

1. Интегрирование

Определение 1. Первообразной, или неопределённым интегралом, функции $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ называется дифференцируемая функция $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, которая удовлетворяет равенству $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

Произвольная первообразная функции f обозначается через $\int f(x) dx$ или $\int f$.

Замечание 1. Первообразной иногда называют также непрерывную функцию, удовлетворяющую этому равенству всюду за исключением конечного или даже счётного числа точек. Например, можно считать, что $\int \operatorname{sgn}(x) dx = |x| + C$.

Утверждение 1. Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными функции $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, то их разность $F_1(x) - F_2(x)$ постоянна на (a, b) .

Пример 1.

- а) $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C$ для любого $p \neq -1$.
б) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$; д) $\int e^x dx = e^x + C$;
в) $\int \cos x dx = \sin x + C$; е) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;
г) $\int \sin x dx = -\cos x + C$; ж) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

Утверждение 2. Если $\int f(x) dx = F(x)$, $\int g(x) dx = G(x)$, то $\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$.

Утверждение 3. (формула интегрирования по частям). Пусть $u, v \in D^1(a, b)$. Тогда $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx + C$, если определена хотя бы одна из первообразных.

Пример 2. а) $\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$;
б) $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$.

Утверждение 4. (формула замены переменной) Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$, $\varphi \in D(\alpha, \beta)$ и $\int f(x) dx = F(x)$. Тогда $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$.

Пример 3. Пусть $a > 0$.

- а) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(\frac{x}{a}) + C$;
б) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin}(\frac{x}{a}) + C$;
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arcch}(\frac{x}{a}) + C = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C'$;
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{arcsh}(\frac{x}{a}) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C'$.

Замечание 2. Далее будет доказано, что любая непрерывная функция имеет первообразную. Существуют и разрывные функции, имеющие первообразную. Например, $f(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x^2})'$.

Определение 2. Рациональной функцией называется отношение двух многочленов.

Определение 3. Простейшей рациональной дробью над полем $\mathbb{C}$ называются рациональные функции вида $\frac{a}{(z-b)^n}$, $a, b \in \mathbb{C}$, над полем $\mathbb{R}$ простейшими рациональными дробями называются также рациональные функции вида $\frac{ax+h}{(x^2+bx+c)^n}$, $a, h, b, c \in \mathbb{R}$, где многочлен $x^2 + bx + c$ не имеет вещественных корней.

Утверждение 5. Первообразная любой простейшей рациональной дроби представима в виде суммы рациональной функции и конечного числа выражений вида $c \arctg(\alpha x + \beta)$, $c \ln(x^2 + \mu x + \nu)$ и $c \ln(\alpha x + \beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первообразная $\int \frac{a}{(x-b)^n} dx$ при $n > 1$ является простейшей дробью, $\int \frac{a}{(x-b)} dx = a \ln|x-b| + C$. Первообразная $\int \frac{ax+h}{(x^2+bx+c)^n}$, где многочлен $x^2 + bx + c$ не имеет вещественных корней, представима в виде суммы функций вида $c \arctg(\alpha x + \beta)$ и $c \ln(x^2 + \mu x + \nu)$. Первообразная $\int \frac{ax+h}{(x^2+bx+c)^n}$, где многочлен $x^2 + bx + c$ не имеет вещественных корней и $n > 1$, представима в виде суммы функций вида $\int \frac{\alpha dx}{(x^2+bx+c)^n}$ и $\frac{\beta}{(x^2+bx+c)^{n-1}}$. Первообразную $\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^n}$ можно вычислить, исходя из рекуррентного соотношения $J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n \right)$, где $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $a > 0$. ▲

Лемма 1. Любая рациональная функция единственным образом представима в виде суммы многочлена и простейших дробей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая рациональная функция единственным образом представляется в виде $P(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, где P, Q, R — многочлены и степень R меньше степени Q (алгоритм Евклида деления многочленов). Здесь и далее полагаем, что коэффициент при максимальной степени многочлена Q равен 1. Многочлен Q единственным образом представим (теорема Гаусса) в виде $\prod_i (x - \alpha_i)^{n_i} \prod_j (x^2 + \mu_j x + \nu_j)^{m_j}$, где трёхчлены $x^2 + \mu_j x + \nu_j$ не имеют вещественных корней и $\sum_i n_i + 2 \sum_j m_j = n$ — степень многочлена Q .

Вначале докажем, что если представление

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_i \sum_{k=1}^{n_i} \frac{a_{ik}}{(x - \alpha_i)^k} + \sum_j \sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{jk}x + c_{jk}}{(x^2 + \mu_j x + \nu_j)^k} \quad (1)$$

существует, то оно единственно. Действительно, если представление не единственно, то найдётся нетривиальная линейная комбинация простейших дробей тождественно равная нулю. Приведём нетривиальную линейную комбинацию к общему знаменателю. Полученное равенство противоречит единственности разложения многочлена на множители.

Нетрудно видеть, что в равенстве (1) коэффициенты многочлена R зависят линейно от коэффициентов a_{ik}, b_{jk}, c_{jk} линейно. Обозначим через $\bar{r}$ набор из n коэффициентов многочлена R , а через $\bar{v}$ набор из n коэффициентов a_{ik}, b_{jk}, c_{jk} . Тогда равенство (1) эквивалентно некоторой линейной системе

$$\bar{r} = U\bar{v}, \quad (2)$$

где U — матрица размера $n \times n$. Если U вырождена ($\det(U) = 0$), то найдётся нетривиальное решение для однородной системы $U\bar{v} = 0$. Это невозможно, как показано выше. Тогда система имеет решение при любом векторе $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$, а значит и для любого многочлена R степени меньше n . ▲

Следствие 1. Первообразная любой рациональной функции представима в виде суммы рациональной функции и конечного числа выражений вида $c \arctg(\alpha x + \beta)$, $c \ln(x^2 + \mu x + \nu)$ и $c \ln(\alpha x + \beta)$.

Утверждение 6. Первообразная $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right) dx$, где $R(x, y)$ — произвольная рациональная функция двух переменных, заменой $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}$ сводится к первообразной от рациональных функций.

Утверждение 7. Вычисление первообразной вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, где $R(x, y)$ — рациональная функция двух переменных, $a \neq 0$, может быть сведена к первообразным от рациональных функций подстановками Эйлера:

- а) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x \pm t$ при $a > 0$;
- б) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$ при $c > 0$;
- в) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm(x - x_0)t$, где x_0 — вещественный корень многочлена $ax^2 + bx + c$.

Утверждение 8. Первообразные вида $\int x^r(ax^q + b)^p dx$, где $r, q, p \in \mathbb{Q}$, $p = \frac{l}{k}$, могут быть сведены к первообразным от рациональных функций подстановками Чебышёва:

- а) $t = (ax^q + b)^{1/k}$, если $\frac{r+1}{q} \in \mathbb{Z}$;
- б) $t = (a + \frac{b}{x^q})^{1/k}$, если $p + \frac{r+1}{q} \in \mathbb{Z}$.

Утверждение 9. Вычисление первообразной $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где $R(x, y)$ — произвольная рациональная функция двух переменных, посредством универсальной тригонометрической замены $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ сводится к вычислению первообразной от рациональной функции.

2. Интеграл Римана

Определение 4. Функция $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *ступенчатой*, если найдутся такой набор чисел $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ и такой конечный набор попарно непересекающихся промежутков $P_1, \dots, P_n$, что $\varphi = \sum_{i=1}^n y_i \chi_{P_i}$, где χ_A — характеристическая функция (индикатор) множества A .

Определение 5. Пусть $\varphi = \sum_{i=1}^n y_i \chi_{P_i}$ определим $\int_a^b \varphi dx = \sum_{i=1}^n y_i \mu(P_i)$, где $\mu(P_i)$ — мера (длина) промежутка.

Обозначим через $\operatorname{Step}[a, b]$ множество ступенчатых функций, определённых на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Полагаем, что вне отрезка $[a, b]$ любая функция из $\operatorname{Step}[a, b]$ равна нулю.

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, определим множества

$$A = \left\{ \int_a^b \varphi dx \mid \varphi \in \operatorname{Step}[a, b], \forall x \in [a, b] \varphi(x) \leq f(x) \right\} \text{ и}$$

$$B = \left\{ \int_a^b \psi dx \mid \psi \in \operatorname{Step}[a, b], \forall x \in [a, b] f(x) \leq \psi(x) \right\}.$$

Определение 6. Если $\sup A = \inf B$, то определим интеграл от f на отрезке $[a, b]$ равенством $\int_a^b f dx = \sup A = \inf B$.

Определение 7. Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *интегрируемой по Риману*

($f \in R[a, b]$), когда $-\infty < \sup A = \inf B < \infty$.

Замечание 3. Неограниченная функция не интегрируема по Риману.

Замечание 4. Любая ступенчатая функция интегрируема по Риману.

Пример 4. Функция Дирихле не интегрируема по Риману ни на каком отрезке.

Утверждение 10. (монотонность интеграла) Пусть $f, g \in R[a, b]$ и $f(x) \leq g(x)$ при $x \in [a, b]$. Тогда $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$.

Следствие 2. Если $f \in R[a, b]$, то $|f| \in R[a, b]$ и $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Утверждение 11. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Step}[a, b]$, что $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ и $\int_a^b \varphi_2 dx - \int_a^b \varphi_1 dx < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $f \in R[a, b]$.

Утверждение 12. (линейность интеграла Римана)

Пусть $f, g \in R[a, b]$. Тогда $(\alpha f + \beta g) \in R[a, b]$ и $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдутся две пары ступенчатых функций φ_1, φ_2 и ψ_1, ψ_2 такие, что

$\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$, $\int_a^b \varphi_2 dx - \int_a^b \varphi_1 dx < \varepsilon$ и $\psi_1 \leq g \leq \psi_2$, $\int_a^b \psi_2 dx - \int_a^b \psi_1 dx < \varepsilon$.

Предположим $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (в случае $\alpha < 0$, $\alpha\varphi_1$ и $\alpha\varphi_2$ нужно поменять местами в неравенствах). Тогда $\alpha\varphi_1 + \beta\psi_1 \leq \alpha f + \beta g \leq \alpha\varphi_2 + \beta\psi_2$ и $\int_a^b \alpha\varphi_2 + \beta\psi_2 dx - \int_a^b \alpha\varphi_1 + \beta\psi_1 dx < (\alpha + \beta)\varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $(\alpha f + \beta g) \in R[a, b]$.

Поскольку для любых $\varphi_1, \psi_1 \in \text{Step}[a, b]$, удовлетворяющих $\varphi_1 \leq f$ и $\psi_1 \leq g$ имеем $\alpha \int_a^b \varphi_1 + \beta \int_a^b \psi_1 = \int_a^b (\alpha\varphi_1 + \beta\psi_1) \leq \int_a^b (\alpha f + \beta g)$, то $\alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \leq \int_a^b (\alpha f + \beta g)$. Аналогично получаем $\int_a^b (\alpha f + \beta g) \leq \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$. ▲

Утверждение 13. (аддитивность интеграла Римана)

Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$. $f \in R[a, c]$ тогда и только тогда, когда $f \in R[a, b]$ и $f \in R[b, c]$. Причём справедливо равенство $\int_a^b f dx + \int_b^c f dx = \int_a^c f dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Пусть $f \in R[a, c]$. Рассмотрим $\varepsilon > 0$ и такие $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Step}[a, c]$, что $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ и $\int_a^c \varphi_2 dx - \int_a^c \varphi_1 dx < \varepsilon$. Пусть $\psi_1 = \varphi_1 \chi_{[a, b]}$, $\psi_2 = \varphi_2 \chi_{[a, b]} \in \text{Step}[a, b]$. Тогда для любого

$x \in [a, b]$ имеем $\psi_1(x) \leq f(x) \leq \psi_2(x)$ и $\int_a^b \psi_2 dx - \int_a^b \psi_1 dx < \varepsilon$. Тогда $f \in R[a, b]$.

2. Пусть $f \in R[a, b]$ и $f \in R[b, c]$. Найдутся две пары функций $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Step}[a, b]$ и $\psi_1, \psi_2 \in \text{Step}[b, c]$ такие, что при $x \in [a, b]$ имеем $\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x)$,

$\int_a^b \varphi_2 dx - \int_a^b \varphi_1 dx < \varepsilon$ и при $x \in [b, c]$ имеем $\psi_1 \leq f \leq \psi_2$, $\int_b^c \psi_2 dx - \int_b^c \psi_1 dx < \varepsilon$.

Рассмотрим функции $\bar{\psi}_1$ и $\bar{\psi}_2$, которые получены из ψ_1 и ψ_2 , заменой значения в точке b на нуль. Ясно, что $\int_b^c \psi_i = \int_b^c \bar{\psi}_i$, $i = 1, 2$. Рассмотрим пару функций $\varphi_1 + \bar{\psi}_1$, $\varphi_2 + \bar{\psi}_2 \in \text{Step}[a, c]$. Тогда Из утверждения 11 получим, что $f \in R[a, c]$.

3. Из свойств $\sup$ и $\inf$ получаем неравенства $\int_a^b f dx + \int_b^c f dx \leq \int_a^c f dx$ и $\int_a^b f dx + \int_b^c f dx \geq \int_a^c f dx$. $\blacktriangle$

Замечание 5. Полагаем, что $\int_b^a f dx = -\int_a^b f dx$ при $a < b$.

Определение 8. Пусть $\Delta = \{\Delta_i\}$ некоторое разбиение отрезка $[a, b]$ на непересекающиеся промежутки. Величину $\delta(\Delta) = \max \mu(\Delta_i)$ будем называть мелкостью разбиения.

Теорема 1. (критерий интегрируемости в терминах колебаний) Функция $f \in R[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение $\{\Delta_k\}$ отрезка $[a, b]$, что $\sum_k \text{osc}_f(\Delta_k) \mu(\Delta_k) < \varepsilon$, где $\text{osc}_f(\Delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in \Delta\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$. Тогда $\text{osc}_f(\Delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in \Delta\} = \sup\{f(x) - f(y) \mid x, y \in \Delta\} = \sup_{x \in \Delta} f(x) - \inf_{x \in \Delta} f(x)$.

Пусть $\sum_k \text{osc}_f(\Delta_k) \mu(\Delta_k) < \varepsilon$. Тогда определим $\varphi_1(x) = \inf_{x \in \Delta_k} f(x)$ и $\varphi_2(x) = \sup_{x \in \Delta_k} f(x)$ при $x \in \Delta_k$. В остальных точках определим φ_1 и φ_2 равными 0. Из утверждения 11 следует, что $f \in R[a, b]$.

