

1. Интегралы, зависящие от параметра

В этом разделе в качестве пространства с мерой мы будем рассматривать множество $\mathbb{R}^k$ с определённой на нём мерой Лебега. Если функция f интегрируема по множеству $T \subseteq \mathbb{R}^k$, то интеграл $\int_T f d\mu_L$ будем обозначать через $\int_T f(t) dt$. Функцию $I(x) = \int_T f(x, t) dt$ будем называть *интегралом, зависящим от параметра*.

Утверждение 1. Пусть функция $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ измерима. Тогда f_x измерима для почти всех $x \in X$, где $f_x(t) = f(x, t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность ступенчатых функций (φ_n) сходящуюся к f почти всюду. Рассмотрим пренебрежимое множество $A \subset X \times T$, на котором нет сходимости. По лемме о повторной норме $\|(\|\chi_A(x, t)\|_t^*)\|_x^* \leq \|\chi_A\|^* = 0$. Тогда $g(x) = \|\chi_A(x, t)\|_t^* = 0$ при $x \in X \setminus Z$ и $\mu_1(Z) = 0$. Зафиксируем $x \in X$. Если $x \notin Z$, то $\varphi_n(x, t) \rightarrow f_x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ для почти всех $t \in T$. Тогда функция f_x измерима по определению. $\blacktriangle$

Далее будем полагать, что рассматриваемые функции $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ не только измеримы, но и их сужения $f_x(t)$ измеримы для любого $x \in X$. Без этого предположения сформулированные ниже утверждения выполняются почти для всех, но не для всех $x \in X$.

Утверждение 2. (о пределе интегралов, зависящих от параметра)

Пусть $\lim_{x \rightarrow p} f(x, t) = g(t)$ для почти всех $t \in T$ и функция $f(x, t)$ имеет интегрируемую на T мажоранту h в некоторой окрестности $U \in \mathcal{N}(p)$, т. е. $\sup_{x \in U \setminus \{p\}} |f(x, t)| \leq h(t)$. Тогда для всех $x \in U \setminus \{p\}$ функции $f(x, t)$ и $g(t)$ являются интегрируемыми по множеству T и справедливо равенство $\lim_{x \rightarrow p} \int_T f(x, t) dt = \int_T g(t) dt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По признаку интегрируемости Лебега функции f_x интегрируемы для всех $x \in U \setminus \{p\}$. Рассмотрим такую последовательность (x_n) , $x_n \in U \setminus \{p\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$. Пусть $f_n(t) = f(x_n, t)$. Тогда по условию $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = g(t)$ для почти всех $t \in T$. Следовательно, по теореме Лебега $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n(t) dt = \int_T g(t) dt$. Из произвольности выбора последовательности (x_n) по критерию Гейне получаем, что справедливо равенство $\lim_{x \rightarrow p} \int_T f(x, t) dt = \int_T g(t) dt$. $\blacktriangle$

Следствие 1. (о непрерывности интеграла, зависящего от параметра) Если $f(x, t)$ непрерывна при $(x, t) \in X \times T$ и имеет интегрируемую мажоранту, то функция $I(x) = \int_T f(x, t) dt$ непрерывна при $x \in X$.

Пример 1. Рассмотрим *гамма-функцию Эйлера* $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$. Докажем, что Γ определена и непрерывна при $x > 0$. Пусть $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$. Функция $h_1(t) = t^{\alpha-1} e^{-t}$ является интегрируемой мажорантой при $t \in (0, 1)$. Функция $h_2(t) = t^{\beta-1} e^{-t}$ является интегрируемой мажорантой при $t \in [1, \infty)$. Таким образом, по следствию о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, функция Γ непрерывна в точке $x_0 > 0$.

Теорема 1. (о дифференцируемости интеграла, зависящего от параметра) Пусть $f : (a, b) \times T \rightarrow \mathbb{R}$, $T \subseteq \mathbb{R}^k$ и выполнены следующие условия

1) для всех $t \in T$ функция $f_t(x) = f(x, t)$ дифференцируема на (a, b) ;
 2) функция $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ при $x \in (a, b)$ имеет интегрируемую на T мажоранту h ;
 3) функция $f(x_0, t)$ интегрируема на T для некоторого $x_0 \in (a, b)$.
 Тогда функция $I(x) = \int_T f(x, t) dt$ дифференцируема на (a, b) и справедливо равенство $I'(x) = \int_T \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По теореме Лагранжа имеем $|f(x, t) - f(x_0, t)| \leq h(t)|x - x_0|$. Тогда разность $f(x, t) - f(x_0, t)$ интегрируема по признаку Лебега. Следовательно, функция $f(x, t) = f(x, t) - f(x_0, t) + f(x_0, t)$ также является интегрируемой на T .

Производная измеримой функции также является измеримой как предел конечных разностей. Тогда по признаку Лебега функция $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ является интегрируемой. Из определения производной имеем равенство

$$f(x + y, t) - f(x, t) = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} y + \alpha(y, t)y, \quad (1)$$

где $\alpha(0, t) = 0$ и непрерывна в нуле (при любом фиксированном $t \in T$).

Поскольку $|\alpha(y, t)||y| \leq |f(x + y, t) - f(x, t)| + |\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}||y|$, имеем $|\alpha(y, t)| \leq 2h(t)$. Таким образом, функция $\alpha(y, t)$ интегрируема по признаку Лебега. Проинтегрируем равенство (1). Имеем

$$I(x + y) - I(x) = y \int_T \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt + y \int_T \alpha(y, t) dt.$$

По утверждению о пределе интеграла, зависящего от параметра, имеем $\lim_{y \rightarrow 0} \int_T \alpha(y, t) dt = 0$. Тогда $I'(x) = \int_T \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$ по определению производной. $\blacktriangle$

Пример 2. Рассмотрим *гамма-функцию Эйлера* $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$. Докажем, по индукции что функция Γ бесконечно дифференцируема при $x > 0$ и $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\ln^n t) t^{x-1} e^{-t} dt$.

Необходимо обеспечить индукционный шаг. Пусть $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$. Функция $h_1(t) = (\ln^{n+1} t) t^{\alpha-1} e^{-t}$ является интегрируемой мажорантой для $\frac{\partial (\ln^n t) t^{x-1} e^{-t}}{\partial x} = (\ln^{n+1} t) t^{x-1} e^{-t}$ при $t \in (0, 1)$. Функция $h_2(t) = (\ln^{n+1} t) t^{\beta-1} e^{-t}$ является интегрируемой мажорантой при $t \in [1, \infty)$.

Утверждение 3. (о непрерывности первообразной Лебега) Пусть функция $f : (a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. Тогда

1) функция $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ равномерно непрерывна на (a, ω) ;

2) причём $\lim_{\tau \rightarrow \omega} \int_\tau^\omega f(t) dt = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что из $|x - y| < \delta$ следует $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$. По определению интеграла Лебега найдётся такая ступенчатая функция φ , что $\int_a^x |f(t) - \varphi(t)| dt < \varepsilon/2$. Пусть $M =$

$\sup_{t \in (a, \omega)} |\varphi(t)|$. Тогда $\int_x^y |\varphi(t)| dt < \varepsilon/2$ при $|x - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Следовательно, $|F(x) - F(y)| =$
 $|\int_x^y (f(t) - \varphi(t) + \varphi(t)) dt| \leq \int_x^y |f(t) - \varphi(t)| dt + \int_x^y |\varphi(t)| dt < \varepsilon.$

2) $|\int_\tau^\omega f(t) dt| = \int_\tau^\omega |f(t) - \varphi(t)| dt + \int_\tau^\omega |\varphi(t)| dt$. Тогда $\overline{\lim}_{\tau \rightarrow \omega} |\int_\tau^\omega f(t) dt| \leq \varepsilon/2$. Из произ-
 вольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $\lim_{\tau \rightarrow \omega} |\int_\tau^\omega f(t) dt| = 0$. ▲

Замечание 1. Из теории интеграла Римана известно, что если f — непрерывная функция, то функция $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ дифференцируема и $F' = f$. Справедлива более общая теорема: для любой интегрируемой по Лебегу на (a, b) функции f справедливо равенство $F'(x) = f(x)$ почти для всех $x \in (a, b)$.

Задача 1. Пусть $f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha, \beta : (a, b) \rightarrow (c, d)$ непрерывно дифференцируемые функции. Докажите равенство $\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt + f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x)$.

Определение 1. Пусть $I_\tau(x) = \int_c^\tau f(x, t) dt$. Определим *несобственный интеграл, зависящий от параметра* $I(x) = \int_c^\omega f(x, t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \omega} I_\tau$. Интеграл называют *сходящимся*, если этот предел конечен. Говорят, что интеграл, зависящий от параметра, $I(x) = \int_c^\omega f(x, t) dt$ *сходится в точке* $\omega \in \mathbb{R}$ *равномерно на* X , если он сходится для любого $x \in X$ и $\lim_{\tau \rightarrow \omega} \sup_{x \in X} |\int_\tau^\omega f(x, t) dt| = \lim_{\tau \rightarrow \omega} \sup_{x \in X} |I(x) - I_\tau(x)| = 0$.

Отметим, что если ω конечно, то как правило рассматривается левый (или правый) пределы $\tau \rightarrow \omega - 0$.

Заметим, что равномерная сходимостъ интеграла $I(x)$ на X эквивалентна равномерной сходимости семейства функций $I_\tau(x) \rightrightarrows I(x)$ при $\tau \rightarrow \omega$ на X . Тогда из теоремы о пределе равномерно сходящейся последовательности функций получаем

Следствие 2. (о непрерывности равномерно сходящегося интеграла) Если функции $I_\tau(x)$ непрерывны на X и интеграл $I(x)$ сходится равномерно на X , то функция $I(x)$ непрерывна на X .

Из теоремы о дифференцируемости равномерно сходящейся последовательности функций имеем

Следствие 3. (о дифференцируемости равномерно сходящегося интеграла)

Пусть $f : (a, b) \times (c, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ и выполнены следующие условия

- 1) для всех $\tau \in (c, \omega)$ функция $f_t(x) = f(x, t)$ непрерывно дифференцируема на (a, b) и $\frac{d}{dx} \int_c^\tau f(x, t) dt = \int_c^\tau \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$;
 - 2) интеграл $\int_c^\omega \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$ равномерно сходится на (a, b) ;
 - 3) функция $f(x_0, t)$ интегрируема на (c, ω) для некоторого $x_0 \in (a, b)$.
- Тогда функция $I(x) = \int_c^\omega f(x, t) dt$ дифференцируема на (a, b) и справедливо равенство $\frac{d}{dx} \int_c^\omega f(x, t) dt = \int_c^\omega \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции $I_n(x) = \int_c^{\tau_n} f(x, t) dt$, где $\tau_n \in (c, \omega)$ и $\tau_n \rightarrow \omega$. По условиям 1) и 2) $\frac{d}{dx} I_n(x) = \int_c^{\tau_n} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \Rightarrow \int_c^\omega \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$ при $n \rightarrow \infty$ на (a, b) . Кроме того, по условию 3) $I_n(x_0) \rightarrow I(x_0) = \int_c^\omega f(x_0, t) dt$. Тогда по теореме о дифференцировании равномерно сходящейся последовательности имеем $I_n(x) \Rightarrow I(x)$ при $n \rightarrow \infty$ на (a, b) и $\frac{d}{dx} I(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} I_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^{\tau_n} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt = \int_c^\omega \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$. $\blacktriangle$

Утверждение 4. (признак Вейерштрасса равномерной сходимости) Если функция $f : X \times (c, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет интегрируемую на (c, ω) мажоранту, то интеграл $I(x) = \int_c^\omega f(x, t) dt$ сходится равномерно на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h : (c, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ — интегрируемая мажоранта. Тогда по свойству непрерывности первообразной Лебега имеем $\sup_{x \in X} \left| \int_c^\omega f(x, t) dt \right| \leq \int_c^\omega h(t) dt \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \omega - 0$. $\blacktriangle$

Утверждение 5. (критерий Коши равномерной сходимости) Пусть функция $f : X \times (c, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на (c, b) для всех $b \in (c, \omega)$. Интеграл зависящий от параметра $I(x) = \int_c^\omega f(x, t) dt$ сходится в точке $\omega \in \mathbb{R}$ равномерно на X , если и только если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $b \in (c, \omega)$, что для любых $\tau_1, \tau_2 \in (b, \omega)$ справедливо неравенство $\sup_{x \in X} \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, t) dt \right| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равномерной сходимости интеграла условие Коши следует очевидно. Докажем равномерную сходимость. Оценим величину $\sup_{x \in X} \left| \int_c^\omega f(x, t) dt \right|$. При фиксированном $x \in X$ сходимость интеграла следует из выполнения условия Коши для функции $F_x(\tau) = \int_c^\tau f(x, t) dt$. Функция $F_x(\tau)$ удовлетворяет условию Коши, поэтому имеет конечный предел при $\tau \rightarrow \omega - 0$. Тогда найдётся такое $\tau(x) \in (b, \omega)$, что $\left| \int_{\tau(x)}^\omega f(x, t) dt \right| < \varepsilon$. Тогда для любого $\tau \in (b, \omega)$ справедливы неравенства $\left| \int_\tau^\omega f(x, t) dt \right| \leq \left| \int_\tau^{\tau(x)} f(x, t) dt \right| + \left| \int_{\tau(x)}^\omega f(x, t) dt \right| < 2\varepsilon$. $\blacktriangle$

Утверждение 6. (признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости интеграла, зависящего от параметра) Пусть $f, g : X \times (c, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ и функция g непрерывна и монотонна по переменной t для любого фиксированного $x \in X$.

1) Если интеграл $\int_c^\omega f(x, t) dt$ сходится равномерно на X и $\sup_{x \in X, t \in (c, \omega)} |g(x, t)| = C < \infty$

(т. е. функция g равномерно ограничена на X) или

2) если $\sup_{x \in X} \left| \int_c^\tau f(x, t) dt \right| \leq M$ и $\sup_{x \in X} g(x, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \omega - 0$ на X (т. е. функция g стремится к 0 равномерно на X),

тогда интеграл $\int_c^\omega f(x, t)g(x, t) dt$ сходится равномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По критерию Коши достаточно доказать, что для лю-

бого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $\sup_{x \in X} \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, t) g(x, t) dt \right| < \varepsilon$ при $\tau_1, \tau_2 \rightarrow \omega - 0$.

Из второй теоремы о среднем найдётся такое $\xi \in [\tau_1, \tau_2]$, что

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, t) g(x, t) dt = g(x, \tau_1) \int_{\tau_1}^{\xi} f(x, t) dt + g(x, \tau_2) \int_{\xi}^{\tau_2} f(x, t) dt.$$

1. Из равномерной сходимости интеграла $\int_c^{\omega} f(x, t) dt$ по критерию Коши получаем,

что $\sup_{x \in X} \left| \int_{\tau_1}^{\xi} f(x, t) dt \right| < \varepsilon/2C$, $\sup_{x \in X} \left| \int_{\xi}^{\tau_2} f(x, t) dt \right| < \varepsilon/2C$ при $\tau_1, \tau_2 \rightarrow \omega - 0$ и $C = \sup |g|$.

