

1. Дифференцирование функций многих переменных

Всюду в этом разделе предполагаем, что $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{N}(a)$ и $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 1. Производной функции f в точке $a \in U$ по направлению $v \in \mathbb{R}^n$ называется $\partial_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \varphi'(0)$, где $\varphi(t) = f(a+tv)$ — функция одной вещественной переменной, определённая в некоторой окрестности нуля.

Если $v = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, то производная функции f по направлению e_i называется i -ой частной производной функции f и обозначается через $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ или $D^i f$.

Замечание 1. Поскольку производные по направлению и частные производные определяются через производную функцию одной переменной для них верны формулы дифференцирования суммы и произведения.

Определение 2. Функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в точке $a \in U$, если

$$f(a+h) = f(a) + L\langle h \rangle + o(\|h\|), \text{ при } h \rightarrow 0,$$

где $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — линейное отображение.

Определение 3. Линейное отображение L называется дифференциалом функции f в точке a и обозначается через $df(a)$.

Множество функций, дифференцируемых в точке a обозначим через $D(a)$.

Замечание 2. Поскольку все нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны, в определении дифференцируемости неважно какая конкретно выбрана норма вектора приращения $\|h\|$. Более того, сходимость и непрерывность в $\mathbb{R}^n$ не зависит от выбора нормы.

Замечание 3. Любое линейное отображение является своим дифференциалом. Дифференциал линейного (и аффинного) отображений не зависит от точки.

Утверждение 1. Если дифференциал функции в точке существует, то он единственный.

Утверждение 2. Пусть функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ является дифференцируемой в точке $a \in U$, тогда f непрерывна в точке a и имеет в точке a производные по любому направлению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность функции следует из непрерывности линейного отображения. Из определения дифференцируемости имеем $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = L\langle v \rangle$. ▲

Проектирование на i -ю координату является линейным отображением и обозначается dx_i , т. е. $dx_i\langle a \rangle = a_i$.

Утверждение 3. (координатное представление дифференциала) Пусть функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ является дифференцируемой в точке $a \in U$, тогда $df(a) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(a+h) = f(a) + L\langle h \rangle + o(\|h\|)$, при $h \rightarrow 0$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = L\langle e_i \rangle$. Таким образом, на любом базисном векторе линейные отображения L и $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ совпадают. Тогда они равны. ▲

Из утверждений 2 и 3 видно, что $\partial_v f(a) = df(a)\langle v \rangle = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i$.

Лемма 1. (об оценке приращения) Пусть функция $f : B(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет все частные производные в каждой точке и $\sup_{x \in B(a, r), i=1, \dots, n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| = M < \infty$. Тогда $|f(b) - f(a)| \leq M \|b - a\|_1$ для любой точки $b \in B(a, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим набор точек $x^0 = a, x^k = (b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$. Очевидно, $x^k \in B(a, r)$ для любого $k = 0, \dots, n$.

Рассмотрим $\psi_k(t) = f(b_1, \dots, b_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n)$.

Нетрудно видеть, что $\psi'_k(z) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_1, \dots, b_{k-1}, z, a_{k+1}, \dots, a_n)$. Из теоремы о приращениях для функции одной переменной имеем $|f(x^k) - f(x^{k-1})| = |\psi_k(b_k) - \psi_k(a_k)| \leq \sup |\psi'_k(z)| |b_k - a_k|$. Просуммировав это неравенство по всем $k = 1, \dots, n$, получим $|f(b) - f(a)| \leq M \|b - a\|_1$. ▲

Теорема 1. (достаточное условие дифференцируемости) Пусть все n частных производных функции $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ существуют и непрерывны в точке $a \in U$. Тогда f дифференцируема в точке a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим шар $B(a, r) \subset U$ и определим в этом шаре функцию $g(x) = f(x) - f(a) - \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)$. Имеем $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Из непрерывности частных производных следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что $|\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)| < \varepsilon$ при $\|x - a\| < \delta$. Тогда по лемме об оценке приращения $|g(x) - g(a)| \leq \varepsilon \|x - a\|_1$. Т. е. $f(x) - f(a) - \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) = o(\|x - a\|_1)$ при $x \rightarrow a$. ▲

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ при $(x, y) \neq (0, 0)$ и $f(0, 0) = 0$. Нетрудно показать, что функция f имеет обе частные производные в любой точке, но разрывна и тем более не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x, y) = xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ при $(x, y) \neq (0, 0)$ и $f(0, 0) = 0$. Нетрудно показать, что частные производные функции f разрывны в нуле, однако она всюду дифференцируема.

Утверждение 4. (арифметические свойства дифференциала) Пусть $f, g \in D(a)$. Тогда $f + g, fg \in D(a)$, причём $d(f + g) = df + dg$ и $d(fg) = f dg + g df$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $f(a + h) = f(a) + df(a)\langle h \rangle + o(\|h\|)$ и $g(a + h) = g(a) + dg(a)\langle h \rangle + o(\|h\|)$ при $h \rightarrow 0$.

Докажем правило дифференцирования произведения. Тогда $f(a + h)g(a + h) - f(a)g(a) = f(a + h)g(a + h) - f(a + h)g(a) + f(a + h)g(a) - f(a)g(a) = f(a + h)(dg(a)\langle h \rangle + o(\|h\|)) + g(a)(df(a)\langle h \rangle + o(\|h\|)) = (f(a + h) - f(a))(dg(a)\langle h \rangle + o(\|h\|)) + f(a)dg(a)\langle h \rangle + g(a)df(a)\langle h \rangle + o(\|h\|)$. Поскольку дифференцируемая функция является непрерывной и линейное отображение ограничено на единичной сфере имеем $(f(a + h) - f(a))dg(a)\langle h \rangle = \|h\|(f(a + h) - f(a))dg(a)\langle \frac{h}{\|h\|} \rangle = \|h\|o(1)$. Таким образом, $f(x)g(x) = f(a)g(a) + f(a)dg(a)\langle h \rangle + g(a)df(a)\langle h \rangle + o(\|h\|)$.

Правило дифференцирования суммы доказывается аналогично. ▲

Заметим, что арифметические свойства дифференциала следуют из арифметических свойств производной функции одной переменной, поскольку дифференциал можно выразить через частные производные.

Задача 1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое открытое множество и $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемая на U функция. Докажите, что для любых $x, y \in U$ найдётся такая точка $\xi \in U$, что справедливо равенство $f(x) - f(y) = df(\xi)\langle x - y \rangle$.

Перейдём к рассмотрению функций $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m > 1$. Такую функцию можно представить вектор $(f_1, \dots, f_m)$ из функций действующих из U в $\mathbb{R}$. Определения дифференцируемости, дифференциала и частных производных распространяются на вектор-функции. В частности, функция f называется дифференцируемой в точке $a \in U$, если

$$f(a + h) = f(a) + df(a)\langle h \rangle + o(\|h\|), \text{ при } h \rightarrow 0,$$

где $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение. Из координатного критерия предела функции следует, что дифференцируемость вектор-функции эквивалентна дифференцируемости всех её компонент. Частной производной функции f называются частные производные её компонент $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

Любое линейное отображение можно задать матрицей и действие линейного отображения на вектор можно представить как умножение матрицы на вектор-столбец. Как было показано выше матрица $1 \times n$ соответствующая дифференциалу отображения $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$, для каждого $j = 1, \dots, m$, состоит из частных производных $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$. Поскольку линейное отображение $df(a)$ представляет собой вектор, составленный из линейных отображений $df_j(a)$, $j = 1, \dots, m$, то ему соответствует матрица $J_f(a)$ размера $m \times n$, составленная из частных производных $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, которая называется *матрицей Якоби* отображения f .

Утверждение 5. (о дифференциале композиции) Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{N}(a)$, и $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ дифференцируема в точке $f(a) \in V \subset \mathbb{R}^m$, $V \in \mathcal{N}(f(a))$. Тогда композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке $a \in U$, причём $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения дифференцируемости имеем

$$f(x) = f(a) + df(a)\langle x - a \rangle + \alpha(x)\|x - a\|, \text{ где } \alpha(x) = o(1) \text{ при } x \rightarrow a,$$

$$g(y) = g(f(a)) + dg(f(a))\langle y - f(a) \rangle + \beta(y)\|y - f(a)\|, \text{ где } \beta(y) = o(1) \text{ при } y \rightarrow f(a).$$

Тогда

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(a)) &= dg(f(a))\langle f(x) - f(a) \rangle + \beta(f(x))\|f(x) - f(a)\| = \\ &= dg(f(a))\langle df(a)\langle x - a \rangle + \alpha(x)\|x - a\| \rangle + \beta(f(x))\|df(a)\langle x - a \rangle + \alpha(x)(\|x - a\|)\| = \\ &= dg(f(a)) \circ df(a)\langle x - a \rangle + \|\alpha(x)\|(\|x - a\|)dg(f(a))\langle \alpha(x)/\|\alpha(x)\| \rangle + \\ &\quad + \beta(f(x))\|x - a\|\|df(a)\langle (x - a)/\|x - a\| \rangle + \alpha(x)\|. \end{aligned}$$

Поскольку $\beta(f(x)) = o(1)$ при $x \rightarrow a$ по теореме о пределе композиции и линейные отображения $df(a)$ и $dg(f(a))$ ограничены на единичных шарах, получаем требуемое.

▲

Следствие 1. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{N}(a)$, и $f^{-1} : f(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке $f(a) \in U \subset \mathbb{R}^n$, $f(U) \in \mathcal{N}(f(a))$. Тогда $df^{-1}(f(a)) = (df(a))^{-1}$.

Ниже будет доказано, что условия существования и дифференцируемости обратного отображения в данном утверждении избыточны. Т. е. можно доказать, что из наличия невырожденного дифференциала следует существование локально обратного дифференцируемого отображения.

Определение 4. Функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *дважды дифференцируемой* в точке $a \in U$, если все частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ существуют в некоторой окрестности точки a и дифференцируемы в точке a .

Частные производные частных производных функции f обозначаются $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_1}}$ и называются частными производными второго порядка. Аналогично определяются *частные производные k -го порядка* функции f как частные производные производных $(k - 1)$ -го порядка.

Определение 5. Функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *k раз дифференцируемой* в точке $a \in U$, если все её частные производные $(k - 1)$ -го порядка существуют в некоторой окрестности точки a и дифференцируемы в точке a .

Множество функций дифференцируемых k раз в точке a будем обозначать через $\mathcal{D}^k(a)$ и дифференцируемых k раз в каждой точке множества U будем обозначать через $\mathcal{D}^k(U)$.

Теорема 2. (о равенстве смешанных производных) Пусть функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ имеет дифференцируемые в точке $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{N}(a)$, частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}$ и $\frac{\partial f}{\partial x_{i_2}}$. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $g(u, v) = f(a_1, \dots, a_{i_1-1}, a_{i_1} + u, \dots, a_{i_2} + v, a_{i_2+1}, \dots, a_n) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a)u - \frac{\partial f}{\partial x_{i_2}}(a)v$. Очевидно $g(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial u}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = 0$. Кроме того, $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a_1, \dots, a_{i_1-1}, a_{i_1} + u, \dots, a_{i_2} + v, a_{i_2+1}, a_n) - \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a)$ и аналогичное равенство имеется для дифференцирования по переменной v . Таким образом, соответствующие частные производные функций f и g существуют и дифференцируемы одновременно, а равенство $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(a)$ эквивалентно равенству $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(0, 0) = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(0, 0)$. Имеем $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0)u + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(0, 0)v + \alpha(u, v)$ и $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(0, 0)u + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(0, 0)v + \beta(u, v)$, где $\alpha(u, v) = o((u, v))$ и $\beta(u, v) = o((u, v))$ при $(u, v) \rightarrow (0, 0)$.

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Найдётся такое $\delta > 0$, что $\frac{\partial g}{\partial u}$ и $\frac{\partial g}{\partial v}$ определены в шаре $B(0, \delta)$, причём $|\alpha(u, v)| < \varepsilon \max(|u|, |v|)$, $|\beta(u, v)| < \varepsilon \max(|u|, |v|)$ при $(u, v) \in B(0, \delta)$.

Оценим величину $g(s, s)$, $(s, s) \in B(0, \delta)$ двумя способами. Оценим выражения $g(s, s) - g(s, 0)$ и $g(s, s) - g(0, s)$ и $g(0, s)$ через частные производные.

Пусть $\phi_1(v) = g(s, v) - g(s, 0) - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(0, 0)sv - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(0, 0)\frac{v^2}{2}$. Имеем $\phi_1'(v) = \frac{\partial g}{\partial v}(s, v) - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(0, 0)s - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(0, 0)v = \beta(s, v)$. Тогда $|\phi_1'(v)| \leq s\varepsilon$ и $|\phi_1(s) - \phi_1(0)| = |g(s, s) - g(s, 0) - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(0, 0)s^2 - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(0, 0)\frac{s^2}{2}| < \varepsilon s^2$.

Пусть $\phi_2(u) = g(u, 0) - \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0)\frac{u^2}{2}$. Имеем $\phi_2'(u) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, 0) - \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0)u = \alpha(u, 0)$. Тогда $|\phi_2'(u)| \leq s\varepsilon$ и $|\phi_2(s) - \phi_2(0)| = |g(s, 0) - \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0)\frac{s^2}{2}| < \varepsilon s^2$.

Имеем $|g(s, s) - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(0, 0)s^2 - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(0, 0)\frac{s^2}{2} - \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0)\frac{s^2}{2}| < 2\epsilon s^2$.

Аналогичным образом, оценивая выражения $g(s, s) - g(0, s)$ и $g(0, s)$ через частные производные, получим $|g(s, s) - \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(0, 0)s^2 - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(0, 0)\frac{s^2}{2} - \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0)\frac{s^2}{2}| < 2\epsilon s^2$.

Тогда $|\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(0, 0) - \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(0, 0)| < 4\epsilon$. Из произвольности $\epsilon > 0$ следует равенство смешанных частных производных. ▲

Следствие 2. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ k раз дифференцируема в точке $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{N}(a)$. Тогда частные производные до порядка k включительно функции f в точке a , которые отличаются только порядком дифференцирования, равны.

Задача 2. Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ имеет непрерывные в $a \in \mathbb{R}^2$ частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Докажите равенство $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.

Определение 6. Мультииндексом называется набор натуральных чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Порядком мультииндекса называется $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Факториалом мультииндекса называется число $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$.

Введём обозначение $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}(\dots(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}(f))\dots)$ для частной производной порядка $|\alpha|$ функции f , которое будем использовать, когда результат дифференцирования не зависит от порядка.

Утверждение 6. (о свойствах мультииндекса)

1. Число различных слов длины $|\alpha|$, содержащих по α_i вхождений i -ой буквы, равно мультиномиальному коэффициенту $\frac{|\alpha|!}{\alpha!}$.

2. $(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha$, где $x^\alpha = x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n}$.

3. Для k раз дифференцируемой функции f при применении k раз дифференциального оператора $(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n})f = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n$ справедливо равенство $(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n})^k f = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} h^\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если размерность мультииндекса 2, то утверждение следует из свойств биномиальных коэффициентов. Предположим, что для слов, содержащих n различных букв, утверждение доказано и мощность соответствующего множества равна A . Очевидно, число слов, в которых n -ая буква встречается α'_n раз, а $(n+1)$ -ая буква встречается α'_{n+1} , где $\alpha'_n + \alpha'_{n+1} = \alpha_n$, равна $A \frac{\alpha_n!}{\alpha'_n! \alpha'_{n+1}!}$. Отсюда следует, что формула верна и для слов, содержащих $n+1$ различную букву.

2. Доказательство аналогично доказательству бинома Ньютона.

3. Доказательство по индукции. Шаг индукции следует из равенства

$$(x_1 + \dots + x_n) \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{|\beta|=k+1} \frac{|\beta|!}{\beta!} x^\beta. \quad \blacktriangle$$

Теорема 3. (формула Тейлора) Пусть функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ k раз дифференцируема в точке $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{N}(a)$. Тогда $f(a+h) = \sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(a) h^\alpha + o(\|h\|^k)$ при $\|h\| \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать формулу Тейлора индукцией по k . При $k=1$ формула Тейлора совпадает с определением дифференцируемости. Пусть

при $k - 1$ формула Тейлора доказана и, в частности, она справедлива для частных производных функции f . Рассмотрим функцию $\psi(h) = f(a + h) - \sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) h^\alpha$.

Применяя теорему о равенстве смешанных производных, имеем $\frac{\partial \psi}{\partial h_j}(h) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + h) - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{|\beta|=i} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta}(a) h^\beta$, поскольку любой мультииндекс β порядка i может быть единственным образом представлен как $\beta = \alpha - e_j$, где $|\alpha| = i + 1$ и $\alpha_j > 0$. По предположению индукции $\frac{\partial \psi}{\partial h_j}(h) = o(\|h\|^{k-1})$. Тогда по лемме о приращении $|\psi(h) - \psi(0)| = o(\|h\|^{k-1}) \|h\|_1 = o(\|h\|^k)$ при $\|h\| \rightarrow 0$. $\blacktriangle$

Многочлен $\sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) h^\alpha$ называется *полиномом Тейлора степени k функции f в точке a* .

Задача 3. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет непрерывные частные производные и $f(0) = 0$. Докажите, что найдутся такие непрерывные функции $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, что $f(x) = x_1 g_1(x) + \dots + x_n g_n(x)$ и $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ при $i = 1, \dots, n$.

Утверждение 7. (*о единственности полинома Тейлора*)

1. $h^\alpha = o(\|h\|^k)$ при $h \rightarrow 0$ если и только если $|\alpha| > k$.
2. Полином Тейлора степени k функции f в точке a единственный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Поскольку все нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны, достаточно рассмотреть $\|h\|_\infty^k$. Очевидно $|h^\alpha| \leq \|h\|_\infty^{|\alpha|} = o(\|h\|^k)$ при $|\alpha| > k$. Если $|\alpha| \leq k$, то асимптотическое соотношение не выполняется для последовательности $h_1 = \dots = h_n = \frac{1}{m}$ при $m \rightarrow \infty$.

2. Предположим, что многочлен Тейлора не единственный. Рассмотрим разность двух многочленов. Имеем $p(h) = o(\|h\|^k)$, где p — многочлен степени не выше k . Рассмотрим произвольный вектор $v \in \mathbb{R}^n$ и $\varphi(t) = p(tv)$ — многочлен степени не выше k одной переменной, причём $\varphi(t) = o(t^k)$ при $t \rightarrow 0$. Тогда $\varphi(t) \equiv 0$ и $p(v) = 0$. $\blacktriangle$

Дифференциал $df(a)$ функции $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ является линейным отображением действующим из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, т. е. можно рассмотреть отображение $df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, где $\mathcal{L}(X, Y)$ — множество линейных отображений из векторного пространства X в векторное пространство Y . Здесь предполагаем, что множество U открыто.

Множество $\mathcal{L}(X, Y)$ с естественным образом определёнными операциями сложения и умножения на скаляр является векторным пространством, причём $\dim(\mathcal{L}(X, Y)) = \dim(X) \dim(Y)$. Таким образом, для отображения df можно определить дифференциал $d^2 f(a) = d(df)(a)$ как главную линейную часть приращения, т. е. элемент пространства $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$. Известно, что пространство $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ линейно изоморфно пространству $\mathcal{L}(X \times X, Y)$. Изоморфизм определяется в соответствии со следующим равенством

$$(\tilde{L}\langle u \rangle)\langle v \rangle = L\langle u, v \rangle,$$

где $\tilde{L} \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ и $L \in \mathcal{L}(X \times X, Y)$ соответствует $\tilde{L}$ при изоморфизме. Далее нам будет удобно рассматривать $d^2 f(a)$ как элемент пространства $\mathcal{L}(X \times X, Y)$, т. е. отождествлять с его образом при этом линейном изоморфизме.

По индукции определяется k -ый дифференциал отображения f из равенства

$d^{k+1}f(a) = d(d^k f)(a)$. Пусть $df(a) \in \mathcal{L}(X, Y)$, аналогично сказанному выше, будем полагать, что $d^k f(a) \in \mathcal{L}(X^k, Y)$.

Элементы $L \in \mathcal{L}(X \times X, Y)$ называются *билинейными формами*. В случае, когда $Y = \mathbb{R}$ билинейная форма задаётся матрицей и $L\langle u, v \rangle = (\bar{L}u, v)$, где $\bar{L}$ — соответствующая квадратная матрица. При $k > 2$ отображение L можно задать тензором порядка k .

В случае когда в качестве аргументов билинейной формы u и v рассматриваются только одинаковые вектора, сужение билинейной формы называется *квадратичной формой*. Любую квадратичную форму можно задать оператором $(\bar{L}u, u)$ с симметричной матрицей $\bar{L}$.

