - f(a) - g(b) + g(a) > 0$. ▲

Теорема 36. (критерий монотонности функции) Пусть $\langle a, b \rangle$ — конечный или бесконечный промежуток, $f \in C\langle a, b \rangle$ и $f \in D(a, b)$. Тогда

1. f — возрастает на $\langle a, b \rangle$ тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$;
2. f — убывает на $\langle a, b \rangle$ тогда и только тогда, когда $f'(x) \leq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Решетняк, с.326-327]) 1. Пусть f — возрастает. Тогда для любых $x_1 < x_2$ имеем $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$. Переходя к пределу в неравенстве получаем $f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \geq 0$.

Пусть $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$. По теореме Лагранжа для любых $x_1 < x_2$ имеем $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \geq 0$ для некоторого $c \in (x_1, x_2)$.

п.2 можно доказать аналогично. ▲

Теорема 37. (критерий строгой монотонности функции) Пусть $\langle a, b \rangle$ — конечный или бесконечный промежуток, $f \in C\langle a, b \rangle$, $f \in D(a, b)$ и $A = \{x \in (a, b) \mid f'(x) > 0\}$. Функция f — строго возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$ и $\mathcal{L}im(A) = [a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Решетняк, с.327-328]) Пусть f — строго возрастает. Тогда $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$ по предыдущей теореме. Предположим $\mathcal{L}im(A) \neq [a, b]$. Тогда найдётся $x_0 \in [a, b]$ и $x_0 \notin \mathcal{L}im(A)$. Следовательно, множество A не пересекается с некоторой проколотой окрестностью точки x_0 . Значит $f'(x) = 0$ для всех x из некоторого интервала. Значит f постоянна на этом интервале. Пришли к противоречию.

Пусть f — не строго возрастает. Значит имеются точки $x_1 < x_2$, для которых $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда $f(x) = f(x_1)$ для всех $x \in (x_1, x_2)$. Следовательно, $f'(x) = 0$ для всех $x \in (x_1, x_2)$ и $(x_1, x_2) \cup \mathcal{L}im(A) = \emptyset$. ▲

Аналогичное утверждение верно для строго убывающей функции.

Следствие 18. (достаточное условие строгого экстремума) Пусть $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и дифференцируема на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$. Тогда

1. если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 точка строгого локального максимума;
2. если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 точка строгого локального минимума.

Введём обозначение k -й производной $f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)})'(x)$. Будем считать, что $f^{(0)}(x) = f(x)$. Для того, чтобы определить k -ю производную функции f в точке x_0 необходимо, чтобы $(k-1)$ -я производная $f^{(k-1)}$ была определена в некоторой окрестности точки x_0 . Множество функций k раз дифференцируемых в точке x_0 (т.е. таких у которых $(k-1)$ -я производная определена в некоторой окрестности точки x_0 , а k -я производная конечна) обозначим через $D^k(x_0)$. Множество функций, k раз дифференцируемых на (a, b) , будем обозначать через $D^k(a, b)$.

Утверждение 54. Пусть $k \geq 2$, $f \in D^k(x)$ тогда и только тогда, когда $f' \in D^{k-1}(x)$.

Утверждение 55.

Пусть $g, f \in D^k(x)$, тогда $f + g \in D^k(x)$ и $(f + g)^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) + g^{(k)}(x)$.

Утверждение 56.

Пусть $g, f \in D^k(x)$, тогда $f \cdot g \in D^k(x)$ и $(f \cdot g)^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(i)}(x) \cdot g^{(k-i)}(x)$ (формула Лейбница).