Тогда $\sup_{x \in X} \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, t) g(x, t) dx \right| < \varepsilon$ при $\tau_1, \tau_2 \rightarrow \omega - 0$.

2. Поскольку $\lim_{\tau \rightarrow \omega - 0} \sup_{x \in X} g(x, \tau) = 0$, то $\sup_{x \in X} |g(x, \tau_1)| < \varepsilon/4M$ и $\sup_{x \in X} |g(x, \tau_2)| < \varepsilon/4M$

при $\tau_1, \tau_2 \rightarrow \omega - 0$. Тогда $\sup_{x \in X} \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, t) g(x, t) dt \right| < \varepsilon$ при $\tau_1, \tau_2 \rightarrow \omega - 0$. $\blacktriangle$

Пример 3. Вычислим интеграл Дирихле $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Рассмотрим $I(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \left(\frac{\sin t}{t} \right) dt$.

Нетрудно видеть, что $I(x)$ сходится равномерно на $x \in [0, \infty)$. Действительно,

$\left| \int_0^{\tau} \sin t dt \right| \leq 2$ и $\left| \frac{e^{-xt}}{t} \right| \leq \frac{1}{t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда $I(x) \rightarrow I(0)$ при $x \rightarrow 0 + 0$.

Покажем, что интеграл $I(x)$ можно дифференцировать по параметру. Рассмотрим $x \in (a, b)$, где $0 < a < b < \infty$. Очевидно функция $e^{-xt} \sin t$ имеет интегрируемую мажоранту e^{-at} при $t \in (0, \infty)$. Кроме того, функция $e^{-xt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)$ интегрируема на $(0, \infty)$ при любом $x \in (a, b)$. Поэтому, по теореме о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, получаем $\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} e^{-xt} \left(\frac{\sin t}{t} \right) dt = - \int_0^{\infty} e^{-xt} \sin t dt$.

Вычислим $\int_0^{\infty} e^{-xt} \sin t dt$ по частям: $\int_0^{\infty} e^{-xt} \sin t dt = -e^{-xt} \cos t \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x e^{-xt} \cos t dt = 1 - x e^{-xt} \sin t \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x^2 e^{-xt} \sin t dt$. Отсюда имеем $\int_0^{\infty} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{1+x^2}$. Тогда $I(x) = -\arctg(x) + C$, причём при $x \rightarrow \infty$ имеем $I(x) \rightarrow 0$. Тогда $C = \frac{\pi}{2} = I(0)$.

Определение 2. Бета-функцией Эйлера называется $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$, $x > 0, y > 0$.

Очевидно, $B(x, y) = B(y, x)$.

Утверждение 7. (связь между B - и Γ -функциями Эйлера) $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = u^x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-tu} dt$. Тогда $\frac{\Gamma(x+y)}{(u+1)^{x+y}} = \int_0^{\infty} t^{x+y-1} e^{-t(u+1)} dt$.

Заменой $t = \frac{u}{1+u}$ получаем равенство $B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} dt$. Тогда по теореме Тонелли имеем равенства

$$\Gamma(x+y)B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}\Gamma(x+y)}{(1+u)^{x+y}} dt = \int_0^{\infty} u^{x-1} du \int_0^{\infty} t^{x+y-1} e^{-t(u+1)} dt = \int_0^{\infty} v^{x-1} e^{-v} dv \int_0^{\infty} t^{y-1} e^{-t} dt.$$

Последнее равенство получено заменой $v = ut$. $\blacktriangle$

Утверждение 8. (формулы понижения)

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
2. $B(x, y) = \frac{x-1}{x+y-1}B(x-1, y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Интегрируем по частям $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^\infty + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.
2. Следует из п.1 и формулы связи между B - и Γ -функциями Эйлера. $\blacktriangle$

Следствие 4.

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(\tfrac{2n+1}{2}) = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$. Формула $\Gamma(n+1) = n!$ получается из формулы понижения по индукции.

Рассмотрим интеграл Эйлера — Пуассона $I = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$. Очевидно,

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt \right) \left(\int_0^\infty e^{-s^2} ds \right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t^2+s^2)} dt ds. \text{ Сделаем полярную замену. Имеем}$$

$$I^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\varphi = \pi/4. \text{ То есть } I = \sqrt{\pi}/2$$

Тогда, используя замену $s = \sqrt{t}$, получаем $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$.

Формула $\Gamma(\tfrac{2n+1}{2}) = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n}$ получается из формулы понижения по индукции. $\blacktriangle$

Следствие 5. Пусть $B_n(r)$ шар радиуса $r > 0$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mu_L(B_n(r)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} r^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

При $n = 1$ очевидно $\mu_L(B_1(r)) = \mu_L([-r, r]) = 2r$. Из леммы об искажении объёма при линейном преобразовании имеем $\mu_L(B_n(r)) = r^n \mu_L(B_n(1))$. По формуле Кавальери — Лебега имеем $\mu_L(B_{n+1}(1)) = \int_{-1}^1 \mu_L(B_n(\sqrt{1-t^2})) dt = 2\mu_L(B_n(1)) \int_0^1 (\sqrt{1-t^2})^n dt$.

Поскольку $2 \int_0^1 (\sqrt{1-t^2})^n dt = \int_0^1 s^{-1/2} (\sqrt{1-s})^n ds = B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{n+2}{2})$, имеем рекуррентную формулу $\mu_L(B_{n+1}(1)) = B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{n+2}{2}) \mu_L(B_n(1))$.

Тогда $\mu_L(B_{n+1}(1)) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n+2}{2}) \dots \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n+3}{2}) \Gamma(\frac{n+2}{2}) \dots \Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+3}{2})}$. $\blacktriangle$

Утверждение 9. (формула удвоения Лежандра) $\Gamma(x)\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \Gamma(2x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ формулу удвоения можно переписать следующим образом

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{1}{2^{2x-1}} \frac{\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(x)}{\Gamma(x+\tfrac{1}{2})} \text{ или } B(x, x) = \frac{B(\tfrac{1}{2}, x)}{2^{2x-1}}.$$

Выполняя замену $t = 1 - u$, получим равенство

$$\int_0^{1/2} t^{x-1} (1-t)^{x-1} dt = \int_{1/2}^1 u^{x-1} (1-u)^{x-1} du.$$

Выполняя замену $t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{s}}{2}$, получим равенство

$$\int_0^{1/2} t^{x-1} (1-t)^{x-1} dt = \frac{1}{2^{2x}} \int_0^1 (1-\sqrt{s})^{x-1} (\sqrt{s}+1)^{x-1} \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \frac{1}{2^{2x}} \int_0^1 (1-s)^{x-1} s^{-1/2} ds.$$

Тогда $B(x, x) = 2 \int_0^{1/2} t^{x-1} (1-t)^{x-1} dt = \frac{B(\frac{1}{2}, x)}{2^{2x-1}}$. ▲

Утверждение 10. (формула дополнения) $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, удовлетворяет условию $\frac{1}{2}f(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}) = f(x)$ для всех $x \in (0, 1)$ и $f(0) = f(1)$. Докажем, что f — постоянная. Покажем, что $f(0) = \max f(x)$. По теореме Вейерштрасса найдётся такое $x_0 \in [0, 1]$, что $f(x_0) = \max f(x)$. Пусть $x_0 \neq 0$ и, следовательно, $x_0 \neq 1$. Тогда $f(\frac{x_0}{2}) = f(\frac{1}{2} + \frac{x_0}{2}) = f(x_0)$. По индукции получим, что $f(\frac{x_0}{2^n}) = f(x_0)$. Тогда $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{x_0}{2^n}) = f(x_0) = \max f(x)$. Аналогично, $f(0) = \min f(x)$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \Gamma(x)\Gamma(1-x) \sin \pi x$ при $x \in (0, 1)$. Поскольку $\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \Gamma(1+x)\Gamma(1-x)$, имеем $\lim_{x \rightarrow 0+0} \varphi(x) = 1$. Доопределим $\varphi(0) = 1$

Покажем, что $\varphi'(0) = 0$. Действительно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{(\pi x)^2}{6} + o(1))\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)-1}{x} = (\Gamma(1+x)\Gamma(1-x))'|_{x=0} = \Gamma'(1)\Gamma(1) - \Gamma(1)\Gamma'(1) = 0$. Очевидно, $\varphi(1-x) = \varphi(x)$. Поэтому $\lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi'(x) = 0$. Тогда $(\ln \varphi)'(0) = \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} = 0$, аналогично, $(\ln \varphi)'(1) = 0$.

По формуле удвоения Лежандра получаем $\varphi(\frac{x}{2})\varphi(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}) = \frac{1}{\pi} \Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(1 - \frac{x}{2}) \sin \frac{\pi x}{2} \frac{1}{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{x}{2})\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}) \cos \frac{\pi x}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi^{2x-1}} \Gamma(x) \frac{\sqrt{\pi}}{\pi^{2-x}} \Gamma(1-x) \frac{1}{2} \sin \pi x = \varphi(x)$.

Пусть $f = (\ln \varphi)'$. Тогда $\frac{1}{2}f(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}) = f(x)$ и следовательно $\ln \varphi(x) = c_1 x + c_0$. Поскольку $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$, получаем, что $c_1 = c_0 = 0$ и $\frac{\sin \pi x}{\pi} \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \varphi(x) = 1$ для всех $x \in (0, 1)$. ▲

Задача 2. Докажите равенства

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (n(1-t^{1/n}))^{x-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x B(n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

Задача 3. Докажите равенства $\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}$ и $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

2. Свёртка и усреднение функций

Утверждение 11. (интегральное неравенство Гёльдера) Пусть $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $|f|^p, |h|^q \in L(X, S, \mu)$. Тогда $|fh| \in L(X, S, \mu)$ и

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |h|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вспомним неравенство Юнга $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ при $a, b, p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть $a = \frac{|f(x)|}{(\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}}$ и $b = \frac{|h(x)|}{(\int_X |h|^q d\mu)^{1/q}}$. Тогда

$$\frac{|f(x)h(x)|}{(\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}(\int_X |h|^q d\mu)^{1/q}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \int_X |f|^p d\mu} + \frac{|h(x)|^q}{q \int_X |h|^q d\mu}.$$

Из свойств измеримых функций следует, что функция $|fh|$ μ -измерима и в соответствии с неравенством Юнга имеет интегрируемую мажоранту. Тогда функция $|fh|$ интегрируема по признаку Лебега и справедливо неравенство

$$\frac{\int_X |fh| d\mu}{(\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}(\int_X |h|^q d\mu)^{1/q}} \leq \frac{\int_X |f|^p d\mu}{p \int_X |f|^p d\mu} + \frac{\int_X |h|^q d\mu}{q \int_X |h|^q d\mu} \leq 1.$$

▲

При $p = q = 2$ неравенство Гёльдера называется неравенством Коши — Буняковского или Коши — Шварца.

Следствие 6. Если $|f|^p \in L(X, S, \mu)$ при $p \geq 1$ и $\mu(X) < \infty$, то $|f| \in L(X, S, \mu)$. Причём $\int_X |f| d\mu \leq \mu(X)^{1/q} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$.

Для доказательства достаточно рассмотреть $h \equiv 1$ и применить неравенство Гёльдера.

Утверждение 12. (интегральное неравенство Минковского) Пусть $p \geq 1$ и функции f и h μ -измеримы. Тогда

$$\left(\int_X |f + h|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |h|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если одна из функций $|f|^p$ или $|h|^p$ не интегрируема, то $\int_X |f|^p d\mu = \infty$ или $\int_X |h|^p d\mu = \infty$. То есть неравенство формально верно. Если обе эти функции интегрируемы, то применим неравенство Гёльдера к произведениям функций $(|f| + |h|)^{p-1}|f|$ и $(|f| + |h|)^{p-1}|h|$. Заметим, что $(|f| + |h|)^{(p-1)q} = (|f| + |h|)^p \leq 2^p(|f|^p + |h|^p)$ и функция $(|f| + |h|)^{(p-1)q}$ интегрируема по признаку Лебега. Имеем

$$\begin{aligned} \int_X (|f| + |h|)^p d\mu &\leq \int_X (|f| + |h|)^{p-1}|f| d\mu + \int_X (|f| + |h|)^{p-1}|h| d\mu \leq \\ &\left(\int_X (|f| + |h|)^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X (|f| + |h|)^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} \left(\int_X |h|^p d\mu \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$, $(p-1)q = p$ и функция $|f + h|^p \leq (|f| + |h|)^p$ интегрируема по признаку Лебега, из предыдущего неравенства получаем неравенство Минковского.

▲

Определение 3. Пусть $f, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Свёрткой функций f и g называется функция $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f(t)g(x-t) dt$.

Определение 4. Функция называется *локально интегрируемой* в $\mathbb{R}^k$ если она интегрируема на любом ограниченном измеримом подмножестве $\mathbb{R}^k$.

Определение 5. Измеримая функция f называется *финитной*, если её носитель $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) \neq 0\}}$ компактен.

Утверждение 13. (условия существования свёртки)

Свёртка функций f и g определена, если выполнено одно из условий

1) $f^2, g^2 \in L(\mathbb{R}^k, S_k, \mu_L)$ или 2) $f \in L(\mathbb{R}^k, S_k, \mu_L)$, а g измерима и ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно проверить интегрируемость функции $f(t)g(x-t)$ на $\mathbb{R}^k$. В случае 1) это следует из неравенства Коши — Буняковского, в случае 2) из признака интегрируемости Лебега. ▲

Утверждение 14. (условия существования свёртки)

Если f финитна, то для существования свёртки $f * g$ достаточно, чтобы 1) функции f^2 и g^2 были локально интегрируемы или 2) f была ограниченной, а g — локально интегрируемой.

Для доказательства следствия достаточно использовать равенство $\int_{\mathbb{R}^k} f(t)g(x-t) dt = \int_A f(t)g(x-t) dt$, где $A = \text{supp}(f)$ и те же рассуждения, как в доказательстве предыдущего утверждения.

Утверждение 15. (свойства свёртки)

1) $f * g = g * f$ (симметричность);

2) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (ассоциативность);

3) $f * T_a(g) = T_a(f * g)$, где $T_a(g)(x) = g(x-a)$ (сохранение сдвига);

4) $(\alpha f + \beta h) * g = \alpha(f * g) + \beta(h * g)$ (линейность).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) и 3) Следует из формулы замены переменных. Для доказательства 2) нужно применить теорему Фубини

$$\begin{aligned} (f * g) * h &= \int_{\mathbb{R}^k} h(y-x) dx \int_{\mathbb{R}^k} f(x-t)g(t) dt = \int_{\mathbb{R}^k} f(t) dt \int_{\mathbb{R}^k} h(y-x)g(x-t) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} f(t) dt \int_{\mathbb{R}^k} h(y-t-z)g(z) dz = \int_{\mathbb{R}^k} f(y-u) du \int_{\mathbb{R}^k} h(u-z)g(z) dz = f * (g * h). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Отметим, что для справедливости свойства ассоциативности свёртки необходимо существование кратного интеграла $\int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} h(y-x)f(x-t)g(t) dx dt$.