Рассмотрим действие $d^2 f(a)\langle h, h \rangle$ второго дифференциала $d^2 f$ на векторе приращения h . По определению $d^2 f(a)$ определяет некоторую квадратичную форму. Аналогично, действие дифференциала $d^k f(a)$ порядка k на векторе приращения h определяет однородный полином степени k (переменными являются компоненты вектора приращения). Отображение, ставящее в соответствие каждой точке некоторого открытого множества $U \in \mathbb{R}^n$ однородный полином, будем называть *полиномиальной формой*.

Пусть α мультииндекса порядка k размерности n . Определим отображение dx^α на векторе $h \in \mathbb{R}^n$ равенством $dx^\alpha\langle h^k \rangle = dx^\alpha\langle \underbrace{h, \dots, h}_k \rangle = h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}$. Поскольку каждый

однородный многочлен является суммой мономов, любая полиномиальная форма представляет собой линейную комбинацию базисных форм вида dx^α .

Утверждение 8. (о координатном представлении кратного дифференциала) Пусть функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ k раз дифференцируема в точке $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{N}(a)$. Тогда функция f имеет дифференциал k -го порядка и $d^k f(a) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) dx^\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. База индукции совпадает с определением дифференциала. Проверим равенство

$$d(d^{k-1}f)(a) = d\left(\sum_{|\beta|=k-1} \frac{(k-1)!}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta} dx^\beta\right)(a) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) dx^\alpha.$$

Отметим, что существование дифференциала k -го порядка следует из того, что частные производные $(k-1)$ -го порядка дифференцируемы по условию и линейная комбинация дифференцируемых функций является дифференцируемой функцией. Полиномиальные формы совпадают, если они совпадают на любом векторе $h \in \mathbb{R}^n$.

Имеем

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{|\beta|=k-1} \frac{(k-1)!}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta} dx^\beta\langle h^{k-1} \rangle\right)(a)\langle h \rangle &= (h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}) \left(\sum_{|\beta|=k-1} \frac{(k-1)!}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta} h^\beta\right)(a) = \\ &= (h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n})^k f(a) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) h^\alpha. \blacktriangle \end{aligned}$$

Следствие 3. Формулу Тейлора можно записать в виде

$$f(a+h) = f(a) + df(a)\langle h \rangle + \frac{1}{2}d^2 f(a)\langle h^2 \rangle + \cdots + \frac{1}{k!}d^k f(a)\langle h^k \rangle + o(\|h\|^k) \text{ при } \|h\| \rightarrow 0.$$

Квадратичная форма A называется *положительно определенной* ($A > 0$), если $A\langle h^2 \rangle > 0$ для любого вектора $h \neq 0$; а *положительно полуопределенной* ($A \geq 0$),

если $A\langle h^2 \rangle \geq 0$ для любого вектора h и $A\langle h^2 \rangle = 0$ на некотором ненулевом векторе h . Аналогично определяются отрицательно определённые и полуопределённые формы.

Утверждение 9. (необходимые условия локального экстремума) Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{N}(a)$ и a — точка локального экстремума функции f . Тогда $df(a) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(a + th)$. Из правила дифференцирования композиции следует, что $\varphi'(0) = df(a)\langle h \rangle$. Из условия следует, что 0 — точка локального экстремума функции φ . По лемме Ферма имеем $\varphi'(0) = df(a)\langle h \rangle = 0$. Поскольку вектор приращения h выбран произвольно, $df(a) = 0$. ▲

Теорема 4. (условия локального экстремума)

Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{N}(a)$ и $df(a) = 0$.

1. Если a — точка локального экстремума функции f , то $d^2f(a) \geq 0$, когда a — точка минимума и $d^2f(a) \leq 0$ когда a — точка максимума.
2. Если $d^2f(a) > 0$, то функция f имеет локальный минимум в точке a ; если $d^2f(a) < 0$, то функция f имеет локальный максимум в точке a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. От противного. Пусть a — точка минимума и не выполнено неравенство $d^2f(a) \geq 0$. Тогда найдётся $h \in \mathbb{R}^n$, для которого $d^2f(a)\langle h, h \rangle < 0$. Если a — точка локального экстремума, то $df(a) = 0$. По формуле Тейлора имеем $f(a + th) - f(a) = \frac{t^2}{2}d^2f(a)\langle h, h \rangle + t^2o(1)$ при $t \rightarrow 0$. Тогда при достаточно малых $t > 0$ получаем $f(a + th) - f(a) < 0$. Пришли к противоречию.

2. Рассмотрим $g(h) = d^2f(a)\langle h, h \rangle$. Функция g непрерывна и по теореме Вейерштрасса достигает своего минимального значения на сфере $S = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\|_2 = 1\}$ на некотором векторе $v \in S$. Из условия $d^2f(a) > 0$ имеем $d^2f(a)\langle v, v \rangle = c > 0$. Если a — точка локального экстремума, то $df(a) = 0$. Любая точка из шара $B(a, t)$ представима в виде $a + th$, где $h \in S$. По формуле Тейлора имеем $f(a + th) - f(a) = \frac{t^2}{2}d^2f(a)\langle h, h \rangle + t^2o(1) \geq \frac{t^2}{2}(c + o(1)) > 0$ при $t \rightarrow 0$.

Случай локального максимума рассматривается аналогично, либо его можно свести к случаю минимума, рассмотрев функцию $\tilde{f} = -f$. ▲

Замечание 4. Квадратичная форма (Ah, h) положительно определена тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

1. форма (Ah, h) линейной заменой переменных приводится к сумме квадратов всех координат;
2. все собственные числа матрицы A положительны;
3. все главные миноры матрицы A положительны.

Пример 3. Рассмотрим функцию $\delta(t) = e^{1-t^2} - 1$ при $|t| < 1$ и $\delta(t) = 0$ при $|t| \geq 1$. Определим $f(x, y) = \delta(\frac{y-2x^2}{x^2})$ при $x \neq 0$ и $f(0, y) = 0$. Можно показать, что функция f имеет частные производные любого порядка в любой точке, но разрывна в 0 . Рассмотрим функцию $g(x, y) = f(x, y) - x^2 - y^2$. Функция g не имеет локального экстремума в точке $(0, 0)$, а функция $\varphi_h(t) = g(ht)$ при любом $h \in \mathbb{R}^n$ имеет локальный максимум в точке 0 .

Задача 4. Пусть $f \in \mathcal{D}^3(a)$ и $df(a) = 0$, $d^2f(a) = 0$ и $d^3f(a) \neq 0$. Докажите, что

точка a не является точкой локального экстремума функции f .

Пусть V и W — конечномерные векторные пространства и $\mathcal{L}(V, W)$ — множество линейных отображений из V в W .

Утверждение 10. (о норме линейного оператора)

1. $\mathcal{L}(V, W)$ — векторное пространство;
2. функция $\|A\| = \sup_{\|x\|_V=1} \|A\langle x \rangle\|_W$ является нормой в $\mathcal{L}(V, W)$;
3. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О . 1. Сложение линейных операторов и умножение на скаляр определяются равенствами $(A+B)\langle v \rangle = A\langle v \rangle + B\langle v \rangle$ и $(\alpha A)\langle v \rangle = A\langle \alpha v \rangle$. Аксиомы векторного пространства можно проверить непосредственно.

2. Из свойств предела суммы, произведения и координатного критерия сходимости следует, что конечномерные линейные операторы непрерывны. Норма любого линейного оператора на конечномерном пространстве конечна, поскольку множество $\{\|x\|_V = 1\}$ является компактом и по теореме Вейерштрасса найдётся вектор $v \in V$, $\|x\|_V = 1$, для которого $\|A\| = \|A\langle x \rangle\|$. Выполнение аксиом нормы для нормы оператора непосредственно следует из свойств нормы вектора.

$$3. \|AB\| = \sup \left(\frac{\|AB\langle v \rangle\|}{\|v\|} \right). \text{ Имеем } \frac{\|AB\langle v \rangle\|}{\|v\|} = \frac{\|A\langle B\langle v \rangle \rangle\|}{\|B\langle v \rangle\|} \frac{\|B\langle v \rangle\|}{\|v\|} \leq \|A\| \cdot \|B\|. \blacktriangle$$

Для функции $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $(a, b) \in U$, введём обозначения F_a для функции $F_a : U_a \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $U_a = \{y \mid (a, y) \in U\}$ — проекция окрестности U в $\mathbb{R}^m$, определённой равенством $F_a(y) = F(a, y)$, и аналогично для функции F_b , определённой равенством $F_b(x) = F(x, b)$.

Теорема 5. (о неявной функции)

Пусть $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $U \in \mathcal{N}((a, b))$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Если выполнены условия

- 1) $F(a, b) = 0$,
 - 2) $F \in C^1((a, b))$, т. е. непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (a, b) ,
 - 3) $dF_a(b)$ — невырожденный оператор,
- то найдутся такие окрестности $V \in \mathcal{N}(a)$, $V \subset \mathbb{R}^n$, и $W \in \mathcal{N}(b)$, $W \subset \mathbb{R}^m$, и такая функция $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{D}(V)$, что
- 1) $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ для $x \in V$, $y \in W$,
 - 2) $df(x) = -(dF_x(y))^{-1}dF_y(x)$, где $y = f(x)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О . Обозначим $A = dF_a(b)$ и определим отображение $G_x(y) = y - A^{-1}F(x, y)$, $G_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $U_x = \{y \mid (x, y) \in U\}$ — проекция окрестности U в $\mathbb{R}^m$. Нетрудно видеть, что $G_x(y) = y \Leftrightarrow F(x, y) = 0$.

Докажем, что найдутся $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что при $\|x - a\| < \delta_1$ отображение G_x является сжимающим на шаре $\|y - b\| < \delta_2$. Из свойств дифференциала следует, что $G_x \in C^1(b)$ и $dG_x(y) = Id - A^{-1}dF_x(y)$, здесь Id — тождественный оператор, задаваемый единичной матрицей.

Из непрерывности частных производных функции F следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$, обеспечивающие справедливость условия: $dF_x(y) = dF_a(b) + B_x(y)$, где $\|B_x(y)\| < \varepsilon$ при $\|x - a\|_1 < \delta_1$ и $\|y - b\|_1 < \delta_2$. Тогда $\|dG_x(y)\| \leq$

$\|A^{-1}\| \|B_x(y)\|$. Можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, чтобы все частные производные функции G_x не превышали по модулю $\frac{1}{2}$ (т.е. $\|dG_x(y)\|_1 < \frac{1}{2}$) при $\|x - a\|_1 < \delta_1$ и $\|y - b\|_1 < \delta_2$. По лемме о приращении имеем, что $\|G_x(y) - G_x(z)\|_1 \leq \frac{1}{2}\|y - z\|_1$ для всех $\|y - b\|_1 < \delta_2$ и $\|z - b\|_1 < \delta_2$. Кроме того, имеем $\|G_x(y) - b\|_1 = \|G_x(y) - G_x(b) + G_x(b) - G_a(b)\|_1 \leq \frac{1}{2}\|y - b\|_1 + r$, где $r = \sup \|G_x(b) - G_a(b)\|_1 = \sup \|A^{-1}(F(x, b) - F(a, b))\|_1$ при $\|x - a\| < \delta_1$. Из непрерывности функции F в окрестности точки (a, b) следует, что δ_1 можно выбрать столь малым, чтобы $r < \delta_2/2$. Обозначим соответствующую окрестность точки a через V . Тогда каждая функция G_x при $x \in V$ переводит множество $W = \{y \mid \|y - b\|_1 < \delta_2\}$ в себя.

Мы проверили, что G_x является сжимающим отображением на W и по теореме о неподвижной точке найдётся единственное $z \in W$, для которого $G_x(z) = z$. Определим $f(x) = z$.

Рассмотрим точку $(x_0, y_0) \in V \times W$. По условию $F \in \mathcal{D}(x_0, y_0)$. Поскольку $dF_a(b)$ — невырожденный оператор из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$, он определяется матрицей с ненулевым определителем. Определитель является непрерывной функцией от элементов матрицы. Поскольку $F \in C^1((a, b))$, то $dF_{x_0}(y_0)$ является невырожденным оператором в некоторой окрестности точки (a, b) . Без ограничения общности можно считать, что эта окрестность содержит $V \times W$.

Имеем

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(x_0, y_0) &= dF(x_0, y_0)\langle x - x_0, y - y_0 \rangle + o(\|x - x_0\|_1 + \|y - y_0\|_1) = \\ &= dF_{x_0}(y_0)\langle y - y_0 \rangle + dF_{y_0}(x_0)\langle x - x_0 \rangle + \alpha(x, y)(\|x - x_0\|_1 + \|y - y_0\|_1). \end{aligned}$$

Пусть $y = f(x)$ и $y_0 = f(x_0)$. Тогда $f(x) - f(x_0) =$

$$-(dF_{x_0}(y_0))^{-1}dF_{y_0}(x_0)\langle x - x_0 \rangle - (dF_{x_0}(y_0))^{-1}\alpha(x, y)(\|x - x_0\|_1 + \|f(x) - f(x_0)\|_1). \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\|_1 &\leq \|dF_{x_0}(y_0)\|^{-1} \|dF_{y_0}(x_0)\| \|x - x_0\|_1 + \\ &+ \|dF_{x_0}(y_0)\|^{-1} \|\alpha(x, y)\|_1 (\|x - x_0\|_1 + \|f(x) - f(x_0)\|_1). \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha(x, y) \rightarrow 0$ при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) справедливо неравенство $\|dF_{x_0}(y_0)\|^{-1} \|\alpha(x, y)\|_1 < 1/2$ и, следовательно, $\frac{1}{2}\|f(x) - f(x_0)\|_1 \leq C\|x - x_0\|_1$.

Теперь покажем, что f дифференцируема в точке x_0 и найдём дифференциал. Из равенства (1) имеем

$$f(x) - f(x_0) = -(dF_{x_0}(y_0))^{-1}dF_{y_0}(x_0)\langle x - x_0 \rangle - (dF_{x_0}(y_0))^{-1}\alpha(x, y)\|x - x_0\|_1 + \beta(x, y),$$

$$\text{где } \beta(x, y) = -(dF_{x_0}(y_0))^{-1}\alpha(x, y)\|f(x) - f(x_0)\|_1$$

$$\text{и } \|\beta(x, y)\|_1 \leq C\|(dF_{x_0}(y_0))^{-1}\|\|\alpha(x, y)\|_1\|x - x_0\|_1.$$

Таким образом, функция $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема по определению и

$$df(x_0) = -(dF_{x_0}(y_0))^{-1}dF_{y_0}(x_0). \quad \blacktriangle$$

Следствие 4. (теорема об обратном отображении) Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{N}(b)$, $b \in \mathbb{R}^n$. Если выполнены условия

1) $f \in C^1(b)$, 2) $df(b)$ — невырожденный оператор,

то найдётся такая окрестность $V \in \mathcal{N}(f(b))$, $V \subset \mathbb{R}^n$, в которой определена обратная функция $f^{-1} : V \rightarrow U$. Причём $f^{-1} \in \mathcal{D}(V)$ и $df^{-1}(x) = (df(y))^{-1}$, где $x = f(y)$.

Доказательство. Определим функцию $F : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ равенством $F(x, y) = f(y) - x$. Нетрудно видеть, что функция F удовлетворяет условиям теоремы

о неявной функции в окрестности точки (a, b) , где $a = f(b)$. Тогда найдётся функция g , удовлетворяющая условию $F(x, g(x)) = 0$ для любого $x \in V$, $V \in \mathcal{N}(a)$. То есть $f(g(x)) = x$, причём $dg(x) = (df(y))^{-1}$. ▲

Следствие 5. (о гладкости неявной функции) Если при выполнении условий теоремы о неявной функции дополнительно потребовать, чтобы $F \in C^k((a, b))$, то и неявная функция f будет k раз непрерывно дифференцируемой в области определения V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Достаточно показать, что функция $df(x) = -(dF_x(f(x)))^{-1}dF_{f(x)}(x)$ является $k - 1$ раз непрерывно дифференцируемой.

Если определитель матрицы размера $m \times m$ не равен нулю на некотором множестве $T \subset \mathbb{R}^{m^2}$ элементов матрицы, то вычисление обратной матрицы является на T бесконечно дифференцируемым оператором. Тогда из непрерывности функции f следует непрерывная дифференцируемость оператора df . Далее рассуждаем по индукции. Частные производные функции F являются $k - 1$ раз непрерывно дифференцируемыми функциями. Тогда из непрерывной дифференцируемости $k - 1$ раз функции f следует, что df является $k - 1$ раз непрерывно дифференцируемой функцией на V как композиция $k - 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций. Таким образом заключаем, что $f \in C^k(V)$. ▲

Определение 7. Отображение $f : U \rightarrow V$, где $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытые множества, называется *диффеоморфизмом класса C^k* (здесь и далее $k \geq 1$), если f — биекция и $f \in C^k(U)$, $f^{-1} \in C^k(V)$.

Заметим, что при $r = 0$ такое отображение называется гомеоморфизмом.

Следствие 6. (о диффеоморфизме) Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{N}(b)$, $b \in \mathbb{R}^n$. Если выполнены условия

1) $f \in C^k(b)$, 2) $df(b)$ — невырожденный оператор,
то найдётся такая открытая окрестность $U' \in \mathcal{N}(b)$, что $f : U' \rightarrow f(U')$ — диффеоморфизм класса C^k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После применения теоремы об обратном отображении и следствия о гладкости достаточно заметить, что $U' = f^{-1}(V)$ — открытое множество как прообраз открытого множества относительно непрерывного отображения f . ▲

Следствие 7. Пусть $f : U \rightarrow V$ — биекция, $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Если выполнены условия $f \in C^k(U)$, $df(x)$ — невырожденный оператор для любого $x \in U$, то f — диффеоморфизм класса C^k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущего утверждения следует, что отображение f^{-1} принадлежит классу C^k в окрестности каждой точки. ▲

Задача 5. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ — открытое, $f \in C^1(U)$. Докажите, что отображение f не инъективно.

Определение 8. Диффеоморфизм $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$, называется *системой координат* на X .

Пример 4. Полярная система координат. Пусть $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0, x \leq 0\}$. Определим полярную систему координат $(\rho, \varphi) : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ равенствами: $x = \rho \cos \varphi$ и $y = \rho \sin \varphi$, где $\rho > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$; либо эквивалентными равенствами $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) & \text{при } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) & \text{при } x < 0 \text{ и } y > 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) & \text{при } x < 0 \text{ и } y < 0. \end{cases}$$

Пример 5. Цилиндрическая система координат.

Пусть $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{y = 0, x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}$. Определим цилиндрическую систему координат $(\rho, \varphi, z) : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ равенствами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

где $\rho > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $z \in \mathbb{R}$.

Пример 6. Сферическая система координат.

Пусть $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{y = 0, x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}$. Определим сферическую систему координат $(\rho, \varphi, \psi) : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ равенствами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \psi \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \psi \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \psi, \end{cases}$$

где $\rho > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Определение 9. Рангом $\operatorname{rang} f(a)$ отображения $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \in \mathcal{N}(a)$, $f \in \mathcal{D}(a)$, в точке a называется ранг матрицы линейного оператора $df(a)$.

Теорема 6. (о ранге) Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^r(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Если в некоторой окрестности точки $a \in U$ функция f имеет постоянный ранг k , то найдутся такие окрестности $V \in \mathcal{N}(a)$, $W \in \mathcal{N}(f(a))$ и системы координат φ и ψ гладкости C^r в этих окрестностях, что отображение $h = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ имеет координатное представление $h(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0)$ при $t \in \varphi(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение переставляющее координаты является линейным диффеоморфизмом пространства $\mathbb{R}^n$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что отображение $(f_1, \dots, f_k)$ имеет ранг k в некоторой точке $a \in U$ и $\det D(a) \neq 0$, где $D(x)$ — матрица, состоящая из элементов $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, $i, j = 1, \dots, k$. По теореме об обратной функции (см. следствие о диффеоморфизме) отображение φ , заданное равенствами $t_i = \varphi_i(x) = f_i(x)$ при $i = 1, \dots, k$ и $t_i = \varphi_i(x) = x_i$ при $i = k+1, \dots, n$ является локальной системой координат.