Пусть $f \in R[a, b]$. Из утверждения 11 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Step}[a, b]$, что $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ и $\int_a^b \varphi_2 dx - \int_a^b \varphi_1 dx < \varepsilon$. Пусть $\{P_i\}$ — разбиение соответствующее функции φ_1 и $\{Q_j\}$ — разбиение соответствующее функции φ_2 . Рассмотрим разбиение $\Delta = \{\Delta_k\}$, состоящее из непустых пересечений $\{P_i \cap Q_j\}$. Функции φ_1, φ_2 постоянны на каждом элементе разбиения Δ_k и по определению $\varphi_1(\Delta_k) \leq \inf_{x \in \Delta_k} f(x)$ и $\varphi_2(\Delta_k) \geq \sup_{x \in \Delta_k} f(x)$. Тогда $\sum_k \text{osc}_f(\Delta_k) \mu(\Delta_k) \leq \int_a^b \varphi_2 dx - \int_a^b \varphi_1 dx < \varepsilon$. $\blacktriangle$

Следствие 3. Непрерывная функция интегрируема по Риману, т. е. $C[a, b] \subset R[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Кантора непрерывная функция является равномерно непрерывной, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, что для любого промежутка Δ из $\mu(\Delta) < \delta$ следует, что $\text{osc}_f(\Delta_k) < \varepsilon/(b - a)$. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ на промежутки длины не больше δ . Имеем $\sum_k \text{osc}_f(\Delta_k) \mu(\Delta_k) < \sum_k \mu(\Delta_k) \varepsilon / (b - a) = \varepsilon$. $\blacktriangle$

Замечание 6. Нетрудно показать, что ограниченная и разрывная в конечном числе точек функция интегрируема по Риману. Ниже будет доказан более сильный крите-

рий интегрируемости по Риману.

Следствие 4. *Монотонная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на $[a, b]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Пусть f возрастает (нестрого) и $\delta = \varepsilon / (f(b) - f(a))$. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ на промежутки длины не больше δ , $\Delta_i = [a + i\delta, a + (i + 1)\delta)$. Тогда

$$\sum_i \operatorname{osc}_f(\Delta_i) \mu(\Delta_i) \leq \sum_i (f(a + (i + 1)\delta) - f(a + i\delta)) \delta \leq (f(b) - f(a)) \delta = \varepsilon. \blacktriangle$$

Теорема 2. *(о дифференцируемости интеграла Римана) Пусть $f \in R[a, b]$ непрерывна в $x_0 \in (a, b)$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ дифференцируема в x_0 , причём $F'(x_0) = f(x_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что $|t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Рассмотрим $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

$$\text{Имеем } \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \leq \varepsilon.$$

▲

Следствие 5. *Непрерывная функция имеет первообразную.*

Следствие 6. *(формула Ньютона — Лейбница)*

Пусть $f \in C[a, b]$ и F — первообразная функции f на $[a, b]$ (F непрерывна на $[a, b]$ и $F'(x) = f(x)$ при $x \in (a, b)$). Тогда $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Замечание 7. Можно обобщить понятие первообразной и считать первообразной функции f непрерывную функцию F , для которой равенство $F'(x) = f(x)$ выполняется за исключением конечного числа точек. Нетрудно показать, что формула Ньютона — Лейбница справедлива и в этом случае. Более сильное обобщение будет доказано ниже.

Следствие 7. *(формула интегрирования по частям). Пусть $u, v \in C^1(a, b)$, $u, v \in C[a, b]$. Тогда $\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx$*

Следствие 8. *(формула замены переменной). Пусть $f \in C[a, b]$ и $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, $\varphi \in C^1(\alpha, \beta) \cap C[\alpha, \beta]$. Тогда $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$.*

Определение 9. Пусть $\Delta = \{\Delta_i\}$ некоторое разбиение отрезка $[a, b]$ на непересекающиеся промежутки, $\xi_i \in \Delta_i$ и $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Суммой Римана называется $S[f, \Delta, \xi] = \sum_i f(\xi_i) \mu(\Delta_i)$.

Определение 10. Будем говорить, что $S[f, \Delta, \xi] \rightarrow A$ при $\delta(\Delta) \rightarrow 0$, если любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что $|\sum_i f(\xi_i) \mu(\Delta_i) - A| < \varepsilon$ при любом разбиении Δ , $\delta(\Delta) < \delta$ и любом выборе точек $\xi_i \in \Delta_i$

Теорема 3. *(о суммах Римана)*

1. Если $f \in R[a, b]$ тогда $S[f, \Delta, \xi] \rightarrow \int_a^b f$ при $\delta(\Delta) \rightarrow 0$.

2. Если $S[f, \Delta, \xi] \rightarrow A \in \mathbb{R}$ при $\delta(\Delta) \rightarrow 0$, то $f \in R[a, b]$ и $A = \int_a^b f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $f \in R[a, b]$. Рассмотрим такое разбиение $\{\Delta_k\}$ отрезка $[a, b]$, что $\sum_k \text{osc}_f(\Delta_k) \mu(\Delta_k) = \sum_k (\sup_{\Delta_k} f - \inf_{\Delta_k} f) \mu(\Delta_k) < \varepsilon$. Из определения интеграла имеем $\sum_k (\inf_{\Delta_k} f) \mu(\Delta_k) \leq \int_a^b f \leq \sum_k (\sup_{\Delta_k} f) \mu(\Delta_k)$. Пусть $\delta = \min_i (\Delta_i)$ и N — число промежутков в разбиении Δ . Рассмотрим разбиение P , для которого $\delta(P) < \min\{\delta, \varepsilon/(N \sup_{[a,b]} |f|)\}$. Промежутки разбиения P делятся на две группы (I) и (II): целиком содержащиеся в некотором Δ_i и пересекающиеся с двумя промежутками из разбиения Δ . Тогда

$$S[f, P, \xi] \leq \sum_{(I)} f(\xi_i) \mu(P_i) + \sum_{(II)} f(\xi_i) \mu(P_i) \leq \sum_k (\sup_{\Delta_k} f) \mu(\Delta_k) + N \delta(P) \sup_{[a,b]} |f| < \int_a^b f + 2\varepsilon.$$

Аналогично получаем, что $S[f, P, \xi] \geq \int_a^b f - 2\varepsilon$.

2. Пусть $S[f, \Delta, \xi] < A + \varepsilon$ при $\delta(\Delta) < \delta$. Рассмотрим разбиение отрезка на N промежутков Δ_i равной длины, где $N = \lfloor (b-a)/\delta \rfloor + 1$. Поскольку для любого выбора $\xi_i \in P_i$ справедливо неравенство $\sum_i f(\xi_i) \mu(\Delta_i) < A + \varepsilon$, то $\sum_i (\sup_{\Delta_i} f) \mu(\Delta_i) \leq A + \varepsilon$. Аналогично получаем, что $\sum_i (\inf_{\Delta_i} f) \mu(\Delta_i) \geq A - \varepsilon$. Нетрудно видеть, что эти суммы равны интегралам ступенчатых функций, которые ограничивают f сверху и снизу. Из произвольности ε получаем, что $f \in R[a, b]$ и $A = \int_a^b f$. $\blacktriangle$

Определение 11. Говорят, что множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет нулевую меру Лебега и пишут $\mu(A) = 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся набор интервалов $P_1, \dots, P_n, \dots$ такой, что $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(P_n) < \varepsilon$.

Утверждение 14. Множество $A \subset \mathbb{R}$. $\mu(A) = 0$ если и только если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся счётный (или конечный) набор промежутков $P_1, \dots, P_n, \dots$ такой, что $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(P_n) < \varepsilon$.

Утверждение 15. Пусть отрезок $[a, b]$ содержится в конечном объединении интервалов, т. е. $[a, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Тогда найдётся такое разбиение отрезка $\{\Delta_i\}$, что каждый элемент разбиения содержится в некотором из этих интервалов $\Delta_i \subseteq P_j$.

Определение 12. Колебанием функции f в точке x_0 называется $\text{osc}_f(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{osc}_f(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Утверждение 16. Функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\text{osc}_f(x_0) = 0$.

Теорема 4. (критерий Лебега интегрируемости по Риману) $f \in R[a, b]$ тогда и только тогда, когда функция f ограничена и непрерывна почти всюду на $[a, b]$, т. е. за исключением множества меры 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть A — множество точек разрыва. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся набор интервалов $P_1, \dots, P_n, \dots$ такой, что $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(P_n) < \varepsilon$. Для каждой точки $x \in [a, b] \setminus A$ найдётся элементарная окрестность $Q(x)$ такая, что $\text{osc}_f Q(x) < \varepsilon$. По теореме Бореля — Лебега из открытого покрытия $\{Q(x)\} \cup P_i$ можно извлечь конечное подпокрытие отрезка $[a, b]$. Далее можно выбрать разбиение $\{\Delta_i\}$ так, что каждый элемент разбиения содержится в некотором элементе этого подпокрытия.

$$\sum_k \text{osc}_f(\Delta_k) \mu(\Delta_k) = \sum_{(I)} \text{osc}_f(\Delta_k) \mu(\Delta_k) + \sum_{(II)} \text{osc}_f(\Delta_k) \mu(\Delta_k),$$

где в первой сумме суммируются промежутки, которые содержатся в $Q(x)$, а во второй — в P_i . Тогда $\sum_{(I)} \text{osc}_f(\Delta_k) \mu(\Delta_k) \leq \varepsilon(b-a)$, $\sum_{(II)} \text{osc}_f(\Delta_k) \mu(\Delta_k) \leq 2 \sup |f| \varepsilon$. По критерию интегрируемости в терминах колебаний имеем $f \in R[a, b]$.

2. Рассмотрим $A_n = \{x \in [a, b] \mid \text{osc}_f(x_0) > \frac{1}{n}\}$. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. По критерию интегрируемости в терминах колебаний найдётся разбиение $\{\Delta_i\}$ такое, что $\sum_k \text{osc}_f(\Delta_k^n) \mu(\Delta_k^n) < \varepsilon/(n2^n)$. Тогда $\sum_{\text{osc}_f(\Delta_k^n) > \frac{1}{n}} \mu(\Delta_k^n) < \varepsilon/2^n$. Тогда $A_n \subset Fr(\Delta^n) \cup \bigcup_{\text{osc}_f(\Delta_k^n) > \frac{1}{n}} \Delta_k^n$, где $Fr(\Delta^n)$ — множество концов промежутков. Тогда $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ содержится в объединении счётного (или конечного) числа промежутков, суммарная длина которых не превосходит ε . $\blacktriangle$

Следствие 9. Если $f, g \in R[a, b]$, то $fg \in R[a, b]$.

Следствие 10. Пусть $f \in R[a, b]$ и $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Тогда $F'(x) = f(x)$ почти всюду на (a, b) и F удовлетворяет условию Липшица с константой $L = \sup_{[a, b]} |f|$.

Определение 13. Обобщенной первообразной функции $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть функцию F , если $F'(x) = f(x)$ почти всюду на (a, b) и F удовлетворяет условию Липшица.

Утверждение 17. (про разность обобщённых первообразных)

Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются обобщёнными первообразными функции $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, то их разность $F_1(x) - F_2(x)$ постоянна на (a, b) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что разность $G = F_1 - F_2$ постоянна на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим через A множество точек, в которых $F_1'(x) \neq f(x)$ или $F_2'(x) \neq f(x)$ или одна из функций не дифференцируема. Поскольку $\mu(A) = 0$ найдётся открытое покрытие $\{P_i\}$ множества A интервалами. Для каждой точки $x \in [a', b'] \setminus A$ имеем $G'(x) = 0$, т. е. найдётся такой интервал $Q(x)$, что $|G(x) - G(y)| < \varepsilon|x - y|$ для любого $y \in Q(x)$.

По теореме Бореля — Лебега из открытого покрытия $\{Q(x)\} \cup P_i$ можно извлечь конечное подпокрытие $\{Q(x_j)\} \cup P_k$, где $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. Далее можно выбрать разбиение $\{\Delta_i\}$ так, что каждый элемент разбиения содержится в некотором элементе этого подпокрытия.

Пусть $\Delta_i = \langle x_i, y_i \rangle$. Если $\Delta_i \subset Q(x_j)$, то $|G(y_i) - G(x_i)| < 2\varepsilon(y_i - x_i)$. Если $\Delta_i \subset Q(x_k)$, то $|G(y_i) - G(x_i)| < L(y_i - x_i)$, где L — константа Липшица функции G .

Тогда $|G(b') - G(a')| \leq \sum_i |G(y_i) - G(x_i)| \leq L\varepsilon + 2\varepsilon(b - a)$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольное, то $G(b') = G(a')$. $\blacktriangle$

Замечание 8. Формула Ньютона — Лейбница и её следствия: формулы интегрирования по частям и замены переменных (при некоторых дополнительных условиях) справедливы для обобщённых первообразных.

Утверждение 18. (формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме) Пусть $f \in C^n(x_0, x) \cap C[x_0, x]$. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по n . База индукции следует из формулы Ньютона — Лейбница, шаг индукции — из формулы интегрирования по частям. Имеем

$$\int_{x_0}^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = -\frac{1}{n} f^{(n)}(t)(x-t)^n \Big|_{x_0}^x + \frac{1}{n} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

$\blacktriangle$

Утверждение 19. (первая теорема о среднем) Пусть $f, g \in R[a, b]$ и $g(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$ (или $g(x) \leq 0$ при $x \in [a, b]$). Тогда

1. Найдётся такое $\mu \in [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$, что $\int_a^b fg = \mu \int_a^b g$.
2. Если $f \in C[a, b]$, то найдётся такое $\xi \in [a, b]$, что $\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Поскольку $g(x) \inf_{[a,b]} f \leq f(x)g(x) \leq g(x) \sup_{[a,b]} f$, имеем

$$\inf_{[a,b]} f \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \sup_{[a,b]} f \int_a^b g(x) dx.$$

Если $\int_a^b g(x) dx = 0$, то $\mu = 0$. Если $\int_a^b g(x) dx \neq 0$, то $\mu = \int_a^b f(x)g(x) dx / \int_a^b g(x) dx$.