Утверждение 16. (дифференцируемость свёртки)

Пусть $f, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ и $f \in C^m(\mathbb{R}^k)$, т. е. функция f непрерывно дифференцируема m раз. Если

1) g — локально интегрируемая функция, а f — финитная функция или

2) g — интегрируемая на $\mathbb{R}^k$ функция, а все производные функции f ограничены, то $f * g \in C^m(\mathbb{R}^k)$ и $\frac{\partial^{|\beta|}(f * g)}{\partial x^\beta} = \frac{\partial^{|\beta|}f}{\partial x^\beta} * g$ для любого мультииндекса β , $|\beta| \leq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $|\beta| = 1$ и $A = \text{supp}(f)$. Нужно проверить равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^k} f(x-t)g(t) dt = \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial f(x-t)}{\partial x_i} g(t) dt.$$

1) Рассмотрим ограниченную окрестность U произвольной точки $x_0 \in \mathbb{R}^k$. Поскольку f непрерывна дифференцируема и финитна, то функции $\varphi(x, t) = f(x-t)$ и $\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_i}$ при $x \in U$ мажорируются функцией $h(t)$ равной $\max_{z \in U} \{|f(z)|, |\frac{\partial f(z)}{\partial x_i}|\}$ при $x-t \in A$ (т.е. при $t \in (U-A)$) и нулю при $t \notin (U-A)$. Тогда подынтегральные выражения мажорируются интегрируемой функцией $h|g|$.

2) Если $\sup |\frac{\partial^{|\beta|} f(z)}{\partial x^\beta}| \leq C$, то в качестве интегрируемой мажоранты можно взять функцию $C|g|$.

По теореме о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, получаем требуемое равенство. Непрерывность производной от свёртки следует из утверждения о непрерывности интеграла, зависящего от параметра.

Для произвольного мультииндекса β , $|\beta| \leq m$, утверждение нетрудно аналогично доказать по индукции. $\blacktriangle$

Определение 6. Семейство интегрируемых функций $\{g_\alpha : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha > 0\}$ называется δ -образным, если выполнены следующие условия:

- 1) $\int_{\mathbb{R}^k} g_\alpha d\mu_L = 1$ при всех $\alpha > 0$;
- 2) для любого шара $B(\bar{0}, r)$ имеем $\int_{\mathbb{R}^k \setminus B(\bar{0}, r)} g_\alpha d\mu_L \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0+0$.

Последовательность функций $g_{1/n}$ также называется δ -образной.

В нашем курсе будем также полагать, что для любого δ -образного семейства выполнены условия

- 3) $g_\alpha(t) \geq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^k$ и $\alpha > 0$;
- 4) $\sup_t g_\alpha(t) \leq C(\alpha)$ для каждого $\alpha > 0$.

Введение этих условий существенно упрощает некоторые доказательства и почти все полезные δ -образные семейства функций им удовлетворяют. Заметим, что из пунктов 1) и 2) следует, что δ -образное семейство не может быть ограничено в совокупности.

Утверждение 17. Пусть функция $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ неотрицательна и $\int_{\mathbb{R}^k} g d\mu_L = 1$. Тогда $\{\frac{1}{\alpha^k} g(\frac{t}{\alpha})\}$ является δ -образным семейством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что $\int_{B(\bar{0}, r)} \frac{1}{\alpha^k} g(\frac{t}{\alpha}) dt = \int_{B(\bar{0}, \frac{r}{\alpha})} g(t) dt \rightarrow 1$ при $\alpha \rightarrow 0+0$. Последнее следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, поскольку $\chi_{B(\bar{0}, \frac{r}{\alpha})} g(t) \rightarrow g(t)$ при $\alpha \rightarrow 0+0$. $\blacktriangle$

Функцию g , по которой строится δ -образная последовательность называют *ядром усреднения*.

Пример 4. 1) Функцию $g = \frac{1}{2^k} \chi_{[-1,1]^k}$ называют ядром усреднения Стеклова.

2) Функция $g(x) = \begin{cases} C \exp(\frac{1}{x_1^2 + \dots + x_k^2 - 1}) & \text{при } \|x\|_2 < 1; \\ 0 & \text{при } \|x\|_2 \geq 1, \end{cases}$ где константа C выбрана так, чтобы $\int_{\mathbb{R}^k} g d\mu_L = 1$, называется ядром усреднения Соболева.

Отметим, что ядро усреднения Соболева является бесконечно дифференцируемой, но не аналитической функцией.

Задача 4. Пусть $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, S_k, \mu_L)$ и g — ядро усреднения Стеклова. Докажите, что функция $f * g$ непрерывна.

Уточним утверждение о вложенном компакте: если $U \subseteq \mathbb{R}^k$ — открытое и $K \subset U$ — некоторый компакт, то найдётся открытое ограниченное множество V такое, что $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Утверждение 18. (о вложенном компакте) Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^k$ — открытое и $K \subset U$ — некоторый компакт. Найдётся такое $\delta > 0$, что $K \subset V_r \subset \overline{V_r} \subset U$, где $V_r = \bigcup_{x \in K} B(x, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно полагать, что U содержится в некотором открытом шаре B . Множество $\overline{B} \setminus U$ компактно и не пересекается с K . Поскольку декартово произведение компактных множеств компактно, по теореме Вейерштрасса имеем $\inf_{x \in K, y \in \overline{B} \setminus U} \|x - y\|_2 = r_0 > 0$. Тогда можно выбрать произвольное $r < r_0$. $\blacktriangle$

Теорема 2. (об усреднении в C)

Пусть $\{g_\alpha\}$ — δ -образное семейство и $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ограниченная функция, непрерывная на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^k$ и $E \subset U$ — компакт. Тогда $f * g_\alpha \rightrightarrows f$ на E при $\alpha \rightarrow 0 + 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование свёртки следует из выполнения условия 2) соответствующего утверждения. Имеем

$$|f * g_\alpha(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^k} f(x-t)g_\alpha(t) dt - \int_{\mathbb{R}^k} f(x)g_\alpha(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}^k} |f(x-t) - f(x)|g_\alpha(t) dt.$$

По утверждению о вложенном компакте найдётся такое $\delta > 0$, что $E \subset V_\delta \subset \overline{V_\delta} \subset U$ и $\overline{V_\delta}$ — компактное множество по критерию компактности в $\mathbb{R}^k$. Тогда функция f равномерно непрерывна на $\overline{V_\delta}$ по теореме Вейерштрасса. Пусть $x \in E$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся такое $r > 0$, $\delta > r$, что $(x-t) \in V_\delta$ и верно неравенство $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ при $\|t\|_2 \leq r$.

Пусть $M = \sup_{x \in \mathbb{R}^k} |f(x)|$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^k} |f(x-t) - f(x)|g_\alpha(t) dt &= \int_{\mathbb{R}^k \setminus B(\bar{0}, r)} |f(x-t) - f(x)|g_\alpha(t) dt + \int_{B(\bar{0}, r)} |f(x-t) - f(x)|g_\alpha(t) dt \leq \\ &\leq 2M \int_{\mathbb{R}^k \setminus B(\bar{0}, r)} g_\alpha(t) dt + \varepsilon \int_{B(\bar{0}, r)} g_\alpha(t) dt \rightarrow \varepsilon \text{ при } \alpha \rightarrow 0 + 0. \end{aligned}$$

Тогда при $\alpha < \alpha_0$ имеем $\sup_{x \in E} \int_{\mathbb{R}^k} |f(x-t) - f(x)|g_\alpha(t) dt < 2\varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ получаем требуемое. $\blacktriangle$

Утверждение 19. (свойство дельтообразности) Пусть $\{g_\alpha\}$ — δ -образное семейство и $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ограниченная функция, непрерывная в точке $\bar{0}$. Тогда $\int_{\mathbb{R}^k} f g_\alpha d\mu_L \rightarrow f(\bar{0})$ при $\alpha \rightarrow 0 + 0$.

Доказательство свойства дельтообразности такое же как и теоремы об усреднении в C , за исключение того, что всюду полагаем $x = \bar{0}$.

Следствие 7. Для любой ограниченной и непрерывной на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^k$ функции $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ найдётся последовательность (ϕ_n) гладких функций такая, что $\phi_n \rightrightarrows f$ на компакте $E \subset U$ при $n \rightarrow \infty$. Причём если $f \in C^m(U)$, то $\frac{\partial^\beta \phi_n}{\partial x^\beta} \rightrightarrows \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}$ на E при $|\beta| \leq m$.

Пример 5. Последовательность функций
$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^n}{B(n+1, \frac{1}{2})} & \text{при } |x| < 1; \\ 0 & \text{при } |x| \geq 1 \end{cases} \quad \text{яв-}$$

ляется δ -образной, поскольку $\int_r^1 (1-x^2)^n dx \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что последовательность функций $G_n : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, где $G_n(x_1, \dots, x_k) = g_n(x_1) \cdots g_n(x_k)$ также является δ -образной.

Следствие 8. (теорема Вейерштрасса о приближении функций многочленами) Пусть $U \subset [0, 1]^k$ — открытое множество $K \subset U$ — компактное множество и функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда найдётся такая последовательность многочленов p_n , что $p_n \rightrightarrows f$ на K при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим функцию f нулём на $\mathbb{R}^k$. Из определения свёртки имеем $f * G_n(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f(t) G_n(x-t) dt = \int_{[0,1]^k} f(t) G_n(x-t) dt$. Поскольку при $x \in [0, 1]^k$ и $t \in [0, 1]^k$ функция $G_n(x-t)$ является многочленом, функция $(f * G_n)(x)$ является многочленом при $x \in [0, 1]^k$. По теореме об усреднении $f * G_n \rightrightarrows f$ на K при $n \rightarrow \infty$. $\blacktriangle$

Пример 6. Рассмотрим δ -образное семейство функций $\Delta_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$, $t > 0$, на основе интеграла Эйлера — Пуассона. Решим уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ при $t \geq 0$ с граничными условиями $\lim_{t \rightarrow 0+0} u(x, t) = u(x, 0) = f(x)$, где f — ограниченная непрерывная функция.

Нетрудно видеть, что функция $v(x, t) = \Delta_t(x)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности при $t > 0$ и $\lim_{t \rightarrow 0+0} v(x, t) = 0$ при $x \neq 0$. Рассмотрим $u(x, t) = f * v$. По теореме о дифференцировании свёртки имеем $\frac{\partial(f*v)}{\partial t} - \frac{\partial^2(f*v)}{\partial x^2} = f * \frac{\partial v}{\partial t} - f * \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f * (\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) = 0$ при $t > 0$. Кроме того, $\lim_{t \rightarrow 0+0} f * \Delta_t(x, t) = f(x)$ по теореме об усреднении в C .

Определение 7. Пусть $K \subset \mathbb{R}^k$ и $\{U_\tau\}_{\tau \in T}$ его открытое покрытие. Семейство функций $\{\phi_\tau : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}\}_{\tau \in T}$ называется *разбиением единицы, подчинённым семейству* $\{U_\tau\}_{\tau \in T}$, если $\text{supp}(\phi_\tau) \subset U_\tau$, любой $x \in \mathbb{R}^k$ содержится в носителях только конечного числа функций из $\{\phi_\tau\}_{\tau \in T}$ и $\sum_{\tau \in T} \phi_\tau(x) = 1$ для всех $x \in K$.

Лемма 1. (о разбиении единицы) Пусть $K \subset \mathbb{R}^k$ — компактное множество и $\{U_1, \dots, U_n\}$ его открытое покрытие. Тогда найдутся такие функции $\phi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$, $i = 1, \dots, n$, что $\text{supp}(\phi_i) \subset U_i$, $0 \leq \phi_i(x) \leq 1$ и $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$ для всех $x \in K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что если $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множе-

ство и $A \subset U$ — компактное множество, то найдётся такая функция $\theta_{A,U} \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$, что $\theta_{A,U}(x) = 1$ при $x \in A$, $\theta_{A,U}(x) = 0$ при $x \notin U$ и $0 \leq \theta_{A,U}(x) \leq 1$ в остальных точках. По утверждению о вложенном компакте найдётся такое $r > 0$, что $A \subset V_r \subset \overline{V_r} \subset U$, где $V_r = \bigcup_{x \in K} B(x, r)$. Рассмотрим $V = \bigcup_{x \in A} B(x, \frac{r}{2})$ и усреднение Соболева $\theta_{A,U} = \chi_V * g_\alpha$, где $\alpha < \frac{r}{2}$. Из определения свёртки имеем $\theta_{A,U}(x) = 1$ при $x \in A$, $\theta_{A,U}(x) = 0$ при $x \notin U$. Из утверждения о дифференцировании свёртки имеем $\theta_{A,U} \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$.

Рассмотрим множество $A_1 = K \setminus (U_2 \cup \dots \cup U_n)$. Ясно, что A_1 компактно и $A_1 \subset U_1$. Пусть $\theta_1 = \theta_{A_1, U_1}$. Рассмотрим $V_1 = \{x \in U_1 \mid \theta_1(x) > 1/2\}$. Из непрерывности функции θ_1 следует, что множество V_1 открыто и $A_1 \subset V_1$, поэтому набор $\{V_1, U_2, \dots, U_n\}$ является открытым покрытием компакта K . Далее рассмотрим $\{V_1, U_2, \dots, U_n\}$ и аналогично построим такую функцию θ_2 , что $\text{supp}(\theta_2) \subset U_2$, $\theta_2(V_2) > 1/2$ и $\{V_1, V_2, U_3, \dots, U_n\}$ — открытое покрытие множества K . По индукции получим набор функций $\theta_1, \dots, \theta_n$ с перечисленными свойствами и новое покрытие $\{V_1, \dots, V_n\}$ множества K .