Рассмотрим композицию $g = f \circ \varphi^{-1}$. Очевидно $g(t) = t_i$ при $i = 1, \dots, k$, поскольку $g_i(t) = f_i(\varphi^{-1}(t)) = \varphi_i(\varphi^{-1}(t)) = t_i$. Значит подматрица, состоящая из элементов $\frac{\partial g_i}{\partial t_j}(x)$, $i, j = 1, \dots, k$ является матрицей тождественного отображения. Заметим, что матрица оператора $dg(t)$ является произведением матриц операторов $df(x)$ и $(d\varphi(t))^{-1}$. Поэтому её ранг не превосходит максимума рангов матриц $df(x)$ и $(d\varphi(t))^{-1}$, т. е. не превосходит k по условию. Следовательно, частные производные $\frac{\partial g_i}{\partial t_j}(t)$, при любых $i > k$ и $j > k$ равны нулю в окрестности точки $\varphi^{-1}(a)$. Значит

функции g_i не зависят от переменных $t_{k+1}, \dots, t_n$. В частности, из равенства $g \circ \varphi = f$ получаем, что $g_i(f_1(x), \dots, f_k(x)) = f_i(x)$ в некоторой окрестности точки a (*).

Определим локальную систему координат в окрестности точки $f(a)$ равенствами $\psi_i(z) = z_i$ при $i = 1, \dots, k$ и $\psi_i(z) = z_i - g_i(z)$ при $i = k+1, \dots, m$. Очевидно, определитель матрицы оператора $d\psi(z)$ равен 1 в любой точке $z \in \mathbb{R}^m$. Тогда из теоремы об обратной функции следует, что ψ определяет локальную систему координат в окрестности любой точки и, в частности, точки $f(a)$.

Рассмотрим композицию $h = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Нетрудно видеть, что $h_i(t) = t_i$ при $i = 1, \dots, k$. При $j = k+1, \dots, m$ имеем $\psi_j(g(t)) = z_j - g_j(z) = g_j(t_1, \dots, t_k) - g_j(z_1, \dots, z_k) = 0$, поскольку $z_i = g_i(t) = t_i$ при $i = 1, \dots, k$.

Из следствия о диффеоморфизме получаем, что гладкость отображений ψ и φ не меньше гладкости отображения f . ▲

Определение 10. Набор непрерывных функций $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, называется *функционально независимым* в окрестности точки $a \in U$, $U \in \mathcal{N}(a)$, если из равенства $F(f_1(x), \dots, f_m(x)) = 0$ для любого $x \in U$ следует, что непрерывная функция F тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки $(f_1(a), \dots, f_m(a))$.

Заметим, что если найдётся непрерывно дифференцируемая функция F , дифференциал которой не равен 0 в точке $(f_1(a), \dots, f_m(a))$, то из равенства $F(f_1(x), \dots, f_m(x)) = 0$ для любого $x \in U$ следует, что одну из функций f_i можно выразить через другие в некоторой окрестности точки a , например, $f_m(x) = g(f_1(x), \dots, f_{m-1}(x))$.

Утверждение 11. (критерий независимости набора функций) Пусть $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^r(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Если в некоторой окрестности U точки $a \in U$ функция f имеет постоянный ранг k , то

- 1) при $k = m$ набор функций $f_1, \dots, f_m$ функционально независим в точке a ;
- 2) при $k < m$ найдутся k функций $f_{i_1}, \dots, f_{i_k}$ и окрестность $V \in \mathcal{N}(f_{i_1}(a), \dots, f_{i_k}(a))$ такие, что $f_i(x) = g_i(f_{i_1}(x), \dots, f_{i_k}(x))$ для некоторой функции $g_i : V \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i \in C^r(V)$, при $i = 1, \dots, m$.

Доказательство. 1. По теореме о ранге найдётся открытая окрестность $V \in \mathcal{N}(a)$, $V \subset U$, для которой $f(V) = \psi^{-1}(h((\varphi(V))))$ — открытое множество. Тогда точка $(f_1(a), \dots, f_m(a))$ является внутренней точкой множества $f(U)$. Поэтому из равенства $F(f_1(x), \dots, f_m(x)) = 0$ при $x \in U$ следует, что $F(f(U)) = 0$ и F тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки $(f_1(a), \dots, f_m(a))$.

2. Следует из 1-ой части теоремы о ранге (*). ▲

Определение 11. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *элементарным k -мерным многообразием без края класса C^r* , если найдётся такой диффеоморфизм $\varphi : (-1, 1)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса C^r , что $\varphi((-1, 1)^k \times 0^{n-k}) = M$.

Здесь $(-1, 1)^k \times 0^{n-k} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in (-1, 1) \text{ при } i = 1, \dots, k; x_i = 0 \text{ при } i = k+1, \dots, n\}$.

Определение 12. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *элементарным k -мерным многообразием с краем класса C^r* , если найдётся такой диффеоморфизм $\varphi : (-1, 1)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса C^r , что $\varphi((-1, 1)^{k-1} \times [0, 1) \times 0^{n-k}) = M$.

Сужение $\tilde{\varphi} : (-1, 1)^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ диффеоморфизма φ по правилу

$\tilde{\varphi}(t_1, \dots, t_k) = \varphi(t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0)$ называют параметризацией элементарного многообразия M .

Определение 13. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется k -мерным многообразием (без края) класса C^r , если для каждой точки $x \in M$ найдётся окрестность $U \in \mathcal{N}(x)$ такая, что $U \cap M$ — элементарное k -мерное многообразие (без края) класса C^r .

Замечание 5. Очевидно, что любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ является n -мерным многообразием класса C^∞ .

Многообразия класса C^r , $r \geq 1$, будем называть гладкими.

Задача 6. Докажите, что график отображения $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^r(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, является n -мерным многообразием класса C^r .

Утверждение 12. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является k -мерным многообразием класса C^r , если для каждой точки $x \in M$ найдётся окрестность $U \in \mathcal{N}(x)$ и диффеоморфизм $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^r$ такие, что $F(U \cap M) = F(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0^{n-k})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $F(U)$ содержит окрестность $\{t \in \mathbb{R}^n \mid \|t - F(x)\|_\infty < \delta\}$, поскольку является открытым. Рассмотрим аффинный диффеоморфизм $L(y) = \delta y + F(x)$. Имеем $V = F^{-1} \circ L((-1, 1)^n) \subset U$ и $L((-1, 1)^k \times 0^{n-k}) = F(M \cap V)$ по условию. Тогда $\varphi = F^{-1} \circ L$ искомый локальный диффеоморфизм. $\blacktriangle$

Утверждение 13. (о неявном задании многообразия)

Пусть $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^r(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Если в каждой точке $a \in U$ функция f имеет ранг k , то $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ является $(n - k)$ -мерным многообразием класса C^r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k = m$ и в точке $a \in U$ минор матрицы Якоби, соответствующий производным по переменным $x_{n-m}, \dots, x_n$, не равен 0. Рассмотрим отображение $F(x) = (x_1, \dots, x_{n-m}, f_1(x), \dots, f_m(x))$. По теореме об обратной функции F является диффеоморфизмом класса C^r в некоторой окрестности $U \in \mathcal{N}(x)$ и $F(U \cap M) = F(U) \cap (\mathbb{R}^{n-m} \times 0^m)$.

Пусть $k < m$. Из критерия независимости набора функций следует, что в некоторой окрестности V точки a множество M совпадает с множеством $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_{i_1}(x) = 0, \dots, f_{i_k}(x) = 0\}$, где набор функций $f_{i_1}, \dots, f_{i_k}$ имеет ранг равный k в окрестности V . Тогда утверждение следует из рассмотренного выше случая $k = m$. $\blacktriangle$

Наоборот, любое элементарное гладкое многообразие $M = \varphi((-1, 1)^k \times 0^{n-k})$, где φ диффеоморфизм $(-1, 1)^n$ на U , можно представить как поверхность, заданную системой уравнений. Действительно, рассмотрим координатные функции обратного отображения $f_j(x) = (\varphi^{-1}(x))_j$. Тогда $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_{k+1}(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0\} \cap U$.

Утверждение 14. (параметрическое задание многообразия)

Пусть $h = (h_1, \dots, h_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение, имеющее ранг k в каждой точке из U , $h \in C^r(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое множество. Тогда для любой точки $a \in U$ найдётся такая окрестность $V \in \mathcal{N}(a)$, что $h(V)$ является k -мерным многообразием класса C^r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению о функциональной зависимости можно выбрать k функций из набора $(h_1, \dots, h_n)$ так, чтобы остальные функции в неко-

торой окрестности V через них выражались. Без ограничения общности можно полагать, что это первые k функций, т. е. $h_j(y) = g_j(h_1(y), \dots, h_k(y))$ при $j = k+1, \dots, n$ и функция $\tilde{h} = (h_1, \dots, h_k)$ является диффеоморфизмом на V . Тогда множество $h(V) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = h(y), y \in V\}$ совпадает с множеством $\{x \in \mathbb{R}^m \mid x_j = g_j(x_1, \dots, x_k), j = k+1, \dots, n\} \cap (\tilde{h}(V) \times \mathbb{R}^{n-k})$, которое является k -мерным многообразием класса C^r по утверждению о неявном задании многообразия. $\blacktriangle$

Замечание 6. Отметим, что для справедливости заключения предыдущего утверждения достаточно, чтобы отображение h имело максимальный ранг m в точке a , поскольку в этом случае оно будет иметь максимальный ранг и в некоторой окрестности.

Пример 7.

1. $M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$ — 2-мерное многообразие.
2. $M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ — не многообразие.
3. $M = \{(\cos t, \sin t, z) \mid z, t \in (-\pi, \pi)\}$ — 2-мерное многообразие.
4. $M = \{(t - 2 \sin t, 1 - 2 \cos t, z) \mid z, t \in (-2\pi, 2\pi)\}$ — не многообразие.

Пример 4. показывает, что параметрическое задание многообразия, в отличие от задания системой уравнений, локально, т. е. не гарантирует того, что образ области под действием функции целиком является многообразием.

Вспомним, что параметризованной кривой называется непрерывная функция $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Далее будем рассматривать гладкие кривые, то есть такие, что $\gamma \in C^r(a, b)$, $r \geq 1$. Если $\gamma \in C^r(a, b)$ и $d\gamma(t_0) \neq 0$, то по утверждению о параметрическом задании многообразия множество $\gamma(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ является 1-мерным многообразием класса C^r для достаточно малых окрестностей точки $t_0 \in (a, b)$.

Определение 14. Пусть γ — параметризованная кривая. Будем называть вектор *касательным* в точке $\gamma(t_0)$ к кривой γ , если он коллинеарен вектору $\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$.

Если указанный предел отсутствует, но существуют правый или левый пределы $\gamma'_\pm(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0 \pm 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$, то они задают правый и левый касательные вектора.

Определение 15. Вектор $v \in \mathbb{R}^n$ называется *касательным вектором* к множеству $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке $a \in M$, если найдётся параметризованная кривая $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $a = \gamma(0)$, и вектор v является касательным к γ в точке a .

Множество касательных векторов к M в точке $a \in M$ обозначается через $T_a M$.

Множество $a + T_a M$ называется *контингенцией* (касательной прямой или плоскостью).

Утверждение 15. Контингенция аффинного подпространства в любой точке совпадает с этим аффинным подпространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что все прямые лежащие в подпространстве, являются касательными к нему. Для любой кривой γ , лежащей в аффинном подпространстве $a + V$, вектор $\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$ лежит в V . Поскольку V замкнуто, то и предел векторов лежит в V . $\blacktriangle$

Утверждение 16. (о касательном подпространстве) Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — элементар-

ное k -мерное многообразие и диффеоморфизм φ задаёт его параметризацию. Тогда $T_{\varphi(a)}M = d\varphi(a)\langle V \rangle$, где $V = T_{t_0}(\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}) = \mathbb{R}^k \times 0^{n-k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $v \in V$, пусть $\alpha(t) = a + tv$ — прямая, лежащая в V . Тогда $\gamma(t) = \varphi(\alpha(t))$ кривая в M и $\gamma'(0) = d\varphi(a)\langle v \rangle$ — касательный вектор в точке $\varphi(a) = \gamma(0)$.

2. Рассмотрим произвольный касательный вектор $u \in T_{\varphi(a)}M$. Найдётся кривая $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, такая, что $\varphi(a) = \gamma(0)$, $\gamma'(0) = u$. Рассмотрим кривую $\varphi^{-1} \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^k \times 0^{n-k}$. Имеем $d\varphi^{-1}(\gamma(0))\langle \gamma'(0) \rangle = (\varphi^{-1} \circ \gamma)'(0) = v \in \mathbb{R}^k \times 0^{n-k}$. Тогда $u = \gamma'(0) = (d\varphi^{-1}(\gamma(0)))^{-1}\langle v \rangle = d\varphi(a)\langle v \rangle$. $\blacktriangle$

Следствие 8. Если M есть k -мерное гладкое многообразие, то T_aM — линейное пространство размерности k в каждой точке $a \in M$.

Определение 16. Вектор w называется *нормалью* к множеству $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке $a \in M$, если $(w, u) = 0$ для любого $u \in T_aM$.

Совокупность нормальных векторов всегда является линейным подпространством и обозначается через N_aM .

Определение 17. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{N}(a)$ и $f \in \mathcal{D}(a)$. Вектор $u \in \mathbb{R}^n$ называется *градиентом* функции f и обозначается $u = \text{grad } f(a)$, если $df(a)\langle h \rangle = (u, h)$ для любого $h \in \mathbb{R}^n$.

В декартовых координатах градиент записывается как вектор частных производных $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$.

Утверждение 17. (о базисе нормального пространства) Пусть k -мерное гладкое многообразие $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = 0, \dots, f_{n-k}(x) = 0\}$ задано набором функций $f = (f_1, \dots, f_{n-k})$ и $\text{rang } f(a) = n-k$, $a \in M$. Тогда набор векторов $\text{grad } f_1(a), \dots, \text{grad } f_{n-k}(a)$ является базисом N_aM .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Набор векторов $\text{grad } f_1(a), \dots, \text{grad } f_{n-k}(a)$ линейно независим, поскольку $\text{rang } f(a) = n-k$. Покажем, что $\text{grad } f_i(a) \perp T_aM$ для всех $i = 1, \dots, n-k$. Рассмотрим произвольный вектор $u \in T_aM$. Найдётся такая кривая γ , что $u = \gamma'(0)$, $\gamma(0) = a$ и $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset M$. Тогда $f(\gamma(t)) = 0$ для всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Значит $0 = d(f \circ \gamma)(0) = df(a)\langle u \rangle$, т. е. $(\text{grad } f_i(a), u) = 0$ для всех $i = 1, \dots, n-k$. Поскольку $\dim T_aM = k$, имеем $\dim N_aM = n-k$ и набор градиентов составляет базис пространства N_aM . $\blacktriangle$

Следствие 9. При выполнении условий предыдущего утверждения контингенция многообразия M в точке a является множеством решений системы линейных уравнений $(\text{grad } f_i(a), x - a) = 0$ при $i = 1, \dots, n-k$.

Задача 7. Докажите, что размерность гладкого многообразия определена корректно, т. е. гладкое многообразие не может одновременно иметь две различные размерности.

Определение 18. Точка $a \in M$ называется точкой условного экстремума функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ на гладком многообразии $M \subset \mathbb{R}^n$, если найдётся такая окрестность $U \in \mathcal{N}(a)$, что $f(a)$ — максимальное или минимальное значение функции f на $M \cap U$.

Утверждение 18. (необходимый признак условного экстремума) Пусть $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \in \mathcal{N}(a)$, $g \in \mathcal{D}(a)$. Если $a \in M$ точка условного экстремума функции g на гладком многообразии $M \subset \mathbb{R}^n$, то $\text{grad } g(a) \in N_a M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим найдётся такой вектор $u \in T_a M$, что $(\text{grad } g(a), u) \neq 0$. Рассмотрим кривую γ такую, что $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset M$, $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = u$. Рассмотрим функцию $g(\gamma(t))$. По лемме Ферма $0 = (g \circ \gamma)'(0) = (\text{grad } g(a), u)$. Пришли к противоречию. ▲

Пусть k -мерное гладкое многообразие $M = \{x \in U \mid f_1(x) = 0, \dots, f_{n-k}(x) = 0\}$ задано набором функций $f = (f_1, \dots, f_{n-k})$ и $\text{rang } f(a) = n - k$, $a \in M$. Если в точке $a \in M$ выполнены необходимые условия условного экстремума функции g , то для некоторого набора $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$ справедливо равенство $\text{grad } g(a) = \lambda_1 \text{grad } f_1(a) + \dots + \lambda_{n-k} \text{grad } f_{n-k}(a)$.

Определим функцию Лагранжа $L_\lambda(x)$ (для многообразия M , точки $a \in M$ и функции g) равенством

$$L_\lambda(x) = g(x) - \lambda_1 f_1(x) - \dots - \lambda_{n-k} f_{n-k}(x). \quad (1)$$

Из определения видно, что $dL_\lambda(a) = 0$.

Теорема 7. (достаточный признак условного экстремума)

Пусть $M = \{x \in U \mid f_1(x) = 0, \dots, f_{n-k}(x) = 0\}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое, $f = (f_1, \dots, f_{n-k}) \in C^2(U)$ и $\text{rang } f(a) = n - k$, $a \in M$. Пусть для функции $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^2(U)$, в точке $a \in M$ выполнены необходимые условия условного экстремума на множестве M и функция L_λ задана равенством (1). Тогда

- 1) если a — точка условного экстремума функции g на M , то $d^2 L_\lambda(a)|_{T_a M} \geq 0$, когда a — точка минимума и $d^2 L_\lambda(a)|_{T_a M} \leq 0$ когда a — точка максимума;
- 2) если $d^2 L_\lambda(a)|_{T_a M} > 0$, то функция g имеет условный минимум в точке a ; если $d^2 L_\lambda(a)|_{T_a M} < 0$, то функция g имеет условный максимум в точке a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что найдётся такая окрестность $V \in \mathcal{N}(a)$, что $M \cap V$ — элементарное многообразие. Рассмотрим соответствующий диффеоморфизм $\varphi : (-1, 1)^n \rightarrow V$, $\varphi((-1, 1)^k \times 0^{n-k}) = M \cap V$. Нетрудно видеть, что $L_\lambda(x) = g(x)$ для всех $x \in M \cap V$. То есть точка a является условным экстремумом функций L_λ и g одновременно. Кроме того, $L_\lambda(M \cap V) = L_\lambda(\varphi((-1, 1)^k \times 0^{n-k})) = L_\lambda(\tilde{\varphi}((-1, 1)^k))$, где $\tilde{\varphi}(t_1, \dots, t_k) = \varphi(t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0)$ — параметризация $M \cap V$. Пусть $a = \tilde{\varphi}(q)$. Ясно, что в точке a достигается условный экстремум функции L_λ тогда и только тогда, когда точка q является точкой локального экстремума функции $h = L_\lambda \circ \tilde{\varphi}$. Найдём подходящее представление для $d^2 h(q)$.

$$d^2 h = d(dL_\lambda \circ d\tilde{\varphi}) = d\left(\sum_i \frac{\partial L_\lambda}{\partial x_i} d\tilde{\varphi}_i\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x_i \partial x_j} d\tilde{\varphi}_i d\tilde{\varphi}_j + \sum_i \frac{\partial L_\lambda}{\partial x_i} d^2 \tilde{\varphi}_i.$$

По определению функции Лагранжа $\frac{\partial L_\lambda}{\partial x_i}(a) = 0$ для любого $i = 1, \dots, n$. Тогда для произвольного вектора $\tilde{v} \in \mathbb{R}^k$ имеем равенство

$$d^2 h(q)\langle \tilde{v}^2 \rangle = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x_i \partial x_j}(a) d\tilde{\varphi}_i(q)\langle \tilde{v} \rangle d\tilde{\varphi}_j(q)\langle \tilde{v} \rangle.$$

Нетрудно видеть, что $d\tilde{\varphi}_j\langle\tilde{v}\rangle = d\varphi_j\langle v\rangle$, $j = 1, \dots, n$, где $v = (v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0)$ когда $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_k)$. Тогда

$$d^2h(q)\langle\tilde{v}^2\rangle = d^2L_\lambda(a)\langle(d\varphi(q)\langle v\rangle)^2\rangle. \quad (2)$$

По теореме о локальном экстремуме, точка q является точкой минимума функции h , если $d^2h(q)\langle\tilde{v}^2\rangle > 0$ для любого $\tilde{v} \neq 0$. Поскольку $d\varphi\langle\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}\rangle = T_aM$, из равенства (2) следует, что условие локального минимума функции h эквивалентно условию $d^2L_\lambda(a)|_{T_aM} > 0$. Остальные условия рассматриваются аналогично. $\blacktriangle$

Рассмотрим множество линейных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Известно, что множество $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ изоморфно алгебре вещественных матриц $L(n)$ размера $n \times n$ и, в частности, как векторное пространство изоморфно $\mathbb{R}^{n^2}$. Таким образом, подмножества в $L(n)$ можно рассматривать как подмножества в $\mathbb{R}^{n^2}$. Рассмотрим группы обратимых матриц $GL(n) = \{A \in L(n) \mid \det A \neq 0\}$, унимодулярных матриц $SL(n) = \{A \in L(n) \mid \det A = 1\}$, ортогональных матриц $O(n) = \{A \in L(n) \mid AA^* = I\}$, где A^* — транспонированная матрица, а I — единичная, и $SO(n) = SL(n) \cap O(n)$.