2. По теореме Больцано — Коши о промежуточных значениях найдётся такое $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = \mu$. $\blacktriangle$

Утверждение 20. (вторая теорема о среднем) Пусть $f, g' \in R[a, b]$ и g — монотонная, тогда

1. Найдётся такое $\xi \in [a, b]$, что $\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx$.
2. Если g возрастает и $g(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$, то найдётся такое $\xi \in [a, b]$, что $\int_a^b f(x)g(x) dx = g(b) \int_a^\xi f(x) dx$.
3. Если g убывает и $g(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$, то найдётся такое $\xi \in [a, b]$, что $\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Интегрируем по частям

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = F(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx.$$

Из первой теоремы о среднем имеем

$$\int_a^b F(x)g'(x) dx = F(\xi) \int_a^b g'(x) dx = (g(b) - g(a))F(\xi). \text{ Тогда}$$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = F(b)g(b) - (g(b) - g(a))F(\xi) = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx.$$

2. Рассмотрим функцию $h(t) = g(b) \int_t^\xi f(x) dx$. Функция h непрерывна и $g(a) \int_a^\xi f(x) dx \in [h(\xi), h(a)]$ (или $\in [h(a), h(\xi)]$). Тогда по теореме Больцано — Коши о промежуточных значениях найдётся такое $\xi' \in [a, \xi]$, что $h(\xi') = g(a) \int_a^\xi f(x) dx$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x) dx = g(b) \int_{\xi'}^b f(x) dx$.

3. Аналогично п.2. ▲

Замечание 9. Во второй теореме о среднем условие дифференцируемости функции g не является необходимым. Вывод теоремы остаётся верным и для недифференцируемых монотонных функций.

Теорема 5. (формула прямоугольников) Пусть $f \in C^2[a, b]$, $\{\Delta_i\}$, $i = 1, \dots, n$, — разбиение отрезка $[a, b]$ на n равных промежутков и точки x_i — середины этих промежутков. Тогда найдётся такое $\xi \in (a, b)$, что

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f^{(2)}(\xi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале рассмотрим промежуток $\Delta_i = [y, z]$ и $x = (y+z)/2$.

$$\int_y^x f^{(2)}(t)(t-y)^2 dt = f'(t)(t-y)^2 \Big|_y^x - 2 \int_y^x f'(t)(t-y) dt =$$

$$f'(x)(x-y)^2 - 2 \left(f(t)(t-y) \Big|_y^x - \int_y^x f(t) dt \right) = f'(x)(x-y)^2 - 2f(x)(x-y) + 2 \int_y^x f(t) dt.$$

Аналогично вычислим

$$\int_x^z f^{(2)}(t)(t-z)^2 dt = -f'(x)(x-z)^2 + 2f(x)(x-z) + 2 \int_x^z f(t) dt.$$

Тогда

$$2 \int_y^z f(t) dt = 2f(x)(z-y) + \int_x^z f^{(2)}(t)(t-z)^2 dt + \int_y^x f^{(2)}(t)(t-y)^2 dt.$$

Из первой теоремы о среднем получаем, что найдутся такие точки $\eta \in [y, x]$ и $\zeta \in [x, z]$, что $\int_y^x f^{(2)}(t)(t-y)^2 dt = f^{(2)}(\eta)(x-y)^3/3$ и $\int_x^z f^{(2)}(t)(t-z)^2 dt = f^{(2)}(\zeta)(z-x)^3/3$.

Тогда имеем

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) + \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{i=1}^n (f^{(2)}(\eta_i) + f^{(2)}(\zeta_i))/2.$$

Очевидно $n \inf_{[a,b]} f^{(2)} \leq \sum_{i=1}^n (f^{(2)}(\eta_i) + f^{(2)}(\zeta_i))/2 \leq n \sup_{[a,b]} f^{(2)}$. По теореме Больцано

— Коши о промежуточных значениях найдётся такое $\xi \in [a, b]$, что $\sum_{i=1}^n (f^{(2)}(\eta_i) + f^{(2)}(\zeta_i))/2 = n f^{(2)}(\xi)$. ▲

Определение 14. Мерой называется неотрицательная функция μ , удовлетворяющая условию конечной (или счётной) аддитивности: если множества $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ попарно не пересекаются, то $\mu \left(\bigcup_{i=1}^n P_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(P_i)$. Полагают, что совокупность множеств для которых определена мера замкнута относительно операций конечного (счётного) объединения и дополнения.

Замечание 10. Если для множеств $\Phi_1 \subset \Phi_2$ определена их мера, то $\mu(\Phi_1) \leq \mu(\Phi_2)$.

Примерами меры являются длина, площадь и объём фигур (множеств) в $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ соответственно. Для определения длины $\mu_1(\langle a, b \rangle) = b - a$, прямоугольника $\mu_2(\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$, параллелепипеда $\mu_3(\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \langle a_3, b_3 \rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$.

Пусть $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$. Множество $\Phi_f = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$ называется криволинейной трапецией.

Утверждение 21. (о площади криволинейной трапеции)

$$\mu_2(\Phi_f) = \int_a^b f(t) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Step}[a, b]$ такие, что $0 \leq \varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$, $|\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi_i(x) dx| < \varepsilon$. По определению $\mu_2(\Phi_{\varphi_i}) = \int_a^b \varphi_i(x) dx$, а по свойству площади $\mu_2(\Phi_{\varphi_1}) \leq \mu_2(\Phi_f) \leq \mu_2(\Phi_{\varphi_2})$. Тогда $|\int_a^b f(x) dx - \mu_2(\Phi_f)| < \varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ получаем требуемое равенство. $\blacktriangle$

Пусть $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$. Множество $V_f = \{(x, y, z) \mid x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$ называется телом вращения вокруг оси x .

Утверждение 22. (об объёме тела вращения)

$$\mu_3(V_f) = \pi \int_a^b f^2(t) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Step}[a, b]$ такие, что $0 \leq \varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$, $|\int_a^b f^2(x) dx - \int_a^b \varphi_i^2(x) dx| < \varepsilon$. Нетрудно доказать, что объём цилиндра равен произведению высоты на площадь основания, а площадь круга радиуса r равна πr^2 . Тогда $\mu_3(V_{\varphi_i}) = \pi \int_a^b \varphi_i^2(x) dx$. По свойству объёма имеем $\mu_3(V_{\varphi_1}) \leq \mu_3(V_f) \leq \mu_3(V_{\varphi_2})$. Тогда $|\pi \int_a^b f^2(x) dx - \mu_3(V_f)| < \varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ получаем требуемое равенство. $\blacktriangle$

Определение 15. Параметризованной кривой называется непрерывная функция $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Если отображение γ инъективно, то кривая называется *простой кривой Жордана*. Если отображение γ инъективно на (a, b) и $\gamma(a) = \gamma(b)$, то кривая называется *замкнутой кривой Жордана*. Длина $L(\gamma)$ кривой Жордана γ определяется как точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в кривую, т. е.

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^n \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|_2 \mid a = t_0 \leq \dots \leq t_n = b, n \in \mathbb{N} \right\},$$

где $\|(a_1, \dots, a_n)\|_2 = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$. Через $L(\gamma, [c, d])$, где $[c, d] \subset [a, b]$, будем обозначать длину кривой $\gamma|_{[c, d]}$. Если длина кривой конечна, то кривая называется *спрямляемой*.

Теорема 6. (о длине кривой) Пусть $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ гладкая ($x(t), y(t), z(t) \in C^1[a, b]$) простая или замкнутая кривая Жордана. Тогда $L(\gamma, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим длину произвольной ломаной, вписанной в кривую γ

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|_2 &= \sum_{i=0}^n \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2 + (z(t_{i+1}) - z(t_i))^2} = \\ &= \sum_{i=0}^n \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2 + (z'(\zeta_i))^2} (t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^n \sqrt{(x'(t_k))^2 + (y'(t_k))^2 + (z'(t_k))^2} (t_{i+1} - t_i) + R, \end{aligned}$$

где

$$R = \sum_{i=0}^n \left(\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2 + (z'(\zeta_i))^2} - \sqrt{(x'(t_k))^2 + (y'(t_k))^2 + (z'(t_k))^2} \right) (t_{i+1} - t_i).$$

Сумма $\sum_{i=0}^n \sqrt{(x'(t_k))^2 + (y'(t_k))^2 + (z'(t_k))^2} (t_{i+1} - t_i)$ является суммой Римана и при стремлении к нулю мелкости разбиения сходится к $\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$.

Оценим R . По теореме Кантора функции $x'(t), y'(t), z'(t)$ являются равномерно непрерывными, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при $|t' - t''| < \delta$ имеем $|x'(t') - x'(t'')| < \varepsilon$, $|y'(t') - y'(t'')| < \varepsilon$, $|z'(t') - z'(t'')| < \varepsilon$. Из неравенства треугольника имеем

$$\left| \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2 + (z'(\zeta_i))^2} - \sqrt{(x'(t_k))^2 + (y'(t_k))^2 + (z'(t_k))^2} \right| \leq \sqrt{(x'(t_k) - x'(\xi_i))^2 + (y'(t_k) - y'(\eta_i))^2 + (z'(t_k) - z'(\zeta_i))^2} \leq \sqrt{3}\varepsilon.$$

Таким образом, и при стремлении к нулю мелкости разбиения, величина R стремится к нулю. Следовательно, $L(\gamma, [a, b]) \geq \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$.

Из неравенства треугольника следует, что при измельчении разбиения длина соответствующей ломаной только увеличивается. Отсюда видно, что длины ломаных, вписанных в кривую, ограничены, т. е. кривая γ спрямляема. Тогда из определения длины кривой следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение, что длина соответствующей ему ломаной отличается от длины кривой менее чем на ε . Кроме того, найдётся вписанная ломаная, соответствующая разбиению мелкости меньше δ , длина которой превосходит длину кривой менее чем на ε . Тогда $L(\gamma, [a, b]) \leq c\varepsilon + \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$ для некоторой константы $c > 0$. ▲

3. Несобственный интеграл Римана

Определение 16. Точку $\omega \in \overline{\mathbb{R}}$ будем называть *правой особой точкой* функции $f : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$, если $f \in R[a, b]$ для любого $b \in (a, \omega)$ и либо $\omega = \infty$, либо функцию f нельзя доопределить в точке $\omega \in \mathbb{R}$ так, чтобы $f \in R[a, \omega]$.

Аналогично определяется *левая особая точка*. В частности, точки, в окрестности которых функция неограничена, всегда являются особыми.

Определение 17. Пусть $\omega \in \overline{\mathbb{R}}$ правая особая точка функции f на промежутке $[a, \omega)$. Тогда *несобственным* интегралом Римана называют предел

$$\int_a^\omega f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \omega-0} \int_a^b f(x) dx,$$

если он существует.

Если этот предел конечен, то говорят, что интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ *сходится*. В случае, когда этого предела не существует или он бесконечен, говорят, что интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ *расходится*. Если функция имеет левую особую точку, то несобственный интеграл Римана определяется аналогичным образом.

В случае, когда функция f имеет левую особую точку на промежутке $(\omega_1, c]$ и правую особую точку на промежутке $[c, \omega_2)$, говорят, что несобственный интеграл $\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) dx$ сходится на $(\omega_1, \omega_2) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, только если он сходится на каждом из двух промежутков $(\omega_1, c]$ и $[c, \omega_2)$.

Утверждение 23. Пусть $f \in R[a, b]$ для любого $b \in (a, \omega)$. Интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ сходится тогда и только тогда, когда найдётся обобщённая первообразная функции f на промежутке (a, ω) , имеющая конечный предел слева в точке ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определение сходимости интеграла эквивалентно наличию конечного левого предела первообразной $F(y) = \int_a^y f(x) dx$ в точке ω . Две обобщённые первообразные отличаются на константу, поэтому наличие конечного предела одной влечёт наличие конечного предела другой. $\blacktriangle$

Утверждение 24. (критерий Коши сходимости интеграла) Пусть $f \in R[a, b]$ для любого $b \in (a, \omega)$. Интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c \in (a, \omega) \forall b_1, b_2 \left(b_1, b_2 \in (c, \omega) \Rightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из критерия Коши существования предела функции, в данном случае первообразной $F(y) = \int_a^y f(x) dx$ в точке ω . $\blacktriangle$

Утверждение 25. Пусть $f, g \in R[a, b]$ для любого $b \in (a, \omega)$, $|f(x)| \leq g(x)$ и интеграл $\int_a^\omega g(x) dx$ сходится. Тогда интеграл $\int_a^\omega |f(x)| dx$ сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из критерия Коши. $\blacktriangle$

Утверждение 26. (признаки Абеля и Дирихле сходимости интеграла)

Пусть $f, g' \in R[a, b]$ для любого $b \in (a, \omega)$, функция g монотонна.

1. Если интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ сходится и g ограничена или
 2. если f имеет ограниченную первообразную и $\lim_{x \rightarrow \omega-0} g(x) = 0$,
- то интеграл $\int_a^\omega f(x)g(x) dx$ сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По критерию Коши достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x) dx \right| < \varepsilon$ при $b_1, b_2 \rightarrow \omega - 0$.

Из второй теоремы о среднем найдётся такое $\xi \in [a, b]$, что $\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x) dx = g(b_1) \int_{b_1}^{\xi} f(x) dx + g(b_2) \int_{\xi}^{b_2} f(x) dx$.

1. Из сходимости интеграла $\int_a^{\omega} f(x) dx$ по критерию Коши получаем, что $\left| \int_{b_1}^{\xi} f(x) dx \right| < \varepsilon/2C$, $\left| \int_{\xi}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon/2C$ при $b_1, b_2 \rightarrow \omega - 0$ и $C = \sup |g|$. Тогда $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x) dx \right| < \varepsilon$ при $b_1, b_2 \rightarrow \omega - 0$.

2. Из условия $C = \sup |F| < \infty$, где $F(y) = \int_a^y f(x) dx$. Тогда $\left| \int_{b_1}^{\xi} f(x) dx \right| < 2C$, $\left| \int_{\xi}^{b_2} f(x) dx \right| < 2C$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow \omega - 0} g(x) = 0$, то $|g(b_1)| < \varepsilon/4C$ и $|g(b_2)| < \varepsilon/4C$ при $b_1, b_2 \rightarrow \omega - 0$. Тогда $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x) dx \right| < \varepsilon$ при $b_1, b_2 \rightarrow \omega - 0$. $\blacktriangle$

Замечание 11. В признаках Абеля и Дирихле как и во второй теореме о среднем условие дифференцируемости функции g не является необходимым. Можно доказать (см., например, [Зорич]), что признаки остаются верными и для недифференцируемых монотонных функций.

Утверждение 27. (сравнение интеграла и частичной суммы ряда)

Пусть функция $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ убывает. Тогда
$$f(1) + \int_1^{n-1} f(x) dx \geq \sum_{n \geq 1} f(n) \geq \int_1^n f(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1)$. $\blacktriangle$

Следствие 11. (интегральный признак сходимости ряда)

Пусть функция $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ убывает. Тогда $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n \geq 1} f(n)$

Доказательство следует из того, что частичные суммы ряда и интегралы по промежуткам целой длины мажорируют друг друга.