Пусть $W = \cup V_i$. Пусть $\theta_0 = \theta_{K,W}$. Тогда $\theta_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$, $\theta_0 = 1$ при $x \in K$, $\theta_0 = 0$ при $x \notin W$. Определим функции $\phi_i(x) = \frac{\theta_i(x)}{1 - \theta_0(x) + \sum_{i=1}^n \theta_i(x)}$. Знаменатель не обращается в нуль при $x \in W$, поскольку в этом случае $\theta_i(x) > 1/2$ для некоторого i , и не обращается в нуль при $x \notin W$, поскольку тогда $\theta_0(x) = 0$. При $x \in K$ имеем $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$, поскольку $1 - \theta_0(x) = 0$. $\blacktriangle$

Теорема 3. (об усреднении в L)

Пусть $\{g_\alpha\}$ — δ -образное семейство и $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, S_k, \mu_L)$. Тогда $f * g_\alpha \rightarrow f$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, S_k, \mu_L)$ при $\alpha \rightarrow 0 + 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что $\|h * g_\alpha\|^* \leq \|h\|^*$. Действительно

$$\|h * g_\alpha\|^* \leq \int_{\mathbb{R}^k} dx \int_{\mathbb{R}^k} |h(x-t)| g_\alpha(t) dt = \int_{\mathbb{R}^k} g_\alpha(t) dt \int_{\mathbb{R}^k} |h(x-t)| dx = \|h\|^* \int_{\mathbb{R}^k} g_\alpha(t) dt = \|h\|^*.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим характеристическую функцию параллелепипеда $P \in S_k$. Известно, что существует такая финитная непрерывная функция f_P , что $\|f_P - \chi_P\|^* < \varepsilon$. По теореме об усреднении в S имеем $f_P * g_\alpha \rightrightarrows f_P$ при $\alpha \rightarrow 0 + 0$ на некотором компакте, включающем P . Тогда $\|\chi_P * g_\alpha - \chi_P\|^* \leq \|f_P - \chi_P\|^* + \|f_P - f_P * g_\alpha\|^* + \|f_P * g_\alpha - \chi_P * g_\alpha\|^* < 3\varepsilon$ при достаточно малых ε . Тогда из линейности свёртки следует, что $\|\varphi * g_\alpha - \varphi\|^* \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0 + 0$ для любой ступенчатой функции φ .

Рассмотрим такую ступенчатую функцию φ , что $\|f - \varphi\|^* < \varepsilon$. Имеем $\|f * g_\alpha - \varphi * g_\alpha\|^* < \varepsilon$ и $\|\varphi * g_\alpha - \varphi\|^* < \varepsilon$ при $\alpha < \alpha_0$. Тогда $\|f * g_\alpha - f\|^* < 3\varepsilon$ при $\alpha < \alpha_0$. $\blacktriangle$

Задача 5. Пусть $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, S_1, \mu_L)$. Докажите, что $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)| dx = 0$.

Следствие 9. (о плотном подмножестве L_p) Бесконечно дифференцируемые финитные функции плотны в L_p при $p \geq 1$, т. е.

1) для любого $\varepsilon > 0$ и для любой $f \in L_p(U)$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое, найдётся финитная функция $h \in C^\infty(U)$ такая, что $\int_U |f - h|^p < \varepsilon$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ и для любой периодической $f \in L_p(\mathbb{R})$ найдётся периодическая $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что $\int_T |f - h|^p < \varepsilon$, где T — период.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Вначале предположим, что $f \in L_p(U)$ — финитная ограниченная функция. Тогда из неравенства Гёльдера следует, что $f \in L_1(U)$. По теореме об усреднении в L для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая функция $h = f * g_\alpha \in C^\infty(U)$, что $\|f - h\|^* = \int_U |f - h| < \varepsilon$. В качестве g_α рассмотрим ядро усреднения Соболева. Нетрудно видеть, что если $\sup |f| \leq C$, то и $|f * g_\alpha| \leq C$. Кроме того, если функция f финитна, то и её усреднение $f * g_\alpha$ финитно. Тогда $\int_U |f - h|^p \leq \sup |f - h|^{p-1} \int_U |f - h| < 2C^{p-1}\varepsilon$.

Покажем, что финитные ограниченные функции плотны в $L_p(U)$. Рассмотрим последовательность срезов $f_n = \max(-n, \min(n, f))\chi_{V_n}$, где $V_n = U \cap B(0, n)$. Рассмотрим последовательность $w_n = |f_n - f|^p$. По признаку Лебега $f_n \in L_p(U)$, тогда из неравенства Минковского следует, что $(f_n - f) \in L_p(U)$. Тогда $w_n \in L_1(U)$ и имеет интегрируемую мажоранту $|f|^p$. Очевидно, что $w_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $x \in U$. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $\int_U |f_n - f|^p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $\|f_n * g_\alpha - f\|_p < \varepsilon$.

2. Доказательство п.2, аналогично п.1 за исключением того, что нужно взять $f_n = \max(-n, \min(n, f))$. Заметим, что свёртка $f_n * g_\alpha$ периодической функции f_n тоже периодична с тем же периодом. ▲

В доказательстве следствия можно использовать и любое другое ядро усреднения, например Δ_t . В случае, когда ядро усреднения нефинитно, приближающие функции тоже не будут финитны.

Лемма 2. (Римана—Лебега) Если $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, S_k, \mu_L)$, то $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin pt \, dt = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию о плотном подмножестве в L_p для любого $\varepsilon > 0$ найдётся финитная бесконечно дифференцируемая функция h такая, что $\|h - f\|^* < \varepsilon$. Из формулы интегрирования по частям следует, что $\int_{\mathbb{R}} h(t) \sin pt \, dt = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}} h'(t) \cos pt \, dt$. Поскольку функция h' финитна, она ограничена и $\frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}} h'(t) \cos pt \, dt \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. При $p > p_0$ имеем $|\int_{\mathbb{R}} f(t) \sin pt \, dt| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t) - h(t)| \, dt + |\int_{\mathbb{R}} h(t) \sin pt \, dt| \leq \varepsilon + \varepsilon$. ▲

Заметим, что доказательство не изменится если $\sin pt$ заменить на $\cos pt$.

3. Ряды Фурье

Определение 8. Система векторов $\{v_\alpha \in \mathbb{V}\}$ называется *полной* в нормированном векторном пространстве $\mathbb{V}$, если замыкание множества конечных линейных комбинаций векторов из $\{v_\alpha \in \mathbb{V}\}$ совпадает с $\mathbb{V}$.

Определение 9. Система векторов $\mathcal{B} = \{v_\alpha \in \mathbb{V}\}$ называется *базисом* в векторном пространстве $\mathbb{V}$, если любой вектор $f \in \mathbb{V}$ может быть однозначно представлен в виде конечной или счётной линейной комбинации базисных векторов $f = \sum_{v_i \in \mathcal{B}} \beta_i v_i$,

т. е. $\|f - \sum_{i=0}^n \beta_i v_i\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Векторное пространство называется конечномерным, если имеет конечный базис и бесконечномерным в противном случае. В конечномерном случае базисом является

любая линейно независимая полная система.

Рассмотрим примеры бесконечномерных функциональных пространств.

Пример 7.

1. $C(X)$ — множество непрерывных функций $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.
2. $L_p(X, \mu)$ — множество измеримых и интегрируемых в степени $p \geq 1$ функций $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$. Отметим, что замкнутость относительно сложения пространств $L_p(X, \mu)$ следует из неравенства Минковского. Будем предполагать, что множество измеримых функций факторизовано по множеству пренебрежимых функций. Другими словами, функциям, которые отличаются на множестве меры нуль, соответствует одинаковый вектор.

Некоторые бесконечномерные пространства могут не иметь базиса, например, пространство ограниченных функций на отрезке с равномерной нормой.

Вспомним, что векторное пространство со скалярным произведением называется евклидовым. Пространство $L_2(X, \mu)$ является евклидовым со скалярным произведением $(f, g) = \int_X fg d\mu$. Из неравенства Коши – Буняковского следует, что скалярное произведение определено для любой пары функций $f, g \in L_2(X, \mu)$.

Определение 10. Система векторов $\{v_\alpha \in \mathbb{V}\}$ называется *ортogonalной*, если $(v_\alpha, v_\beta) = 0$ при всех $\alpha \neq \beta$ и называется *ортонормальной*, если кроме того $(v_\alpha, v_\alpha) = 1$ для любого α .

Теорема 4. (об ортонормальной системе) Пусть $\mathcal{B} = \{v_n \in \mathbb{V} \mid n \in \mathbb{N}\}$ — ортонормальная система, $f \in \mathbb{V}$ и $c_n = (f, v_n)$. Тогда 1) $\sum_n c_n^2 \leq (f, f)$ (неравенство Бесселя); 2) если система $\mathcal{B}$ полная, то она является базисом и $\sum_{n=0}^\infty c_n^2 = (f, f)$ (равенство Парсеваля).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $g_n = \sum_{i=0}^n c_i v_i$. Тогда $0 \leq (f - g_n, f - g_n) = (f, f) - 2(f, g_n) + (g_n, g_n) = (f, f) - 2 \sum_{i=0}^n c_i^2 + \sum_{i=0}^n c_i^2$.

2. Пусть $\mathcal{B}$ — полная система. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся вектор $h_n = \sum_{i=0}^n b_i v_i$ такой, что $\varepsilon > \|f - h_n\|^2$. Имеем $(f - h_n, f - h_n) = (f, f) - 2(f, h_n) + (h_n, h_n) = (f, f) - 2 \sum_{i=0}^n c_i b_i + \sum_{i=0}^n b_i^2 \geq (f, f) - \sum_{i=0}^n c_i^2 = (f - g_n, f - g_n)$. Тогда $\|f - g_n\|^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. $f = \sum_{i=0}^\infty c_i v_i$.

Покажем, что представление вектора в виде ряда единственно. Пусть $\sum_{i=0}^\infty c_i v_i = \sum_{i=0}^\infty b_i v_i$ и $b_m \neq c_m$. Рассмотрим $h_n = \sum_{i=0}^n b_i v_i$. Тогда $(f - h_n, f - h_n) \geq (c_m - b_m)^2 > 0$ при $n \geq m$ по неравенству Бесселя. Пришли к противоречию.

Покажем, что $\sum_{n=0}^\infty c_n^2 = (f, f)$. Имеем $(f, f) - \sum_{i=0}^n c_i^2 = (f - g_n, f - g_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

▲

В случае комплекснозначных функций (и векторного пространства над $\mathbb{C}$) скалярное произведение определяется как $(f, g) = \int_X f \bar{g} d\mu$. Предыдущая теорема остаётся верной с заменой всюду c_i^2 на $|c_i|^2$.

Система тригонометрических функций $\mathcal{F} = \{1, \cos nx, \sin nx \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ является ортогональной на отрезке $[-\pi, \pi]$ (в комплекснозначном случае $\mathcal{F}_C = \{e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$). В дальнейшем для упрощения формулировок мы будем рассматривать вместо функций, определённых на отрезке $[-\pi, \pi]$, 2π -периодические функции, заданные на прямой $\mathbb{R}$. Соответствующие пространства 2π -периодических функций будем обозначать через $C(2\pi)$, $L_2(2\pi)$ и т. д.

Определение 11. Коэффициентами Фурье 2π -периодической функции f называются $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt$, $n \in \mathbb{N}$ и $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; в комплекснозначном случае $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$, $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 12. Рядом Фурье 2π -периодической функции f называется её разложение по ортогональной системе $\mathcal{F}$ (или $\mathcal{F}_C$), т. е. $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$; в комплекснозначном случае $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. Через S_n или $S_n[f]$ будем обозначать частичные суммы ряда Фурье.

Утверждение 20. (условие Дини сходимости ряда Фурье)

Пусть $f \in L_1(2\pi)$. Тогда ряд Фурье функции f определён, он сходится к $f(x)$ в точке $x \in \mathbb{R}$, если в ней выполнено условие Дини: найдётся $\delta > 0$ такое, что $\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \right| dt < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим частичную сумму S_n ряда Фурье функции f .

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt, \end{aligned}$$

где $D_n(z) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kz \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{\sin \frac{z}{2}}$. Очевидно, $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) dz = 1$.

Имеем, $S_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-z) D_n(z) dz - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(z) dz$. Тогда

$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-z)-f(x)}{z} \frac{z}{2 \sin \frac{z}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})z dz$. Поскольку функция $\frac{f(x-z)-f(x)}{z} \frac{z}{2 \sin \frac{z}{2}}$ интегрируема по условию, по лемме Римана – Лебега имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(x) - f(x)) = 0$.

▲

Пример 8. Вычислим коэффициенты Фурье функции $h_0(x) = \operatorname{sgn}(x)$ при $x \in (-\pi, \pi]$. Имеем $a_n[h_0] = 0$, $b_n[h_0] = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nt \, dt = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(\pi n))$, т. е. $b_{2k}[f] = 0$, $b_{2k+1}[h_0] = \frac{4}{(2k+1)\pi}$. Тогда $S_{2n+1}[h_0](x) = \sum_{k=0}^n \frac{4 \sin(2k+1)x}{(2k+1)\pi}$. Поскольку для функции h_0 в точке $\frac{\pi}{2}$ выполнено условие Дини и $\sin \frac{(2k+1)\pi}{2} = (-1)^k$, получаем равенство $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Замечание 2. (явление Гиббса) Найдём экстремумы функции $S_{2n-1}[h_0]$. Имеем $(S_{2n-1}[h_0])'(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k+1)x = \frac{4}{\pi} \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$, числитель дроби $(S_{2n-1}[h_0])'(x)$ равен нулю при $x = \frac{\pi m}{2n}$, $m \in \mathbb{Z}$. Найдём значение максимума функции при $m = 1$. Имеем $S_{2n-1}[h_0](\frac{\pi}{2n}) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2n}}{(2k+1)} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} G(\frac{(2k+1)\pi}{2n}) \frac{\pi}{n}$, где $G(t) = \frac{\sin t}{t}$. По теореме о суммах Римана имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}[h_0](\frac{\pi}{2n}) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi G(t) \, dt \approx 1,179$. Таким образом, в окрестности разрыва функции колебание ряда Фурье превышает скачок функции h_0 в 1,179.

Отметим, что интеграл $S_n[f](x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) \, dt$, как периодический аналог свёртки, сохраняет сдвиг. Имеем $S_n[f(t-a)](x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-a) D_n(x-t) \, dt = \int_{-\pi-a}^{\pi-a} f(u) D_n(x-a-u) \, du = \int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_n(x-a-u) \, du = S_n[f](x-a)$, поскольку функции D_n и f — 2π -периодические. Определим $h_a(x) = h_0(x-a)$. Тогда $S_n[h_a](a) = S_n[h_0](a-a) = 0$.

Следствие 10. Пусть $f \in L_1(2\pi)$ и имеет в точке $a \in \mathbb{R}$ конечные правую и левую производную. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a) = (\lim_{y \rightarrow a+0} f(y) + \lim_{y \rightarrow a-0} f(y))/2$.