Утверждение 19. $SL(n)$ — $(n^2 - 1)$ -мерное гладкое многообразие.

Для доказательства утверждения достаточно проверить, что $\det X = \sum_{i=1}^n x_{ij}X_{ij}$ и $\frac{\partial \det X}{\partial x_{ij}} = X_{ij}$, где X_{ij} — алгебраическое дополнение элемента матрицы x_{ij} .

Утверждение 20. $O(n)$ — $\frac{n(n-1)}{2}$ -мерное гладкое многообразие.

Доказательство. Определим функцию $F : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ равенством $F(X) = XX^* - I$. Очевидно $O(n) = \{X \in L(n) \mid F(X) = 0\}$. Имеем $F(X+H) = F(X) + XH^* + HX^* + HH^*$, т. е. $dF(X)\langle H\rangle = XH^* + HX^*$. Найдём ранг матрицы Якоби функции F . Для этого достаточно найти размерность множества решений системы уравнений $dF(X)\langle H\rangle = 0$, здесь матрица X фиксирована, а H — переменная. Очевидно имеем равенство $(XH^*)^* = -XH^*$, т. е. матрица XH^* — кососимметрическая. Множество кососимметрических матриц имеет размерность $\frac{n(n-1)}{2}$. Умножение матрицы на $X \in O(n)$ есть линейное обратимое преобразование, поэтому множество решений системы $dF(X)\langle H\rangle = 0$ имеет размерность $\frac{n(n-1)}{2}$ в любой точке X . Значит сама система уравнений $dF(X)\langle H\rangle = 0$ имеет постоянный ранг $\frac{n(n+1)}{2} = n^2 - \frac{n(n-1)}{2}$. Тогда из утверждения о неявном задании многообразия следует, что $O(n)$ — $\frac{n(n-1)}{2}$ -мерное гладкое многообразие. $\blacktriangle$

Утверждение 21. 1) $SO(n)$ — компактное связное многообразие.

2) $O(n)$ и $GL(n)$ — состоят из двух компонент связности.

Доказательство. 1) Следует из того, что любое ортогональное преобразование из $SO(n)$ можно представить как композицию нескольких поворотов. Кроме того, $SO(n)$ — ограничено и замкнуто ($SO(n) = F^{-1}(0)$).

2) Следует из того, что множества матриц $O(n)$ и $GL(n)$ несвязны, поскольку непрерывная функция $\det : L(n) \rightarrow \mathbb{R}$ не принимает промежуточное значение 0 на $O(n)$ и $GL(n)$. Кроме того, любая матрица $A \in GL(n)$ может быть представлена в виде $A = SO$, где S — симметричная, а O — ортогональная, а любая симметричная

матрица может быть приведена ортогональным преобразованием к диагональному виду $S = TDT^*$. ▲

Заметим, что $n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$, где $\frac{n(n+1)}{2}$ — размерность множества симметричных матриц, а $\frac{n(n-1)}{2}$ — размерность множества ортогональных матриц.

Утверждение 22. Множество матриц из $SL(n)$, ближайших (в евклидовой метрике) к нулевой матрице, совпадает с $SO(n)$.

Доказательство. Рассмотрим $G(X) = \sum_{i,j} x_{ij}^2$ — квадрат расстояния от матрицы X до 0. Найдём точки минимума $G(X)$ при условии, что $X \in SL(n)$. Необходимое условие экстремума выполняется в точках $\text{grad}(G(X)) = \lambda \text{grad}(\det X)$. Таким образом $2x_{ij} = \lambda X_{ij}$. Кроме того, $\sum_j x_{ij} X_{ij} = \det X = 1$ и $\sum_j x_{ij} X_{mj} = 0$ при $i \neq m$. Таким образом, необходимому условию условного экстремума удовлетворяют только ортогональные матрицы. Очевидно, $d^2 G(X) > 0$. Поэтому все ортогональные матрицы являются точками минимума и $G(SO(n)) = \{n\}$. ▲

Следствие 10. (неравенство Адамара) Справедливо неравенство $\det^2 X \leq \prod_i \sum_j x_{ij}^2$. Причём равенство достигается только если вектора-строки матрицы X ортогональны.

Доказательство. Пусть X — произвольная матрица. Без ограничения общности можно полагать, что $\det X > 0$. Рассмотрим матрицу A , которая получена из матрицы X делением каждой i -ой строки на $(\sum_j x_{ij}^2)^{1/2}$. Тогда $G(A) = n$. Если $\det A = \alpha > 1$, то $\frac{1}{\alpha^{1/n}} A \in SL(n)$ и $G(\frac{1}{\alpha^{1/n}} A) = \frac{n}{\alpha^{2/n}} < n$. Пришли к противоречию. Поэтому $\det A \leq 1$ и равенство возможно если и только если $A \in SO(n)$. Имеем $1 \geq \det^2 A = \det^2 X / (\prod_i \sum_j x_{ij}^2)$. ▲

Заметим, что $|\det X|$ — объём параллелепипеда построенного на векторах-строках матрицы X . Соответственно неравенство Адамара утверждает, что объём не превышает произведения длин векторов и будет максимальным только если вектора ортогональны.

Задача 8. Докажите, что множество матриц размера $n \times n$ и ранга $n - 1$ является гладким многообразием.

2. Мера и интегрирование

Система подмножеств $S \subset \mathcal{P}(X)$ множества X называется *дизъюнктивной*, если два произвольных различных множества этой системы взаимно не пересекаются.

Определение 19. Система $S \subset \mathcal{P}(X)$ называется *дробящейся*, если для любых двух элементов $P_1, P_2 \in S$ можно найти конечную дизъюнктивную подсистему $B = \{B_1, \dots, B_k\} \subset S$ такую, что

$$P_1 = \bigcup_{j \in I_1} B_j, P_2 = \bigcup_{j \in I_2} B_j, P_1 \cup P_2 = \bigcup_{j \in I_3} B_j, \quad I_1, I_2, I_3 \subseteq \{1, \dots, k\}.$$

Заметим, что раз B — дизъюнктивный набор, то $P_1 \setminus P_2$, $P_2 \setminus P_1$, $P_1 \cap P_2$ также являются объединениями некоторых подмножеств из B .

Пример 8. Дробящимися системами являются

- 0) множество всех конечных подмножеств;
- 1) система промежутков в $\mathbb{R}$;
- 2) система параллелепипедов в $\mathbb{R}^n$, т. е. $S_n = \{\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle\}$;

3) система, состоящая из множеств бесконечных символьных последовательностей, у которых фиксированы символы в некоторых позициях.

Определение 20. Система $S \subset \mathcal{P}(X)$ называется *кольцом*, если она замкнута относительно операций объединения, пересечения и дополнения. Система $S \subset \mathcal{P}(X)$ называется σ -кольцом, если она дополнительно замкнута относительно счётного объединения.

Отметим, что кольцо множеств является коммутативным кольцом относительно операций симметрической разности $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ и $A \cap B$. Здесь симметрическая разность играет роль сложения с пустым множеством в качестве нуля, а пересечение — умножения. Выполнение требуемых алгебраических соотношений удобнее проверить, перейдя к рассмотрению характеристических функций. Справедливы равенства $\chi_{A \Delta B} = \chi_A \oplus \chi_B$ и $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$, где операции сложения и умножения определены в поле $GF(2)$. Операции объединения множеств и дополнения выражаются, через пересечение и симметрическую разность: $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$, $A \setminus B = (A \Delta B) \cap A$.

Утверждение 23. Пусть $\tilde{S}$ — множество конечных дизъюнктивных объединений элементов дробящейся системы S . Тогда $\tilde{S}$ является кольцом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A, B \in \tilde{S}$. Докажем, что $A \cup B \in \tilde{S}$. Пусть $A = P_1 \sqcup \dots \sqcup P_k$, $B = Q_1 \sqcup \dots \sqcup Q_m$, где $P_i, Q_j \in S$ при всех i, j . По определению дробящейся системы $P_i \setminus Q_1 \in \tilde{S}$ при $i = 1, \dots, k$. Поскольку множества $P_i \setminus Q_1$ попарно не пересекаются, имеем $A \cup Q_1 = (P_1 \setminus Q_1) \sqcup \dots \sqcup (P_k \setminus Q_1) \sqcup Q_1 \in \tilde{S}$. Аналогично, рассмотрев множество $A \cup Q_1$ вместо A получаем, что $A \cup Q_1 \cup Q_2 \in \tilde{S}$. Далее, по индукции заключаем, что $A \cup B \in \tilde{S}$.

Докажем, что $A \cap B \in \tilde{S}$. Имеем $A \cap B = (A \cap Q_1) \sqcup \dots \sqcup (A \cap Q_m)$. Таким образом, достаточно доказать, что $(A \cap Q_j) \in \tilde{S}$. Это следует из равенства $A \cap Q_j = (P_1 \cap Q_j) \sqcup \dots \sqcup (P_k \cap Q_j)$.

Докажем, что $A \setminus B \in \tilde{S}$. Поскольку множества $P_i \setminus Q_1$ попарно не пересекаются, имеем $A \setminus Q_1 = (P_1 \setminus Q_1) \sqcup \dots \sqcup (P_k \setminus Q_1) \in \tilde{S}$. Аналогично, рассмотрев множество $A \setminus Q_1$ вместо A получаем, что $(A \setminus Q_1) \setminus Q_2 \in \tilde{S}$. Из равенства $A \setminus B = (\dots (A \setminus Q_1) \setminus Q_2 \dots) \setminus Q_m \dots$ по индукции получаем, что $A \setminus B \in \tilde{S}$. $\blacktriangle$

Вспомним определение меры.

Определение 21. Мерой называется неотрицательная функция $\mu : S \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию *конечной (или счётной) аддитивности*: если множества

$P_1, \dots, P_i, \dots \in S$ попарно не пересекаются, то $\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\omega} P_i \right) = \sum_{i=1}^{\omega} \mu(P_i)$, где $\omega \in \mathbb{N}$ в случае конечной аддитивности и $\omega = \infty$ в случае счётной аддитивности.

Обычно полагают, что совокупность множеств S , для которых определена мера замкнута относительно операций конечного (счётного) объединения, пересечения и дополнения, т. е. кольцо (или σ -кольцо). Метод, предложенный Лебегом, позволяет продолжить меру, заданную лишь на дробящейся системе, на содержащее её σ -кольцо.

Определение 22. Мерой Лебега n -мерного параллелепипеда $P = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times$

$\cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$ называется $\mu_L(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$.

В 1-, 2-, 3-мерных случаях мера Лебега совпадает, соответственно, с длиной, площадью и объёмом.

Другими простыми примерами меры являются считающая мера (равная мощности конечного множества) и атомарная мера (мера любого множества равна 1 или 0 в зависимости от того содержится или нет в множестве некоторый элемент).

Разбиение параллелепипеда назовём декартовым, если оно порождается разбиением его сторон, например, $\langle a_0, a_k \rangle \times \langle b_0, b_k \rangle = \bigcup_{i,j} \langle a_i, a_{i+1} \rangle \times \langle b_j, b_{j+1} \rangle$, где $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$, $b_0 < b_1 < \cdots < b_k$.

Задача 9. Докажите, что куб нельзя представить в виде конечного объединения кубов попарно различного размера, которые попарно не пересекаются (пересекаются только по части своей границы).

Замечание 7. Квадрат можно разбить на 21 (или более) попарно различных квадратов (задача квадрирования квадрата).

Для декартова разбиения $P_1, \dots, P_m$ параллелепипеда P равенство $\mu_L(P) = \sum_{i=1}^m \mu_L(P_i)$ следует из дистрибутивности операций сложения и умножения вещественных чисел.

Утверждение 24. (о счётной аддитивности меры Лебега на параллелепипедах) Мера Лебега является счётно-аддитивной на системе параллелепипедов S_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_1, \dots, P_\omega \in S_n$ — дизъюнктный набор параллелепипедов такой, что $P_i \subseteq Q$ для любого i .

1. Докажем, что $\sum_{i=1}^\omega \mu_L(P_i) \leq \mu_L(Q)$. Пусть $\omega \in \mathbb{N}$, $P_i = \langle a_1^i, b_1^i \rangle \times \langle a_2^i, b_2^i \rangle \times \cdots \times \langle a_n^i, b_n^i \rangle$, $Q = \langle a_1^0, b_1^0 \rangle \times \langle a_2^0, b_2^0 \rangle \times \cdots \times \langle a_n^0, b_n^0 \rangle$. Рассмотрим декартово разбиение D параллелепипеда Q , использующее разбиение каждой j -ой стороны на всевозможные a_j^i, b_j^i , $i = 0, \dots, \omega$. Тогда в D имеется набор, являющийся декартовым разбиением P_i для любого $i = 1, \dots, \omega$. Поскольку параллелепипеды P_i попарно не пересекаются, то их декартовы разбиения тоже не пересекаются. Поэтому $\mu_L(Q) \geq \sum_{i=1}^\omega \mu_L(P_i)$. Рассмотрим случай $\omega = \infty$. Для каждого конечного набора P_i , $i = 1, \dots, n$, неравенство выполнено. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ получим $\mu_L(Q) \geq \sum_{i=1}^\omega \mu_L(P_i)$.

2. Пусть $\{\tilde{P}_i \mid i = 1, \dots, m\}$ — некоторый (возможно недизъюнктный) конечный набор параллелепипедов $Q \subseteq \bigcup_i \tilde{P}_i$. Покажем, что $\sum_{i=1}^m \mu_L(\tilde{P}_i) \geq \mu_L(Q)$. Рассмотрим декартово разбиение параллелепипеда $[\min_i a_1^i, \max_i b_1^i] \times \cdots \times [\min_i a_n^i, \max_i b_n^i]$, использующее разбиение каждой j -ой стороны на всевозможные a_j^i, b_j^i , $i = 1, \dots, m$. Имеем $\mu_L(Q) \leq \sum_{i=1}^m \mu_L(\tilde{P}_i)$, поскольку если представить левую и правую часть как суммы по элементам декартова разбиения, то все слагаемые из левой части будут содержаться в правой части.

Пусть $\alpha > 1$. Рассмотрим в качестве $\tilde{P}_i$ параллелепипеды $(c_1^i, d_1^i) \times (c_2^i, d_2^i) \times \cdots \times (c_n^i, d_n^i)$, где $|d_j^i - c_j^i| = \alpha |b_j^i - a_j^i|$ и $\langle a_j^i, b_j^i \rangle \subset (c_j^i, d_j^i)$. Пусть $\bar{Q}$ — замыкание Q . Тогда $\bar{Q}$ — компакт и по определению покрывается конечным числом параллелепипедов $\tilde{P}_i$, без

ограничения общности можно полагать, что первыми m . Тогда из доказанного выше следует, что $\mu_L(Q) = \mu_L(\overline{Q}) \leq \sum_{i=1}^m \mu_L(\tilde{P}_i) = \alpha^n \sum_{i=1}^m \mu_L(P_i) \leq \alpha^n \sum_{i=1}^\omega \mu_L(P_i)$. Поскольку $\alpha > 1$ произвольно, получаем требуемое неравенство. $\blacktriangle$

Утверждение 25. (о продолжении счётно-аддитивной меры на кольцо) Если μ — счётно-аддитивная мера на дробящейся системе S , то она продолжается на кольцо $\tilde{S}$ с сохранением счётной аддитивности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распространим область определения меры на кольцо $\tilde{S}$ по аддитивности. Покажем, что полученная функция счётно аддитивна. Пусть $A = Q_1 \sqcup \dots \sqcup Q_k$, $P_i \in \tilde{S}$ и $A = \bigcup_{i=1}^\omega P_i$, $\{P_i\}$ — некоторая дизъюнктная система из $\tilde{S}$. Без ограничения общности можно считать, что $P_i \in S$, поскольку $P_i = P_i^1 \sqcup \dots \sqcup P_i^k$, где $P_i^j \in S$. По определению дробящейся системы каждый элемент P_i можно представить в виде дизъюнктного объединения $P_i = \bigcup_{j \in I_1^i} B_j^i \dots \bigcup_{j \in I_k^i} B_j^i$ так, что $B_j^t \in S$ с индексами $j \in I_t^i$ пересекаются только с элементом Q_t . Тогда по условию имеем $\mu(Q_t) = \sum_i \sum_{j \in I_t^i} \mu(B_j^i)$. Поскольку сумма ряда из неотрицательных слагаемых

не зависит от их порядка имеем $\mu(A) = \sum_{i=1}^\omega \mu(P_i)$. Отметим, что доказанное равенство при $\omega \in \mathbb{N}$ означает корректность продолжения меры на $\tilde{S}$. $\blacktriangle$

Следствие 11. Мера Лебега является счётно-аддитивной на кольце $\tilde{S}_n$.

Утверждение 26. (о полуаддитивности меры)

Пусть $\tilde{S}$ — кольцо, $Q \in \tilde{S}$, $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \tilde{S}$, μ — счётно-аддитивная мера.

1. Если $Q \subset \bigcup_i P_i$, то $\mu(Q) \leq \sum_{i=0}^\infty \mu(P_i)$.
2. Если $Q \subset \bigcup_i P_i$ и $P_i \subseteq P_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ то $\mu(Q) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(P_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Рассмотрим $A_n = P_n \cap Q$ и $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i < n} A_i$. Из условия следует, что $Q = \bigcup_{n=0}^\infty B_n$ и по построению множества B_n попарно не пересекаются. Из определения кольца следует, что $B_n \in \tilde{S}$ и $\mu(P_n) \geq \mu(B_n)$. Из счётной аддитивности имеем $\mu(Q) = \sum_{n=0}^\infty \mu(B_n) \leq \sum_{n=0}^\infty \mu(P_n)$.

2. Пусть $C_0 = P_0$ и $C_n = P_n \setminus P_{n-1}$ при $n \geq 1$. Тогда $\mu(P_n) = \sum_{i=0}^n \mu(C_i)$ и из пункта 1 имеем $\mu(Q) \leq \sum_{i=0}^\infty \mu(C_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(P_n)$. $\blacktriangle$

Задача 10. Докажите, что любое открытое множество в $\mathbb{R}$ является счётным объединением попарно не пересекающихся интервалов.

Далее всюду будем предполагать, что рассматриваемая мера μ является счётно-аддитивной на дробящейся системе S и, как следствие, на кольце $\tilde{S}$.

Определение 23. Функция $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется ступенчатой (относительно дробящейся системы S), если существует такая конечная дизъюнктная совокупность множеств $\{P_i \in S \mid i = 1, 2, \dots, k\}$, что на каждом из этих множеств функция при-

нимает фиксированное значение $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, отличное от нуля, и $\varphi(x) = 0$ при $x \notin \bigcup_{i=1}^k P_i$. Любую ступенчатую функцию удобно записывать в виде $\varphi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{P_i}(x)$.

Множество ступенчатых функций обозначим через $\text{Step}(X, S)$.

Замечание 8. Из определения дробящейся системы следует, что если φ_1 и φ_2 — различные ступенчатые функции, то существует конечная дизъюнктивная система множеств из S такая, что φ_1 и φ_2 являются линейными комбинациями характеристических функций этой дизъюнктивной системы.

Определение 24. Пусть $\varphi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{P_i}(x)$. Определим $\int_X \varphi(x) d\mu = \sum_{i=1}^k c_i \mu(P_i)$.

Замечание 9. Из определения дробящейся системы следует, что на множестве ступенчатых функций интеграл определён корректно (не зависит от представления ступенчатой функции в виде линейной комбинации характеристических функций), является линейным и монотонным оператором.

Из монотонности интеграла следует неравенство $|\int_X \varphi(x) d\mu| \leq \int_X |\varphi(x)| d\mu$.

Лемма 2. (принцип исчерпывания) Пусть $\psi \in \text{Step}(X, S)$ и $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \varphi_n \leq \dots$ — такая неубывающая последовательность ступенчатых функций, что $\psi(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ для любой точки $x \in X$. Тогда $\int_X \psi d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала принцип исчерпывания для $\psi = \chi_P$. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множества $A_n = \{x \in X \mid \varphi_n(x) > 1 - \varepsilon\}$. Имеем $A_n \in \tilde{S}$ и $A_{n-1} \subseteq A_n$. Из условия следует, что $P \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда из утверждения о полуаддитивности меры μ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \geq \mu(P)$. Поскольку $\int_X \varphi_n(x) d\mu \geq (1 - \varepsilon)\mu(A_n)$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu \geq (1 - \varepsilon)\mu(P)$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ следует требуемое.