4. Бесконечные произведения

Для любой последовательности (x_n) , $x_n > 0$, выражение $\prod_{n \geq 1} x_n$ называется *беско-*

нечным произведением, а числа $P_n = \prod_{i=1}^n x_i$ называются *частичными произведениями*.

Определение 18. Бесконечное произведение называется *сходящимся*, если последовательность (P_n) имеет предел $p = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, причём $0 < p < \infty$.

Предел $p = \prod_{n=1}^{\infty} x_n$ также называют бесконечным произведением последовательности (x_n) . В случае $\prod_{n=1}^{\infty} x_n = 0$ говорят, что бесконечное произведение *расходится к 0*, в случае $\prod_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$ — *расходится к ∞* .

Замечание 12. Иногда предполагается, что конечное число сомножителей бесконечного произведения могут принимать отрицательные или нулевые значения. Приведённые здесь определения естественным образом распространяются на этот случай.

Утверждение 28. (необходимое условие сходимости бесконечного произведения)

Если бесконечное произведение $\prod_{n \geq 1} x_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $p = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1}$. Причём $0 < p < \infty$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n / P_{n-1} = 1$. ▲

Утверждение 29. (критерий сходимости бесконечного произведения)

Бесконечное произведение $\prod_{n \geq 1} x_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n \geq 1} \ln x_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\ln P_n = \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n \ln x_i = S_n$. Из непрерывности логарифма следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \right)$. Тогда из сходимости бесконечного произведения следует сходимость ряда. Из непрерывности экспоненты имеем обратное. ▲

Утверждение 30. (признак сходимости бесконечного произведения)

1. Бесконечное произведение $\prod_{n \geq 1} (1 + t_n)$ сходится, если сходится ряд $\sum_{n \geq 1} |t_n|$.
2. Пусть $t_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда из сходимости бесконечного произведения $\prod_{n \geq 1} (1 + t_n)$ следует сходимость ряда $\sum_{n \geq 1} t_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из предыдущего критерия следует, что достаточно исследовать сходимость ряда $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + t_n)$. Пусть сходится ряд $\sum_{n \geq 1} |t_n|$. Тогда $t_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $\ln(1 + t) = t + O(t^2)$ при $t \rightarrow 0$, имеем $|\ln(1 + t_n)| \leq |t_n| + ct_n^2$, где $n \rightarrow \infty$ и c — некоторая константа. По признаку сравнения рядов ряд $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + t_n)$ сходится.

2. Из сходимости бесконечного произведения имеем $t_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и из предыдущего критерия ряд $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + t_n)$ сходится. Поскольку $\ln(1 + t) \geq t/2$ при

$t \rightarrow 0$, ряд $\sum_{n \geq 1} t_n$ сходится по признаку сравнения. $\blacktriangle$

Утверждение 31. (формула Валлиса)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx. \end{aligned}$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу

$$x_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx = \frac{n-1}{n} x_{n-2}.$$

По индукции получаем формулы

$$x_{2m} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \, dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi(2m-1)!!}{2(2m)!!},$$

$$x_{2m+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x \, dx = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

Из монотонности последовательности (x_n) и предыдущих равенств имеем

$$1 \leq \frac{x_{2m}}{x_{2m+1}} \leq \frac{x_{2m}}{x_{2m+2}} \leq 1 + \frac{1}{2m+1}.$$

Тогда $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x_{2m}}{x_{2m+1}} = 1$ и формула Валлиса доказана. $\blacktriangle$

Замечание 13. При любом $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$. Доказательство этого равенства имеется, например, в учебнике [Фихтенгольц].

Утверждение 32. (формула Стирлинга)

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + o(1)) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$. Из формулы Тейлора для логарифма имеем $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3})$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Поскольку ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ сходится, по признаку сравнения и ряд $\sum_{n \geq 1} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}$ сходится,

т. е. последовательность (s_n) частичных сумм $s_n = \sum_{i=1}^n \ln \frac{a_i}{a_{i+1}}$ имеет конечный предел. Тогда последовательность (a_n) , где $a_n = a_1 \frac{a_2}{a_1} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_1 e^{-s_n}$, имеет конечный предел. Обозначим его через A . Из арифметических свойств предела, определения последовательности a_n и формулы Валлиса получаем

$$\frac{2\pi}{A^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \frac{a_{2n}^2}{a_n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi((2n-1)!!)^2 n}{2((2n)!!)^2} = 1.$$

Таким образом, имеем равенство $A = \sqrt{2\pi}$. Формула Стирлинга эквивалентна равенству $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2\pi}$. ▲

5. Функциональные последовательности и ряды

Пусть $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность функций.

Определение 19. Последовательность функций f_n *поточечно сходится* к функции f на множестве A , если $\forall x \in A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, т. е.

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Определение 20. Последовательность функций f_n *сходится равномерно* к функции f на множества A , если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Введём обозначение $f_n \rightrightarrows f$ на A при $n \rightarrow \infty$ для равномерной сходимости последовательности.

Ряд функций сходится (суммируем) поточечно или равномерно, если это справедливо для его последовательности частичных сумм.

Замечание 14. Очевидно из равномерной сходимости следует поточечная сходимость.

Пример 5. Последовательность $f_n(x) = x^n$ поточечно, но не равномерно сходится к 0 на интервале $(0, 1)$. На интервале $(0, \alpha)$, $\alpha < 1$, сходимость равномерная.

Теорема 7. (критерий Коши равномерной сходимости) Последовательность функций $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n_1, n_2 \geq n_0 \quad \forall x \in A \quad |f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ([Шведов, ч.2 с.71]) Пусть последовательность $f_n \Rightarrow f$ на A . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ для всех $n \geq n_0$ и $x \in A$. Тогда для любых $n_1, n_2 \geq n_0$ и $x \in A$ имеем

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| \leq |f_{n_1}(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n_2}(x)| < \varepsilon,$$

то есть последовательность (f_n) удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости.

Пусть последовательность (f_n) удовлетворяет условию Коши. Тогда по критерию Коши она имеет конечный предел в каждой точке $x \in A$. Обозначим этот предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. В условии Коши перейдём к пределу при $n_2 \rightarrow \infty$. По свойству перехода к пределу в неравенстве имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n_1 \geq n_0 \forall x \in A \lim_{n_2 \rightarrow \infty} |f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| = |f_{n_1}(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Таким образом, $f_n \Rightarrow f$ на A . $\blacktriangle$

Утверждение 33. (признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда)

Пусть $\sup_{x \in A} |f_n(x)| \leq a_n$ и ряд $\sum_{n \geq 0} a_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ сходится равномерно на A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ряд $\sum_{n \geq 0} a_n$ сходится, для него выполнено условие Коши, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n_2 \geq n_1 \geq n_0 \left| \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k \right| < \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n_2 \geq n_1 \geq n_0 \forall x \in A \left| \sum_{k=n_1}^{n_2} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n_1}^{n_2} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k < \varepsilon.$$

Таким образом, для частичных сумм функционального ряда $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ выполнено условие Коши равномерной сходимости. $\blacktriangle$

Вспомним преобразование Абеля: $\sum_{i=n_1}^{n_2} a_i b_i = A_{n_2} b_{n_2} + \sum_{i=n_1}^{n_2-1} A_i (b_i - b_{i+1})$, где $A_k = \sum_{i=n_1}^k a_i$.

Утверждение 34. (признак Абеля равномерной сходимости ряда)

Ряд $\sum_{n \geq 0} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на A , если

- 1) ряд $\sum_{n \geq 0} a_n(x)$ равномерно сходится на A ,
- 2) $(b_n(x))$ — монотонная для любого $x \in A$ равномерно ограниченная последовательность, т. е. $\sup_{x \in A, n \in \mathbb{N}} |b_n(x)| \leq C < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применив преобразование Абеля, для любого $x \in A$ получаем $\sum_{i=n_1}^{n_2} a_i(x) b_i(x) = A_{n_2}(x) b_{n_2}(x) + \sum_{i=n_1}^{n_2-1} A_i(x) (b_i(x) - b_{i+1}(x))$, где $A_k(x) = \sum_{i=n_1}^k a_i(x)$.

Из критерия Коши равномерной сходимости имеем, что $\forall \varepsilon > 0$ найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$, что при $k \geq n_1 \geq n_0$ имеем $\sup_{x \in A} \left| \sum_{i=n_1}^k a_i(x) \right| < \varepsilon$. Тогда

$$\left| \sum_{i=n_1}^{n_2} a_i(x) b_i(x) \right| \leq C\varepsilon + \varepsilon \sum_{i=n_1}^{n_2-1} |b_i(x) - b_{i+1}(x)| = C\varepsilon + \varepsilon |b_{n_1}(x) - b_{n_2}(x)| \leq 3C\varepsilon.$$

Тогда из критерия Коши равномерной сходимости получаем требуемое. $\blacktriangle$

Утверждение 35. (признак Дирихле равномерной сходимости ряда)

Ряд $\sum_{n \geq 0} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится A , если

1) частичные суммы ряда $\sum_{n \geq 0} a_n(x)$ равномерно ограничены, т. е.

$$\sup_{x \in A, m \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^m a_n(x) \right| \leq C < \infty,$$

2) $(b_n(x))$ — монотонная для любого $x \in A$ последовательность равномерно сходящаяся к 0 на A , т. е. $b_n \Rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применив преобразование Абеля, для любого $x \in A$ получаем $\sum_{i=n_1}^{n_2} a_i(x) b_i(x) = A_{n_2}(x) b_{n_2}(x) + \sum_{i=n_1}^{n_2-1} A_i(x) (b_i(x) - b_{i+1}(x))$, где $A_k(x) = \sum_{i=n_1}^k a_i(x)$.

Из определения равномерной сходимости имеем, что $\forall \varepsilon > 0$ найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$, что при $i \geq n_0$ имеем $\sup_{x \in A} |b_i(x)| < \varepsilon$. Тогда при $n_2 \geq n_1 \geq n_0$ имеем

$$\left| \sum_{i=n_1}^{n_2} a_i(x) b_i(x) \right| \leq 2C\varepsilon + 2C \sum_{i=n_1}^{n_2-1} |b_i(x) - b_{i+1}(x)| = 2C\varepsilon + 2C |b_{n_1}(x) - b_{n_2}(x)| \leq 6C\varepsilon.$$

Тогда из критерия Коши равномерной сходимости получаем требуемое. $\blacktriangle$

Теорема 8. (теорема Дини о равномерной сходимости) Если монотонная (для каждого фиксированного $x \in [a, b]$) последовательность непрерывных функций (f_n) поточечно сходится к непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$, то она сходится равномерно, т. е. $f_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$ при $n \rightarrow \infty$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим непрерывные функции $g_n = f_n - f$. Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $x \in [a, b]$ найдётся такой номер $n(x) \in \mathbb{N}$, что $|g_{n(x)}(x)| < \varepsilon$. Тогда благодаря непрерывности g_n найдётся интервал $V(x)$, такой что $|g_{n(x)}(y)| < 2\varepsilon$ при $y \in V(x) \cap [a, b]$. Интервалы $V(x)$ образуют открытое покрытие отрезка $[a, b]$. По теореме Бореля — Лебега из него можно выбрать конечное подпокрытие $V(x_1), \dots, V(x_k)$. Найдём $n_0 = \max\{n(x_1), \dots, n(x_k)\}$. Из монотонности последовательности g_n имеем неравенства $|g_n(y)| \leq |g_{n(x_i)}(y)| < 2\varepsilon$ при $n \geq n_0$ и $y \in V(x_i)$. Таким образом при $\sup_{[a, b]} |f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ при $n \geq n_0$. $\blacktriangle$

Теорема 9. (о перестановке пределов) Если $f_n \Rightarrow f$ на множестве X при $n \rightarrow \infty$, $a \in \text{Lim } X$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеется конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \alpha_n$, то существуют и равны конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что последовательность α_n удовлетворяет условию Коши. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию найдётся n_0 , что при $x \in X$ и $m, n \geq$

n_0 имеем $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Тогда, переходя к пределу в неравенстве, получаем $\lim_{x \rightarrow a} |f_n(x) - f_m(x)| = |\alpha_n - \alpha_m| \leq \varepsilon$. Тогда по критерию Коши $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

Заметим, что $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ для любых $x \in X$ и $|\alpha_n - \alpha| \leq \varepsilon$ при $n \geq n_0$.

Пусть $|f_n(x) - \alpha_n| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X$. Тогда $|f(x) - \alpha| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \alpha_n| + |\alpha - \alpha_n| \leq 3\varepsilon$. $\blacktriangle$

Замечание 15. В этой теореме условие равномерной сходимости нельзя заменить на условие поточечной сходимости. Достаточно рассмотреть пример $0 = \lim_{x \rightarrow 1-0} (\lim_{n \rightarrow \infty} x^n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow 1-0} x^n = 1)$.

Следствие 12. Равномерный предел последовательности непрерывных функций — непрерывная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a). \quad \blacktriangle$$

Теорема 10. (об интегрировании равномерного предела) Пусть $f_n \in R[a, b]$ и $f_n \Rightarrow f$ на (a, b) . Тогда $f \in R[a, b]$ и $\int_a^x f_n(t) dt \Rightarrow \int_a^x f(t) dt$ на $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что $f \in R[a, b]$. По критерию Лебега f_n ограничена и непрерывна за исключением множества A_n меры 0. Найдём такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\sup_{(a,b)} |f_n(x) - f(x)| < 1$. Тогда $\sup_{[a,b]} |f| \leq 1 + \sup_{[a,b]} |f_n|$. Пусть $A = \cup_n A_n$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ множество A_n можно покрыть интервалами суммарной длины не более $\varepsilon/2^n$. Тогда A можно покрыть интервалами суммарной длины не более ε . Поэтому A — множество меры 0. Из предыдущего следствия получаем, что f непрерывна на $[a, b] \setminus A$. По критерию Лебега $f \in R[a, b]$.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\sup_{(a,b)} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при $n \geq n_0$.

Тогда для любого $x \in [a, b]$ имеем $\left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt < \varepsilon(b-a)$.

$\blacktriangle$

Следствие 13. Пусть $f_n \in R[a, b]$ и $f_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$. Тогда $\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt$.

Замечание 16. Обобщение этого следствия на несобственный интеграл Римана будет неверным. Например, можно рассмотреть последовательность $f_n(x) = \frac{n}{x^2+n^2} \Rightarrow 0$ на $\mathbb{R}$. Замена равномерной сходимости на поточечную в формулировке тоже приведёт к неверному утверждению. Достаточно рассмотреть последовательность функций $f_n = n\chi_{(1/n, 2/n)}$. При любом $x \in (0, 1)$ имеем $f_n(x) \rightarrow 0$, но $\int_0^1 f_n(x) dx = 1$.