Доказательство. Поскольку функция f имеет односторонние производные в точке x , имеются конечные пределы $f_+(a) = \lim_{y \rightarrow a+0} f(y)$ и $f_-(a) = \lim_{y \rightarrow a-0} f(y)$. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) + \frac{(f_-(a) - f_+(a))h_a(x)}{2}$ при $x \neq a$. Имеем $\lim_{y \rightarrow a+0} F(y) = \lim_{y \rightarrow a-0} F(y) = \frac{f_+(a) + f_-(a)}{2}$. Определим $F(a) = \frac{f_+(a) + f_-(a)}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{F(a+t) - F(a)}{t} \right| dt &= \int_{-\delta}^0 \left| \frac{F(a+t) - F(a)}{t} \right| dt + \int_0^{\delta} \left| \frac{F(a+t) - F(a)}{t} \right| dt = \\ &= \int_{-\delta}^0 \left| \frac{f(a+t) - \frac{f_-(a) - f_+(a)}{2} - \frac{f_+(a) + f_-(a)}{2}}{t} \right| dt + \int_0^{\delta} \left| \frac{f(a+t) + \frac{f_-(a) - f_+(a)}{2} - \frac{f_+(a) + f_-(a)}{2}}{t} \right| dt. \end{aligned}$$

Пределом подынтегральных функций являются правая и левая производные в точке a . Следовательно, подынтегральные функции ограничены по условию и для функции

F в точке a выполнено условие Дини.

Имеем $S_n[f](a) = S_n[F](a) - \frac{(f_-(a) - f_+(a))}{2} S[h_a](a)$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n[f](a) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n[F](a) = F(a) = \frac{f_+(a) + f_-(a)}{2}$. ▲

Из представления разрывной функции как линейной комбинации непрерывной функции и h_a видно, что явление Гиббса (колебание ряда Фурье функции в окрестности точки разрыва больше, чем скачок функции) имеет место для любой разрывной функции.

Замечание 3. Ряд Фурье функции $f \in L_2(2\pi)$ сходится к ней почти всюду (Л. Карлесон). Существует функция $f \in L_1(2\pi)$, ряд Фурье которой всюду расходится (А.Н. Колмогоров).

Утверждение 21. (о равномерной сходимости ряда Фурье)

Если $f \in C^1(2\pi)$, то $S_n[f] \Rightarrow f$ на $\mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия утверждения об условии Дини следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n[f](x) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. По формуле интегрирования по частям

получаем $a_n[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin nt \, dt = -\frac{b_n[f']}{n}$, при $n \neq 0$. Аналогично, $b_n[f] = \frac{a_n[f']}{n}$. Покажем, что ряды $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n[f']}{n}$ и $\sum_{n \geq 1} \frac{b_n[f']}{n}$ абсолютно сходятся. Из неравенства Бесселя следует, что ряды $\sum_{n \geq 1} a_n^2$ и $\sum_{n \geq 1} b_n^2$ сходятся для любой функции из $L_2(2\pi)$. Тогда из неравенства $\frac{|a_n[f']|}{n} \leq a_n^2[f'] + \frac{1}{n^2}$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n[f']}{n}$ и, аналогично, ряда $\sum_{n \geq 1} \frac{b_n[f']}{n}$. Тогда ряд Фурье функции f равномерно сходится по признаку Вейерштрасса. ▲

Замечание 4.

Из доказательства утверждения о равномерной сходимости ряда Фурье видно, что
1) ряд Фурье можно интегрировать почленно, т. е. $S_n[\int f] = \int(S_n[f])$ при $a_0 = 0$, более того, если $f \in L_2(2\pi)$, то ряд Фурье первообразной $\int f$ сходится к $\int f$ равномерно;
2) из доказательства утверждения о равномерной сходимости ряда Фурье видно, что ряд Фурье можно дифференцировать почленно, т. е. $S_n[f'] = (S_n[f])'$.

Задача 6. Пусть $f \in L_1(2\pi)$. Докажите, что если все коэффициенты Фурье функции f равны 0, то $f(x) = 0$ почти всюду.

Утверждение 22. (о полноте тригонометрической системы)

Система функций $\mathcal{F}$ является ортогональным базисом в $L_2(2\pi)$ и для любой $f \in L_2(2\pi)$ справедливо равенство Ляпунова (Парсеваля) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы об ортонормальной системе следует, что достаточно доказать полноту системы $\mathcal{F}$. Рассмотрим $f \in L_2(2\pi)$. Из следствия теоремы об усреднении в L следует, что гладкие периодические функции плотны в $L_2[-\pi, \pi]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая $h \in C^1(2\pi)$, что $\|f - h\|_2 < \varepsilon$. По утверждению о равномерной сходимости ряда Фурье $S_n[h] \Rightarrow h$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда найдётся $m \in \mathbb{N}$ такой, что $\|S_m[h] - h\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|S_m[h] - h\|_C < \varepsilon$. Поскольку $S_m[h]$ конечная линейная комбинация элементов из $\mathcal{F}$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное, получаем полноту $\mathcal{F}$. Равенство Ляпунова следует из равенства Парсеваля с учётом нормировки элементов базиса Фурье. ▲

Замечание 5. Множество тригонометрических функций $\mathcal{F}$ является базисом в $L_p(2\pi)$ при $p > 1$.

Замечание 6. Помимо тригонометрического базиса, имеются следующие классические ортогональные базисы: многочлены Лежандра в $L_2[-1, 1]$, базисы Хаара и Уолша — Радемахера (в $L_2[-1, 1]$), состоящие из ступенчатых функций, вейвлеты (всплески) Добеши, Мейера и Малла (в $L_2(R)$).

Пример 9. Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x) = x$ при $x \in (-\pi, \pi)$. Имеем $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \, dt = -\frac{t \cos nt}{\pi n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$. Тогда из равенства Ляпунова (Парсеваля) имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \frac{\pi^2}{6}$.

Задача 7. Пусть $f \in C^1(-a, a)$, $a > \pi$, и $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 0$. Докажите неравенство

$$\text{Виртингера} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 \, dx.$$

Задача 8. Пусть $f \in L_2(2\pi)$. Докажите, что если для всех $n \in \mathbb{N}$ верно равенство $\int_{-\pi}^{\pi} x^n f(x) \, dx = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду.

Утверждение 23. Если системы функций $\{v_i\}_{i \in I}$ и $\{u_j\}_{j \in J}$ являются ортонормальными базисами в $L_2(X)$ и $L_2(Y)$ соответственно, то система функций $\{v_i(x)u_j(y)\}_{(i,j) \in I \times J}$ является ортонормальным базисом в $L_2(X \times Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ортонормальность системы $\{v_i(x)u_j(y)\}_{(i,j) \in I \times J}$ очевидна. Нужно доказать полноту. Сначала от противного докажем, что полнота ортонормальной системы следует из выполнения равенства Парсеваля для всех векторов. Если система неполна, то для некоторого вектора f имеем $(f, f) - \sum_{i=0}^n c_i^2 =$

$$(f - g_n, f - g_n) > \varepsilon > 0 \text{ для всех } g_n = \sum_{i=0}^n c_i v_i, \quad c_i = (f, v_i).$$

Пусть $f(x, y) \in L_2(X \times Y)$. Тогда по теореме Фубини $f_y(x) \in L_2(X)$ при $y \in Y_0$, где $Y \setminus Y_0$ пренебрежимо. По условию $\{v_i\}_{i \in I}$ — ортонормальный базис. Тогда из равенства Парсеваля имеем $\int_X f^2(x, y) \, d\mu_x = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2(y)$, где $y \in Y_0$, а $c_i(y)$ — коэффициенты разложения по базису $\{v_i\}_{i \in I}$.

Из неравенства Коши — Буняковского имеем

$$\int_Y c_i^2(y) \, d\mu_y = \int_Y \left(\int_X f(x, y) v_i(x) \, d\mu_x \right)^2 d\mu_y \leq \int_Y \left(\int_X f^2(x, y) \, d\mu_x \right) \left(\int_X v_i^2(x) \, d\mu_x \right) d\mu_y = \|f\|_2^2.$$

Таким образом, $c_i(y) \in L_2(Y)$. Причём для каждого $i \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\int_Y c_i^2(y) \, d\mu_y = \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}^2$.

По теореме Фубини и лемме Беппо Леви имеем равенства

$$\int_{X \times Y} f^2(x, y) d(\mu_x \times \mu_y) = \int_Y d\mu_y \int_X f^2(x, y) d\mu_x = \sum_{i=0}^{\infty} \int_Y c_i^2(y) d\mu_y = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}^2.$$

Тогда равенство Парсеваля выполнено в $L_2(X \times Y)$, значит система $\{v_i(x)u_j(y)\}_{(i,j) \in I \times J}$ полна и по теореме об ортонормальной системе является базисом. ▲

4. Преобразование Фурье

Теорема 5. (об интеграле Фурье) Пусть¹ $f \in L_1(\mathbb{R})$ и в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ выполнено условие Дини. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i(z-x)y} dx,$$

где внешний интеграл рассматривается как несобственный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция f представима в виде $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$. Для вещественной и мнимой части доказательство аналогично. Поэтому ограничимся доказательством случая $\operatorname{Im}(f) = 0$. Тогда функция $b_z(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(z-x)y dx$

нечётна по y . Следовательно, интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} b_z(y) dy = 0$. Таким образом, достаточно

доказать равенство $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(z-x)y dx$. Применяя теорему Фубини на ограниченном промежутке и учитывая чётность функции $\cos y$, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(z-x)y dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^a dy \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(z-x)y dx.$$

$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \int_0^a \cos(z-x)y dy = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\sin a(z-x)}{z-x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z-t) \frac{\sin at}{t} dt$. Используя значения интеграла Дирихле $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \pi$, имеем

$$f(z) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z-t) \frac{\sin at}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f(z) - f(z-t)) \frac{\sin at}{t} dt. \text{ Функция } \frac{f(z)-f(z-t)}{t} \in L_1(\mathbb{R})$$

по условию Дини. Тогда $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} (f(z) - f(z-t)) \frac{\sin at}{t} dt = 0$ по лемме Римана – Лебега.

▲

По теореме об интеграле Фурье имеем $F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f$ для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$, в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяющей условию Дини.

Определение 13. Преобразованием Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ называется

$$F[f] = \widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx.$$

¹ Здесь и всюду в этом параграфе рассматриваются функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Обратным преобразованием Фурье называется интеграл

$$F^{-1}[g] = \widehat{g}(-x) = \widehat{g(-y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{ixy} dy.$$

Пример 10. Пусть $f(x) = \chi_{[-a,a]}$, найдём $\widehat{f}$. Имеем $\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \cos(xy) dx = \frac{2 \sin ay}{y\sqrt{2\pi}}$. Отметим, что в этом случае $\widehat{f} \notin L_1(\mathbb{R})$.

Пример 11. Пусть $f(x) = e^{-x^2/2}$, найдём $\widehat{f}$. Имеем равенства $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{(-i2xy-x^2)/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{(y^2-i2xy-x^2)/2} e^{-y^2/2} dx = \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+iy)^2/2} dx$. Заметим, что $\frac{\partial(e^{-(x+iy)^2/2})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{(y^2-x^2)/2}(\cos(xy) - i \sin(xy))) = e^{(y^2-x^2)/2}(-x \sin(xy) - ix \cos(xy) + y \cos(xy) - iy \sin(xy)) = \frac{i \partial(e^{-(x+iy)^2/2})}{\partial x}$. Покажем, что интеграл $\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+iy)^2/2} dx$ не зависит от y . Действительно, $\frac{\partial}{\partial y} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+iy)^2/2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y} e^{-(x+iy)^2/2} dx = i \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} e^{-(x+iy)^2/2} dx = -e^{-(x+iy)^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$. Тогда $\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+iy)^2/2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$, а значит $\widehat{f} = f$.

По-существу здесь использовано равенство Коши — Римана $\frac{\partial h(x+iy)}{\partial x} + i \frac{\partial h(x+iy)}{\partial y} = 0$, справедливое для любой комплексной аналитической функции h , в частности, $h(x+iy) = e^{-(x+iy)^2/2}$.

Утверждение 24. (свойства функции, полученной преобразованием Фурье) Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\widehat{f}$ — непрерывная ограниченная функция и $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Ограниченность следует из неравенства² $|\widehat{f}(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{-ixy} dx \leq \frac{\|f\|_1}{\sqrt{2\pi}}$. Непрерывность следует из свойства непрерывности интеграла, зависящего от параметра, при наличии интегрируемой мажоранты. Предел следует из леммы Римана — Лебега. ▲

Задача 9. Докажите, что если $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$, то $\widehat{f}_n \rightrightarrows \widehat{f}$ на $\mathbb{R}$.

Утверждение 25. (свойства преобразования Фурье) Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R})$.

1. $\widehat{(\alpha f + \beta g)} = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$ (линейность)
2. $\widehat{f(x+a)} = e^{ia y} \widehat{f}(y)$, $\widehat{f(\alpha x)} = \frac{1}{|\alpha|} \widehat{f}(y/\alpha)$ (преобразование аргумента),
3. $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 1. и 2. непосредственно следуют из определения. Докажем п.3. Если $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, то $f * g \in L_1(\mathbb{R})$ (но возможно $f * g$ не всюду определена). По теореме Фубини имеем

$$\sqrt{2\pi} \widehat{f * g} = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} dx \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ity} dt \int_{\mathbb{R}} g(x-t) e^{-i(x-t)y} dx = 2\pi \widehat{f} \cdot \widehat{g}. \blacktriangle$$

² Поскольку $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$, то интегрируемость вещественной функции $|f|$, т. е. $|f| \in L_1(\mathbb{R})$, эквивалентна $Re(f) \in L_1(\mathbb{R})$ и $Im(f) \in L_1(\mathbb{R})$ одновременно.

Утверждение 26. (преобразования Фурье и дифференцирование)

1. Если $f, f' \in L_1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, то $\widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y)$.
2. Если $f, xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то функция $\widehat{f}$ всюду непрерывно дифференцируема и $(\widehat{f})' = -ix\widehat{f}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Покажем, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Действительно, по Формуле Ньютона — Лейбница имеем $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$. Значит $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = f(0) + \int_0^\infty f'(t) dt$. Если предел на бесконечности не равен нулю, то $f \notin L_1(\mathbb{R})$. Применим интегрирование по частям $\sqrt{2\pi}\widehat{f'}(y) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-ixy} dx = f(x)e^{-ixy}|_{-\infty}^{\infty} + iy \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy} dx = \sqrt{2\pi}iy\widehat{f}(y)$.

2. По теореме о дифференцировании интеграла по параметру имеем $\frac{d}{dy} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial e^{-ixy}}{\partial y} dx = \int_{\mathbb{R}} (-ix)f(x)e^{-ixy} dx$. В качестве интегрируемой мажоранты следует взять $|xf(x)|$. Кроме того, преобразование Фурье непрерывно, как показано выше. $\blacktriangle$

Следствие 11. 1. Если $f, f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, то $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} |y|^k \widehat{f}(y) = 0$.

2. Если $f, x^k f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из теоремы о дифференцировании свёртки имеем $f^{(k)} * e^{-x^2/2} = f * (e^{-x^2/2})^{(k)}$. По свойству 3) преобразования Фурье и свойству 1) дифференцирования преобразования Фурье отсюда получаем $\widehat{f^{(k)}}(y)e^{-y^2/2} = \widehat{f}(y)(e^{-x^2/2})^{(k)} = (iy)^k e^{-y^2/2} \widehat{f}(y)$. Тогда $|\widehat{f}(y)y^k| = |\widehat{f^{(k)}}(y)| \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \pm\infty$.