Пусть $\psi(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{P_i}(x)$. Без ограничения общности полагаем, что $c_i > 0$, а P_i попарно не пересекаются. Рассмотрим функции $\varphi_n^i = \frac{1}{c_i} \varphi_n \cdot \chi_{P_i}$. Из условия имеем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^i(x) \geq 1$ для любой точки $x \in P_i$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n^i d\mu \geq \mu(P_i)$. Используя линейность интеграла, из равенства $\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^k c_i \varphi_n^i(x)$ получаем $\int_X \varphi_n d\mu = \sum_{i=1}^k c_i \int_X \varphi_n^i d\mu$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu = \sum_{i=1}^k c_i \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n^i d\mu \geq \sum_{i=1}^k c_i \mu(P_i) = \int_X \psi d\mu. \blacktriangle$$

Определение 25. Полунормой называется неотрицательная функция $p : L \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, определённая на векторном пространстве L и удовлетворяющая условиям $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in L$; $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ для всех $x, y \in L$.

В отличие от нормы, для полунормы не выполнено условие: из $\|x\| = 0$ следует $x = 0$. Рассмотрим произвольное пространство с мерой (X, S, μ) .

Определение 26. Число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *интегральной оценкой* функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, если найдётся монотонная последовательность ступенчатых функций $0 \leq \varphi_1 \leq \dots \leq \varphi_n \leq \dots$, для которой выполнено
 1) $|f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$, для всех $x \in X$, 2) $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu$.

Определение 27. *Интегральной (полу)нормой* функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется нижняя грань интегральных оценок функции f , т. е. $\|f\|^* = \inf a$.

Утверждение 27. Функция $\|f\|^*$ является полунормой и если $\psi \in \text{Step}(X, S)$, то $\|\psi\|^* = \int_X |\psi| d\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию αf . Если a — интегральная оценка функции f , то $|\alpha|a$ — интегральная оценка функции αf . Поэтому $\|\alpha f\|^* \leq |\alpha| \|f\|^*$. Аналогично $\|\frac{1}{\alpha}(\alpha f)\|^* \leq |\frac{1}{\alpha}| \|\alpha f\|^*$. Если b — интегральная оценка функции g , то $a + b$ — интегральная оценка функции $f + g$. Тогда $\|f + g\|^* \leq a + b$. Из свойства инфимума следует, что $\|f + g\|^* \leq \|f\|^* + \|g\|^*$.

Для любой ступенчатой функции ψ число $\int_X |\psi| d\mu$ является интегральной оценкой, поскольку можно рассмотреть последовательность $\varphi_n = |\psi|$. Из принципа исчерпывания следует, что эта оценка наилучшая. ▲

Определение 28. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *интегрируемой по Лебегу*, если найдётся такая последовательность ступенчатых функций (φ_n) , что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|^* = 0$. Тогда число $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu$ называется интегралом функции f на множестве X по мере μ .

Множество интегрируемых по Лебегу функций обозначим $L(X, S, \mu)$.

Утверждение 28. (корректность определения интеграла) Для любой интегрируемой функции интеграл определён, конечен и не зависит от выбора приближающей последовательности ступенчатых функций. Для любой ступенчатой функции новое определение интеграла совпадает с прежним.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция f интегрируема по Лебегу. Покажем, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|^* = 0$, то последовательность $(\int_X \varphi_n d\mu)$ является фундаментальной. Действительно, имеем $\|\varphi_m - \varphi_n\|^* \leq \|f - \varphi_m\|^* + \|f - \varphi_n\|^*$ и $|\int_X \varphi_m d\mu - \int_X \varphi_n d\mu| \leq \int_X |\varphi_m - \varphi_n| d\mu = \|\varphi_m - \varphi_n\|^*$. По критерию Коши интеграл $\int_X f d\mu$ определён и конечен.

Предположим, что имеется две приближающие f последовательности ступенчатых функций (φ_n) и (ψ_n) . Тогда $\|\psi_n - \varphi_n\|^* \leq \|f - \psi_n\|^* + \|f - \varphi_n\|^*$. Отсюда имеем $\int_X |\psi_n - \varphi_n| d\mu = \|\psi_n - \varphi_n\|^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда из неравенства $|\int_X \psi_n d\mu - \int_X \varphi_n d\mu| \leq \int_X |\psi_n - \varphi_n| d\mu$ следует, что пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \psi_n d\mu$ совпадают.

Для ступенчатой функции ψ можно рассмотреть приближающую последовательность $\varphi_n = \psi$. ▲

Утверждение 29. (свойства интеграла Лебега)

1. Если $f, g \in L(X, S, \mu)$, то $\alpha f + \beta g \in L(X, S, \mu)$ и

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

2. Если $f \in L(X, S, \mu)$, то $|f| \in L(X, S, \mu)$ и $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu = \|f\|^*$.

3. Если $f, g \in L(X, S, \mu)$ и $f \leq g$, то $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $\|f - \varphi_n\|^* \rightarrow 0$ и $\|g - \psi_n\|^* \rightarrow 0$, из свойств интегральной нормы следует, что $\|\alpha f + \beta g - (\alpha \varphi_n + \beta \psi_n)\|^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда из определения интеграла и линейности интеграла на ступенчатых функциях имеем $\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (\alpha \varphi_n + \beta \psi_n) d\mu = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \psi_n d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$.

2. Имеем, $||f(x)| - |\varphi_n(x)|| \leq |f(x) - \varphi_n(x)|$ для любого $x \in X$. Поэтому $||f| - |\varphi_n||^* \leq \|f - \varphi_n\|^*$. Следовательно, если $\|f - \varphi_n\|^* \rightarrow 0$ и $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu$, то $\int_X |f| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |\varphi_n| d\mu$. Причём $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$, поскольку $|\int_X \varphi_n d\mu| \leq \int_X |\varphi_n| d\mu$.

Заметим, что $||f|^* - |g|^*| \leq \|f - g\|^*$ для любых функций f и g . Поэтому из $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|^* = 0$ имеем $\|f\|^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |\varphi_n| d\mu = \int_X |f| d\mu$.

3. Из линейности интеграла имеем $\int_X g d\mu - \int_X f d\mu = \int_X (g - f) d\mu = \int_X |g - f| d\mu = \|f - g\|^* \geq 0$. ▲

Утверждение 30. (об интеграле Римана) Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a, b]$, тогда функция $f \cdot \chi_{[a, b]}$ интегрируема по мере Лебега и $\int_{\mathbb{R}} f \cdot \chi_{[a, b]} d\mu = \int_a^b f(x) dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\varphi, \psi \in \text{Step}([a, b])$ такие, что $|f \cdot \chi_{[a, b]}(x) - \varphi(x)| \leq \psi(x)$ при $x \in \mathbb{R}$ и $\int_a^b \psi(x) dx < \varepsilon$. Рассмотрим $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ и соответствующую последовательность ступенчатых функций φ_n . Тогда $\|f \cdot \chi_{[a, b]} - \varphi_n\|^* \leq \frac{1}{n}$. Значит f интегрируема по мере Лебега. Поскольку определения интеграла ступенчатой функции по Риману и Лебегу совпадают, имеем

$$\int_{\mathbb{R}} f \cdot \chi_{[a, b]} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

▲

Утверждение 31. (о счётной полуаддитивности интегральной нормы)

Пусть $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\|\sum_{n=0}^{\infty} f_n\|^* \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем, что $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^* < \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное. Рассмотрим такие возрастающие последовательности функций $\varphi_n^m \in \text{Step}(X, S)$, которые мажорируют f_m и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n^m d\mu < \|f_m\|^* + \frac{\varepsilon}{2^m}$.

Рассмотрим последовательность $\psi_n = \varphi_n^1 + \dots + \varphi_n^n$. Для любых $x \in X$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) \geq \sum_{i=0}^m \varphi_n^i(x) \geq \sum_{i=0}^m f_i(x)$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) \geq \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$. Таким образом, последовательность ψ_n мажорирует функцию $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$.

По построению, $\int_X \psi_n d\mu = \sum_{i=0}^n \int_X \varphi_n^i d\mu \leq 2\varepsilon + \sum_{i=0}^n \|f_i\|^*$.

Тогда $\|\sum_{i=0}^{\infty} f_i\|^* \leq 2\varepsilon + \sum_{i=0}^{\infty} \|f_i\|^*$. Из произвольности ε следует требуемое. ▲

Заметим, что в доказательстве не требуется, чтобы $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) < \infty$ во всех $x \in X$. Таким образом, функция $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, принимающая бесконечные значения, может иметь конечную интегральную норму. Распространим понятие интегральной нормы и интеграла на произвольные функции $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ с теми же определениями, как для функций, принимающих только конечные значения.

Определение 29. Будем называть функцию $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ *пренебрежимой*, если $\|f\|^* = 0$. Множество $A \subset X$ будем называть *пренебрежимым*, если $\|\chi_A\|^* = 0$.

Вспомним, что *носителем* функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется множество $\text{supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

Утверждение 32. (о пренебрежимых функциях) Функция f пренебрежима тогда и только тогда, когда её носитель есть пренебрежимое множество. Любая пренебрежимая функция f интегрируема и $\int_X f d\mu = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $A_\delta = \{x \in X \mid |f(x)| > \delta\}$. Поскольку $\chi_{A_\delta}(x) \leq |f(x)|/\delta$, имеем $\|\chi_{A_\delta}\|^* \leq \|f\|^*/\delta$.

Пусть $\|f\|^* = 0$. Тогда $\|\chi_{A_\delta}\|^* = 0$ для любого $\delta > 0$. Очевидно, $\chi_{\text{supp}(f)}(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{A_{1/n}}(x)$ для всех $x \in X$. Тогда по утверждению о счётной полуаддитивности интегральной нормы получаем, что $\|\chi_{\text{supp}(f)}\|^* = 0$.

Пусть $\|\chi_{\text{supp}(f)}\|^* = 0$. Очевидно, $|f(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{\text{supp}(f)}(x)$ для всех $x \in X$. Тогда по утверждению о счётной полуаддитивности интегральной нормы получаем, что $\|f\|^* = 0$.

Пусть $\|f\|^* = 0$, тогда в качестве приближающей последовательности ступенчатых функций можно рассмотреть последовательность из тождественно нулевых функций. Тогда $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X 0 d\mu = 0$. ▲

Следствие 12. Две функции отличающиеся только на пренебрежимом множестве интегрируемые или неинтегрируемы одновременно и в первом случае их интегралы равны.

В дальнейшем, если рассматриваемая функция не задана на пренебрежимом множестве, то доопределяем её произвольным образом, в частности, нулём.

Задача 11. Докажите, что пренебрежимые множества на $\mathbb{R}$ относительно меры Лебега являются множествами меры 0 и наоборот.

Утверждение 33. (о неограниченных функциях) Пусть $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ и $\|f\|^* < \infty$. Тогда множество $A_\infty = \{x \in X \mid |f(x)| = \infty\}$ пренебрежимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $A_n = \{x \in X \mid |f(x)| > n\}$. Имеем $\|\chi_{A_n}\|^* \leq \|f\|^*/n$. Из $\chi_{A_\infty} \leq \chi_{A_n}$, имеем $\|\chi_{A_\infty}\|^* \leq \|\chi_{A_n}\|^* \leq \|f\|^*/n$. Поскольку $n > 0$ произвольно, получаем равенство $\|\chi_{A_\infty}\|^* = 0$. ▲

Лемма 3. (о замкнутости) Если $f_n \in L(X, S, \mu)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\|f - f_n\|^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $f \in L(X, S, \mu)$ и $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f_n \in L(X, S, \mu)$, найдётся такая $\varphi_n \in \text{Step}(X, S)$, что $\|f_n - \varphi_n\|^* < 1/n$. Тогда $\|f - \varphi_n\|^* \rightarrow 0$ и $f \in L(X, S, \mu)$ по определению. $|\int_X f d\mu - \int_X f_n d\mu| \leq \int_X |f - f_n| d\mu = \|f - f_n\|^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. $\blacktriangle$

Вспомним, что ряд $\sum_n f_n$ называется нормально сходящимся, если сходится ряд из норм $\sum_n \|f_n\|^*$.

Лемма 4. (о нормально сходящихся рядах)

Пусть $f_n \in L(X, S, \mu)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum_n \|f_n\|^*$ сходится. Тогда

1) ряд $\sum_n f_n(x)$ сходится почти для всех $x \in X$;

2) функция $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ интегрируема;

3) $\int_X F d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n d\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждений о счётной полуаддитивности нормы и о неограниченных функциях следует, что ряд $\sum_n |f_n(x)|$ сходится почти для всех $x \in X$. Тогда 1) выполнено.

Рассмотрим функции $F_m(x) = \sum_{i=0}^m f_i(x)$. Из свойства линейности интеграла ясно, что $F_m \in L(X, S, \mu)$. Следовательно найдётся такая $\varphi_n \in \text{Step}(X, S)$, что $\|F_m - \varphi_n\| < 1/2^m$. Заметим, что $\|F_m - F\|^* = \|\sum_{n>m} f_n(x)\|^* \leq \|\sum_{n>m} |f_n(x)|\|^* \leq \sum_{n>m} \|f_n(x)\|^* \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда $\|\varphi_m - F\|^* \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Следовательно, $F \in L(X, S, \mu)$.

Имеем $\int_X F_m d\mu = \sum_{n=0}^m \int_X f_n d\mu$. Из леммы о замкнутости $\int_X F d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X F_m d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n d\mu$. $\blacktriangle$

Лемма 5. (Бешпо Леви) Пусть $h_n \in L(X, S, \mu)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, последовательность $h_n(x)$ монотонно возрастает (или убывает) для почти всех $x \in X$ и $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\int_X h_n d\mu| < \infty$. Тогда для почти всех $x \in X$ существует конечный предел $h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$, $h \in L(X, S, \mu)$ и $\int_X h d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $f_n = h_n - h_{n-1}$ и $f_0 = h_0$. Оценим $\sum_n \|f_n\|^*$. Имеем

$$\sum_{n=1}^m \|f_n\|^* = \sum_{n=1}^m \int_X |h_n - h_{n-1}| d\mu = \sum_{n=1}^m \int_X (h_n - h_{n-1}) d\mu = \int_X h_m d\mu - \int_X h_0 d\mu < \infty,$$

если h_n возрастает и $\sum_{n=1}^m \|f_n\|^* \leq \int_X h_0 d\mu - \int_X h_m d\mu < \infty$, если h_n убывает. Тогда по теореме о нормально сходящихся рядах получаем, что ряд $\sum_n f_n$ сходится почти всюду. Определим $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Справедливы равенства

$$\int_X h d\mu = \int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X \sum_{n=0}^m f_n d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X h_m d\mu. \blacktriangle$$

Задача 12. Докажите, что если $f_n \in L(X, S, \mu)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\|f_n - f\|^* \rightarrow 0$ при

$n \rightarrow \infty$, то найдётся такая подпоследовательность (n_k) , что $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ почти для всех $x \in X$.

Говорят, что семейство интегрируемых функций (f_n) имеет интегрируемую мажоранту, если существует функция $h \in L(X, S, \mu)$ такая, что $|f_n(x)| \leq h(x)$ для почти всех $x \in X$ и всех $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение 34. (об интегрируемости верхней и нижней огибающей)

- 1) Если $f, g \in L(X, S, \mu)$, то $\max(f, g), \min(f, g) \in L(X, S, \mu)$.
- 2) Для любого счётного семейства интегрируемых функций $\{g_n\}, g_n \in L(X, S, \mu)$, имеющего интегрируемую мажоранту, верхняя и нижняя огибающие $\sup_n g_n$ и $\inf_n g_n$ интегрируемы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Следует из равенств $\max(f, g) = (f + g + |f - g|)/2$, $\min(f, g) = (f + g - |f - g|)/2$ и свойств интегрирования по Лебегу.

2. Функцию $f(x) = \sup_n g_n(x)$ можно рассматривать как предел возрастающей последовательности интегрируемых по п.1 функций $f_m(x) = \sup_{n \leq m} g_n(x)$. Тогда требуемое следует из леммы Беппо Леви. ▲

Теорема 8. (Лебега о мажорируемой сходимости) Пусть последовательность интегрируемых функций (f_n) имеет интегрируемую мажоранту и сходится почти всюду к функции f . Тогда f интегрируема, $\|f - f_n\|^* \rightarrow 0$ и $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Определим последовательность функций $h_n(x) = \sup_{m \geq n} f_m(x)$. Если h — интегрируемая мажоранта для последовательности (f_n) , то h — интегрируемая мажоранта для последовательности (h_n) . Функции h_n интегрируемы по утверждению об огибающих. Из $|h_n(x)| \leq h(x)$ имеем $|\int_X h_n d\mu| \leq \int_X h d\mu < \infty$. Последовательность (h_n) монотонно убывает, тогда по лемме Беппо Леви её предел является интегрируемой функцией. Нетрудно видеть, что $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ почти для всех $x \in X$. Кроме того, по лемме Беппо Леви $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Аналогично рассмотрим возрастающую последовательность интегрируемых функций $u_n(x) = \inf_{m \geq n} f_m(x)$ и получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X u_n d\mu = \int_X f d\mu$. Поскольку $u_n(x) \leq f_n(x) \leq h_n(x)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$, имеем $\int_X u_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu \leq \int_X h_n d\mu$. Из этих неравенств и леммы о зажатой последовательности следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Кроме того, $|f(x) - f_n(x)| \leq h_n(x) - u_n(x)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$. Имеем $\|h_n - u_n\|^* = \int_X |h_n - u_n| d\mu = \int_X (h_n - u_n) d\mu \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $\|f - f_n\|^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. ▲

Пример 9. Рассмотрим $f_n(x) = \sin^2 \frac{1}{xn}$. Очевидно $f_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $x \in (0, 1]$ и функция $\chi_{[0,1]}$ является интегрируемой мажорантой последовательности (f_n) на $[0, 1]$. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin^2 \frac{1}{xn} dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{1}{xn} \right) dx = 0$.

Следующие примеры показывают, что без условия о существовании интегрируемой мажоранты теорема о предельном переходе под знаком интеграла была бы

неверной.

Пример 10. Пусть $f_n = n\chi_{(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})}$. Тогда $f_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $x \in [0, 1]$. Однако $\int_0^1 f_n(x) dx = 1$.

Пример 11. Пусть $f_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$. Тогда $f_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Однако $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \pi$.

Утверждение 35. (Рисса о полноте) Множество $L(X, S, \mu)$ является полным пространством относительно интегральной нормы.

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О . Пусть имеется фундаментальная последовательность (f_n) . Из неё можно выбрать такую подпоследовательность, что $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|^* < \frac{1}{2^k}$. Тогда по теореме о нормально сходящихся рядах ряд $\sum_k |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|$ сходится почти для всех $x \in X$. Следовательно, частичные суммы $f_{n_{m+1}}(x) = f_{n_0}(x) + \sum_{k=0}^m (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ имеют конечный предел почти для всех $x \in X$. Обозначим $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$.

Функция $G(x) = |f_{n_0}(x)| + \sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ является интегрируемой (по лемме о нормально сходящихся рядах) мажорантой последовательности (f_{n_k}) . По теореме Лебега о мажорируемой сходимости $f \in L(X, S, \mu)$ и $\|f_{n_k} - f\|^* \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Из фундаментальности последовательности (f_n) следует, что $\|f_n - f\|^* \rightarrow 0$, т. е. пространство $L(X, S, \mu)$ является полным. ▲

Следствие 13. (об извлечении сходящейся последовательности) Если $h \in L(X, S, \mu)$, то найдётся такая последовательность ступенчатых функций (φ_n) , что $\|\varphi_n - h\|^* \rightarrow 0$ и $\varphi_n(x) \rightarrow h(x)$ для почти всех $x \in X$ при $n \rightarrow \infty$.

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О . Из определения интегрируемости следует, что найдётся такая последовательность ступенчатых функций (φ_n) , что $\|\varphi_n - h\|^* < 1/2^n$. Из неравенства треугольника следует, что (φ_n) — фундаментальная последовательность. Тогда по теореме Рисса найдётся такая функция $g \in L(X, S, \mu)$, для которой $\|\varphi_n - g\|^* \rightarrow 0$. Аналогично доказательству теоремы Рисса получаем, что $\varphi_n(x) \rightarrow g(x)$ для почти всех $x \in X$ при $n \rightarrow \infty$. Из неравенства треугольника имеем $\|h - g\|^* = \|\varphi_n - h\|^* + \|\varphi_n - g\|^* \rightarrow 0$. Тогда разность $h - g$ пренебрежима и по свойству пренебрежимых функций $h(x) = g(x)$ почти для всех $x \in X$. ▲

Утверждение 36. Пусть S_x и S_y дробящиеся системы на множествах X и Y соответственно. Тогда $S_x \times S_y$ является дробящейся системой на $X \times Y$.