Утверждение 57. Пусть $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ и $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$, причём $f \in D^k(x)$ и $g \in D^k(f(x))$. Тогда $g \circ f \in D^k(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов с.64] ▲

Утверждение 58. Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \in D^k(x)$ строго монотонна и $f'(x) \neq 0$. Тогда f имеет обратную, причём $f^{-1} \in D^k(f(x))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов с.64] ▲

Лемма 3. Пусть $|f'(t)| \leq c|t - t_0|^s$, $s > -1$. Тогда $|f(t) - f(t_0)| \leq \frac{c}{s+1}|t - t_0|^{s+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.229] ▲

Лемма 4. Если $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(k)}(x_0) = 0$, то $\varphi(x) = o(x - x_0)^k$ при $x \rightarrow x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов с.65-66], [Зорич, с.223] ▲

Теорема 38. (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)

Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема n раз в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда $f(x) - T_n[f, x_0](x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$, где

$T_n[f, x_0](x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ является полиномом Тейлора степени n функции f в точке x_0 . Причём такой многочлен степени n единственный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов с.65-66] ▲

Теорема 39. (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)

Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \in D^{(n+1)}(a, b)$ и $x_0 \in (a, b)$. Тогда для любого $x \in (a, b)$ найдётся такая точка $c \in (a, b)$, что $f(x) - T_n[f, x_0](x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Зорич, с.214] ▲

Следствие 19. (достаточное условие строгого экстремума)

Пусть $f \in D^k(x_0)$ и $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$. Тогда при k чётном: если $f^{(k)}(x_0) > 0$, то x_0 — строгий локальный минимум; если $f^{(k)}(x_0) < 0$, то x_0 — строгий локальный максимум; а при k нечётном из $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ следует, что локального экстремума в точке x_0 нет.

Следствие 20. Пусть $g, f \in D^k(x_0)$, $g^{(k)}(x_0) \neq 0$ и $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(k-1)}(x_0) = 0$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{g^{(k)}(x_0)}$.

Теорема 40. (правило Лопиталья) Пусть $g, f \in D(a, b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$. Пусть выполнено условие (а) $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$ или (б) $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = \infty$. Тогда из $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$ следует $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Зорич, с.245-246]) Поскольку $g'(x) \neq 0$, по теореме Ролля функция g не может дважды принимать значение 0. Тогда можно рассмотреть интервал (a', b) , на котором $g(x) \neq 0$. По теореме Коши для любых $x, y \in (a', b)$ найдётся $c \in (x, y)$, в которой

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)},$$

что эквивалентно равенству

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(y)}. \quad (1)$$

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем такое $\delta > 0$, что при любом $z \in (b - \delta, b)$ $|\frac{f'(z)}{g'(z)} - \alpha| < \varepsilon$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) или $\frac{f'(z)}{g'(z)} > \varepsilon$ (при $\alpha = +\infty$) или $\frac{f'(z)}{g'(z)} < -\varepsilon$ (при $\alpha = -\infty$).

(а) Зафиксируем произвольный аргумент $x \in (b - \delta, b)$, $g(x) \neq 0$. По условию найдётся такое $\delta' > 0$, что для любого $y \in (b - \delta', b)$ верно $|f(y)| < \varepsilon|g(x)|$ и $|g(y)| < \varepsilon|g(x)|$. Тогда из равенства (1) при $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\alpha - \varepsilon)(1 - \varepsilon) - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < (\alpha + \varepsilon)(1 + \varepsilon) + \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ — произвольное, требуемый предел доказан. Случай $\alpha = \pm\infty$ рассматривается аналогично.

(б) Зафиксируем произвольный аргумент $y \in (b - \delta, b)$. По условию найдётся такое $\delta' > 0$, что для любого $x \in (b - \delta', b)$ верно $|f(y)| < \varepsilon|g(x)|$ и $|g(y)| < \varepsilon|g(x)|$. Тогда из равенства (1) при $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\alpha - \varepsilon)(1 - \varepsilon) - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < (\alpha + \varepsilon)(1 + \varepsilon) + \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ — произвольное, требуемый предел доказан. Случай $\alpha = \pm\infty$ рассматривается аналогично. ▲

Определение 54. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* на $X_1 \subseteq X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X_1 (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Определение 55. Функция $\omega_f(t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in X_1, |x - y| < t\}$ называется *модулем непрерывности* функции f на множестве X_1 .