2. Если $f, x^k f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то по признаку Лебега $x^j f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ при $1 \leq j \leq k$. Докажем шаг индукции. Пусть $(\widehat{f})^{(k-1)} = (-ix)^{k-1} \widehat{f}(x)$ и $g(x) = (-ix)^{k-1} \widehat{f}(x)$. Тогда $xg(x) \in L_1(\mathbb{R})$ и $\widehat{g}(x) = (\widehat{f})^{(k-1)}$ всюду непрерывно дифференцируема, причём $\widehat{g'(x)} = -ix\widehat{g}(x) = (-ix)^k \widehat{f}(x)$. $\blacktriangle$

Таким образом, если функция имеет интегрируемые производные, то её преобразование Фурье быстро убывает на бесконечности. И наоборот, если функция быстро убывает на бесконечности, то её преобразование Фурье оказывается несколько раз дифференцируемой функцией. Определим множество *быстроубывающих функций* обладающих этими двумя свойствами $S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^k f^{(m)}(x) = 0, k, m \in \mathbb{N}\}$. Из предыдущего следствия видно, что преобразование Фурье переводит множество быстроубывающих функций в себя. Учитывая вид обратного преобразования Фурье, получаем, что преобразование Фурье — биекция на $S(\mathbb{R})$.

Следствие 12. Если $f, g \in S(\mathbb{R})$, то $\sqrt{2\pi}\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $F^{-1}[F[f]] = f$ следует $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$. Из формулы преобразования Фурье свёртки имеем $\sqrt{2\pi}f \cdot g = \widehat{f}(-x) * \widehat{g}(-x)$. Тогда $\sqrt{2\pi}\widehat{f \cdot g}(z) = (\widehat{f}(-x) * \widehat{g}(-x))(-z) = (\widehat{f}(x) * \widehat{g}(x))(z)$. $\blacktriangle$

Задача 10. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $f * e^{-x^2/2}(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что $f(x) = 0$ почти всюду.

Пример 12. Рассмотрим снова уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Будем искать решение среди функций таких, что функции $|u(x, t)|, |\frac{\partial u}{\partial t}|, |\frac{\partial u}{\partial x}|, |\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|$ имеют интегрируемую мажоранту. Для любого $t > 0$ справедливо равенство $\widehat{\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = 0$. Обозначим $v(y, t) = \widehat{u(x, t)}$. Тогда $\frac{\partial v}{\partial t} - y^2 v(y, t) = 0$. Решая обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной t , получаем $v(y, t) = e^{-y^2 t} v_0(y)$. Тогда $\widehat{u(x, t)} = F^{-1}[v(y, t)]$. Таким образом, получаем, что $u(x, t) = \widehat{v(-y, t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2 t} * \widehat{v_0(-y)} = \frac{e^{-x^2/4t}}{2\sqrt{\pi t}} * u_0(x)$.

Теорема 6. (Планшереля) Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Тогда $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Введём обозначение $f(-x) = f_-(x)$. Используя формулу связи свёртки и преобразования Фурье, имеем $\widehat{f * f_-} = \sqrt{2\pi} \widehat{f} \cdot \widehat{f_-} = \sqrt{2\pi} \widehat{f} \cdot \widehat{\widehat{f}}$. Вначале предположим, что $f \in S(\mathbb{R})$. Применим к частям равенства обратное преобразование Фурье

$$f * \overline{f_-} = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t-y)} f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} |\widehat{f}|^2(x) dx.$$

Подставим $y = 0$ и получим требуемое равенство.

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\widehat{f * f_-}$ и $\widehat{f}$ ограниченные непрерывные функции. Рассмотрим функцию $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2 t}$, $t > 0$. Как было показано выше, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2 t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \Delta_t(x)$ — δ -образное семейство, построенное на основе интеграла Эйлера — Пуассона.

Из формулы $\widehat{f * f_-} = \sqrt{2\pi} \widehat{f} \cdot \widehat{f}$ имеем равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\widehat{f * f_-}) e^{-y^2 t} dy = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2 e^{-y^2 t} dy. \quad (1)$$

Для любой пары функций $h, g \in L_1(\mathbb{R})$ справедливы равенства

$$\int_{\mathbb{R}} h \widehat{g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(x) dx \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-itx} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(t) dt \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-itx} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h} g. \text{ Тогда}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\widehat{f * f_-}) e^{-y^2 t} = \int_{\mathbb{R}} (f * \overline{f_-}) \left(\frac{e^{-y^2 t}}{\sqrt{2\pi}} \right) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x-y)} \Delta_t(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f \cdot (\overline{f} * \Delta_t).$$

Поскольку $f \in L_2(\mathbb{R})$, по следствию теоремы об усреднении в L имеем $\|f - f * \Delta_t\|_2^2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+0$. Заметим, что если $f, g, g_t \in L_2(\mathbb{R})$ и $\|g - g_t\|_2^2 \rightarrow 0$, то $(f, g_t) \rightarrow (f, g)$. Действительно, применяя неравенство Коши — Буняковского $((f, g) - (f, g_t))^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} f \overline{(g - g_t)} \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g - g_t|^2 \right)$, получаем, что $\int_{\mathbb{R}} f \cdot (\overline{f} * \Delta_t) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|^2$ при $t \rightarrow 0+0$.

Из равенства (1) следует, что функция $F(t) = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2 e^{-y^2 t} dy$ ограничена при $t \in (0, t_0)$. По лемме Бешпо Леви имеем $\lim_{t \rightarrow 0+0} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2 e^{-y^2 t} dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{t \rightarrow 0+0} |\widehat{f}|^2 e^{-y^2 t} \right) dy = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2 dy$. Таким образом, предельный переход в равенстве (1) завершает доказательство теоремы. $\blacktriangle$

Замечание 7. Известно, что нормированные пространства $L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, являются полными (это было доказано только для $p = 1$). Для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ можно корректно определить преобразование Фурье $\hat{f}$ как предел последовательности $\|\hat{f} - f_M\|_2 = 0$ в $L_2(\mathbb{R})$, где $f_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^M f(x) e^{-ixy} dx$. Обобщённое преобразование Фурье является изометрией на $L_2(\mathbb{R})$.

Замечание 8. Рассмотрим абелеву группу G . Множество функций $V(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C}\}$ является векторным пространством, на котором можно определить евклидову метрику. Отображения $\phi \in V(G)$ называются *характерами* группы, если удовлетворяют условиям $|\phi(x)| = 1$ и $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$. Нетрудно видеть, что функции $\phi_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, являются характерами группы $SO(2)$, элементы которой можно интерпретировать как точки окружности и $V(SO(2)) \simeq L_2(2\pi)$. В свою очередь функции $\phi_y(x) = e^{iyx}$, $y \in \mathbb{R}$, являются характерами группы $\mathbb{R}$. Характеры образуют абелеву группу $\hat{G}$ двойственную группе G . В пространстве $V(G)$ характеры образуют ортогональный базис (когда их не более чем счётное число), а коэффициенты разложения функции $f \in V(G)$ в ряд по базису характеров определяют функцию $\hat{f} \in V(\hat{G})$. Если мощность множества характеров есть континуум, то вместо ряда возникает интеграл. В этой терминологии разложение в ряд Фурье является частным случаем преобразования Фурье $\hat{\cdot} : V(G) \rightarrow V(\hat{G})$, где $\hat{f}(y) = (f(x), \phi_y(x))$, а равенство Ляпунова и равенство $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2$ являются частными случаями равенства Парсеваля $\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$ для функций на абелевых группах.

Теорема 7. (Котельникова – Шеннона – Найквиста)

Пусть $f(x), xf(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ и $\text{supp}(\hat{f}) \subseteq [-a, a]$. Тогда $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi k}{a}\right) \frac{\sin a(t - \frac{\pi k}{a})}{a(t - \frac{\pi k}{a})}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $g(t) = f(\frac{\pi t}{a})$. Тогда $\hat{g}(y) = \frac{a}{\pi} \hat{f}(\frac{ay}{\pi})$. Тогда $\text{supp}(\hat{g}) \subseteq [-\pi, \pi]$. Функцию $\hat{g}$ можно периодически продолжить на $\mathbb{R}$, поэтому она представима в виде комплексного ряда Фурье $\hat{g}(y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-iky}$, где $c_k =$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(y) e^{iky} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(y) e^{iky} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(k).$$

Среднее равенство справедливо поскольку $\text{supp}(\hat{g}) \subseteq [-\pi, \pi]$. Равномерная сходимость ряда Фурье обеспечена тем, что $\hat{g} \in C^1$, так как $g(x), xg(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Поскольку для функции g выполнено условие

$$\text{Дини, справедливо равенство } g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y) e^{ixy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-iky+ixy} dy =$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) \int_0^{\pi} \cos(x-k)y dy = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) \frac{\sin(x-k)\pi}{(x-k)\pi}.$$

Подставляя в равенство $f(t) = g(\frac{at}{\pi})$ и $g(k) = f(\frac{\pi k}{a})$, получаем требуемую формулу. $\blacktriangle$

Замечание 9. С математической точки зрения частотный спектр передаваемого сигнала f — это носитель преобразования Фурье $\text{supp}(\hat{f})$. Основными характеристиками устройств передачи или приёма сигналов являются частотный спектр (ограниченный для реальных устройств), мощность источника и точность разрешения приёмника. Теорема Котельникова определяет верхнюю границу количества информации, которая может быть передана по каналу связи за единицу времени. Действительно,

как показывает формула $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\frac{\pi k}{a}) \frac{\sin a(t - \frac{\pi k}{a})}{a(t - \frac{\pi k}{a})}$, передаваемый сигнал f полностью определяется своими значениями в отсчётах $t_k = \frac{\pi k}{a}$. За некоторый промежуток времени Δt возможно передать только значения сигнала f в отсчётах $t_k = \frac{\pi k}{a}$, которые попадают в промежуток Δt , среднее квадратичное число $f(\frac{\pi k}{a})$ определяется мощностью источника, а точность, с которой можно различать значения $f(\frac{\pi k}{a})$, определяется разрешающей способностью приёмника сигнала.

Задача 11. Докажите, что если $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $\hat{f}$ — финитные функции, то $f(x) = 0$ почти для всех $x \in \mathbb{R}$.

5. Интегрирование функций на многообразиях

Вспомним, что $\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$. В этом разделе мы будем рассматривать только $A \subseteq \mathbb{R}^k$ и евклидово расстояние.

Определение 14. Внешней мерой на множестве X называется неотрицательная счётно полуаддитивная функция $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$, т. е. $\mu^*(\bigcup A_i) \leq \sum \mu^*(A_i)$.

Примером внешней меры является внешняя мера Лебега $\|\chi_A\|^*$.

Определение 15.

Рассмотрим величину $\mathcal{H}_\delta^s(A) = \frac{\omega_s}{2^s} \inf \{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E_i))^s \mid \text{diam}(E_i) \leq \delta, A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \}$, где $\omega_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$, а нижняя грань берётся по всем счётным покрытиям множества $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Величина $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$, $s \geq 0$, называется (внешней) s -мерной мерой Хаусдорфа.

Замечание 10. При $s \in \mathbb{N}$ величина ω_s равна мере Лебега шара единичного радиуса в $\mathbb{R}^s$. Поэтому при покрытии шарами мера Хаусдорфа по-существу вычисляет сумму s -мерных объёмов сечений шаров, покрывающих множество.

Утверждение 27. (корректность определения меры Хаусдорфа) Функция $\mathcal{H}^s(A)$ определена на всех множествах $A \subseteq \mathbb{R}^k$ и является счётно полуаддитивной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Величина $\mathcal{H}_\delta^s(A)$ очевидно определена для любого множества $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Кроме того, для любого $A \subseteq \mathbb{R}^k$ величина $\mathcal{H}_\delta^s(A)$ убывает (нестрого) (т. е. увеличивается при стремлении к 0 с положительной стороны) как функция от δ по определению.

2. Для каждого из множеств A_j рассмотрим такое покрытие множествами E_j^i , что $\text{diam}(E_j^i) < \delta$ и $\sum_i (\text{diam}(E_j^i))^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(A_j) + \delta/2^j$. Тогда семейство множеств $\{E_j^i\}$ является покрытием $\bigcup_{j=0}^{\varpi} A_j$, где $\varpi \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Следовательно, $\mathcal{H}_\delta^s(\bigcup_{j=0}^{\varpi} A_j) \leq 2\delta + \sum_{j=0}^{\varpi} \mathcal{H}_\delta^s(A_j) \leq 2\delta + \sum_{j=0}^{\varpi} \mathcal{H}^s(A_j)$. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0+0$ получаем полуаддитивность функции $\mathcal{H}^s$. ▲

Вспомним, что расстояние между множествами A и B определяется следующим образом $d(A, B) = \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\} > 0$.

Утверждение 28. (аддитивность меры Хаусдорфа на отдалённых множествах) Пусть $d(A, B) > 0$. Тогда $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$.

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О . Пусть $\delta < d(A, B)$. Тогда никакой элемент E , $\text{diam}(E) < \delta$ покрытия множества A не пересекается с множеством B . Тогда из свойства инфимума суммы множеств следует, что $\mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) = \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B)$. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0 + 0$ получаем требуемое. $\blacktriangle$

Теорема 8. (критерий Каратеодори) Внешняя мера, аддитивная на отдалённых множествах, является счётно аддитивной на σ -алгебре борелевских множеств $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.

Следствие 13. Функция $\mathcal{H}^s : \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \rightarrow [0, \infty]$ является мерой на σ -алгебре борелевских множеств $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.

Задача 12. Докажите, что 1-мерная мера Хаусдорфа простой кривой Жордана, соединяющей две точки, больше чем расстояние между этими точками. Докажите, что длина простой кривой Жордана $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ равна её 1-мерной мере Хаусдорфа, т. е. $L(\gamma) = \mathcal{H}^1(\gamma([a, b]))$.

Утверждение 29. (свойства меры Хаусдорфа при отображении)

Для любого множества $A \subseteq \mathbb{R}^k$ верно, что

- 1) $\mathcal{H}^s(\alpha A) = \alpha^k \mathcal{H}^s(A)$;
- 2) если I — изометрия на A , то $\mathcal{H}^s(I(A)) = \mathcal{H}^s(A)$;
- 3) если $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ — липшицево отображение с константой L , то $\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}^s(A)$.

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О . 1. Нетрудно видеть, что $\mathcal{H}_{\alpha\delta}^s(\alpha A) = \alpha^s \mathcal{H}_\delta^s(A)$, поскольку покрытия $\{E_i \mid \text{diam}(E_i) < \delta\}$ множества A взаимно однозначно соответствуют покрытиям $\{\alpha E_i \mid \text{diam}(\alpha E_i) < \alpha\delta\}$ множества αA .