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О . Рассмотрим $P_1 \times Q_1, P_2 \times Q_2 \in S_x \times S_y$. По определению дробящейся системы найдутся дизъюнктные наборы $\{A_i\} \subset S_x$, $\{B_j\} \subset S_y$ такие, что множества $P_1, P_2, P_1 \cap P_2$ являются объединением поднаборов из $\{A_i\}$, а множества $Q_1, Q_2, Q_1 \cap Q_2$ являются объединением поднаборов из $\{B_j\}$. Рассмотрим C — произвольное из множеств $P_1 \times Q_1, P_2 \times Q_2, (P_1 \times Q_1) \cap (P_2 \times Q_2)$. Оно является объединением некоторого поднабора из $\{A_i \times B_j\}$, поскольку содержится в $\bigsqcup_{i,j} (A_i \times B_j)$ и каждый $A_i \times B_j$ либо содержится в C , либо не пересекается с C . ▲

Пусть определены счётно аддитивные (на S_x и S_y соответственно) меры $\mu_1 : S_x \rightarrow$

$\mathbb{R}$ и $\mu_2 : S_y \rightarrow \mathbb{R}$. Определим меру $\mu : S_x \times S_y \rightarrow \mathbb{R}$ равенством $\mu(P \times Q) = \mu_1(P) \cdot \mu_2(Q)$.

Утверждение 37. Мера μ счётно аддитивна на $S_x \times S_y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \times B = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} (P_n \times Q_n)$. Определим ступенчатые функции $\varphi_n(x) = \mu_2(Q_n)$ при $x \in P_n$ и $\varphi_n(x) = 0$ при $x \notin P_n$. Для любого $x \notin A$ имеем $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 0$, а для любого $x \in A$ имеем $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = \mu_2(B)$, поскольку $\bigsqcup_{m: x \in P_m} Q_m = B$. Тогда по лемме Беппо Леви имеем $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_1(P_n) \cdot \mu_2(Q_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X \varphi_n(x) d\mu_1 = \int_X (\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)) d\mu_1 = \int_X \mu_2(B) \chi_A(x) d\mu_1 = \mu(A \times B)$. $\blacktriangle$

Через $\|\cdot\|_x^*$ и $\|\cdot\|_y^*$ будем обозначать, соответствующие мерам μ_1 и μ_2 , интегральные нормы. Интегральную норму, соответствующую мере μ , будем по-прежнему обозначать просто $\|\cdot\|^*$.

Утверждение 38. Пусть $\varphi_n \in \text{Step}(X \times Y, S_x \times S_y)$. Тогда функция $\psi(x) = \int_Y \varphi(x, y) d\mu_2$ является ступенчатой и справедливо равенство $\int_X (\int_Y \varphi(x, y) d\mu_2) d\mu_1 = \int_{X \times Y} \varphi d\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi = \chi_{P \times Q}$, т. е. $\varphi(x, y) = \chi_P(x) \cdot \chi_Q(y)$. Тогда $\int_Y \varphi(x, y) d\mu_2 = \chi_P(x) \mu_2(Q)$ и $\int_X (\int_Y \varphi(x, y) d\mu_2) d\mu_1 = \mu_1(P) \mu_2(Q) = \mu(P \times Q) = \int_{X \times Y} \varphi d\mu$. В общем случае утверждение следует из линейности интеграла. $\blacktriangle$

Лемма 6. (о повторной интегральной норме)

Для любой функции $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ справедливо неравенство $\|(\|f(x, y)\|_y^*)\|_x^* \leq \|f\|^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c \in \mathbb{R}$ — интегральная оценка для функции f и $(\varphi_n(x, y))$ — соответствующая возрастающая последовательность ступенчатых функций, т. е. $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} \varphi_n d\mu$ и $|f(x, y)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x, y)$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.

Зафиксируем произвольное $x \in X$. Очевидно число $c(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y \varphi_n(x, y) d\mu_2$ является интегральной оценкой для функции $f_x(y) = f(x, y)$. Определим функцию $h(x) = \|f_x(y)\|_y^*$. Тогда $|h(x)| \leq |c(x)|$. Следовательно, $\|h(x)\|_x^* \leq \|c(x)\|_x^*$.

Рассмотрим последовательность $\psi_n(x) = \int_Y \varphi_n(x, y) d\mu_2$. Из утверждения о повторном интегрировании ступенчатой функции имеем $\int_X \psi_n d\mu_1 = \int_X (\int_Y \varphi_n(x, y) d\mu_2) d\mu_1 = \int_{X \times Y} \varphi_n d\mu \leq c$. Тогда по лемме Беппо Леви имеем $\int_X c(x) d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \psi_n d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (\int_Y \varphi_n(x, y) d\mu_2) d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} \varphi_n d\mu = c$. Таким образом, $\|(\|f(x, y)\|_y^*)\|_x^* \leq c$. Из определений интегральной нормы и инфимума получаем требуемое. $\blacktriangle$

Теорема 9. (Фубини) Пусть $f \in L(X \times Y, S_x \times S_y, \mu)$. Тогда

- 1) $f_x \in L(Y, S_y, \mu_2)$ для почти всех $x \in X$, где $f_x(y) = f(x, y)$;
- 2) $F \in L(X, S_x, \mu_1)$, где $F(x) = \int_Y f_x(y) d\mu_2$;
- 3) $\int_X (\int_Y f(x, y) d\mu_2) d\mu_1 = \int_{X \times Y} f d\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\varphi_n(x, y))$ такая последовательность ступенчатых функций, что $\|f - \varphi_n\|^* < \frac{1}{2^n}$. Рассмотрим функцию $h_n(x) = \|f(x, y) - \varphi_n(x, y)\|_y^*$. По лемме о повторной норме имеем $\|h_n\|_x^* \leq \|f - \varphi_n\|^* < \frac{1}{2^n}$. Тогда ряд $\sum_n \|h_n\|^*$ сходится. По теореме о нормально сходящихся рядах ряд $\sum_n |h_n(x)|$ сходится почти для всех $x \in X$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 0$ почти для всех $x \in X$. Имеем $\|f_x(y) - \varphi_n(x, y)\|_y^* \rightarrow 0$

почти для всех $x \in X$. Таким образом п.1 доказан.

Определим ступенчатые функции $\psi_n(x) = \int_Y \varphi_n(x, y) d\mu_2$. Имеем $\|F - \psi_n\|_x^* = \|\int_Y (f(x, y) - \varphi_n(x, y)) d\mu_2\|_x^* \leq \|\int_Y |f(x, y) - \varphi_n(x, y)| d\mu_2\|_x^* = \|(\|f(x, y) - \varphi_n(x, y)\|_y^*)\|_x^* < \frac{1}{2^n}$ по лемме о повторной норме. Тогда $F \in L(X, S_x, \mu_1)$.

Кроме того, из определения интеграла и утверждения о повторном интегрировании ступенчатой функции имеем равенства

$$\begin{aligned} \int_X (\int_Y f(x, y) d\mu_2) d\mu_1 &= \int_X F(x) d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \psi_n(x) d\mu_1 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (\int_Y \varphi_n(x, y) d\mu_2) d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} \varphi_n d\mu = \int_{X \times Y} f d\mu. \blacktriangle \end{aligned}$$

Задача 13. Пусть $f \in L(X, S_x, \mu_1)$ и $g \in L(Y, S_y, \mu_2)$. Докажите, что $h \in L(X \times Y, S_x \times S_y, \mu)$, где $h(x, y) = f(x)g(y)$, причём $\int_{X \times Y} h d\mu = (\int_X f d\mu_1)(\int_Y g d\mu_2)$.

Пусть (X, S, μ) — некоторое пространство с мерой. Для любого множества $A \subset X$ и функции $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, говорят, что функция f интегрируема на множестве A , если функция $f \cdot \chi_A$ интегрируема на X , полагаем $\int_A f d\mu = \int_X f \cdot \chi_A d\mu$.

Рассмотрим декартово произведение пространств с мерой $(X \times Y, S_x \times S_y, \mu)$. Теорему Фубини можно записать для случая интегрирования по подмножеству $A \subset X \times Y$. Определим множества $A_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}$ — сечения множества A и проекцию $Pr(A) = \{x \in X \mid \exists y \in Y, (x, y) \in A\}$ множества A на X . Нетрудно видеть, что $\chi_A(x, y) = \chi_{A_x}(y)\chi_{Pr(A)}(x)$. Если функция f интегрируема на множестве A имеем $\int_A f d\mu = \int_{X \times Y} f \chi_A d\mu = \int_X \chi_{Pr(A)}(x) (\int_Y f(x, y) \chi_{A_x}(y) d\mu_2) d\mu_1 = \int_{Pr(A)} (\int_{A_x} f(x, y) d\mu_2) d\mu_1$.

Рассмотрим некоторое пространство с мерой (X, S, μ) . Распространим меру μ , первоначально определённую на дробящейся системе S на более широкий класс множеств. Если χ_A — интегрируемая функция, определим $\mu(A) = \|\chi_A\|^* = \int_A 1 d\mu$. Обозначим совокупность таких множеств через $\mathfrak{L}(S, \mu) \subset \mathcal{P}(X)$, а множества из $\mathfrak{L}(S, \mu)$ будем называть *конечно измеримыми* (по мере μ). Расширение области определения меры μ с S до $\mathfrak{L}(S, \mu)$ называется *Лебеговым расширением*.

Следствие 14. (принцип Кавальери — Лебега) Пусть $A \subseteq X \times Y$ конечно измеримо по мере μ . Тогда $A_x \subset Y$ конечно измеримо по мере μ_2 почти для всех $x \in X$ и $\mu(A) = \int_X \mu_2(A_x) d\mu_1$. В частности, если сечения при любом $x \in X$ двух множеств имеют одинаковую меру, то и меры множеств совпадают.

Замечание 10. Для любого $A \in \mathcal{P}(X)$ определена величина $\|\chi_A\|^*$, которая называется *внешней мерой*. Внешняя мера может равняться бесконечности. В зависимости от дробящейся системы и меры на ней, может оказаться, что внешняя мера не обладает свойством аддитивности. Например, такова внешняя мера, полученная из меры Лебега μ_L , определенной на дробящейся системе, состоящей из параллелепипедов.

Определение 30. Множество подмножеств $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ называется σ -алгеброй, если является σ -кольцом и $X \in \mathcal{A}$.

Нетрудно видеть, что σ -алгебра замкнута относительно операций не более чем счётного объединения, пересечения и дополнения.

Лемма 7. (об аппроксимации измеримого множества) Для любого множества $C \in \mathfrak{L}(S, \mu)$ и $\varepsilon > 0$ найдётся не более чем счётная дизъюнктивная система $\{D_i\} \subseteq S$ такая,

что $C \subseteq \bigsqcup_i D_i$ и $\mu(C) = \|\chi_C\|^* > \sum_i \mu(D_i) - \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\varepsilon' > 0$ найдётся возрастающая последовательность ступенчатых функций φ_n , которая мажорирует χ_C с точностью ε' , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \geq \chi_C(x)$ для любого $x \in X$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu \leq \|\chi_C\|^* + \varepsilon'$. Пусть $\delta > 0$. Рассмотрим $\varphi_n = \sum_{i=0}^{k_n} a_i \chi_{A_i}$. Если $a_i < 1 - \delta$, то заменим a_i на 0, а если $a_i \geq 1 - \delta$, то заменим

a_i на 1. Полученная последовательность $\psi_n = \sum_{i=0}^{k_n} \chi_{A_i}$ остаётся монотонно возрастающей и мажорирующей χ_C , что нетрудно проверить для каждого $x \in X$. Очевидно $\int_X \psi_n d\mu \leq \frac{1}{1-\delta} \int_X \varphi_n d\mu$. Ясно, что $\psi_n = \chi_{B_n}$ для некоторого $B_n \in \tilde{S}$. Поскольку ψ_n мажорирует C , имеем $C \subseteq \bigcup_n B_n = B$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \geq \|\chi_C\|^* \geq (1 - \delta) \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) - \varepsilon'$. Поскольку $B_{n+1} \setminus B_n \in \tilde{S}$, имеем $B_{n+1} \setminus B_n = \bigsqcup_{i=1}^k D_i^n$, где $D_i^n \in S$. Из произвольности ε', δ получаем требуемое неравенство. $\blacktriangle$

Теорема 10. (Каратеодори о продолжении меры) Пусть (X, S, μ) — некоторое пространство с мерой и мера μ счётно аддитивна на дробящейся системе S . Тогда

- 1) множество $\mathfrak{L}(S, \mu)$ является кольцом;
- 2) мера μ счётно аддитивна на $\mathfrak{L}(S, \mu)$;
- 3) если $X \in \mathfrak{L}(S, \mu)$, то $\mathfrak{L}(S, \mu)$ — σ -алгебра;
- 4) продолжение меры с S на $\mathfrak{L}(S, \mu)$ единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Достаточно доказать, что если $A, B \in \mathfrak{L}(S, \mu)$, то $A \cap B, A \Delta B \in \mathfrak{L}(S, \mu)$. Нетрудно видеть, что $\chi_{A \cap B} = \min(\chi_A, \chi_B)$ и $\chi_{A \cup B} = \max(\chi_A, \chi_B)$. Тогда по утверждению о верхней и нижней огибающей $\chi_{A \cap B}, \chi_{A \cup B} \in L(X, S, \mu)$. Кроме того, $\chi_{A \Delta B} \in L(X, S, \mu)$, поскольку $\chi_{A \Delta B} = \chi_{A \cup B} - \chi_{A \cap B}$.

2. Сначала докажем аддитивность меры. Пусть $A_1, A_2 \in \mathfrak{L}(S, \mu)$ и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Тогда $\mu(A_1 \cup A_2) = \int_X (\chi_{A_1} + \chi_{A_2}) d\mu = \int_X \chi_{A_1} d\mu + \int_X \chi_{A_2} d\mu = \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Пусть $B = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} A_n$, где $A_n, B \in \mathfrak{L}(S, \mu)$. Рассмотрим ряд $\sum_n \chi_{A_n}$. Очевидно, $\int_X (\sum_{n=0}^m \chi_{A_n}) d\mu = \sum_{n=0}^m (\int_X \chi_{A_n} d\mu) \leq \int_X \chi_B d\mu$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} (\int_X \chi_{A_n} d\mu) \leq \int_X \chi_B d\mu$ и по лемме Беппо Леви $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(B)$.

3. Пусть $B = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} A_n$, где $A_n \in \mathfrak{L}(S, \mu)$. Рассмотрим $B_m = \bigsqcup_{n=0}^m A_n$. Последовательность $\chi_{B_m}(x)$ сходится к $\chi_B(x)$ для любого $x \in X$, а функция χ_X является интегрируемой мажорантой. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $\chi_B \in L(X, S, \mu)$.

4. Пусть $C \in \mathfrak{L}(S, \mu)$. Рассмотрим $\mu'(C)$, где μ' — произвольное продолжение меры μ , заданной на S . Покажем, что $\mu'(C) \leq \|\chi_C\|^*$. По лемме об аппроксимации измеримого множества найдётся $D = \bigsqcup_i D_i$, что $\|\chi_C\|^* + \varepsilon > \|\chi_D\|^*$ и $C \subset D$. Но $\|\chi_D\|^* = \mu'(D) \geq \mu'(C)$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ имеем неравенство $\mu'(C) \leq \|\chi_C\|^*$ для любого $C \in \mathfrak{L}(S, \mu)$ и, в частности, $\mu'(D \setminus C) \leq \|\chi_{D \setminus C}\|^*$.

Имеем $D = C \sqcup (D \setminus C)$, поэтому $\mu'(C) = \mu'(D) - \mu'(D \setminus C)$ и $\|\chi_C\|^* = \|\chi_D\|^* - \|\chi_{D \setminus C}\|^*$. Тогда $\mu'(C) \geq \mu'(D) - \|\chi_{D \setminus C}\|^* = \|\chi_D\|^* - \|\chi_{D \setminus C}\|^* = \|\chi_C\|^*$. $\blacktriangle$

Задача 14. Пусть $A \in \mathfrak{L}(S, \mu)$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $B \in \tilde{S}$, что $\mu(A \Delta B) < \varepsilon$.

Задача 15. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $B \in \tilde{S}$, что $\|\chi_{A \Delta B}\|^* < \varepsilon$. Докажите, что $A \in \mathfrak{L}(S, \mu)$.

Утверждение 39. (о счётной аддитивности интеграла) Пусть $A = \bigsqcup_{n \in I} A_n$ и $A, A_n \in \mathfrak{L}(S, \mu)$ для любого $n \in I$, где I счётно или конечно. Если функция f интегрируема на A , то f интегрируема на A_n для любого $n \in I$ и $\int_A f d\mu = \sum_{n \in I} \int_{A_n} f d\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Рассмотрим конечно измеримое подмножество $B \subset A$ и функцию срезки $f_m = \max(\min(f\chi_A, m\chi_B), -m\chi(B))$, $m \in \mathbb{N}$. По утверждению об интегрируемости огибающей f_m является интегрируемой. Нетрудно видеть, что $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x)\chi_B(x)$ и $|f|\chi_A$ является интегрируемой мажорантой для последовательности (f_m) . По теореме Лебега функция f интегрируема на B .

2. Нетрудно видеть, что $\sum_{n \in I} f\chi_{A_n}(x) = f(x) \sum_{n \in I} \chi_{A_n}(x) = f(x)\chi_A(x)$ для любого $x \in X$ и $|f|\chi_A$ — интегрируемая мажоранта. Тогда по теореме Лебега имеем $\int_A f d\mu = \sum_{n \in I} \int_{A_n} f d\mu$. $\blacktriangle$

Определение 31. Минимальная (по включению) σ -алгебра множеств в метрическом пространстве X , содержащая все открытые множества, называется σ -алгеброй борелевских множеств в X .

Отметим, что любое замкнутое множество является борелевским как дополнение к открытому. Кроме того, σ -алгебра борелевских множеств порождается также и всеми замкнутыми множествами.

Определение 32. Подмножество $A \subset \mathbb{R}^k$ будем называть *измеримым*, если $A_N = A \cap (-N, N)^k$ конечно измеримо по мере Лебега для любого $N \in \mathbb{N}$, т. е. $A_N \in \mathfrak{L}(S_k, \mu_L)$.

Утверждение 40. (об измеримости борелевских множеств) Измеримые множества в $\mathbb{R}^k$ образуют σ -алгебру, содержащую борелевские множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим совокупность $\mathcal{I}$ измеримых множеств. Докажем, что $\mathcal{I}$ — это σ -алгебра. Если $A, B \in \mathcal{I}$, то множества $A \cap (-N, N)^k$ и $B \cap (-N, N)^k$ конечно измеримы, тогда по теореме Каратеодори (п.3) множество $(A \cap B) \cap (-N, N)^k$ конечно измеримо. Поскольку $N \in \mathbb{N}$ — произвольно, получаем, что $A \cap B \in \mathcal{I}$. Аналогично, если $A \in \mathcal{I}$, то $(\mathbb{R}^k \setminus A) \cap (-N, N)^k = (-N, N)^k \setminus (A \cap (-N, N)^k)$ и $(-N, N)^k \setminus (A \cap (-N, N)^k)$ конечно измеримо по теореме Каратеодори. Значит $(\mathbb{R}^k \setminus A) \in \mathcal{I}$. Если конечный или счётный набор $\{A_n\} \in \mathcal{I}$, то $\bigcup_n A_n \in \mathcal{I}$. Действительно, имеем равенство $(\bigcup_n A_n) \cap (-N, N)^k = \bigcup_n (A_n \cap (-N, N)^k)$, а множество $\bigcup_n (A_n \cap (-N, N)^k)$ конечно измеримо по теореме Каратеодори.

Любое открытое множество является счётным объединением открытых параллелепипедов с вершинами в рациональных точках. По теореме Каратеодори открытое множество $U \cap (-N, N)^k$ является конечно измеримым для любого открытого мно-

жества U . Тогда U — измеримое. Поскольку σ -алгебра борелевских множеств есть минимальная σ -алгебра, содержащая все открытые множества, то она содержится в $\mathcal{I}$. $\blacktriangle$

Задача 16. Пусть A измеримо по мере Лебега. Докажите, что найдётся борелевское множество B такое, что $A \Delta B$ — пренебрежимое множество.