Утверждение 59. Функция f равномерно непрерывна на X тогда и только тогда, когда $\lim_{t \rightarrow 0+0} \omega_f(t) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.193-194] ▲

Заметим, что если f равномерно непрерывна на X , то она непрерывна в каждой неизолированной точке множества X . Обратное неверно.

Пример 6. Непрерывные функции $f(x) = x^2$ на $\mathbb{R}$ и $f(x) = \sin(1/x)$ на $(0, 1)$ не являются равномерно непрерывными.

Определение 56. Говорят, что функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет *условию Гёльдера*, если для некоторых констант $L > 0$ и $\alpha > 0$ и любых $x, y \in X$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$. В случае $\alpha = 1$ это условие называется *условием Липшица*.

Утверждение 60. Если функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гёльдера, то она является равномерно непрерывной на X , причём $\omega_f(t) \leq Lt^\alpha$.

Утверждение 61. Пусть $f \in D(a, b)$ и $|f'(x)| \leq L$ при $x \in (a, b)$. Тогда f удовлетворяет условию Липшица с константой L равномерно непрерывна на (a, b) .

Теорема 41. (теорема Кантора) Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, является равномерно непрерывной на $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.192] ▲

Определение 57. Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых $x, y \in M$ отрезок, соединяющий эти точки, целиком содержится в M , т. е. $\alpha x + (1 - \alpha)y \in M$ при любом $\alpha \in (0, 1)$.

Определение 58. Надграфиком функции $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, где $I \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток, называется множество $H_f = \{(x, y) | x \in I, f(x) \leq y\}$. Множество $L_f = \{(x, y) | x \in I, f(x) \geq y\}$ называется *подграфиком*.

Определение 59. Функция f называется *выпуклой вниз* (иногда просто выпуклой), если её надграфик H_f — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^2$. Функция называется *выпуклой вверх* (*вогнутой*), если её подграфик — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^2$.

Утверждение 62. Функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз тогда и только тогда, когда I — промежуток и $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ для любых $x, y \in I$ и $\alpha \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определение выпуклости эквивалентно тому, что отрезок, соединяющий точки $(x, f(x))$ и $(y, f(y))$ лежит выше графика функции. То есть $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ для любого $\alpha \in (0, 1)$. ▲

Говорят, что функция *строго выпукла вниз*, если приведённое выше неравенство строгое.

Утверждение 63. (неравенство Йенсена) Функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз, то для произвольных наборов $x_1, \dots, x_k \in X$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ таких, что $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, справедливо неравенство $f(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Зорич, с.243] ▲

Аналогичное утверждение (с неравенством в противоположную сторону) верно для выпуклых вверх функций.

Теорема 42. Пусть $f \in D(a, b)$. Функция f выпукла вниз тогда и только тогда, когда её производная f' монотонно возрастает. Соответственно функция f вогнута (выпукла вверх) тогда и только тогда, когда f' монотонно убывает.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Зорич, с.238-239]) Будем доказывать случай выпуклой вниз функции. Рассмотрим две точки $x_1 < x_2$ из интервала (a, b) и $\alpha \in (0, 1)$. Пусть $x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$. Имеем $f(x_\alpha) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) = y_\alpha$. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{f(x_\alpha) - f(x_1)}{x_\alpha - x_1} \leq \frac{y_\alpha - f(x_1)}{x_\alpha - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_\alpha)}{x_2 - x_\alpha} \geq \frac{f(x_2) - y_\alpha}{x_2 - x_\alpha} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Поскольку $\alpha \in (0, 1)$ произвольное, для любых $x \in (x_1, x_2)$ имеем $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ и $\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Переходя к пределу при $x \rightarrow x_1 + 0$ и $x \rightarrow x_2 - 0$, получаем неравенства

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_2).$$

Докажем достаточность. Пусть f' монотонно возрастает. Достаточно доказать, что для произвольных точек $x_1 < x_2$ из интервала (a, b) прямая $y = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$, проходящая через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, лежит выше графика функции f при $x \in (x_1, x_2)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \left(f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)\right)$. Если найдётся точка $x_0 \in (x_1, x_2)$ такая, что $g(x_0) > 0$, то по теореме Лагранжа найдётся точка $c \in (x_1, x_0)$, в которой $g'(c) > 0$. Поскольку g' возрастает, $g'(x) > 0$ для всех $x \in (c, x_2)$. Тогда $g(x_2) > g(x_0) > 0$. Пришли к противоречию.