Следствие 14. Пусть $f_n \in R[a, b]$ и ряд $\sum f_n$ равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда $\int_a^b (\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t) dt$.

Следствие 15. Пусть $f_n \in C^1(a, b) \cap C[a, b]$, $f'_n \Rightarrow g$ на $[a, b]$ и существует такая

$x_0 \in [a, b]$, что $f_n(x_0) \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ и $f' = g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия функция g непрерывна и, следовательно, $g \in R[a, b]$. Из теоремы имеем $f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \rightrightarrows \int_{x_0}^x g(t) dt$ на $[a, b]$.

Определим $f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt + \alpha$. Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ и $f'(x) = g(x)$ по теореме о дифференцируемости интеграла Римана. $\blacktriangle$

Следствие 16. Пусть $f_n \in C^1(a, b) \cap C[a, b]$, ряд $\sum f'_n$ равномерно сходится на $[a, b]$ и существует такая $x_0 \in (a, b)$, что ряд $\sum f_n(x_0)$ сходится. Тогда ряд $\sum f_n$ равномерно сходится на $[a, b]$ и $(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$.

Вспомним, что

Определение 21. Степенным рядом называется ряд вида $\sum_{n \geq 0} c_n(z - z_0)^n$, $c_n \in \mathbb{C}$ (или $c_n \in \mathbb{R}$). Множество значений параметра $z \in \mathbb{C}$ (или $z \in \mathbb{R}$), при которых ряд сходится, называют *областью сходимости* ряда.

Далее будем рассматривать степенные ряды при $z_0 = 0$. Общий случай сводится к этому заменой переменных.

Определение 22. Число $R = 1/\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$ называется *радиусом сходимости* ряда.

Ранее было доказано, что при $|z| < R$ ряд сходится и при $|z| > R$ расходится.

Утверждение 36. (первая теорема Абеля) Пусть R — радиус сходимости ряда. Тогда степенной ряд $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ сходится равномерно при $|z| \leq b$ для любого $b < R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По признаку сравнения достаточно доказать, что сходится ряд $\sum_{n \geq 0} |c_n| b^n$. Имеем $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|c_n| b^n)^{\frac{1}{n}} = b \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|c_n|)^{\frac{1}{n}} = b/R < 1$. По признаку Коши ряд $\sum_{n \geq 0} |c_n| b^n$ сходится. $\blacktriangle$

Утверждение 37. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$, то он равен радиусу R сходимости ряда $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Без ограничения общности можно считать, что $c_0 = 1$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \right)^{1/n} \leq \alpha + \varepsilon$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \right)^{1/n} \geq \alpha - \varepsilon$. Действительно, найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| < \alpha + \varepsilon$ при $n \geq n_0$. Тогда $\left(\prod_{k=0}^{n-1} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \right)^{1/n} \left(\prod_{k=n_0}^{n-1} (\alpha + \varepsilon) \right)^{1/n}$. Нетрудно видеть, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \right)^{1/n} = 1$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=n_0}^{n-1} (\alpha + \varepsilon) \right)^{1/n} = \alpha + \varepsilon$. Аналогично полу-

чаем оценку снизу. Из произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{c_n} \right|^{1/n} = R$. Аналогично можно рассмотреть случаи когда $\alpha = 0$ и $\alpha = \infty$. ▲

Утверждение 38. (вторая теорема Абеля)

Если ряд $\sum_{n \geq 0} c_n z_0^n$ сходится, то $\lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (tz_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что ряд $\sum_{n \geq 0} c_n (tz_0)^n$ равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$. Ряд $\sum_{n \geq 0} c_n z_0^n$ сходится (равномерно по t) по условию, а последовательность t^n монотонна и равномерно ограничена на $t \in [0, 1]$. По признаку Абеля ряд $\sum_{n \geq 0} c_n (tz_0)^n$ сходится равномерно. По теореме о перестановке пределов теорема Абеля доказана. ▲

Следствие 17. Вещественный степенной ряд непрерывен на своей области определения.

Пример 6. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ при $|x| < 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

Следствие 18. Вещественный степенной ряд бесконечно дифференцируем внутри интервала сходимости. Причём $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ и $\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$.

Следствие 19. Пусть ряд $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ сходится при $|x| < r$, $r > 0$. Тогда $f^{(n)}(0)/n! = c_n$, где $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Определение 23. Функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ называется *аналитической* на открытом множестве (области) $U \subseteq \mathbb{R}$, если для каждой точки $a \in U$ найдётся такой интервал $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U$, что $f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n (x - a)^n$ на I .

Следствие 20. Аналитическая функция является бесконечно дифференцируемой.

Замечание 17. Степенной ряд определяет аналитическую функцию внутри круга сходимости. Доказательство этого утверждения имеется, например, в учебнике [Львовский].

Замечание 18. Сумма и произведение двух аналитических в некоторой области функций является аналитической функцией. Если аналитическая в области U функция f не обращается в нуль в U , то $1/f$ является аналитической функцией в U . Доказательство этих утверждений имеется, например, в учебнике [Львовский].

Пример 7. Функция $f(x) = e^{-1/x^2}$ является бесконечно дифференцируемой в точке $x = 0$, но не аналитической. Поскольку $f^{(n)}(0) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, ряд Тейлора функции f тождественно равен нулю и не сходится к функции f нигде кроме нуля.

Пример 8. Функция $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cos(n^2 x)$ является бесконечно дифференцируемой в точке $x = 0$, но не аналитической. Поскольку ряд Тейлора функции f не сходится нигде кроме нуля.

Утверждение 39. Пусть $f_n \Rightarrow f$ на A и $g : B \rightarrow A$. Тогда $f_n \circ g \Rightarrow f \circ g$ на B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\sup_{x \in B} |f_n(g(x)) - f(g(x))| \leq \sup_{y \in A} |f_n(y) - f(y)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. ▲

Теорема 11. (Вейерштрасса о равномерном приближении многочленами)
Если $f \in C[a, b]$, то существует такая последовательность многочленов p_n , что $p_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим многочлены Бернштейна равенством $B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$. Докажем некоторые свойства многочленов Бернштейна.

$$(1) \sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) = 1, (2) \sum_{k=0}^n k B_{n,k}(x) = nx, (3) \sum_{k=0}^n (k - xn)^2 B_{n,k}(x) = n(x - x^2).$$

Первое равенство следует из бинома Ньютона $\sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} = (x+y)^n$. Продифференцируем бином по переменной x . Имеем $\sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1} y^{n-k} = n(x+y)^{n-1}$. Тогда

$\sum_{k=0}^n k C_n^k x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1}$ и, подставив в это выражение $y = 1-x$, получим равенство (2). Продифференцируем последнее равенство по переменной x . Имеем $\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k x^{k-1} y^{n-k} = n(n-1)x(x+y)^{n-2} + n(x+y)^{n-1}$. Умножив на x и подставив $y = 1-x$, получим $\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx$. Комбинируя последнее равенство и равенства (1), (2), получаем равенство (3).

Сначала положим $[a, b] = [0, 1]$, определим $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) B_{n,k}(x)$. По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$, поэтому $\forall \varepsilon > 0$ найдётся такой $m \in \mathbb{N}$, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ при $|x - y| < 1/m^{1/3}$. По теореме Вейерштрасса $\sup |f| \leq M < \infty$. Найдём такой $n_0 \in \mathbb{N}$, что $n_0 \geq m$ и $M/n_0^{1/3} < \varepsilon$. Для любого $n \geq n_0$ из равенства (1) получаем

$$\begin{aligned} f(x) - p_n(x) &= \sum_{k=0}^n (f(x) - f(\frac{k}{n})) B_{n,k}(x) = \\ &= \sum_{(k-nx)^2 < n^{4/3}} (f(x) - f(\frac{k}{n})) B_{n,k}(x) + \sum_{(k-nx)^2 \geq n^{4/3}} (f(x) - f(\frac{k}{n})) B_{n,k}(x). \\ \sum_{(k-nx)^2 < n^{4/3}} |f(x) - f(\frac{k}{n})| B_{n,k}(x) &< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) = \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Из равенства (3) имеем $\sum_{(k-nx)^2 \geq n^{4/3}} (k - xn)^2 B_{n,k}(x) \leq n(x - x^2) \leq n/4$
и $\sum_{(k-nx)^2 \geq n^{4/3}} B_{n,k}(x) \leq 1/4n^{1/3}$. Тогда

$$\sum_{(k-nx)^2 \geq n^{4/3}} |f(x) - f(\frac{k}{n})| B_{n,k}(x) \leq 2M \sum_{(k-nx)^2 \geq n^{4/3}} B_{n,k}(x) \leq M/2n^{1/3} \leq \varepsilon/2.$$

Таким образом, $p_n \Rightarrow f$ на $[0, 1]$ по определению. Если $f \in C[a, b]$, то $f_0(x) = f(a(1-x) + bx) \in C[0, 1]$. Тогда из $p_n \Rightarrow f_0$ на $[0, 1]$ следует, что $p_n(\frac{t-a}{b-a}) \Rightarrow f_0(\frac{t-a}{b-a}) = f(t)$ на $[a, b]$. ▲

Утверждение 40. Если $f \in C[0, 1]$ и $f(0), f(1) \in \mathbb{Z}$, то f можно равномерно приблизить многочленами с целыми коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n — простое число и $n > 1/\varepsilon$. Тогда значения функции f в точках $x_k = \frac{k}{n}$ можно приблизить рациональными числами $\hat{f}(\frac{k}{n}) = \frac{z_k}{n}$, $z_k \in \mathbb{Z}$, с точностью ε . Поскольку n — простое, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = ny_k$, где $y_k \in \mathbb{Z}$ при $k \neq 0, n$. Тогда $\hat{f}(\frac{k}{n})C_n^k = y_k z_k \in \mathbb{Z}$. Нетрудно видеть, что $\sup \left| \sum_{k=0}^n \hat{f}(\frac{k}{n}) C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k} - f(x) \right| < 2\varepsilon$ для достаточно больших простых n . ▲

Определение 24. Пусть $P_0, P_1 \in \mathbb{R}^2$, кривая Безье $\gamma[P_0, P_1](t) = tP_1 + (1-t)P_0$ есть отрезок соединяющий эти точки. Определим *кривые Безье* по индукции равенством $\gamma[P_0, P_1, \dots, P_n](t) = t\gamma[P_1, \dots, P_n](t) + (1-t)\gamma[P_0, P_1, \dots, P_{n-1}](t)$.

Утверждение 41. $\gamma[P_0, P_1, \dots, P_n](t) = \sum_{k=0}^n P_k B_{n,k}(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По индукции.

$$\text{Имеем } \gamma[P_0, P_1, \dots, P_{n-1}](t) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k C_{n-1}^k t^k (1-t)^{n-k-1}.$$

$$\text{Тогда } \gamma[P_0, P_1, \dots, P_n](t) = \sum_{k=1}^n P_k C_{n-1}^{k-1} t^k (1-t)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} P_k C_{n-1}^k t^k (1-t)^{n-k}.$$

Из равенства $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ получаем требуемое. ▲

6. Метрические пространства

Определение 25. *Метрическим пространством* называется пара (X, d) , состоящая из множества X и отображения (называемого *метрикой* или *расстоянием*) $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$, удовлетворяющего следующим условиям:

1. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ для всех $x, y \in X$ (*симметричность*);
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ для всех $x, y, z \in X$ (*неравенство треугольника*).

Пример 9.

0. $\mathbb{R}$ с расстоянием $d(x, y) = |x - y|$, $\overline{\mathbb{R}}$ с расстоянием $d(x, y) = |\arctg(x) - \arctg(y)|$.

1. Евклидово расстояние в $\mathbb{R}^n$.

2. Метрики ℓ_p , $p \in [1, \infty]$.

3. $C[a, b]$ с расстоянием $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$.

4. $R[a, b]$ с расстоянием $d(f, g) = \int_a^b |f - g|$.

5. Граф как дискретное метрическое пространство.

6. Расстояние Хэмминга.

7. Редакционное расстояние.

Определение 26. Множество $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$, где $x \in X$, $r \in (0, +\infty)$, называется *открытым шаром* (элементарной окрестностью) в метрическом пространстве (X, d) . Множество $U \subseteq X$ называется *открытым* в метрическом пространстве (X, d) , если оно содержит вместе с каждой точкой $x \in U$ некоторый шар $B(x, r) \subseteq U$ с центром в этой точке.

Определение 27. Окрестностью точки $x \in X$ называется любое подмножество множества X , содержащее элементарную окрестность точки $x \in X$. Множество окрестностей точки $x \in X$ обозначается через $\mathcal{N}(x)$. Точка $x \in A$ называется *внутренней* точкой множества $A \subseteq X$, если $A \in \mathcal{N}(x)$. Совокупность внутренних точек множества A называется *внутренностью* множества A и обозначается через $\overset{\circ}{A}$ ($\text{int}(A)$).

Утверждение 42. (свойства открытых множеств)

1. Объединение любого семейства открытых множеств в метрическом пространстве является открытым множеством.
2. Пересечение конечного числа открытых множеств в метрическом пространстве является открытым множеством.
3. Множество $\overset{\circ}{A}$ открыто для любого множества A .
4. $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$, где объединение берётся по всем открытым множествам, содержащимся в A .

Определение 28. Точка $x \in X$ называется *предельной точкой* множества $A \subseteq X$, если $(A \cap U) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(x)$. Множество предельных точек обозначается через $\mathcal{L}im(A)$. Множество $A \subseteq X$ называется *замкнутым*, если $\mathcal{L}im(A) \subseteq A$. Объединение множества A и всех его предельных точек называется *замыканием* множества A и обозначается через $\overline{A}$ ($\text{cl}(A)$).

Определение 29. Точки множества $A \setminus \mathcal{L}im(A)$ называются *изолированными* точками множества A . Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* множества $A \subseteq X$, если $U \cap A \neq \emptyset$ для любой окрестности U точки x , т. е. содержится в замыкании множества A . Множество, состоящее из точек, являющихся одновременно точками прикосновения для множеств A и $X \setminus A$, называется *границей* множества A и обозначается $\text{Fr}(A)$.

Определение 30.

Точка $a \in X$ является пределом последовательности (x_n) ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$), когда $d(a, x_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Утверждение 43. (свойства предельных точек)

1. $a \in \mathcal{L}im(X)$ тогда и только тогда, когда найдётся такая последовательность $(x_n) \in X \setminus \{a\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
2. $a \in \mathcal{L}im(X)$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки a имеется бесконечно много точек множества X .