Утверждение 41. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^k$ — открытое и $K \subset U$ — некоторый компакт. Найдётся открытое ограниченное множество V такое, что $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покроем K открытыми шарами $B(x)$, $x \in K$ так, что $\bar{B}(x) \subset U$. Выберем конечное подпокрытие $\{B(x_i)\}$. Тогда $V = \cup B(x_i)$. $\blacktriangle$

Утверждение 42. (о сумме Римана) Пусть функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^k$ и $K \subset U$ — некоторый компакт. Тогда f интегрируема на K по мере Лебега и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что если $K = \bigsqcup_n K_n$, где K_n — измеримое, $x_n \in K_n$ и $\text{diam}(K_n) < \delta$ для любого n , то $|\int_K f d\mu_L - \sum_n f(x_n)\mu_L(K_n)| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что функция f является интегрируемой на любом параллелепипеде P , если $\bar{P} \subset \bar{V}$, где V открыто и $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Действительно, на P функция f равномерно, а тем более по интегральной норме, приближается ступенчатыми функциями. Тогда для любой функции $\varphi \in \text{Step}(V, S_k)$ функция $f\varphi$ интегрируема как линейная комбинация.

Компакт $K \subset \bar{V}$ конечно измерим по мере Лебега по теореме Каратеодори, т. е. $\chi_K \in L(V, S_k, \mu_L)$. Непрерывная функция на компакте $\bar{V}$ ограничена, т. е. $|f|_{\bar{V}}| \leq C < \infty$. Из следствия теоремы Рисса найдётся такая последовательность $\varphi_n \in \text{Step}(V, S_k)$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \chi_K(x)$ при почти всех $x \in V$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f(x)\varphi_n(x) d\mu_L = \int_K f(x)\chi_K(x) d\mu_L$ при почти всех $x \in V$. Можно считать, что $0 \leq \varphi_n \leq 1$, поэтому $C\chi_{\bar{V}}$ является интегрируемой мажорантой и по теореме Лебега функция f интегрируема на K .

Зафиксируем $\varepsilon' > 0$. По утверждению об аддитивности интеграла функция f интегрируема на K_n для любого n . Поскольку непрерывная функция равномерно непрерывна на компакте по теореме Кантора, имеем, что $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon'$ при $x \in K_n$. Тогда $|\int_{K_n} f d\mu_L - f(x_n)\mu_L(K_n)| < \varepsilon'\mu_L(K_n)$. Из свойства аддитивности интеграла имеем $|\int_K f d\mu_L - \sum_n f(x_n)\mu_L(K_n)| = |\sum_n (\int_{K_n} f d\mu_L - f(x_n)\mu_L(K_n))| \leq \varepsilon'\mu_L(K)$. $\blacktriangle$

Вспомним, что изометрией называется отображение метрического пространства в себя, сохраняющее расстояния. В пространстве $\mathbb{R}^k$, снабжённом евклидовой метрикой, любая изометрия является композицией поворота и отражения, т. е. линейного преобразования, задаваемого ортогональной матрицей, и параллельного переноса.

Лемма 8. Пусть I — изометрия $\mathbb{R}^k$ и $A \in \mathcal{L}(S_k, \mu_L)$ — измеримое множество. Тогда $I(A) \in \mathcal{L}(S_k, \mu_L)$ и $\mu_L(I(A)) = \mu_L(A)$.

Лемма 9. Пусть f — аффинное преобразование в $\mathbb{R}^k$, т. е. $f(x) = Mx + b$, где M — некоторая матрица размера $k \times k$ и $b \in \mathbb{R}^k$ — вектор переноса. Если $A \in \mathcal{L}(S_k, \mu_L)$ — измеримое множество, то $f(A) \in \mathcal{L}(S_k, \mu_L)$ и $\mu_L(f(A)) = |\det(M)|\mu_L(A)$.

Докажем леммы для случая, когда $A \in S_k$. Только этот случай понадобится нам для доказательства теоремы о замене переменных. Для других конечно измеримых

множеств утверждения лемм нетрудно получить как частный случай теоремы о замене переменных.

Доказательство лемм 8 и 9. Из определения видно, что перенос на любой вектор не изменяет меру Лебега параллелепипеда. Также из определения нетрудно видеть, что растяжение, т. е. линейное преобразование с диагональной матрицей M , изменяет меру Лебега параллелепипеда в $|\det(M)|$ раз.

Пусть некоторое преобразование $s : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ переводит любой параллелепипед P в параллелепипед $s(P)$ и при этом $\mu_L(s(P)) = \alpha \mu_L(P)$, $\alpha > 0$. Тогда определив $\mu'(P) = \mu_L(s(P))$, мы распространим методом лебегова продолжения меру μ' на то же семейство подмножеств $\mathbb{R}^k$, причём для любого конечно измеримого множества A получим $\mu_L(s(A)) = \mu'(A) = \alpha \mu_L(A)$. Таким образом, параллельный перенос на любой вектор не изменяет меры любого конечно измеримого множества, а линейное преобразование с диагональной матрицей M , изменяет меру Лебега в $|\det(M)|$ раз. Будем обозначать через $P(x, r)$ образ параллелепипеда P с центром в точке $\bar{0}$ при растяжении в r раз и параллельном переносе на вектор x . Тогда $\mu_L(P(x, r)) = r^k \mu_L(P)$.

Пусть P — замкнутый параллелепипед и $\mu_L(P) = \alpha \mu_L(q(P))$, где q — линейное преобразование, заданное ортогональной матрицей. Рассмотрим замощение (с точностью до пренебрежимых пересечений) пространства $\mathbb{R}^k$ параллелепипедами вида $P(x, 1)$. Занумеруем параллелепипеды $P_j = P(x_j, 1)$ из замощения.

Рассмотрим шар $B(R)$ с центром в точке $\bar{0}$ радиуса R . Пусть $J(R) = \{j \mid P_j \subset B(R)\}$. Для любого $\beta > 1$ можно определить R_0 такой, что $B(R) \subset \bigcup_{j \in J(R)} P(\beta x_j, \beta)$

при $R \geq R_0$. Действительно, если $P(\beta x_j, \beta) \cap B(R) \neq \emptyset$ и $P(\beta x_j, \beta) \not\subset B(R)$, то $\beta \|x_j\|_2 - R \leq \text{diam}(P)\beta$. Поскольку $\|x_j\|_2 - \text{diam}(P) < R/\beta$, имеем $\|x_j\|_2 + \text{diam}(P) < R/\beta + 2\text{diam}(P) < R$ при $R \geq R_0$. Тогда $j \in J(R)$.

Поддействуем на все параллелепипеды P_j , $j \in J(R)$, линейным преобразованием q . Тогда $\bigcup_{j \in J(R)} q(P_j) \subset q(B(R)) = B(R) \subset \bigcup_{j \in J(R)} P(\beta x_j, \beta)$. Из аддитивности меры имеем

$\sum_{j \in J(R)} \mu_L(q(P_j)) = \alpha \sum_{j \in J(R)} \mu_L(P_j) \leq \sum_{j \in J(R)} \mu_L(P(\beta x_j, \beta)) = \beta^k \sum_{j \in J(R)} \mu_L(P_j)$. Поскольку $\beta > 1$ произвольное, то $\alpha \leq 1$. Аналогично можно показать, что $\alpha \geq 1$. Таким образом лемма 8 для параллелепипедов доказана.

Известно, что любое линейное преобразование можно представить в виде композиции растяжений и ортогональных преобразований. А именно, любая матрица M представима в виде $M = Q_1 D Q_2$, где Q_1 и Q_2 — ортогональные, а D — диагональная. Тогда $\mu_L(M(P)) = \mu_L(Q_1(DQ_2(P))) = \mu_L(DQ_2(P)) = \mu_L(D(Q_2(P))) = |\det(D)|\mu_L(Q_2(P)) = |\det(D)|\mu_L(P) = |\det(M)|\mu_L(P)$. Лемма 9 для параллелепипедов доказана.

Задача 17. Пусть $\mu' : S_k \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая мера, заданная на параллелепипедах. Докажите, что если мера любого параллелепипеда не меняется при параллельном переносе, то $\mu' = \alpha \mu_L$ для некоторого $\alpha > 0$.

Утверждение 43. Образ пренебрежимого относительно меры Лебега подмножества $\mathbb{R}^k$ при липшицевом отображении пренебрежим.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$. Любой параллелепипед P можно покрыть

конечным числом кубов K_i , $i = 1, \dots, n$, так, что $P \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_i$ и $\mu_L(P) + \delta > \sum_{i=1}^n \mu_L(K_i)$.

Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^k$ пренебрежимо. Тогда по лемме об аппроксимации для любого $\varepsilon > 0$ найдётся счётный или конечный дизъюнктивный набор параллелепипедов P_i , для которого $A \subset \bigsqcup_i P_i$ и $\sum_i \mu_L(P_i) < \varepsilon$. Как показано выше, покрытие параллелепипедами можно заменить на покрытие кубами.

Рассмотрим отображение h удовлетворяющее условию Липшица. Поскольку все нормы в $\mathbb{R}^k$ эквивалентны, имеем $\|h(x) - h(y)\|_\infty \leq c\|x - y\|_\infty$. Пусть K — куб со стороной d , тогда $h(K)$ содержится в кубе со стороной cd . Следовательно, $h(A)$ содержится в объединении кубов, сумма мер которых не превосходит $c^k \varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что множество $h(A)$ пренебрежимо. $\blacktriangle$

Замечание 11. Говорят, что отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$ удовлетворяет N -свойству Лузина, если оно переводит любое пренебрежимое множество в пренебрежимое множество. Таким образом, если отображение удовлетворяет условию Липшица, то оно удовлетворяет и N -свойству Лузина.

Будем обозначать $\det Dv(x)$ определитель матрицы Якоби отображения v в x .

Лемма 10. (о локальном искажении меры)

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^k$ — открытое множество, отображение $v : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрерывно дифференцируемо и $\det Dv(x) \neq 0$ при $x \in U$. Пусть P — некоторый параллелепипед с центром в точке $\bar{0}$. Тогда

- 1) $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_L(v(P(x, r)))}{\mu_L(P(x, r))} = |\det Dv(x)|$;
- 2) $\limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in K} \left| \frac{\mu_L(v(P(x, r)))}{\mu_L(P(x, r))} - |\det Dv(x)| \right| = 0$ для компактного множества $K \subset U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\|h\|_\infty \leq 1$ при $h \in P$.

1. Пусть $x \in U$. Вначале предположим, что $dv(x) = \text{id}$. Имеем $v(x + h) = v(x) + h + \alpha(x, h)\|h\|_\infty$, $\alpha(x, h) = o(1)$ при $h \rightarrow 0$. Отображение $w(h) = v(x) + h$ является параллельным переносом. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, что при $r < \delta$ из $h \in P(0, r)$ следует, что $\|\alpha(x, h)\|_\infty < \varepsilon$. Тогда $v(P(x, r)) \subset P(v(x), r(1 + \varepsilon))$. Для обратного отображения v^{-1} , которое определено в окрестности точки $v(x)$, по теореме об обратной функции, имеем $d(v^{-1}(v(x))) = \text{id}$ и аналогичное включение $v^{-1}(P(v(x), r)) \subset P(x, r(1 + \varepsilon))$ при $r < r_0$. Тогда $P(v(x), r) \subset v(P(x, r(1 + \varepsilon)))$.

Пусть $\ell_x = dv(x)$. По условию $\ell_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ — невырожденное линейное отображение. Рассмотрим отображение $u = \ell_x^{-1}v$. Очевидно, $du(x) = \text{id}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, что $P(u(x), r(1 - \varepsilon)) \subset u(P(x, r)) \subset P(u(x), r(1 + \varepsilon))$ при $r < \delta$. Следовательно, $\ell_x P(u(x), r(1 - \varepsilon)) \subset v(P(x, r)) \subset \ell_x P(u(x), r(1 + \varepsilon))$. Отметим, что δ зависит от $\|\ell_x^{-1}\alpha(x, h)\|_\infty$.

По лемме 9 при $r < \delta$ из неравенств $\mu_L(\ell_x P(u(x), r(1 - \varepsilon))) \leq \mu_L(v(P(x, r))) \leq \mu_L(\ell_x P(u(x), r(1 + \varepsilon)))$ имеем $|\det Dv(x)|(1 - \varepsilon)^k \mu_L(P(u(x), r)) \leq \mu_L(v(P(x, r))) \leq |\det Dv(x)|(1 + \varepsilon)^k \mu_L(P(u(x), r))$, где $\det Dv(x)$ — определитель матрицы, задающей линейное отображение ℓ_x , т. е. якобиан отображения v в точке x .

2. Поскольку функция v дифференцируема в точке x имеем равенство $v(x + h) = v(x) + dv(x)\langle h \rangle + \alpha(x, h)\|h\|_\infty$, где $\alpha(x, h) = o(1)$ при $h \rightarrow 0$. Вначале покажем, что

сходимость равномерная на компакте, т. е. $\sup_{x \in K} \|\alpha(x, h)\|_\infty \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Рассмотрим каждую компоненту $v_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, функции v отдельно. По теореме Лагранжа найдётся такая точка $\xi_i = x + t_i h$, $t_i \in (0, 1)$, что $v_i(x+h) - v_i(x) = dv_i(\xi_i)\langle h \rangle$. Тогда $\alpha_i(x, h)\|h\|_\infty = (dv_i(\xi_i) - dv_i(x))\langle h \rangle$. По теореме Кантора частные производные функции v_i равномерно непрерывны на компакте. Значит для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что $\|dv_i(\xi_i) - dv_i(x)\| < \varepsilon$ при $\|h\|_\infty < \delta$. Тогда $|\alpha_i(x, h)| < \varepsilon$ и $\sup_{x \in K} \|\alpha(x, h)\|_\infty < \varepsilon$. Из непрерывности частных производных следует, что норма $\|\ell_x^{-1}\|$ ограничена при $x \in K$. Таким образом, δ в доказательстве п.1 можно выбрать независимо от $x \in K$. Кроме того, $|\det Dv(x)|$ также ограничен при $x \in K$. Поэтому $\sup_{x \in K} |\det Dv(x)|((1 \pm \varepsilon)^k - 1) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. ▲

Задача 18. Докажите п.1 леммы 10 в случае, когда $\det Dv(x) = 0$.

Задача 19. Докажите лемму Сарда: пусть $U \subseteq \mathbb{R}^k$ — открытое множество и отображение $v : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрерывно дифференцируемо, тогда образ множества критических точек $v(\{x \in U \mid \det Dv(x) = 0\})$ пренебрежим.

Теорема 11. (формула замены переменных) Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^k$ — открытое множество, отображение $f : U \rightarrow f(U)$ является диффеоморфизмом класса C^1 . Если функция $g : f(U) \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема, то функция $(g \circ f)|\det Df|$ — интегрируема на U и справедливо равенство $\int_U g(f(x))|\det Df(x)| d\mu_L = \int_{f(U)} g d\mu_L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Сначала рассмотрим случай, когда $g = \chi_Q$, где Q — параллелепипед и $\overline{Q} \subset f(U)$. Применим лемму о локальном искажении меры. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $r_0 > 0$, что при любых r , $0 < r < r_0$, и $y \in Q$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{\mu_L(f^{-1}(Q(y, r)))}{\mu_L(Q(y, r))} - |\det Df^{-1}(y)| \right| < \varepsilon$$

$$|\mu_L(f^{-1}(Q(y, r)))| |\det Df(f^{-1}(y))| - \mu_L(Q(y, r)) < \varepsilon \mu_L(Q(y, r)) \sup_{y \in \overline{Q}} |\det Df(f^{-1}(y))|.$$

Кроме того, по утверждению о суммах Римана для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $r_1 > 0$, что при любых r , $0 < r < r_1$, справедливы неравенства

$$\left| \int_{f^{-1}(Q)} |\det Df(x)| d\mu_L - \sum_n \mu_L(f^{-1}(Q(y_n, r))) |\det Df(f^{-1}(y_n))| \right| < \varepsilon,$$

где $\{Q(y_n, r)\}$ разбиение параллелепипеда Q на его уменьшенные копии. Тогда

$$\left| \int_{f^{-1}(Q)} |\det Df(x)| d\mu_L - \sum_n \mu_L(Q(y_n, r)) \right| < \varepsilon + \varepsilon \mu_L(Q) \sup_{y \in \overline{Q}} |\det Df(f^{-1}(y))|.$$

Очевидно $\int_U \chi_Q(f(x))|\det Df(x)| d\mu_L = \int_{f^{-1}(Q)} |\det Df(x)| d\mu_L$ и из произвольности $\varepsilon > 0$ получаем требуемое равенство $\int_U \chi_Q(f(x))|\det Df(x)| d\mu_L = \int_{f(U)} \chi_Q d\mu_L$.

2. Для ступенчатой функции $\varphi = \sum_{i=0}^m c_i \chi_{P_i}$, когда $\overline{P_i} \subset f(U)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{f(U)} \left(\sum_{i=0}^m c_i \chi_{P_i} \right) d\mu_L &= \sum_{i=0}^m c_i \int_{f(U)} \chi_{P_i} d\mu_L = \sum_{i=0}^m c_i \int_{f^{-1}(P_i)} |\det Df(x)| d\mu_L = \\ &= \sum_{i=0}^m c_i \int_U \chi_{P_i}(f(x)) |\det Df(x)| d\mu_L = \int_U \varphi(f(x)) |\det Df(x)| d\mu_L. \end{aligned}$$

3. Вначале предположим, что g — неотрицательная ограниченная функция и U_0 — такое открытое множество, что его замыкание $\overline{U_0} \subset U$ компактно. Множество $f(U_0)$ конечно измеримо, поскольку открыто как образ открытого при диффеоморфизме. Функция g по утверждению об аддитивности интеграла интегрируема на $f(U_0)$. По следствию из теоремы Рисса найдётся последовательность ступенчатых функций такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(y) = g(y)$ для $y \in f(U_0) \setminus Z$, где множество Z пренебрежимо. Поскольку функция g ограничена, то и последовательность φ_n можно считать ограниченной некоторой константой $C > 0$. Тогда по теореме Лебега имеем $\int_{f(U_0)} g d\mu_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{f(U_0)} \varphi_n d\mu_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U_0} \varphi_n(f(x)) |\det Df(x)| d\mu_L$. Кроме того, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(f(x)) |\det Df(x)| = g(f(x)) |\det Df(x)|$ для $x \in f^{-1}(f(U_0) \setminus Z) = U_0 \setminus f^{-1}(Z)$. Поскольку f^{-1} диффеоморфизм, то на компакте $\overline{U_0}$ он удовлетворяет условию Липшица. Из утверждения об образе пренебрежимого множества следует, что множество $f^{-1}(Z)$ пренебрежимо. Поскольку функция g ограничена и якобиан $|\det Df|$ ограничен на компакте $\overline{U_0}$, получаем, что функции $\varphi_n(f(x)) |\det Df(x)|$ имеют интегрируемую мажоранту. Тогда по теореме Лебега функция $g(f(x)) |\det Df(x)|$ интегрируема на U_0 и $\int_{f(U_0)} g d\mu_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U_0} \varphi_n(f(x)) |\det Df(x)| d\mu_L = \int_{U_0} (\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(f(x)) |\det Df(x)|) d\mu_L = \int_{U_0} g(f(x)) |\det Df(x)| d\mu_L$.

4. Снимем все ограничения, кроме $g \geq 0$. Рассмотрим такую последовательность открытых множеств $U_0 \subset \dots \subset U_n \subset U_{n+1} \subset \dots$, что $\bigcup_n U_n = U$ и множества $\overline{U_n}$ компактны. Определим функции $g_n = \min(g, n)$. Очевидно, имеем поточечную сходимость $g_n \chi_{f(U_n)} \rightarrow g \chi_{f(U)}$ и $g_n(f(x)) |\det Df(x)| \chi_{U_n} \rightarrow g(f(x)) |\det Df(x)| \chi_U$. По доказанному выше функции $g_n(f(x)) |\det Df(x)| \chi_{U_n}$ интегрируемы в $\mathbb{R}^k$ и их интегралы не превосходят $\int_{f(U)} g d\mu$. Тогда по лемме Бешпо Леви функция $g \circ f |\det Df| \chi_U$ является интегрируемой.

Имеем $\int_{f(U_n)} g_n d\mu = \int_{U_n} g_n(f(x)) |\det Df(x)| d\mu_L$ по доказанному. Кроме того, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{f(U_n)} g_n d\mu = \int_{f(U)} g d\mu$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U_n} g_n(f(x)) |\det Df(x)| d\mu = \int_U g(f(x)) |\det Df(x)| d\mu$ по лемме Бешпо Леви. Тогда теорема о замене переменных доказана для неотрицательных функций. Произвольную функцию g рассмотрим как разность $g = g^+ - g^-$, где $g^+ = \max(0, g)$ и $g^- = \max(0, -g)$. Поскольку функции g^+ и g^- интегрируемы и неотрицательны, для них верна формула замены переменных, следовательно она верна и для их суммы. ▲

Замечание 12. Стандартные функции замены переменных, а именно, системы полярных, цилиндрических и сферических координат являются гладкими диффеоморфизмами пространств $\mathbb{R}^2$ (или $\mathbb{R}^3$) без некоторых замкнутых пренебрежимых множеств. Расширение области интегрирования в правой и левой части равенства $\int_U g(f(x)) |\det Df(x)| d\mu_L = \int_{f(U)} g d\mu_L$ на пренебрежимое множество не изменяет значений интегралов и свойства функций быть интегрируемыми. Поэтому для стандартных систем координат формула замены переменных верна.