Нетрудно видеть, что функция f вогнута тогда и только тогда, когда функция $-f$ выпукла вниз. Отсюда имеем вторую часть теоремы. ▲

Следствие 21. Функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ при любом $x \in (a, b)$. Соответственно функция f выпукла вверх тогда и только тогда, когда $f''(x) \leq 0$ при любом $x \in (a, b)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Зорич, с.240] ▲

Следствие 22. Функция $f \in D(a, b)$ выпукла вниз (вверх) тогда и только тогда, когда для любого $x_0 \in (a, b)$ касательная $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ лежит ниже (выше) графика функции, т. е. $l(x) \leq f(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Зорич, с.240-241]) Рассмотрим случай выпуклой вниз функции. Пусть f — выпукла вниз, тогда производная f' возрастает. Тогда $f'(x) \geq f'(x_0) = f'(x_0)$ при $x > x_0$. Тогда по теореме о приращении $f(x) \geq l(x)$ при $x > x_0$. Аналогично при $x < x_0$ имеем $f(x_0) - f(x) \leq l(x_0) - l(x)$ и $f(x) \geq l(x)$.

Пусть функция f — не выпукла вниз. Тогда найдутся три точки $x_1 < x_0 < x_2$ такие, что $y(x_0) < f(x_0)$, где $y(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ — прямая, проходящая через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$. Рассмотрим касательную $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Если $f'(x_0) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, то $l(x_2) > f(x_2)$. В противном случае $f(x_1) < l(x_1)$. Пришли к противоречию. $\blacktriangle$

Утверждение 64. Справедливо неравенство $b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \cdots b_k^{\alpha_k} \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i b_i$ для произвольных наборов $b_1, \dots, b_k > 0$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.222] $\blacktriangle$

Утверждение 65. (неравенство Юнга)

Пусть $a, b, p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Решетняк с.390] $\blacktriangle$

Утверждение 66. (неравенство Коши — Буняковского — Шварца) Для любых $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Решетняк с.392] $\blacktriangle$

Утверждение 67. (неравенство Гёльдера) Пусть $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1 \dots n$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.223], [Решетняк с.391] $\blacktriangle$

Утверждение 68. (неравенство Минковского) Пусть $p \geq 1$ и $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.223], [Решетняк с.393] $\blacktriangle$

12. Числовые и степенные ряды. Основные элементарные функции

Определение 60. Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum_{n \geq 0} |x_n|$ сходится. Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд называется *условно сходящимся*.

Утверждение 69. (преобразование Абеля) $\sum_{i=n_1}^{n_2} a_i b_i = A_{n_2} b_{n_2} + \sum_{i=n_1}^{n_2-1} A_i (b_i - b_{i+1})$, где

$$A_k = \sum_{i=n_1}^k a_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов, с.30-31] ▲

Утверждение 70. (признак Абеля) Ряд $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ сходится, если ряд $\sum_{n \geq 0} a_n$ сходится и (b_n) — монотонная ограниченная последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.255-256], [Шведов, с.31] ▲

Утверждение 71. (признак Дирихле) Ряд $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ сходится, если частичные суммы ряда $\sum_{n \geq 0} a_n$ ограничены, (b_n) — монотонная последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.255], [Шведов, с.31] ▲

Следствие 23. (признак Лейбница) Пусть (b_n) — монотонно убывающая последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Тогда ряд $\sum_{n \geq 1} (-1)^n b_n$ сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.256] ▲

Утверждение 72. Пусть ряд $\sum_{n \geq 0} x_n$ сходится и перестановка $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ переставляет слагаемые не далее, чем на k позиций, т. е. $|\sigma(n) - n| \leq k$. Тогда ряд $\sum_{n \geq 0} x_{\sigma(n)}$ сходится и имеет ту же сумму.