2. Покрытия $\{E_i \mid \text{diam}(E_i) < \delta\}$ множества A взаимно однозначно соответствуют покрытиям $\{I(E_i) \mid \text{diam}(I(E_i)) < \delta\}$ множества $I(A)$. Поэтому $\mathcal{H}_\delta^s(I(A)) = \mathcal{H}_\delta^s(A)$.

3. Пусть $\{E_i \mid \text{diam}(E_i) < \delta\}$ есть покрытие множества A . Можно считать, что $E_i \subseteq A$, в противном случае достаточно взять $E_i \cap A$. Тогда $\{f(E_i)\}$ есть покрытие множества $f(A)$. Причём из условия Липшица имеем $\text{diam} f(E_i) \leq L \text{diam}(E_i)$. Тогда $\mathcal{H}_{L\delta}^s(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}_\delta^s(A)$.

Переходя к пределу $\delta \rightarrow 0 + 0$ получаем требуемое. $\blacktriangle$

Следствие 14. Пусть $0 < \alpha \leq \beta$, $g, f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ и g инъективно. Если $\alpha \|g(x) - g(y)\|_2 \leq \|f(x) - f(y)\|_2 \leq \beta \|g(x) - g(y)\|_2$ для любых $x, y \in A$, то $\alpha^s \mathcal{H}^s(g(A)) \leq \mathcal{H}^s(f(A)) \leq \beta^s \mathcal{H}^s(g(A))$.

Д О К А З А Т Е Л Ъ С Т В О . Пусть $B = g(A)$ и $h = f \circ g^{-1}$. Тогда $\|h(z) - h(w)\|_2 \leq \beta \|z - w\|_2$ для любых $z, w \in g(A)$. Тогда из п.3 имеем $\beta^s \mathcal{H}^s(g(A)) = \beta^s \mathcal{H}^s(B) \geq \mathcal{H}^s(h(B)) = \mathcal{H}^s(f(A))$.

Если g инъективно, то из левого неравенства в условии следует, что f инъективно. Доказательство неравенства $\alpha^s \mathcal{H}^s(g(A)) \leq \mathcal{H}^s(f(A))$ аналогично предыдущему с заменой f на g . $\blacktriangle$

Утверждение 30. (изодиаметриальное неравенство) Из всех измеримых по Лебегу множеств $A \subset \mathbb{R}^k$ фиксированного диаметра наибольшую меру Лебега имеет шар.

Утверждение 31. (об исчерпании куба шарами) Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся конечный набор замкнутых шаров B_i диаметра не более $\delta > 0$ таких, что $[-1, 1]^k \subset \cup B_i$ и $\sum_i \mu_L(B_i) < 2^k + \varepsilon$.

Теорема 9. (о совпадении мер) Если $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, то $\mu_L(A) = \mathcal{H}^k(A)$, т. е. мера Лебега в $\mathbb{R}^k$ и k -мерная мера Хаусдорфа совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим $\mathcal{H}^k(P)$, где $P = (-1, 1)^k$. Пусть имеется произвольное покрытие $P \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$. Тогда $\mathcal{H}_\delta^k(P) \leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E_i))^k$. Без ограничения общности можно считать, что множества E_i замкнутые, поскольку взяв замыкание множества мы не увеличим его диаметр. Из изодиаметрального неравенства имеем $\mu_L(E_i) \leq \frac{\omega_k}{2^k} (\text{diam}(E_i))^k$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Тогда $\mu_L(P) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_L(E_i) \leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E_i))^k$. По определению инфимума $\mu_L(P) \leq \mathcal{H}_\delta^k(P)$.

По утверждению об исчерпании куба шарами найдётся набор замкнутых шаров B_i диаметра не больше δ такой, что $[-1, 1]^k \subset \cup B_i$ и $2^k = \mu_L(P) > \sum_i \mu_L(B_i) - \varepsilon$. Тогда $\mu_L(P) \geq \sum_i \mu_L(B_i) - \varepsilon = \frac{\omega_k}{2^k} \sum_i (\text{diam}(B_i))^k - \varepsilon \geq \mathcal{H}_\delta^k([-1, 1]^k) - \varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ имеем $\mu_L(P) \geq \mathcal{H}^k([-1, 1]^k)$. Тогда $\mu_L(P) \leq \mathcal{H}^k(P) \leq \mathcal{H}^k([-1, 1]^k) \leq \mu_L(P)$.

Из свойств меры Хаусдорфа 1) и 2) следует, что μ_L и $\mathcal{H}^k$ совпадают на дробящейся системе S_k , состоящей из параллелепипедов. Тогда по теореме Каратеодори о продолжении меры они совпадают на σ -алгебре борелевских множеств. $\blacktriangle$

Определение 16.

Величина $\varkappa(A) = \inf\{p \geq 0 \mid \mathcal{H}^p(A) = 0\}$ называется *размерностью Хаусдорфа* множества A .

Утверждение 32. (о размерности Хаусдорфа)

- 1) $\mathcal{H}_\delta^s(A) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}^s(A) = 0$;
- 2) если $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, то $\mathcal{H}^p(A) = 0$ при $p > s$;
- 3) если $0 < \mathcal{H}^s(A)$, то $\mathcal{H}^p(A) = \infty$ при $p < s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если $\mathcal{H}^s(A) = 0$, то $\mathcal{H}_\delta^s(A) = 0$ при любом $\delta > 0$ из монотонности функции $\mathcal{H}_\delta^s(A)$ по переменной δ . Если $\mathcal{H}_\delta^s(A) = 0$, то существует покрытие множества A такое, что $\sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E_i))^s < \varepsilon$. Значит $(\text{diam}(E_i)) < \varepsilon^{1/s}$. Тогда

$\mathcal{H}_{\varepsilon^{1/s}}^s(A) \leq \frac{2^s}{\omega_s} \varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\mathcal{H}^s(A) = 0$.

2. Пусть $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, тогда $\mathcal{H}_\delta^s(A) < \frac{\omega_s}{2^s} C < \infty$ при $\delta < \delta_0$. Следовательно, найдётся покрытие $\{E_i\}$ множества A такое, что $\text{diam}(E_i) < \delta$ для всех i , причём $\sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E_i))^s \leq C$. Тогда $\sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E_i))^p \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E_i))^s \delta^{p-s} \leq C \delta^{p-s}$. Тогда $\mathcal{H}_\delta^p(A) \leq C \delta^{p-s}$. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0 + 0$ получаем $\mathcal{H}^p(A) = 0$.

3. От противного. Если $\mathcal{H}^p(A) < \infty$, то по п. 2) имеем $\mathcal{H}^s(A) = 0$. $\blacktriangle$

Следствие 15. 1) Размерность Хаусдорфа счётного множества равна нулю;

2) $\varkappa(A) = \sup\{p \geq 0 \mid \mathcal{H}^p(A) > 0\}$;

3) $\varkappa(A) = \dim A$ для любого аффинного пространства A .

Задача 13. Пусть множество A самоподобно, т.е. $nA = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, где A_i — не пересекаются друг с другом и изометричны множеству A . Докажите, что $\varkappa(A) \leq \log_n m$ и если $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, то $s = \log_n m$.

Пример 13. Пусть $K \subset [0, 1]$ — канторово множество. Тогда $3K = K \cup (K + 2)$. Имеем $\varkappa(K) = s = \log_3 2$. Можно показать, что $\mathcal{H}^s(K) = \frac{\omega_s}{2^s}$.

Лемма 3. (об изменении меры Хаусдорфа при аффинном отображении) Пусть $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq k$ — аффинное преобразование, т.е. $f(x) = Mx + b$, где M — некоторая матрица размера $m \times k$ и $b \in \mathbb{R}^m$ — вектор переноса. Тогда $\mathcal{H}^k(f(A)) = (\det(M^*M))^{1/2} \mu_L(A)$ для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset \mathbb{R}^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку сдвиг на вектор есть изометричное преобразование, то достаточно рассмотреть случай $b = \bar{0}$. Рассмотрим ортогональное преобразование Q , переводящее подпространство $f(\mathbb{R}^k)$ в подпространство $\mathbb{R}^k \times 0^{m-k} \subset \mathbb{R}^m$. Тогда $\mathcal{H}^k(f(A)) = \mathcal{H}^k(Q \circ f(A))$. Матрица размера $m \times k$ линейного преобразования $Q \circ f$ имеет вид $\begin{pmatrix} T \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix}$, где последние $m-k$ строк нулевые. Тогда $P \circ Q \circ f$, где P — проекция на первые k координат, можно рассматривать как линейное преобразование в $\mathbb{R}^k$ с матрицей T . Тогда $\mathcal{H}^k(P \circ Q \circ f(A)) = \mu_L(P \circ Q \circ f(A)) = |\det T| \mu_L(A)$. Отождествляя преобразование Q с его матрицей, имеем $T^*T = (QM)^*(QM) = M^*(Q^*Q)M = M^*M$. Тогда $|\det T| = (\det(T^*T))^{1/2} = (\det(M^*M))^{1/2}$. ▲

Лемма 4. (о локальном искажении меры Хаусдорфа)

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^k$ — открытое множество, отображение $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \leq m$, непрерывно дифференцируемо и $J[v](x) = (\det(Dv(x))^* Dv(x))^{1/2} \neq 0$ при $x \in U$. Пусть $P \subset \mathbb{R}^k$ — некоторый параллелепипед с центром в точке $\bar{0}$. Тогда

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in K} \left| \frac{\mathcal{H}^k(v(P(x, r)))}{\mu_L(P(x, r))} - J[v](x) \right| = 0 \text{ для компактного множества } K \subset U.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in U$, имеем $v(x + h) = v(x) + dv(x)\langle h \rangle + \alpha(x, h)\|h\|$.

В лемме о локальном искажении меры было доказано, что $\sup_{x \in K} \|\alpha(x, h)\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Поскольку $v \in C^1(U)$, аналогично лемме о локальном искажении меры имеем $\sup_{x \in K} \|dv(x + h) - dv(x)\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Зафиксируем точку $x \in K$. Рассмотрим функцию $u(y) = v(x) + dv(x)\langle y - x \rangle$ и $dv(x)\langle y - z \rangle = u(y) - u(z)$. Имеем $v(y) - v(z) = dv(z)\langle y - z \rangle + \alpha(z, y - z)\|y - z\| = u(y) - u(z) + (dv(z) - dv(x))\langle y - z \rangle + \alpha(z, y - z)\|y - z\|$.

Тогда из неравенства треугольника имеем $\|v(y) - v(z)\|_2 = \|u(y) - u(z)\|_2 + \beta(x, y, z)\|y - z\|_2$, причём $\sup_{x \in K} \beta(x, y, z) \rightarrow 0$ при $(y - z) \rightarrow 0$.

Поскольку $\text{rank}(Dv(x)) = k$, то u — инъективное линейное отображение и, следовательно, $\|y - z\|_2 \leq C\|u(y) - u(z)\|_2$ для некоторого $C > 0$.

Тогда по следствию утверждения о свойстве меры Хаусдорфа при отображении имеем $\mathcal{H}^k(v(P(x, r))) = \mathcal{H}^k(u(P(x, r)))(1 + o(1))^k$ при $r \rightarrow 0+0$. По лемме об изменении меры Хаусдорфа при аффинном отображении получаем требуемое. ▲

Следствие 16. При выполнении условий леммы о локальном искажении меры Хаусдорфа, если $A \subset K$ и $\mu_L(A) = 0$, то $\mathcal{H}^k(v(A)) = 0$.

Замечание 11. Интегрирование функций по мере Хаусдорфа определяется в соответствии с конструкцией Лебега, в качестве дробящейся системы можно рассматривать все борелевские множества, на которых мера конечна.

Теорема 10. (об интегрировании функции на многообразии) Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ — k -мерное многообразие класса C^1 и $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(V)$ — его параметризация. Пусть функция $g(f(x))J[f](x) : f^{-1}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. Тогда

$$\int_M g d\mathcal{H}^k = \int_{f^{-1}(M)} g(f(x))J[f](x) d\mu_L. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Для каждой точки $x \in M$ найдётся такая окрестность $U(x)$, что $M_0 \cap U(x)$ является элементарным многообразием. Вначале предположим, что $f^{-1}(M_0) = (-1, 1)^k$ и $[-1, 1]^k \subset V$. Рассмотрим случай, когда $g(y) = 1$ для всех $y \in M_0$. Представим куб $(-1, 1)^k$ на конечное объединение дизъюнктивных кубиков $P(x_i, r)$ (неважно включает ли кубик грани, поскольку по следствию мера образа грани кубика равен нулю). Имеем

$$\int_{M_0} 1 d\mathcal{H}^k = \sum_i \int_{f(P(x_i, r))} 1 d\mathcal{H}^k = \sum_i \mathcal{H}^k(f(P(x_i, r))).$$

По лемме о локальном искажении меры Хаусдорфа имеем при $r \rightarrow 0 + 0$

$$\left| \sum_i \mathcal{H}^k(f(P(x_i, r))) - \sum_i \mu_L(P(x_i, r))J[f](x_i) \right| \leq o(1) \sum_i \mu_L(P(x_i, r)) = 2^k o(1).$$

Поскольку $f \in C^1(V)$, $\lim_{r \rightarrow 0+0} \sum_i J[f](x_i) \chi_{P(x_i, r)}(x) = J[f](x)$ для любого $x \in (-1, 1)^k$. Тогда по теореме Лебега ($\sup_{x \in K} |J[f](x)| < \infty$) получаем $\lim_{r \rightarrow 0+0} \sum_i \mu_L(P(x_i, r))J[f](x_i) = \int_{f^{-1}(M_0)} J[f](x) d\mu_L$ и справедлива формула площади $\int_{M_0} 1 d\mathcal{H}^k = \int_{f^{-1}(M_0)} J[f](x) d\mu_L$.

2. Нетрудно видеть, что доказательство формулы (1) верно и для любого куба, замыкание которого содержится в V . Тогда из линейности интеграла следует, что если $g \circ f$ — ступенчатая функция и $\text{supp}(g \circ f) \subset V$, то формула (1) верна. Пусть $\text{supp}(g \circ f) \subset (-1, 1)^k$, $0 \leq g(y) \leq C < \infty$. Рассмотрим последовательность ступенчатых функций (φ_n) такую, что $\varphi_n(x) \rightarrow g \circ f(x)$ при $x \in (-1, 1)^k \setminus A$, $\mu_L(A) = 0$. Можно считать, что $|\varphi_n| \leq 2C$. Тогда по теореме Лебега $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{f^{-1}(M_0)} \varphi_n(x) J[f](x) d\mu_L = \int_{f^{-1}(M_0)} g(f(x))J[f](x) d\mu_L$. Имеем $\varphi_n(f^{-1}(y)) \rightarrow g(y)$ при $y \in M_0 \setminus f(A)$. По следствию из леммы о локальном искажении меры Хаусдорфа получаем $\mathcal{H}^k(A) = 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{M_0} \varphi_n \circ f^{-1} d\mathcal{H}^k = \int_{M_0} g d\mathcal{H}^k$. То есть для ограниченных неотрицательных функций теорема верна. Далее аналогично теореме о замене переменных в интеграле Лебега рассмотрим сходящуюся к g последовательность из её срезов. Применив лемму Беппо Леви, получаем справедливость теоремы для неограниченных функций.