Утверждение 44. (замкнутость множества предельных точек) Пусть $A \subseteq X$. Тогда

1. Множество $\mathcal{L}im(A)$ — замкнуто.
2. Множество $\overline{A}$ — замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Водопьянов, с.150]) 1. Обозначим $B = \mathcal{L}im(A)$. Пусть $z \in \mathcal{L}im(B)$. Рассмотрим произвольную окрестность $U \in \mathcal{N}(z)$, и в ней элементарную окрестность $B(z, \varepsilon) \subset U$. Пусть $b \in B \cap B(z, \varepsilon)$. Рассмотрим такую окрестность $V \in \mathcal{N}(b)$, что $V \subset B(z, \varepsilon)$. В ней бесконечно много точек множества A . Тогда и в U бесконечно много точек из A . Тогда из произвольности U получаем, что $z \in \mathcal{L}im(A) = B$. То есть B замкнуто.

2. Обозначим $C = A \cup \mathcal{L}im(A)$. Пусть $z \in \mathcal{L}im(C)$. Рассмотрим последовательность (x_n) , $x_n \in C$ и $x_n \rightarrow z$. В (x_n) бесконечно много точек из A или из $\mathcal{L}im(A)$. В первом случае $z \in \mathcal{L}im(A)$ по определению, во втором $z \in \mathcal{L}im(A)$ по п.1. Таким образом $z \in C$. $\blacktriangle$

Утверждение 45. (замкнутость дополнения к открытому) Пусть $A \subseteq X$. Множество A — замкнуто тогда и только тогда, когда $X \setminus A$ — открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (см. также [Водопьянов, с.152]) Пусть A замкнуто. Тогда любая точка $x \in X \setminus A$ не является предельной для A . Тогда найдётся такая $U \in \mathcal{N}(x)$, что $U \cap A = \emptyset$. Тогда $U \subset X \setminus A$. То есть множество $X \setminus A$ открыто.

Наоборот, если множество $X \setminus A$ открыто, то любая его точка содержится в нём вместе с некоторой своей окрестностью. Тогда любая точка множества $X \setminus A$ не является предельной точкой множества A . Тогда $\mathcal{L}im(A) \subseteq A$. $\blacktriangle$

Утверждение 46. (свойства замкнутых множеств)

1. Пересечение любого семейства замкнутых множеств в метрическом пространстве является замкнутым множеством.
2. Объединение конечного числа замкнутых множеств в метрическом пространстве является замкнутым множеством.
3. $\overline{A} = \bigcap_{\alpha} B_{\alpha}$, где пересечение берётся по всем замкнутым множествам содержащим A .

Следствие 21. Множество $Fr(A)$ — замкнуто.

Определение 31. Пусть (X, d_1) и (Y, d_2) — некоторые метрические пространства. Говорят, что отображение $f : X \rightarrow Y$ имеет *предел* $y \in Y$ в точке $x_0 \in \mathcal{L}im(X)$, и пишут $f(x) \rightarrow y$ при $x \rightarrow x_0$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$), если

$$\forall U \in \mathcal{N}(y) \exists V \in \mathcal{N}(x_0) \quad f(V \setminus \{x_0\}) \subseteq U.$$

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *непрерывным* в точке $x_0 \in X$, если $f(x) \rightarrow f(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$. В изолированной точке любое отображение считается непрерывным. Отображение, непрерывное во всех точках $x \in A$, $A \subseteq X$, называют непрерывным на A . Множество непрерывных отображений, действующих из X в Y , обозначают через $C(X, Y)$. Если $Y = \mathbb{R}$, то вместо $C(X, Y)$ будем использовать обозначение $C(X)$.

Утверждение 47. Пусть (X, d_1) , (Y, d_2) — метрические пространства, $f : X \rightarrow Y$, $x_0 \in \mathcal{L}im(X)$ и $b \in Y$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), b) < \varepsilon.$$

Утверждение 48. Если предел функции $f : X \rightarrow Y$ в точке $x \in \mathcal{L}im(X)$ существует, то он единственный.

Утверждение 49. (об эквивалентных определениях непрерывности) Пусть (X, d_1) , (Y, d_2) — метрические пространства, для любой функции $f : X \rightarrow Y$ следующие условия эквивалентны:

1. функция f непрерывна на X ;
2. для любого открытого множества $W \subseteq Y$ множество $f^{-1}(W)$ открыто;
3. для любого замкнутого множества $W \subseteq Y$ множество $f^{-1}(W)$ замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1 \Rightarrow 2$ Из определения непрерывности для любого $x \in X$ имеем $\forall U \in \mathcal{N}(f(x)) \exists V \in \mathcal{N}(x) f(V) \subseteq U$. Рассмотрим $x \in f^{-1}(W)$. Поскольку W открыто, $W \in \mathcal{N}(f(x))$. Тогда найдётся такое $V \in \mathcal{N}(x)$, что $f(V) \subseteq W$, т. е. $V \subseteq f^{-1}(W)$. Значит $f^{-1}(W)$ открыто по определению.

$2 \Rightarrow 1$ Рассмотрим $U \in \mathcal{N}(f(x))$. Найдётся шар $B(f(x), \varepsilon) \subset U$. Тогда $V = f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ открыто и $f(V) \subset U$.

$2 \Rightarrow 3$ Известно, что $f^{-1}(Y \setminus W) = X \setminus f^{-1}(W)$. Из утверждения о замкнутости дополнения к открытому множеству следует, что любое замкнутое подмножество в Y можно представить как дополнение к открытому $Y \setminus W$. Тогда его прообраз $X \setminus f^{-1}(W)$ замкнут.

$3 \Rightarrow 2$ аналогично $2 \Rightarrow 3$. ▲

Утверждение 50. (о непрерывности композиции) Пусть $f : X \rightarrow Y$ непрерывна в $x_0 \in X$ и $g : Y \rightarrow Z$ непрерывна в $f(x_0) \in Y$. Тогда $g \circ f : X \rightarrow Z$ непрерывна в $x_0 \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\forall W \in \mathcal{N}(g(f(x_0))) \exists U \in \mathcal{N}(f(x_0)) g(U) \subseteq W,$$

$$\forall U \in \mathcal{N}(f(x_0)) \exists V \in \mathcal{N}(x_0) f(V) \subseteq U.$$

Тогда $\forall W \in \mathcal{N}(g(f(x_0))) \exists V \in \mathcal{N}(x_0) g(f(V)) \subseteq g(U) \subseteq W$. ▲

Утверждение 51. (критерий Гейне) Пусть $f : X \rightarrow Y$, $x_0 \in \mathcal{L}im(X)$; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \in Y$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ для любой последовательности (x_n) такой, что $x_n \neq x_0$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1. \Rightarrow$ Поскольку $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\forall U \in \mathcal{N}(A) \exists V \in \mathcal{N}(x_0) f(V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$. Рассмотрим последовательность (x_n) такую, что $x_n \neq x_0$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Тогда при $n \geq n_0$ имеем $x_n \in V \setminus \{x_0\}$, следовательно $f(x_n) \in U$. Из произвольности U следует, что $f(x_n) \rightarrow A$.

$2. \Leftarrow$ Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$. Тогда имеется такая $U \in \mathcal{N}(A)$, что для любого $V_n = B(x_0, 1/n)$ имеем $f(V_n \setminus \{x_0\}) \not\subseteq U$. То есть найдётся $x_n \in V_n$, $x_n \neq x_0$, $f(x_n) \notin U$. Тогда $x_n \rightarrow x_0$, но $f(x_n) \not\rightarrow A$. Пришли к противоречию. ▲

Утверждение 52. (арифметические свойства предела) Пусть (X, d) — метрическое пространство. Тогда для функций f, g , действующих из X в $\mathbb{R}$, справедливы следующие формулы, если существуют пределы (в $\mathbb{R}$) в левых частях равенств:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x));$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x));$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} 1/f(x) = 1/\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, (предполагаем, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$.

1. Следует из неравенства $|(f(x) + g(x)) - (a + b)| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b|$.
2. Найдётся такая $V \in \mathcal{N}(x_0)$, что $g(V \setminus \{x_0\}) \subset B(b, 1)$. При $x \in V \setminus \{x_0\}$ имеем $|f(x)g(x) - ab| \leq |f(x)g(x) - ag(x)| + |ag(x) - ab| \leq (|b| + 1)|f(x) - a| + |a||g(x) - b|$. Из этих неравенств очевидно следует требуемое.

3. Найдётся такая $V \in \mathcal{N}(x_0)$, что $f(V \setminus \{x_0\}) \subset B(a, |a|/2)$. При $x \in V \setminus \{x_0\}$ имеем $\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|f(x) - a|}{|f(x)a|} \leq \frac{|f(x) - a|}{|a|(|a|/2)}$. Из этого неравенства очевидно следует требуемое. $\blacktriangle$

Утверждение 53. (о переходе к пределу в неравенстве) Пусть (X, d) — метрическое пространство, $x_0 \in \mathcal{L}im(X)$, функции f и g действуют из X в $\mathbb{R}$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, если эти пределы существуют и $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного. Пусть $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, $a - b = \varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим такие $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(x_0)$, что $f(V_1 \setminus \{x_0\}) \subset B(a, \varepsilon_0/2)$, $g(V_2 \setminus \{x_0\}) \subset B(b, \varepsilon_0/2)$. Тогда для любого $x \in V_1 \cap V_2 \setminus \{x_0\}$ имеем $f(x) > g(x)$. $\blacktriangle$

Утверждение 54. (лемма о зажатой функции) Пусть (X, d) — метрическое пространство, $x_0 \in \mathcal{L}im(X)$, $a \in \mathbb{R}$, функции f , g и h действуют из X в $\mathbb{R}$. Пусть $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$. Тогда существует предел функции g , причём $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим такие $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(x_0)$, что $f(V_1 \setminus \{x_0\}) \subset B(a, \varepsilon)$, $h(V_2 \setminus \{x_0\}) \subset B(a, \varepsilon)$. Тогда $g(V_1 \cap V_2 \setminus \{x_0\}) \subset B(a, \varepsilon)$. $\blacktriangle$

Определение 32. Фундаментальной последовательностью (последовательностью Коши) в метрическом пространстве (X, d) называется последовательность (x_n) , удовлетворяющая следующему условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon).$$

Замечание 19. Очевидно любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Определение 33. Метрическое пространство (X, d) называется *полным*, если любая последовательность Коши в нем имеет предел, содержащийся в X .

Пример 10. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $C[a, b]$ в равномерной метрике.

Подмножество $X' \subset X$ метрического пространства (X, d) называется *полным*, если (X', d) — полное пространство.

Определение 34. Метрическое пространство (X, d) называется *компактным*, если оно удовлетворяет следующему условию: для каждого покрытия $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ множества

X открытыми множествами (*открытого покрытия*) существует конечное подсемейство $\{U_\lambda\}_{\lambda \in H}$ ($H \subseteq L$ и H конечно), являющееся покрытием множества X .

Подмножество $X' \subset X$ метрического пространства (X, d) называется компактным (*компактом*), если (X', d) — компактное пространство.

Определение 35. Множество A называется *ограниченным*, если $A \subset B(a, r)$ для некоторых $a \in A$ и $r > 0$.

Определение 36. Множество A называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие множества A шарами радиуса ε .

Замечание 20. Можно считать, что центры шаров лежат в A .

Замечание 21. Очевидно любое вполне ограниченное множество является ограниченным.

Определение 37. Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств метрического пространства (X, d) называется *центрированным* в $M \subseteq X$, если пересечение M и любого конечного числа множеств из $\mathcal{F}$ непусто.

Теорема 12. (критерий компактности)

Пусть (X, d) — метрическое пространство (X, d) и $M \subseteq X$. Следующие условия эквивалентны.

1. Множество M компактно.
2. Пересечение любого семейства $\{C_\alpha\}$ замкнутых множеств, центрированных в M , имеет непустое пересечение с M .
3. Любая последовательность, содержащаяся в M , содержит сходящуюся в M подпоследовательность (т. е. предел подпоследовательности принадлежит M).
4. Множество M полно и вполне ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1 \Rightarrow 2$ Рассмотрим центрированное семейство замкнутых множеств $\{C_\alpha\}$. Пусть $U_\alpha = X \setminus C_\alpha$. Множества U_α открыты как дополнения к замкнутым. Если $(\cap_\alpha C_\alpha) \cap M = \emptyset$, то $\cup_\alpha U_\alpha = X \setminus \cap_\alpha C_\alpha \supseteq M$. Тогда из компактности M следует, что имеется конечное подпокрытие $M \subseteq U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k}$. Тогда $M \cap (C_{\alpha_1} \cap \dots \cap C_{\alpha_k}) = M \setminus (U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k}) = \emptyset$. Пришли к противоречию с центрированностью семейства $\{C_\alpha\}$ в M .

$2 \Rightarrow 3$ Рассмотрим произвольную последовательность (x_n) , $x_n \in M$, $A = \{x_n\}$. Пусть $a \in \mathcal{L}im(A) \cap M$. Тогда найдётся последовательность (y_k) в A такая, что $y_k \rightarrow a \in M$. Тогда (y_k) искомая сходящаяся подпоследовательность в (x_n) . Пусть $\mathcal{L}im(A) \cap M = \emptyset$. Тогда и для любого $k \in \mathbb{N}$ множество $A_k = \{x_n \mid n \geq k\}$ не имеет предельных точек в M . Очевидно семейство $\{\overline{A_k}\}$ центрировано, тогда по условию $\emptyset \neq M \cap (\bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{A_k}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} (M \cap \overline{A_k}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} (M \cap A_k) = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$. Любая точка $a \in \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$ входит в последовательность (x_n) бесконечное число раз и составляет подпоследовательность.

$3 \Rightarrow 4$ Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность (x_n) , $x_n \in M$. По условию она содержит сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow a \in M$. Тогда $x_n \rightarrow a$. Таким образом, множество M — полное. Пусть M не вполне ограничено. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ найдётся последовательность $x_n \in M$ такая, что $d(x_i, x_j) > \varepsilon$ при $i \neq j$. Очевидно из этой последовательности невозможно извлечь

сходящуюся подпоследовательность. Пришли к противоречию.