Утверждение 73. Если ряд $\sum_{n \geq 0} x_n$ сходится абсолютно, то произвольная перестановка преобразует его в абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.239] ▲

Теорема 43. (теорема Римана) Пусть ряд $\sum_{n \geq 0} x_n$ сходится условно. Тогда для любого

числа $a \in \overline{\mathbb{R}}$ найдётся такая перестановка $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что $\sum_{i=0}^{\infty} x_{\sigma(i)} = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Водопьянов с.253]) ▲

Пусть (x_{n_k}) — подпоследовательность (x_n) , состоящая из всех неотрицательных слагаемых ряда, а (x_{n_m}) — из отрицательных. Обозначим $y_k = x_{n_k}$ и $z_m = x_{n_m}$. Из того, что ряд $\sum_{n \geq 0} x_n$ сходится, но не абсолютно следует, что $y_n \rightarrow 0$, $z_n \rightarrow 0$,

$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = +\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = -\infty$. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Будем строить перестановку σ по индукции как последовательность составленную из элементов последовательностей (y_n) и (z_n) по следующему правилу.

Выберем i_1 так, что $y_0 + y_1 + \dots + y_{i_1-1} \leq a$ и $y_0 + y_1 + \dots + y_{i_1} > a$. Далее выберем j_1 так, что $y_0 + y_1 + \dots + y_{i_1} + z_0 + z_1 + \dots + z_{j_1-1} < a$ и $y_0 + y_1 + \dots + y_{i_1} + z_0 + z_1 + \dots + z_{j_1} \geq a$.

Мы получили начало переставленной последовательности: $y_0, y_1, \dots, y_{i_1}, z_0, z_1, \dots, z_{j_1}$. На каждом следующем шаге будем добавлять в последовательность несколько положительных и отрицательных элементов из (y_n) и (z_n) .

Будем выбирать i_k и j_k аналогичным образом так, чтобы

$$y_0 + y_1 + \dots + y_{i_1} + z_0 + z_1 + \dots + z_{j_1} + \dots + y_{i_k-1} \leq a,$$

$$y_0 + y_1 + \dots + y_{i_1} + z_0 + z_1 + \dots + z_{j_1} + \dots + y_{i_k} > a,$$

$$y_0 + y_1 + \dots + y_{i_1} + z_0 + z_1 + \dots + y_{i_k} + \dots + z_{j_k-1} \geq a \text{ и}$$

$$y_0 + y_1 + \dots + y_{i_1} + z_0 + z_1 + \dots + y_{i_k} + \dots + z_{j_k} < a.$$

Такие i_k и j_k найдутся, поскольку суммы рядов $\sum y_n$ и $\sum z_n$ бесконечны.

Рассмотрим частичные суммы, полученной последовательности. При t , $0 \leq t < j_k - j_{k-1}$, имеем $a + z_{j_k} \leq y_0 + y_1 + \dots + y_{i_1} + z_0 + z_1 + \dots + y_{i_k} + \dots + z_{j_k-t} \leq a + y_{i_k}$. Поскольку $y_n \rightarrow 0$, $z_n \rightarrow 0$, последовательность частичных сумм нового ряда сходится к a как зажатая последовательность.

При $a = +\infty$ или $a = -\infty$ на k -м шаге построения последовательности вместо a нужно брать k или $-k$ соответственно. ▲

Определение 61. Пусть I — некоторое множество. Семейство вещественных чисел $\{x_i\}_{i \in I}$ называется *суммируемым*, если существует число $s \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующему условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ конечное } K \subseteq I \quad \forall \text{ конечного } L, \quad K \subseteq L \subseteq I \Rightarrow \left| \sum_{i \in L} x_i - s \right| < \varepsilon.$$

Число s называется суммой семейства и обозначается через $\sum_{i \in I} x_i$.