В многомерном случае возможное определение несобственного (условно сходяще-

гося) интеграла от функции f по множеству $U \subset \mathbb{R}^k$ как предела последовательности интегралов $\int_{V_n} f d\mu_L$, где $V_n \subset V_{n+1}$ и $\bigcup V_n = U$ сталкивается с проблемой: предел и даже само его существование зависит от выбора последовательности множеств V_n . Поэтому мы определяем только абсолютную сходимость.

Определение 33. Говорят, что *несобственный интеграл* $\int_U f d\mu_L$ от неотрицательной функции f на измеримом множестве U *сходится*, если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{V_n} f d\mu_L$, где последовательность измеримых множеств (V_n) , такова, что $V_n \subset V_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_n V_n = U$.

Утверждение 44. Несобственный интеграл $\int_U f d\mu_L$ от неотрицательной функции f сходится тогда и только тогда, когда функция $f\chi_U$ интегрируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f интегрируема на U . Тогда f интегрируема на V_n (см. утверждение об аддитивности интеграла) и по теореме Лебега $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{V_n} f d\mu_L = \int_U f d\mu_L$. Если для какой-то последовательности множеств (V_n) конечный предел интегралов существует, то по лемме Беппо Леви функция $f\chi_U$ интегрируема и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{V_n} f d\mu_L = \int_U f d\mu_L$. ▲

Пусть задано пространство с мерой (X, S, μ) . Оно называется σ -конечным, если X является не более чем счётным объединением элементов дробящейся системы, т. е. $X = \bigcup_n P_n$, $P_n \in S$. В дальнейшем рассматриваются только σ -конечные пространства.

Определение 34. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется μ -измеримой, если существует такая последовательность (φ_n) ступенчатых функций, что $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ для почти всех $x \in X$ (т. е. при $x \in X \setminus Z$, где $\mu(Z) = 0$).

Утверждение 45. (свойства измеримых функций)

1. Если функции совпадают почти всюду, то они μ -измеримы одновременно.
2. Если f и g μ -измеримы, то их сумма и произведение μ -измеримы.
3. Если f μ -измерима, а $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, то $g \circ f$ μ -измерима.
4. Интегрируемые функции измеримы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1-3 следует из определения и свойств предела, 4 — по следствию из теоремы Рисса. ▲

Утверждение 46. (признак интегрируемости Лебега)

Если функция f μ -измерима и имеет интегрируемую мажоранту h , $h \geq 0$, то она интегрируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ для почти всех $x \in X$. Рассмотрим срезки $h_n = \max(-h, \min(\varphi_n, h))$. По утверждению об огибающих h_n интегрируемы. Нетрудно видеть, что $|h_n(x)| \leq h(x)$ и $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$ для почти всех $x \in X$. Тогда по теореме Лебега f интегрируема. ▲

Теорема 12. (о пределе последовательности измеримых функций) Пусть $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ для почти всех $x \in X$ и функции f_n μ -измеримы. Тогда функция f μ -измерима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Предположим вначале, что f_n интегрируемы. Найдутся ступенчатые функции φ_n такие, что $\|f_n - \varphi_n\|^* < \frac{1}{2^n}$. Тогда по лемме о нормальном сходящихся рядах последовательность $(f_n(x) - \varphi_n(x))$ сходится к 0 для почти всех $x \in X$. Тогда $f(x) - \varphi_n(x) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - \varphi_n(x) \rightarrow 0$ для почти всех $x \in X$. Тогда f измерима.

2. Построим последовательность интегрируемых функций сходящуюся к f для почти всех $x \in X$. Рассмотрим произвольное множество $P_n \in \tilde{S}$ и срезку $g_n = \max(-n\chi_{P_n}, \min(f_n, n\chi_{P_n}))$. Функция g_n интегрируема по признаку Лебега. Пусть последовательность множеств (P_n) такова, что $P_n \subset P_{n+1}$ и $\bigcup_n P_n = X$. Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x)$ для почти всех $x \in X$. Рассмотрим $x \in X$, для которого $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $|f(x)| < \infty$. Найдутся такие $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, что $x \in P_n$ при $n \geq n_0$ и $|f_n(x)| \leq n$ при $n \geq n_1$. Тогда $f_n(x) = g_n(x)$ при $n \geq \max(n_0, n_1)$. Если $f(x) = +\infty$, то $g_n(x) = \min(n, f_n(x))$ при $n \geq n_0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = +\infty$. $\blacktriangle$

Следствие 15. Множество $A \subset \mathbb{R}^k$ измеримо (по мере Лебега), тогда и только тогда, когда функция χ_A измерима (по мере Лебега).

Определение 35. Множество в пространстве с мерой будем называть μ -измеримым, если μ -измерима его характеристическая функция.

Задача 20. Пусть измеримая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема почти всюду. Докажите, что функция f' измерима.

Лемма 11. (Фату) Пусть последовательность $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ неотрицательных μ -измеримых функций сходится к функции h почти всюду на множестве X и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|^* = C < \infty$. Тогда f интегрируема и $\int_X h d\mu \leq C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность множеств (P_m) , $P_m \in S$, такова, что $P_m \subset P_{m+1}$ и $\bigcup_m P_m = X$. Рассмотрим срезы $g_n^m = \min(f_n, m\chi_{P_m})$. Функции g_n^m интегрируемы по признаку Лебега. Нетрудно видеть, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^m(x) = h_m(x)$ для почти всех $x \in X$, где $h_m = \min(h, m\chi_{P_m})$. Последовательность (g_n^m) имеет интегрируемую мажоранту $m\chi_{P_m}$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости функция h_m интегрируема и $\int_X h_m d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n^m d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n^m\|^* \leq C$.

Последовательность (h_m) монотонно возрастает и $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x) = h(x)$ для всех $x \in X$. Тогда по лемме Бепно Леви функция h интегрируема и $\int_X h d\mu \leq C$. $\blacktriangle$

Пример 12. Заметим, что из условия леммы Фату, даже если функции f_m интегрируемые, не следует, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_X f_m d\mu = \int_X h d\mu$. Контрпримером может служить последовательность $f_m = \chi_{[m, m+1]}$. Здесь $X = \mathbb{R}$ и $\mu = \mu_L$.

Следствие 16. Если функция f неотрицательна, μ -измерима и имеет конечную интегральную норму, то f интегрируема.

Следствие 17. Если в пространстве с мерой (X, S, μ) множество X — конечно измеримо, то все μ -измеримые множества имеют конечную меру.

Если норма неотрицательной μ -измеримой функции равна $+\infty$, то её несобственный интеграл как предел интегралов по последовательности измеримых множеств

всегда равен $+\infty$.

Рассмотрим два пространства с мерой (X, S_x, μ_1) , (Y, S_y, μ_2) и их декартово произведение $(X \times Y, S_x \times S_y, \mu)$.

Утверждение 47. (теорема Тонелли) Пусть функция $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ неотрицательна и μ -измерима. Тогда повторный интеграл существует (и конечен) одновременно с кратным и справедливо равенство $\int_X (\int_Y f(x, y) d\mu_2) d\mu_1 = \int_{X \times Y} f d\mu$.

Доказательство. 1. Если $f \in L(X \times Y, S_x \times S_y, \mu)$, то по теореме Фубини справедливо требуемое равенство.

2. Предположим f неинтегрируема. Рассмотрим последовательность срезов $g_m = \min(f, m\chi_{P_m \times Q_m})$, где последовательность множеств $(P_m \times Q_m)$, $P_m \in S_x$, $Q_m \in S_y$ такова, что $P_m \subset P_{m+1}$, $Q_m \subset Q_{m+1}$ и $\bigcup_m P_m = X$, $\bigcup_m Q_m = Y$. Срезки g_m интегрируемы по признаку Лебега. Если нормы $\|g_m\|^*$ ограничены в совокупности, то f интегрируема по лемме Фату. Это противоречит предположению. Тогда $\|g_m\|^* \rightarrow \infty$, поскольку последовательность возрастает. Из теоремы Фубини следует, что $\|g_m\|^* = \int_{X \times Y} g_m d\mu = \int_X (\int_Y g_m(x, y) d\mu_2) d\mu_1 \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Если повторный интеграл существует и конечен, то $\int_X (\int_Y f(x, y) d\mu_2) d\mu_1 \geq \int_{X \times Y} g_m d\mu = \int_X (\int_Y g_m(x, y) d\mu_2) d\mu_1$ для любого m . Пришли к противоречию. $\blacktriangle$

Задача 21. Пусть $A \subset X \times Y$ и $\mu(A) = 0$. Докажите, что $\mu_2(A_x) = 0$ для почти всех $x \in X$, где $A_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}$.

Задача 22. Пусть функция $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ неотрицательна и μ -измерима. Докажите, что функции f_x μ_2 -измеримы для почти всех $x \in X$, где $f_x(y) = f(x, y)$.

Пример 13. Заметим, что теорему Тонелли нельзя распространить на знакпеременные функции. Рассмотрим, например, $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$. Имеем $\int_{-1}^1 f(x, y) dx =$

$\int_{-1}^1 f(x, y) dy = 0$. Следовательно, повторный интеграл $\int_{-1}^1 (\int_{-1}^1 f(x, y) dy) dx$ определён и равен нулю. Если бы функция f была интегрируема на квадрате $[-1, 1]^2$, то и функция $|f|$ была бы интегрируема на квадрате $[-1, 1]^2$ и, следовательно, на круге $x^2 + y^2 \leq 1$. Тогда по теореме о замене переменных (полярная замена) имеем равенство $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} |f| d\mu_L = \iint_{r \leq 1} \frac{|\sin \varphi \cos \varphi|}{r} d\mu_L$. Однако, $\int_0^1 (\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin \varphi \cos \varphi|}{r} d\varphi) dr = \infty$. Значит повторный интеграл не конечен, и по теореме Тонелли исходный кратный интеграл не существует.

Из следствия леммы Фату и теоремы Каратеодори вытекает, что совокупность μ -измеримых множеств в X является σ -алгеброй, если множество X конечно μ -измеримо. Как было показано выше σ -алгеброй является совокупность измеримых по мере Лебега множеств в $\mathbb{R}^k$. Для произвольных σ -конечных пространств с мерой это можно доказать аналогично или непосредственно из теоремы про предел последовательности измеримых функций.

Теорема 13. (об измеримости Лебеговых множеств) Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μ -измерима тогда и только тогда, когда μ -измеримы множества $E_f(a) = \{x \in X \mid f(x) \geq a\}$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть f μ -измерима. Тогда найдётся последовательность ступенчатых функций (φ_n) такая, что $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ для всех $x \in X \setminus Z$, $\mu(Z) = 0$. Множества $E_{\varphi_n}(b) = \{x \in X \mid \varphi_n(x) \geq b\}$ для любых $m \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{R}$ являются конечными объединениями элементов дробящейся системы. Имеем $E_f(a) \setminus Z = \{x \in X \setminus Z \mid f(x) \geq a\} = \{x \in X \setminus Z \mid \forall k \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m \varphi_n(x) \geq a - \frac{1}{k}\}$. Тогда $\{x \in X \setminus Z \mid \forall k \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m \varphi_n(x) \geq a - \frac{1}{k}\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{x \in X \setminus Z \mid \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m \varphi_n(x) \geq a - \frac{1}{k}\}$.

Кроме того, $\{x \in X \setminus Z \mid \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m \varphi_n(x) \geq a - \frac{1}{k}\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{x \in X \setminus Z \mid \forall n \geq m \varphi_n(x) \geq a - \frac{1}{k}\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} \{x \in X \setminus Z \mid \varphi_n(x) \geq a - \frac{1}{k}\}$.

Тогда множество $E_f(a) \setminus Z = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} (E_{\varphi_n}(a - \frac{1}{k}) \setminus Z)$ μ -измеримо, поскольку содержится в любой σ -алгебре, порождённой дробящейся системой. Множество $E_f(a) \cap Z$ μ -измеримо, поскольку имеет меру 0. Тогда множество $E_f(a) = (E_f(a) \setminus Z) \cup (E_f(a) \cap Z)$ тоже μ -измеримо.

2. Пусть множества $E_f(a)$ μ -измеримы. Тогда μ -измеримы множества $A_{n,i}[f] = \{x \in X \mid \frac{i}{2^n} \leq f(x) < \frac{i+1}{2^n}\}$ для любых целых i и n .

Функции $g_n[f] = \sum_{i=-4^n}^{4^n} \frac{i}{2^n} \chi_{A_{n,i}[f]}$ являются μ -измеримыми как линейные комбинации измеримых функций. Нетрудно видеть, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n[f](x) = f(x)$ для любого $x \in X$. Тогда функция f μ -измерима по теореме о пределе измеримых функций. $\blacktriangle$

Утверждение 48. (неравенство Чебышёва) Пусть $f \in L(X, S, \mu)$, $f \geq 0$. Тогда для любого $a > 0$ справедливо неравенство $a\mu(E_f(a)) \leq \int_X f d\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $E_f(a)$ μ -измеримо и $a\chi_{E_f(a)}(x) \leq f(x)$ для всех $x \in X$. Поэтому $\|\chi_{E_f(a)}\|^* \leq \frac{1}{a}\|f\|^* < \infty$ и функция $\chi_{E_f(a)}$ интегрируема по следствию леммы Фату. Тогда $a\mu(E_f(a)) = \int_X a\chi_{E_f(a)} d\mu \leq \int_X f d\mu$. $\blacktriangle$

Утверждение 49. (о суммах Лебега) Пусть $f \geq 0$.

1. Если $f \in L(X, S, \mu)$, то $g_n[f] \in L(X, S, \mu)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n[f] d\mu = \int_X f d\mu$.
2. Если множества $A_{n,i}[f]$ при $i > 0$ и $n > 0$ конечно измеримы и $\sup \int_X g_n[f] d\mu < \infty$, то $f \in L(X, S, \mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, поскольку $|g_n[f]| \leq f$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

2. Следует из леммы Беппо Леви, поскольку последовательность $g_n[f]$ монотонно возрастает. $\blacktriangle$

Пример 14. Построение неизмеримого множества. Рассмотрим множество $D = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (фактор-группа по сложению). Пусть $A \subset [0, 1]$ — такое подмножество, что $A \cap d$ состоит из одного элемента для любого $d \in D$. Множество A существует, если справедлива аксиома выбора. Имеем $[0, 1] \subset \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (A + x)$ и $(A + x) \cap (A + y) = \emptyset$ при $x \neq y$. Покажем от противного, что множество A неизмеримо. Если A измеримо, то оно конечно измеримо $\mu_L(A) \leq 1$, причём $\mu_L(A + x) = \mu_L(A)$ для любого $x \in \mathbb{Q}$. Из счётной аддитивности меры имеем если $\mu_L(A) > 0$, то $\mu_L([0, 2]) = \infty$; если $\mu_L(A) = 0$,

то $\mu_L([0, 1]) = 0$.

Теорема 14. (Егорова) Пусть X — конечно измеримое множество и (f_n) — последовательность μ -измеримых функций, сходящаяся почти всюду на X . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ в X существует измеримое подмножество F такое, что $\mu(F) < \varepsilon$, и на множестве $X \setminus F$ последовательность (f_n) сходится равномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $|f(x)| < \infty$, при $x \in X \setminus Z$ и $\mu(Z) = 0$. Функция f μ -измерима по теореме о пределе измеримых функций. Рассмотрим множества $E_{m,k} = \bigcap_{n \geq m} \{x \in X \setminus Z \mid |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}\}$. Имеем $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_{m,k} = X \setminus Z$.

Рассмотрим $A_k = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_{m,k}$. Поскольку $E_{m,k} \subseteq E_{m+1,k}$ для любого $m \in \mathbb{N}$, из счётной

аддитивности меры имеем $\mu(A_k) = \mu(E_{0,k}) + \sum_{m=0}^{\infty} \mu(E_{m+1,k} \setminus E_{m,k})$. Тогда найдётся

такой $m_k \in \mathbb{N}$, что $\sum_{m=m_k}^{\infty} \mu(E_{m+1,k} \setminus E_{m,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, т. е. $\mu(A_k \setminus E_{m_k,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Пусть $x \in B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_{m_k,k}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $k \in \mathbb{N}$, что $\varepsilon > \frac{1}{k}$. Тогда $x \in E_{m_k,k}$ и $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} < \varepsilon$ при $n \geq m_k$. Таким образом $f_n \rightrightarrows f$ при $n \rightarrow \infty$ на множестве B .

Пусть $F = X \setminus B$. Очевидно $F \subseteq Z \cup_k (A_k \setminus E_{m_k,k})$. Из счётной аддитивности меры имеем, что $\mu(F) < \varepsilon$. $\blacktriangle$

Теорема 15. (Лузина) Если функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ измерима (по мере Лебега), то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся измеримое подмножество F такое, что $\mu(F) < \varepsilon$, и f непрерывна на множестве $\mathbb{R}^n \setminus F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению измеримости функции найдётся последовательность ступенчатых функций (φ_n) , для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ почти для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Для каждой ступенчатой функции φ_n можно найти такую непрерывную функцию g , что $\|\varphi_n - g_n\|^* < \frac{1}{2^n}$. Тогда по теореме о нормально сходящихся рядах $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n(x) - g_n(x)) = 0$ почти для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus Z$. По теореме Егорова для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое множество $F \subset \mathbb{R}^n$, $\mu_L(F) < \varepsilon$, что $g_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}^n \setminus F$. Равномерный предел последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция, поэтому f непрерывна на $\mathbb{R}^n \setminus F$. $\blacktriangle$

Определение 36. Мера μ , заданная на подмножествах метрического пространства X называется *регулярной*, если для любого конечно измеримого множества $A \subset X$ и $\varepsilon > 0$ найдутся компактное множество F и открытое U такие, что $F \subset A \subset U$ и $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.

Утверждение 50. (о регулярности меры Лебега)

Мера Лебега в $\mathbb{R}^k$ является регулярной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы об аппроксимации следует, что $A \subseteq U$, где U — счётное объединение открытых параллелепипедов и $\mu_L(U \setminus A) < \varepsilon/3$.

Покажем, что найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\mu_L(A \setminus A_N) < \varepsilon/3$, где $A_N = A \cap [-N, N]^k$. Действительно, $\chi_{A_N} \rightarrow \chi_A$ при $N \rightarrow \infty$. По лемме Беппо Леви $\mu_L(A_N) =$

$$\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{A_N} d\mu_L \rightarrow \int_{\mathbb{R}^k} \chi_A d\mu_L = \mu_L(A).$$

Рассмотрим множество $B = [-N, N]^k \setminus A$. Из леммы об аппроксимации следует, что найдётся счётное объединение открытых параллелепипедов $V \subseteq (-N-1, N+1)^k$ такое, что $B \subseteq V$ и $\mu_L(V \setminus B) < \varepsilon/3$. Имеем $[-N, N]^k \setminus V \subseteq [-N, N]^k \setminus B = A_N$ и $(V \setminus B) \cap [-N, N]^k = ([-N, N]^k \setminus B) \setminus ([-N, N]^k \setminus V) = A_N \setminus F$, где $F = [-N, N]^k \setminus V$. Множество F замкнутое, как пересечение замкнутых, и ограниченное, т. е. компактное. Кроме того, $F \subseteq ([-N, N]^k \setminus B) = A_N$ и $\mu_L(A_N \setminus F) \leq \mu_L((V \setminus B) \cap [-N, N]^k) < \varepsilon/3$.

Тогда $\mu_L(U \setminus F) \leq \mu_L(U \setminus A) + \mu_L(A \setminus A_N) + \mu_L(A_N \setminus F) < \varepsilon$. $\blacktriangle$

Задача 23. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на множестве $\mathbb{R} \setminus F$ и $\mu_L(F) < \varepsilon$. Докажите, что найдётся всюду непрерывная функция $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\mu_L(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$.

Задача 24. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое множество $F_\varepsilon \subset \mathbb{R}$, что функция f непрерывна на множестве $\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon$ и $\mu_L(F_\varepsilon) < \varepsilon$. Докажите, что функция f измерима.

Задача 25. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и на метрическом пространстве X задана регулярная мера μ . Докажите, что если f почти всюду непрерывна, то f μ -измерима.