4 $\Rightarrow$ 1 Рассмотрим покрытие множества M открытыми множествами $\{U_\alpha\}$. Предположим из него нельзя извлечь конечное подпокрытие. Поскольку M вполне ограничено, то для любого $\varepsilon > 0$ множество M содержится в конечном числе шаров $B(x, \varepsilon)$. Без ограничения общности можно считать, что $x \in M$. Рассмотрим последовательность $\varepsilon_n = 1/2^n$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся шар $B(x_n, \varepsilon_n)$, $x_n \in M$, который не покрывается конечным числом множеств из $\{U_\alpha\}$ и $B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset B(x_n, 2\varepsilon_n)$. Последовательность (x_n) является фундаментальной и по условию имеет предел $a \in M$. Найдётся такое множество U_{α_0} , что $a \in U_{\alpha_0}$. Поскольку множество U_{α_0} открыто, то $B(a, \varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. В то же время для $\varepsilon_n < \varepsilon/3$ имеем $B(x_n, \varepsilon_n) \subset B(a, \varepsilon)$. Пришли к противоречию. $\blacktriangle$

Утверждение 55. 1. Компактное множество замкнуто. 2. Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть K — компактно. Предположим, что $a \in \mathcal{L}im(K)$. Тогда найдётся последовательность (x_n) , $x_n \in K$, $x_n \rightarrow a$. По свойству (3) компакта найдётся подпоследовательность x_{n_k} такая, что $x_{n_k} \rightarrow b \in K$. Тогда $a = b \in K$ и множество K замкнуто.

2. Пусть $C \subset K$, K — компактно и C — замкнуто. Рассмотрим произвольную последовательность (x_n) , $x_n \in C$. Поскольку (x_n) содержится также в K , то из неё можно извлечь сходящуюся к $a \in K$ подпоследовательность. Из замкнутости C следует, что $a \in C$. Тогда C — компактно по свойству (3). $\blacktriangle$

Пусть (X, d_1) и (Y, d_2) метрические пространства. Определим метрику в декартовом произведении $(X \times Y, d)$ следующим образом

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(d_1(x_1, x_2))^2 + (d_2(y_1, y_2))^2}.$$

Утверждение 56. Декартово произведение компактных множеств X, Y является компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n, y_n) \in X \times Y$. Из последовательности (x_n) можно извлечь сходящуюся к $a \in X$ подпоследовательность (x_{n_k}) . Из последовательности (y_{n_k}) можно извлечь подпоследовательность (y_{n_m}) сходящуюся к $b \in Y$. Тогда подпоследовательность $(x_{n_m}, y_{n_m}) \in X \times Y$ сходится к (a, b) . По свойству (3) пространство $X \times Y$ компактно. $\blacktriangle$

Следствие 22. Подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда замкнуто и ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. $\Leftarrow$ Если подмножество A ограничено, то оно содержится в декартовом произведении n отрезков. Тогда из утверждения о компактности замкнутого подмножества компакта оно компактно.

2. $\Rightarrow$ Если A компактно, то оно вполне ограничено (свойство (4)) и замкнуто. $\blacktriangle$

Утверждение 57. Образ $f(K)$ компакта $K \subset X$ при непрерывном отображении $f : K \rightarrow Y$ является компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ множества $f(K)$. Множества $f^{-1}(U_\alpha)$ составляют открытое покрытие множества K . Тогда найдётся

конечное подпокрытие $f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{\alpha_k}) \supseteq K$. Тогда $f(K) \subseteq U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k}$. ▲

Следствие 23. (теорема Вейерштрасса) Пусть $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывное отображение и K — компакт. Тогда найдутся такие $a, b \in K$, что $f(a) = \inf f(K)$ и $f(b) = \sup f(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множество $f(K)$ является компактным, то оно замкнуто и ограничено. Значит $-\infty < \inf f(K) \leq \sup f(K) < +\infty$ и $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. ▲

Определение 38. Метрическое пространство (X, d) называется *связным*, если из всех подмножеств X только *несобственные* подмножества $\emptyset$ и X являются одновременно открытыми и замкнутыми. Множество $A \subseteq X$ называется связным, если подпространство (A, d) связно.

Утверждение 58. Характеристическая функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ множества $A \subseteq X$ непрерывна тогда и только тогда, когда множество A открыто и замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Leftarrow$ Характеристическая функция f принимает два значения 0 и 1. По условию $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(1)$ открыты. Тогда прообраз любого множества открыт и следовательно f непрерывна.

$\Rightarrow$ Рассмотрим интервал I и отрезок C содержащие 1, но не 0. Если f непрерывна, то прообраз $f^{-1}(I) = f^{-1}(C) = A$ открыт и замкнут. ▲

Утверждение 59. Промежуток — связное множество в $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть промежуток I несвязное множество, тогда найдётся такое $A \subset I$, $A \neq \emptyset$, $A \neq I$, которое одновременно замкнуто и открыто в I . Рассмотрим характеристическую функцию f множества A . Она непрерывна и принимает на промежутке значения 0 и 1. Тогда по теореме Больцано — Коши о промежуточных значениях f принимает значение $1/2$. Пришли к противоречию. ▲

Утверждение 60. При непрерывном отображении образ связного множества связан.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть образ $f(X)$ отображения f содержит собственное открытое и замкнутое подмножество A . Тогда $f^{-1}(A)$ является собственным открытым и замкнутым подмножеством в X . ▲

Следствие 24. Пусть $\gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow X$ — параметрически заданная кривая. Тогда множество $\gamma(\langle a, b \rangle)$ связно.

Утверждение 61. (признак связности) Пусть для любых $x_1, x_2 \in X$ найдётся параметрически заданная кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ такая, что $\gamma(a) = x_1$ и $\gamma(b) = x_2$. Тогда X связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X содержит собственное открытое и замкнутое подмножество A . Рассмотрим $x_1 \in A$ и $x_2 \in X \setminus A$ и кривую γ такую, что $\gamma(a) = x_1$ и $\gamma(b) = x_2$. Поскольку $[a, b]$ — компакт, $\gamma([a, b])$ — компакт. Множества $\gamma([a, b]) \cap A$ и $\gamma([a, b]) \cap (X \setminus A)$ замкнуты. Тогда $\gamma([a, b]) \cap A$ является собственным открытым и замкнутым подмножеством в $\gamma([a, b])$. Пришли к противоречию со связностью $\gamma([a, b])$. ▲

Утверждение 62. (теорема о промежуточных значениях) Пусть (X, d) — связное метрическое пространство и $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное отображение. Тогда для любого $a \in [f(x_1), f(x_2)]$ найдётся такое $x_3 \in X$, что $f(x_3) = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in [f(x_1), f(x_2)]$ и $a \notin f(X)$. Рассмотрим $B = f^{-1}((-\infty, a)) = f^{-1}((-\infty, a])$. Поскольку f непрерывно, то B является открытым и замкнутым. Из условия множество B не пусто и не совпадает с X . ▲

Определение 39. Гомеоморфизмом метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) называется любое биективное отображение $g : X \rightarrow Y$, которое непрерывно вместе со своим обратным отображением.

Утверждение 63. Пусть (X, d_X) — компактное метрическое пространство и $g : X \rightarrow Y$ — непрерывное инъективное отображение в (Y, d_Y) . Тогда g — гомеоморфизм пространств (X, d_X) и $(g(X), d_Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что обратное отображение $g^{-1} : g(X) \rightarrow X$ является непрерывным. Рассмотрим любое замкнутое множество $A \subset X$. Оно компактно, тогда $g(A)$ компактно и, следовательно, замкнуто. Таким образом, прообраз любого замкнутого множества при отображении g^{-1} замкнут. Тогда g^{-1} является непрерывным по критерию непрерывности. ▲

Замечание 22. Топологические (которые могут быть сформулированы опираясь исключительно на понятие открытого множества) свойства множеств, в частности, компактность, связность не меняются при гомеоморфизме. В то время как полнота и вполне ограниченность могут не сохраняться при гомеоморфизме. Примером является гомеоморфизм $\operatorname{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 40. Изометрией метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) называется биективное отображение $h : X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию: $d_Y(h(x), h(x')) = d_X(x, x')$ для любых $x, x' \in X$.

Замечание 23. Очевидно метрические (которые могут быть сформулированы с помощью метрики) свойства изометричных пространств совпадают.

Определение 41. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется C -липшицевым, если

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq C d_X(a, b) \quad \forall a, b \in X,$$

константа C , $C > 0$, называется константой Липшица отображения f . Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется C -билипшицевым, ($C > 0$), если

$$C^{-1} d_X(a, b) \leq d_Y(f(a), f(b)) \leq C d_X(a, b) \quad \forall a, b \in X.$$

Утверждение 64. Любое липшицево отображение непрерывно, а билипшицево — гомеоморфизм.

Определение 42. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Отображение $f : X \rightarrow X$ называется сжимающим, если найдётся такое α , $1 > \alpha > 0$, что для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$.

Утверждение 65. (принцип сжимающих отображений) В полном метрическом пространстве сжимающее отображение имеет единственную неподвижную точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in X$. Определим последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ рекуррентно. Покажем, что последовательность (x_n) фундаментальна. Имеем $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$. Поэтому $d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$ при $m > n$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) < \varepsilon$. Рассмотрим предел фундаментальной последовательности $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Из непрерывности f имеем $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Пусть имеются две неподвижные точки $a, b \in X$. Тогда $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq \alpha d(a, b)$. Пришли к противоречию. $\blacktriangle$

Пример 11. Отображение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \arctg(x) - 2$, удовлетворяет неравенству $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, однако не имеет неподвижной точки.

Определение 43. Пусть (X, d_X) , (Y, d_Y) — метрические пространства. Функция $f : X \rightarrow Y$ называется *равномерно непрерывной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in X (d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon).$$

Утверждение 66. 1. Равномерно непрерывная функция непрерывна.

2. Функция удовлетворяющая условию Липшица равномерно непрерывна.

3. Если d — метрика на X , то для любого $y \in X$ функция $f(x) = d(x, y)$ равномерно непрерывна.

Теорема 13. (Кантора о равномерной непрерывности)

Пусть $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение компактного метрического пространства X в метрическое пространство Y . Тогда отображение f является равномерно непрерывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $x \in X$ найдётся такой шар $B(x, \delta_x)$, что $f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), \varepsilon/2)$. Из покрытия множества X шарами $B(x, \delta_x/2)$ выделим конечное подпокрытие $B(x_1, \delta_{x_1}/2), \dots, B(x_k, \delta_{x_k}/2)$. Определим $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{2} \min \delta_i$. Пусть $d(z_1, z_2) < \delta(\varepsilon)$. Найдётся такой x_i , что $z_1 \in B(x_i, \delta_{x_i}/2)$. Тогда $d_X(x_i, z_2) \leq d_X(x_i, z_1) + d_X(z_1, z_2) < \delta_{x_i}$ и, по построению, $d_Y(f(z_1), f(z_2)) \leq d_Y(f(z_1), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f(z_2)) < \varepsilon$. $\blacktriangle$

Утверждение 67. (о продолжении равномерно непрерывной функции на замыкание) Пусть $A \subset X$, Y — полное метрическое пространство и $f : A \rightarrow Y$ — равномерно непрерывное отображение. Тогда существует единственная равномерно непрерывная функция $\bar{f} : \bar{A} \rightarrow Y$ такая, что f — сужение $\bar{f}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in \bar{A} \setminus A$ и $x_n \rightarrow a$, $x_n \in A$. Рассмотрим последовательность $(f(x_n))$. Из равномерной непрерывности отображения f и фундаментальности последовательности (x_n) следует, что последовательность $(f(x_n))$ фундаментальна. Определим $\bar{f}(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Проверим корректность этого определения. Если $x'_n \rightarrow a$, то очевидно $d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$ и $d(f(x_n), f(x'_n)) \rightarrow 0$ из равномерной непрерывности f . Отсюда ясно, что продолжение $\bar{f}$ единственно.

Покажем, что отображение $\bar{f}$ равномерно непрерывно. Из условия имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in X (d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon).$$

Пусть $a, a' \in \bar{A}$ и $d(a, a') < \delta$. Найдутся последовательности $x_n \rightarrow a$, $x'_n \rightarrow a'$, $x_n, x'_n \in A$. Тогда $d_X(x_n, x'_n) < \delta$ при $n \geq n_0$. Имеем $d_Y(\bar{f}(a), \bar{f}(a')) \leq d_Y(\bar{f}(a'), f(x'_n)) + d_Y(\bar{f}(a), f(x_n)) + d_Y(f(x_n), f(x'_n))$. Поскольку для достаточно больших n расстояния $d_Y(\bar{f}(a'), f(x'_n))$ и $d_Y(\bar{f}(a), f(x_n))$ можно сделать сколь угодно малыми, а $d_Y(f(x_n), f(x'_n)) < \varepsilon$, функция $\bar{f}$ равномерно непрерывна. $\blacktriangle$

7. Нормированные векторные пространства

Определение 44. Векторным (линейным) пространством над полем $\mathbb{R}$ называется множество V , на котором определены операция $+$: $V \times V \rightarrow V$ сложения и операция $\cdot$: $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ умножения на элемент поля, которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1) для любых $x, y \in V$ справедливо равенство $x + y = y + x$;
- 2) для любых $x, y, z \in V$ справедливо равенство $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- 3) существует $\bar{0} \in V$, что $x + \bar{0} = x$ для любого $x \in V$;
- 4) для любого $x \in V$ существует единственный $-x \in V$ такой, что $-x + x = \bar{0}$;
- 5) для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x, y \in V$ справедливо равенство $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
- 6) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $x \in V$ справедливо равенство $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
- 7) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $x \in V$ справедливо равенство $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
- 8) для любого $x \in V$ и единицы $1 \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $1x = x$.

Равенства $0x = \bar{0}$ и $-x = (-1)x$ для любого $x \in V$ следуют из 6 и 8.

Определение 45. Нормой называется функция $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\|x\| \geq 0$ для любого $x \in V$ и если $\|x\| = 0$, то $x = \bar{0}$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x \in V$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in V$ (неравенство треугольника).

Определение 46. Нормированным векторным пространством $(V, \|\cdot\|)$ называется пара из векторного пространства V и определённой на нём нормы.

Утверждение 68. Любая норма задаёт на векторном пространстве метрику $d(x, y) = \|x - y\|$.

Таким образом, любое векторное нормированное пространство рассматривают как метрическое и переносят на него все понятия, введённые для метрических пространств.

Утверждение 69. Если $v_n \rightarrow a$ в $(V, \|\cdot\|)$, то $\|v_n\| \rightarrow \|a\|$ при $n \rightarrow \infty$.

Определение 47. Полное нормированное векторное пространство называют банаховым.

Определение 48. Скалярным произведением называется функция $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $(x, x) \geq 0$ и если $(x, x) = 0$, то $x = \bar{0}$;
2. $(x, y) = (y, x)$ для любых $x, y \in V$;
3. $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ для любых $x, y_1, y_2 \in V$;
4. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ для любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$.