Утверждение 74. Если семейство вещественных чисел $\{x_i\}_{i \in I}$ суммируемо, то множество $\{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ счётно или конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множества $\{i \in I \mid x_i > \frac{1}{n}\}$. Каждое из них конечно, иначе семейство не суммируемо. Тогда их объединение счётно или конечно. Аналогично можно рассмотреть множества $\{i \in I \mid x_i < -\frac{1}{n}\}$. ▲

Утверждение 75. Семейство вещественных чисел $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ суммируемо тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n \geq 0} x_n$ абсолютно сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сумма семейства равна $s \in \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$ и такое конечное множество $K(\varepsilon) \subseteq \mathbb{N}$, что $\forall$ конечного L , $K \subseteq L \subseteq$

$$I \Rightarrow \left| \sum_{i \in L} x_i - s \right| < \varepsilon. \text{ Тогда } \left| \sum_{i \in L \setminus K} x_i \right| < 2\varepsilon. \text{ Поскольку в } L \text{ можно помимо } K \text{ брать}$$

только положительные или только отрицательные слагаемые, то $\left| \sum_{i \in L \setminus K} |x_i| \right| < 2\varepsilon$.

Пусть $n_0 = \max K$. Тогда $\sum_{n=n_1}^{n_2} |x_n| < 2\varepsilon$ при $n_1, n_2 > n_0$. По критерию Коши ряд $\sum_{n \geq 0} x_n$ абсолютно сходится.

Докажем достаточность. Пусть ряд $\sum_{n \geq 0} x_n$ абсолютно сходится. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда по критерию Коши найдётся такой $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\sum_{n=n_1}^{n_2} |x_n| < \varepsilon/2$ при $n_1, n_2 > n_0$. Множество $\{0, 1, \dots, n_0\}$ можно взять в качестве $K(\varepsilon)$. $\blacktriangle$

Теорема 44. (об умножении рядов) Пусть ряды $\sum_{n \geq 0} x_n$ и $\sum_{n \geq 0} y_n$ абсолютно сходятся. Тогда семейство $\{x_i y_j\}_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}}$ суммируемо, причём

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}} x_i y_j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Зорич, с.266]) Рассмотрим $\varepsilon > 0$. По определению суммы ряда и критерию Коши найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любых $n_1, n_2 \geq n_0$ справедливы неравенства $\left| \sum_{n=0}^{n_1} x_n - \alpha \right| < \varepsilon$, $\left| \sum_{n=0}^{n_1} y_n - \beta \right| < \varepsilon$, $\sum_{n=n_1}^{n_2} |x_n| < \varepsilon$, $\sum_{n=n_1}^{n_2} |y_n| < \varepsilon$. Рассмотрим $L = \{(i, j) \mid i \leq n_0, j \leq n_0\}$ и произвольное $L', L \subseteq L'$. Пусть $n_3 = \max_{(i,j) \in L'} i$, $n_4 = \max_{(i,j) \in L'} j$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{(i,j) \in L'} x_i y_j - \alpha \beta \right| \leq \left| \sum_{(i,j) \in L} x_i y_j - \alpha \beta \right| + \left| \sum_{(i,j) \in L' \setminus L} x_i y_j \right| \leq \\ & \leq \left| \left(\sum_{i=0}^{n_0} x_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n_0} y_j \right) - \alpha \beta \right| + \left(\sum_{i=n_0+1}^{n_3} |x_i| \right) \left(\sum_{j=n_0+1}^{n_4} |y_j| \right) < \varepsilon(|\alpha| + \varepsilon) + \varepsilon(|\beta| + \varepsilon) + \varepsilon^2 + \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ — произвольное, суммируемость семейства доказана по определению и его сумма найдена. $\blacktriangle$