Векторное пространство с фиксированным в нём скалярным произведением называется *евклидовым*.

Утверждение 70. Скалярное произведение определяет в векторном пространстве норму $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ задано скалярное произведение

$$((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

которое определяет евклидову норму и евклидову метрику. Евклидову норму вектора называют длиной вектора.

Определение 49. Пусть V_1 и V_2 — векторные пространства. *Линейным отображением* называется функция $A : V_1 \rightarrow V_2$, удовлетворяющая равенству

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

для любых $x, y \in V_1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Пример 12. 1. Евклидова норма $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$ в $\mathbb{R}^n$.

2. ℓ_p -Норма $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$ в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty)$.

3. ℓ_∞ -Норма $\|(x_1, \dots, x_k)\|_\infty = \max_i |x_i|$ в $\mathbb{R}^n$.

4. $C(X)$ с нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

5. $R[a, b]$ с нормой $\|f\| = \int_a^b |f|$ (факторизованное по функциям с нулевой нормой).

Определение 50. Две нормы $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ называют *эквивалентными* в векторном пространстве V , если найдётся такая константа $C \geq 1$, что для любого $x \in V$ справедливы неравенства $\frac{1}{C}\|x\|' \leq \|x\|'' \leq C\|x\|'$.

Теорема 14. (об эквивалентности норм) Все нормы в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, эквивалентны.

Доказательство. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$. Докажем, что f эквивалентна евклидовой норме. Из неравенства треугольника и неравенства Коши — Буняковского имеем $f((x_1, \dots, x_n)) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| f(e_i) \leq C \|(x_1, \dots, x_n)\|_2$, где $C = \|(f(e_1), \dots, f(e_n))\|_2$.

Функция f непрерывна в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ поскольку удовлетворяет условию Липшица $|f(x) - f(y)| \leq |f(x - y)| \leq C\|(x - y)\|_2$.

Рассмотрим единичную сферу в $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. Сфера замкнута, как прообраз точки при непрерывном отображении, и ограничена. Поэтому сфера компактна и непрерывная функция f достигает на сфере своего минимального значения. Таким образом $\inf_{x \in S^{n-1}} f(x) = c > 0$. Тогда $f(x) = f(\|x\|_2 \frac{x}{\|x\|_2}) = \|x\|_2 f(\frac{x}{\|x\|_2}) \geq c\|x\|_2$.

Таким образом, произвольная норма в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна евклидовой. Поскольку эквивалентность симметрична и транзитивна, то все нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны. $\blacktriangle$

Замечание 24. Ясно, что пределы последовательностей в $\mathbb{R}^n$, а также пределы функций, действующих из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, не зависят от того, какая норма задана в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$.

Замечание 25. В бесконечномерном векторном пространстве единичный шар не компактен. Например, в $C[0, 1]$ можно рассмотреть последовательность кусочно-линейных функций $f_n(x)$, каждая из которых удовлетворяет равенствам $f_n(1/n) = 1$, $f_n(1/m) = 0$ при $m \neq n$ и $f_n([0, 1]) = [0, 1]$. Очевидно, $\|f_n\|_C = 1$ и $\|f_n - f_m\|_C = 1$ при $m \neq n$. Из последовательности (f_n) нельзя извлечь сходящейся подпоследовательности.

Утверждение 71. (координатный критерий сходимости последовательности) Последовательность векторов (x_n) , где $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^k$, сходится к $a = (a^1, a^2, \dots, a^k) \in \mathbb{R}^k$ при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $x_n^i \rightarrow a^i$ при $n \rightarrow \infty$ для любых $i = 1, \dots, k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим определение сходимости последовательности в норме ℓ_∞ . Она совпадает с покоординатной сходимостью. $\blacktriangle$

Утверждение 72. (координатный критерий предела функции) Пусть $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ и $f = (f_1, \dots, f_k)$. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = (A_1, \dots, A_k)$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = A_i$ при любых $i = 1, \dots, k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что в $\mathbb{R}^k$ задана ℓ_∞ -норма. Определение предела функции f эквивалентно наличию пределов координатных функций f_i , $i = 1, \dots, k$. $\blacktriangle$

Определение 51. Ряд $\sum x_n$ в нормированном пространстве V , $x_n \in V$ называют *нормально сходящимся*, если сходится ряд $\sum \|x_n\|$.

Утверждение 73. В банаховом пространстве любой нормально сходящийся ряд сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность частичных сумм $s_n = \sum_{i=0}^n x_i$ нормально сходящегося ряда. Из неравенства треугольника имеем $\|s_n - s_m\| \leq \sum_{i=m+1}^n \|x_i\|$. Последовательность (s_n) фундаментальна, поскольку вещественный ряд $\sum \|x_n\|$ удовлетворяет условию Коши. В банаховом пространстве любая фундаментальная последовательность имеет предел. $\blacktriangle$

8. Канторово множество

Определение 52. Пусть $I_n = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq 3^n, i = 3k + 1 \text{ для некоторого } k \geq 0\}$ и $D_n = \bigcup_{i \in I_n} (\frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n})$. Множество $A = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ называется *канторовым* множеством.

Утверждение 74. (топологические свойства канторова множества)

1. Канторово множество замкнуто ($A = \bar{A}$).
2. Все точки канторова множества являются граничными ($\text{Gr}(A) = A$).
3. Все точки канторова множества являются предельными ($\mathcal{L}im(A) = A$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из того, что множества D_n открытые следует, что множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ открыто. Множество A замкнуто как дополнение к открытому.

2. Нетрудно видеть, что множество A не содержит интервалов, следовательно, в любом интервале (элементарной окрестности) имеются точки из дополнения к A .

3. Следует из утверждения об арифметических свойствах канторова множества.

▲

Утверждение 75. Мера Лебега канторова множества равна 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что $A \subset B_m$, $B_m = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^m D_n$ и каждое множество B_m есть конечное объединение отрезков. Имеем $B_{m+1} = B_m \setminus D_{m+1}$, поэтому $\mu(B_{m+1}) = \frac{2}{3}\mu(B_m)$. Таким образом, $\mu(B_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. ▲

Утверждение 76. (об арифметических свойствах канторова множества) Канторово множество состоит из всех чисел отрезка $[0, 1]$, которые можно записать в троичной системе исчисления без использования цифры 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Гелбаум, Олмстед. с.113] Нетрудно видеть, что множество D_n состоит из всех чисел из $[0, 1]$ в троичной записи которых на n -ом месте находится цифра 1, за исключением рациональных чисел вида $0.\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}100\dots$ (левых концов интервалов). Но эти числа имеют альтернативную троичную запись $0.\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}022\dots$. Таким образом, $B_m = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^m D_n$ состоит в точности из чисел, которые могут быть записаны в троичной системе без использования 1 в первых n позициях "после запятой". Очевидно, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. ▲

Следствие 25. Канторово множество имеет мощность континуум.

Следствие 26. (самоподобность канторова множества) Пусть A — канторово множество, тогда $3A = A \cup (2 + A)$.

Определение 53. Пусть A — канторово множество, $A = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, причём

$D_n \setminus \bigcup_{k < n} D_k = \bigcup \left(\frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2\delta_i}{3^i}, \frac{2}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2\delta_i}{3^i} \right)$, где объединение берётся по всем наборам $(\delta_1, \dots, \delta_{n-1}) \in \{0, 1\}^{n-1}$ за исключением набора $(1, \dots, 1)$. Определим функцию $l : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ равенствами:

$$l(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\delta_i}{2^i}, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2\delta_i}{3^i}, \frac{2}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2\delta_i}{3^i} \right); \\ \sup_{y \in (0, x) \setminus A} l(y), & \text{если } x \in A. \end{cases}$$

Функция l называется канторовой лестницей.

Утверждение 77. Канторова лестница l монотонна, непрерывна и $l'(x) = 0$ за исключением множества меры 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Гелбаум, Олмстед. с.126] Функция l монотонна по определению и $l'(x) = 0$ за исключением точек канторова множества. Функция l явля-

ется непрерывной как предел равномерно сходящейся последовательности кусочно-линейных функций l_m . Функция l_m определена равенством

$$l_m(x) = l(x) = \frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\delta_i}{2^i}, \text{ если } n \leq m, x \in \left(\frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2\delta_i}{3^i}, \frac{2}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2\delta_i}{3^i} \right)$$

и непрерывно и кусочно-линейно продолжена при $x \in [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^m D_n$. $\blacktriangle$

Утверждение 78. (о кривой Пеано) Существует сюръективная непрерывная функция $\pi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$. Никакая функция, удовлетворяющая этим свойствам не является инъективной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{0, 1\}^\infty$ — множество бесконечных двоичных последовательностей. Определим сюръективную функцию $f : \{0, 1\}^\infty \rightarrow [0, 1]^2$ следующим образом. Пусть $a = 0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots \in \{0, 1\}^\infty$. Тогда $f_1(a) = 0, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n+1} \dots$ и $f_2(a) = 0, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n} \dots$. Пусть A — канторово множество. Определим функцию $g : A \rightarrow \{0, 1\}^\infty$ следующим образом. Пусть $0, \beta_1 \dots \beta_n \dots$ — представление числа $a \in A$ в виде бесконечной троичной дроби, тогда $g(a)$ определим как число, имеющее двоичное представление $0, \beta'_1 \dots \beta'_n \dots$, где $\beta'_i = \beta_i/2$. Из арифметического свойства канторова множества следует, что $g(A) = \{0, 1\}^\infty$ и, следовательно, $f(g(A)) = [0, 1]^2$. Функция $f \circ g$ непрерывна на A , поскольку если $|a - b| < 3^{-n}$ для двух точек $a, b \in A$, то совпадают первые n символов последовательностей $g(a)$ и $g(b)$. Множество $[0, 1] \setminus A$ является счётным объединением непересекающихся интервалов. Продолжим функцию $f \circ g$ кусочно-линейно на каждом из этих интервалов. Получим искомую функцию π .

Пусть сюръективная непрерывная функция $\pi' : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ является инъективной. Тогда π' — гомеоморфизм. При удалении из области определения точки (например, $x = 1/2$) и её образа из области значений, гомеоморфизм сохраняется. Однако, множество $[0, 1] \setminus \{1/2\}$ несвязно, а $[0, 1]^2 \setminus \{\pi'(1/2)\}$ связно. Пришли к противоречию с сохранением связности при гомеоморфизме. $\blacktriangle$

Утверждение 79. Пусть множество A^* построено аналогично канторову множеству посредством удаления на n -м шаге из каждого отрезка центрального интервала, длина которого в 2^{n+1} раз меньше длины этого отрезка. Тогда A^* не является множеством нулевой меры Лебега.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Гелбаум, Олмстед. с.116] Достаточно показать, что отрезок $[0, 1]$ нельзя покрыть интервалами, суммарная длина которых меньше 1. $\blacktriangle$

Утверждение 80. Пусть $f \in R[a, b]$. $\int_a^b |f| = 0$ тогда и только тогда, когда функция f равняется нулю почти всюду (за исключением множества меры 0) на отрезке $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $f \in R[a, b]$ и равняется нулю почти всюду на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим $A_{|f|} = \left\{ \int_a^b \varphi dx \mid \varphi \in \text{Step}[a, b], \forall x \in [a, b] \varphi(x) \leq |f(x)| \right\}$.

Очевидно, $\sup(A_{|f|}) = 0$. Тогда $\int_a^b |f| = 0$.

Если $\int_a^b |f| = 0$, то множество $F_n = \{x \in [a, b] \mid |f(x)| > 1/n\}$ имеет меру нуль для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому функция $|f|$ равняется нулю почти всюду на отрезке $[a, b]$. $\blacktriangle$

Утверждение 81. Пространство $R[0, 1]$ неполно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично множествам B_m , определённым при построении канторова множества A определим множества B_m^* для множества A^* . Пусть f_m — характеристическая функция множества B_m^* . Нетрудно видеть, что последовательность ступенчатых функций f_m фундаментальна в $R[0, 1]$. Предположим существует такая $f \in R[0, 1]$, что $\int_0^1 |f - f_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Покажем, что на любом интервале $(a, b) \subset [0, 1] \setminus A^*$ функция f равняется 0 почти всюду. Пусть $(a, b) \subset [0, 1] \setminus B_m^*$. Имеем $\int_a^b |f - f_m| = \int_a^b |f| = 0$.

Множество A^* совпадает со своей границей, следовательно, в окрестности каждой точки из A^* найдутся точки, в которых $f(x) = 0$. Рассмотрим $C = \{x \in A^* \mid f(x) \neq 0\}$. Тогда f разрывна в точках из C и по критерию Лебега множество C имеет меру нуль. Тогда $\int_0^1 |f_n| = \int_0^1 |f_n| - \int_0^1 |f| \leq \int_0^1 |f - f_n| \rightarrow 0$. Тогда $\mu(B_n^*) \rightarrow 0$, следовательно, $\mu(A^*) = 0$ по определению. Пришли к противоречию. $\blacktriangle$

Утверждение 82. Существует липшицева, всюду дифференцируемая функция, производная которой не интегрируема по Риману.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Гелбаум, Олмстед. с.139] Пусть $g(x) = x^2 \sin(1/x)$. Для любого числа $c > 0$ определим $x_c = \max\{x \in (0, c) \mid g'(x) = 0\}$. Зададим функцию $g_c : (0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ равенствами

$$g_c(x) = \begin{cases} g(x), & \text{при } 0 < x < x_c, \\ g(x_c), & \text{при } x_c \leq x \leq c. \end{cases}$$

Пусть $A^* = [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right)$ — канторово множество не нулевой меры. Определим функцию $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ равенствами

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in B; \\ g_c(x - a_n), & \text{при } a_n < x < (a_n + b_n)/2, c = (b_n - a_n)/2; \\ g_c(b_n - x), & \text{при } (a_n + b_n)/2 \leq x < b, c = (b_n - a_n)/2. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция f дифференцируема в любой точке $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$.

Из асимптотики $g(x) = x^2 \sin(1/x) = O(x^2)$ при $x \rightarrow 0$ следует, что Функция f дифференцируема на множестве A^* и $f'(x) = 0$ в любой точке $x \in A^*$.

Поскольку $g'(x) = -\cos(1/x) + 2x \sin(1/x)$ производная $g'(x)$ принимает значения больше $1/2$ в любой окрестности нуля. Поэтому функция f' разрывна в любой точке $x \in A^*$ и по критерию Лебега не интегрируема по Риману.

Однако, функция f удовлетворяет условию Липшица и является первообразной Римана функции f' . $\blacktriangle$