Следствие 24. Пусть ряды $\sum_{n \geq 0} x_n$ и $\sum_{n \geq 0} y_n$ абсолютно сходятся. Тогда ряд $\sum_{n \geq 0} z_n$, где $z_n = \sum_{i+j=n} x_i y_j$, сходится и $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Определение 62. Множеством *комплексных чисел* $\mathbb{C}$ называется множество пар вещественных чисел со следующим образом определёнными операциями сложения и умножения: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$. Нетрудно убедиться, что введённые операции удовлетворяют аксиомам алгебраической структуры поля. Множество $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ изоморфно $\mathbb{R}$ и его элементы принято обозначать $(a, 0) = a$. Число $(0, 1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается через i . Комплексные числа удобно записывать в виде $(a, b) = a + ib$. *Вещественной частью* числа $c = (a, b) \in \mathbb{C}$ называется число $\operatorname{Re}(c) = a$, *мнимой частью* — число $\operatorname{Im}(c) = b$. *Комплексно сопряжённым* к числу $a + ib$ называется число $\overline{a + ib} = a - ib$. *Абсолютной величиной (модулем)* комплексного числа $a + ib$

называется величина $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + ib)(a + ib)}$. Элементарной окрестностью точки $z_0 \in \mathbb{C}$ называется круг $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, элементарной окрестностью бесконечности — множество $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > E\}$, где $E > 0$.

Заметим, что $|c \cdot c'| = |c||c'|$ для любых $c, c' \in \mathbb{C}$.

При помощи элементарных окрестностей понятие предела для комплексных функций определяется также, как и для вещественных функций.

В частности, для комплексной последовательности z_n предел равен $c \in \mathbb{C}$ когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - c| < \varepsilon).$$

Утверждение 76. (координатный критерий сходимости) Последовательность $z_n = x_n + iy_n$ сходится к $c = a + ib$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Шведов с.34] ▲

Определение 63. Степенным рядом называется ряд вида $\sum_{n \geq 0} c_n(z - z_0)^n$, $c_n \in \mathbb{C}$.

Множество значений параметра $z \in \mathbb{C}$, при которых ряд сходится, называют *областью сходимости* ряда.

Утверждение 77. Пусть $R = 1/\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$. Тогда степенной ряд $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ сходится абсолютно при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Водопьянов с.250] ▲

Определение 64. Число R называется *радиусом сходимости* ряда.

Определим комплексные (действующие из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$) функции Exp , Sin , Cos , Sh и Ch равенствами:

$$\begin{aligned} \text{Exp}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}; \quad \text{Sin}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \text{Cos}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}; \\ \text{Sh}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \text{Ch}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Утверждение 78. Перечисленные функции Exp , Sin , Cos совпадают на $\mathbb{R}$ с определёнными ранее функциями $\exp$, $\sin$, $\cos$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа следует, что ряд Тейлора сходится к значению функции. ▲

Утверждение 79. Справедливо равенство $\text{Exp}(z_1 + z_2) = \text{Exp}(z_1)\text{Exp}(z_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Зорич, с.267-269] ▲

Утверждение 80. Справедливы формулы Эйлера: $\text{Exp}(iz) = \text{Cos}(z) + i\text{Sin}(z)$;

$$\text{Cos}(z) = \frac{\text{Exp}(iz) + \text{Exp}(-iz)}{2}; \quad \text{Sin}(z) = \frac{\text{Exp}(iz) - \text{Exp}(-iz)}{2i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [Зорич, с.267-269] ▲

Литература

1. [Водопьянов] Водопьянов С. К. *Пределы. Непрерывность. Дифференцируемость*. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2011. <http://math.nsc.ru/~matanalyse/basic1.pdf>
2. [Зорич] Зорич В. А. *Математический анализ*. Т. 1 М:Фазис. 1997.
3. [Решетняк] Решетняк Ю. Г. *Курс математического анализа*. Ч. 1, Книга 1. Новосибирск: Изд-во Института математики, 1999.
4. [Шведов] Шведов И. А. *Компактный курс математического анализа*. Ч. 1. *Функции одной переменной*., 2-е изд. переработ. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003.