3. Формула (1) остаётся верной, если область параметров $f^{-1}(M)$ является произвольным множеством диффеоморфным кубу $(-1, 1)^k$. Действительно, пусть отображение $h : (-1, 1)^k \rightarrow f^{-1}(M)$ — диффеоморфизм. Тогда по доказанному выше (первое

равенство) и формуле замене переменных (второе равенство) имеем

$$\int_M g d\mathcal{H}^k = \int_{(-1,1)^k} g(f(h(x)))J[f \circ h](x) d\mu_L = \int_{f^{-1}(M)} g(f(x))J[f](x) d\mu_L.$$

Рассмотрим произвольное k -мерное многообразие M и его параметризацию $f : V \rightarrow M$. Для каждой точки $x \in M$ найдётся такая окрестность U_i , что $M \cap U_i$ является элементарным многообразием. Нетрудно видеть, что окрестностей не более чем счётно и $M = \sqcup M_i$, $M_i \subset U_i$. Рассмотрим неотрицательную функцию $g : M \rightarrow \mathbb{R}$. Из счётной аддитивности интеграла и леммы Беппо Леви имеем $\int_M g d\mathcal{H}^k = \sum_i \int_{M_i} g d\mathcal{H}^k = \sum_i \int_{f^{-1}(M_i)} g(f(x))J[f](x) d\mu_L = \int_V g(f(x))J[f](x) d\mu_L$. Представление произвольной функции g как разности $g = g^+ - g^-$, где $g^+ = \max(0, g)$ и $g^- = \max(0, -g)$, завершает доказательство. $\blacktriangle$

Следствие 17. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — простая кривая Жордана класса C^1 . Пусть функция $g(f(x))\|\frac{df(x)}{dx}\|_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. Тогда $\int_{f[a,b]} g d\mathcal{H}^1 = \int_a^b g(f(x))\|\frac{df(x)}{dx}\|_2 dx$.

Следствие 18. Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — 2-мерное многообразие и $f \in C^1(f^{-1}(M))$ — его параметризация. Пусть $g(f(x))\sqrt{EG - F^2} : f^{-1}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу, где $E = \sum_{i=1}^3 (\frac{\partial f_i}{\partial x_1})^2$, $G = \sum_{i=1}^3 (\frac{\partial f_i}{\partial x_2})^2$, $F = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial f_i}{\partial x_2}$. Тогда $\int_M g d\mathcal{H}^2 = \int_{f^{-1}(M)} g(f(x))\sqrt{EG - F^2} d\mu_L$.

Следствие 19.

Если $M \subset \mathbb{R}^m$ — k -мерное дифференцируемое многообразие, то $\varkappa(M) = k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы об интегрировании функции на многообразии следует, что $0 < \mathcal{H}^k(A) < \infty$ для любого элементарного k -мерного многообразия A . По определению размерности Хаусдорфа $\varkappa(A) = k$. Любое дифференцируемое многообразие является суммой не более чем счётного числа элементарных многообразий. Счётное объединение множеств размерности k имеет размерность k . $\blacktriangle$

Задача 14. На цилиндр, образованный касательными к меридианам в точках экватора шара, поверхность шара спроектирована лучами, параллельными экватору и проходящими через соединяющую полюса ось. Как отличаются площади области на шаре и её проекции?

Теорема 11. (Коши — Бине) Для любой матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}$, $k \leq m$,

$$\text{верно равенство } \det(A^*A) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \left(\det \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \dots & a_{i_1 k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k 1} & \dots & a_{i_k k} \end{pmatrix} \right)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (для случая $m = k + 1$) Добавим к матрице A справа столбец из нулей и получим квадратную матрицу A' . Рассмотрим вектор $b = (A'_{1m}, \dots, A'_{mm})$ алгебраических дополнений к элементам последнего столбца матрицы A' . Известно (например, из формулы разложения определителя по столбцу),

что вектор b ортогонален столбцам матрицы A . Добавим к матрице A справа столбец b и получим квадратную матрицу B . Поскольку B^*B — блочная матрица, то $\det(B^*B) = \det(A^*A) \cdot (b, b)$. С другой стороны из формулы разложения определителя по последнему столбцу имеем $\det B^* = \det B = (b, b)$. Тогда $\det(A^*A) = (b, b)$, что и является частным случаем формулы Коши — Бине. $\blacktriangle$

Следствие 20. (мера Хаусдорфа графика функции)

Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $h \in C^1(U)$ и $G = \{(x, h(x)) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x \in U\}$ — график функции v . Тогда $\mathcal{H}^k(G) = \int_U \sqrt{1 + \|\text{grad}h\|_2^2} d\mu_L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим естественную параметризацию f графика G : $y_1 = x_1, \dots, y_k = x_k, y_{k+1} = h(x)$. Тогда по формуле Коши — Бине $(J[f](x))^2 = 1 + \|\text{grad}h\|_2^2$. $\blacktriangle$

Теорема 12. (формула коплощади Кронрода — Федерера)

Пусть $U \subset \mathbb{R}^{k+1}$ — открытое множество, $h \in C^1(U)$ и $\frac{\partial h(x)}{\partial x_{k+1}} \neq 0$ при $x \in U$. Тогда, если функция g интегрируема, то справедлива формула

$$\int_U g d\mu_L = \int_{h(U)} dz \int_{h^{-1}(z)} \frac{g}{\|\text{grad}h\|_2} d\mathcal{H}^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия видно, что отображение, заданное равенствами $y_1 = x_1, \dots, y_k = x_k, y_{k+1} = h(x)$, является диффеоморфизмом. Причём обратное отображение f имеет вид $x_1 = y_1, \dots, x_k = y_k, x_{k+1} = u(y)$ и также является диффеоморфизмом. Для матриц Якоби $Df(y)$ и $Df^{-1}(f(y))$ верно равенство $I = Df(y)Df^{-1}(f(y))$. Умножая последнюю строку $(\frac{\partial u(y)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u(y)}{\partial y_{k+1}})$ матрицы $Df(y)$ на столбцы матрицы $Df^{-1}(f(y))$, получаем равенства $\frac{\partial u(y)}{\partial y_i} + \frac{\partial u(y)}{\partial y_{k+1}} \frac{\partial h}{\partial x_i}(f(y)) = 0$ при $i = 1, \dots, k$ и $\frac{\partial u(y)}{\partial y_{k+1}} \frac{\partial h}{\partial x_{k+1}}(f(y)) = 1$. Очевидно $\det(Df(y)) = \frac{\partial u(y)}{\partial y_{k+1}}$.

$$\text{Тогда } \det^2(Df(y)) \cdot \|\text{grad}h(f(y))\|_2^2 = \left(\frac{\partial u(y)}{\partial y_{k+1}}\right)^2 \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}(f(y))\right)^2 = 1 + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}\right)^2.$$

Используя формулу замены переменных в интеграле Лебега с диффеоморфизмом f , получаем равенства

$$\int_U g d\mu_L = \int_{f^{-1}(U)} g(f(y)) |\det(Df(y))| d\bar{y} = \int_{f^{-1}(U)} g(f(y)) \frac{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}\right)^2}}{\|\text{grad}h(f(y))\|_2} d\bar{y}.$$

Зафиксируем переменную $z = y_{k+1}$. Тогда $h(U)$ является проекцией множества $f^{-1}(U)$ на последнюю координату, а $U_z = \{(y_1, \dots, y_k) \mid (y_1, \dots, y_k, z) \in f^{-1}(U)\}$ — сечением. Заметим, что если $(y_1, \dots, y_k, z) \in f^{-1}(U)$, то $z = h(y_1, \dots, y_k, u(y_1, \dots, y_k, z))$. По теореме Фубини имеем

$$\int_U g d\mu_L = \int_{h(U)} dz \int_{U_z} g(y_1, \dots, y_k, z) \frac{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}\right)^2}}{\|\text{grad}h(y_1, \dots, y_k, z)\|_2} dy_1 \dots dy_k.$$

Рассмотрим параметризацию множества $h^{-1}(z) \subset U$. Множество $h^{-1}(z) = \{(y_1, \dots, y_k, u(y_1, \dots, y_k, z)) \mid (y_1, \dots, y_k) \in U_z\}$ является графиком функции u с зафиксированной последней координатой. Тогда из следствия о мере Хаусдорфа графика функции имеем

$$\int_{h^{-1}(z)} \frac{g}{\|\text{grad}h\|_2} d\mathcal{H}^k = \int_{U_z} g(y_1, \dots, y_k, z) \frac{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}\right)^2}}{\|\text{grad}h(y_1, \dots, y_k, z)\|_2} dy_1 \dots dy_k.$$

▲

Условие $\frac{\partial h(x)}{\partial x_{k+1}} \neq 0$ при $x \in U$ в теореме о коплощади можно заменить на $\|\text{grad}h(x)\| \neq 0$. В этом случае область U можно покрыть областями U_i так, чтобы $\frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \neq 0$ при $x \in U_i$. По лемме о разбиении единицы функция g представима в виде суммы функций g_i , $\text{supp}(g_i) \subset U_i$. Для областей U_i формула коплощади доказана выше, а для области U получаются из свойства аддитивности интеграла.

Следствие 21. Пусть S^k — сфера единичного радиуса в $\mathbb{R}^{k+1}$. Тогда $\mathcal{H}^k(S^k) = (k+1)\omega_{k+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойств меры Хаусдорфа имеем $\mathcal{H}^k(rS^k) = r^k \mathcal{H}^k(S^k)$. Рассмотрим функцию $h(x_1, \dots, x_{k+1}) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2}$. Имеем $\|\text{grad}h\|_2 = 1$. Пусть B — единичный $(k+1)$ -мерный шар. Тогда по формуле коплощади получаем равенства $\omega_{k+1} = \int_B 1 d\mu_L = \int_0^1 dz \int_{S^k} 1 d\mathcal{H}^k = \int_0^1 \mathcal{H}^k(zS^k) dz = \frac{1}{k+1} \mathcal{H}^k(S^k)$. ▲

Задача 15. Пусть $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ — сфера единичного радиуса с центром в нуле, $U \subset S^k$ — область на сфере S^k , M — конус с вершиной в нуле, вырезаемый из единичного шара областью U . Докажите равенство $\mathcal{H}^{k+1}(M) = \frac{1}{k+1} \mathcal{H}^k(U)$.

6. Дифференциальные формы первой степени

Определение 17. Дифференциальной формой первой степени (1-формой) называется отображение $\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$, где $U \subseteq \mathbb{R}^k$.

Другими словами, каждой точке $x \in U$ и любому вектору $v \in \mathbb{R}^k$ сопоставлено число $\omega(x)\langle v \rangle$, причём отображение линейно по аргументу v . Примером дифференциальной формы является дифференциал df отображения $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$. Множество форм на U обозначим через $\mathcal{F}(U)$. Сложение дифференциальных форм и умножение 1-формы на скалярную функцию определяются поточечно.

Утверждение 33. (координатное представление 1-формы) Любая дифференциальная форма $\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ может быть единственным образом представлена в виде

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^k u_i(x) dx_i, \text{ где } u_i : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое отображение $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ можно представить в виде $f(v) = (u, v) = \sum_{i=1}^k u_i dx_i \langle v \rangle$, где $u_i = f(e_i)$. Тогда $\omega(x)\langle v \rangle = \sum_{i=1}^k u_i(x) dx_i \langle v \rangle$. Единственность следует из равенства $u_i(x) = \omega(x)\langle e_i \rangle$. ▲

Функции u_i называется *коэффициентами* 1-формы ω относительно стандартного базиса $\{e_i\}$. Дифференциальную форму первой степени с набором коэффициентов $u = (u_1, \dots, u_k)$ обозначают ω_u^1 . Для любого $v \in \mathbb{R}^k$ имеем равенство $\omega_u^1 \langle v \rangle = (u, v)$. Говорят, что 1-форма ω содержится в классе $C^m(U)$, если $u_i \in C^m(U)$, $i = 1, \dots, k$.

Определение 18. Пусть $f : V \rightarrow U$ — непрерывно дифференцируемое отображение и множества $V \subseteq \mathbb{R}^k, U \subseteq \mathbb{R}^m$ открытые. Операцией *переноса* 1-форм называется отображение $f^* : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ действующее по правилу $(f^*\omega)(x) \langle v \rangle = \omega(f(x)) \langle df(x) \langle v \rangle \rangle$.

Утверждение 34. (свойства операции переноса)

- 1) $f^*(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha f^*\omega_1 + \beta f^*\omega_2$; 2) $f^*(dy_i) = df_i$;
 3) $f^*(\sum_{i=1}^k u_i(y) dy_i) = \sum_{i=1}^k u_i(f(x)) df_i(x)$; 4) $(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*(\omega))$; 5) $f^*dh = d(h \circ f)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О . 1. $f^*(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \langle v \rangle = \alpha f^*\omega_1 \langle v \rangle + \beta f^*\omega_2 \langle v \rangle = \alpha\omega_1(f(x)) \langle df(x) \langle v \rangle \rangle + \beta\omega_2(f(x)) \langle df(x) \langle v \rangle \rangle = \alpha f^*\omega_1 \langle v \rangle + \beta f^*\omega_2 \langle v \rangle$.

2. $f^*(dy_i) \langle v \rangle = dy_i \langle df(x) \langle v \rangle \rangle = df_i \langle v \rangle$.

3. Следует из п.1 и п.2.

4. Следует из того, что дифференциал композиции функций есть композиция дифференциалов.

5. $f^*dh = f^*(h^*dx) = (h \circ f)^*dx = d(h \circ f)$. $\blacktriangle$

Определение 19. Если $\omega = u(x)dx$ — 1-форма, определённая на $U \subseteq \mathbb{R}$ и $[a, b] \subset U$, то интеграл от 1-формы определяется как $\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b u(x) dx = \int_{[a,b]} u d\mu_L$. Если $\gamma : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^k$ — параметризованная гладкая (непрерывно дифференцируемая) кривая (путь) и $\omega \in \mathcal{F}(U)$, то интеграл от 1-формы по кривой определяется как $\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^*\omega = \int_a^b u(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$.

Замечание 12. Рассмотрим сужения γ_1 и γ_2 кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ на промежутки $[a, c]$ и $[c, b]$. Можно считать, что кривая γ является "суммой" кривых γ_1 и γ_2 . Тогда из определения интеграла имеем $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$. Если кривая кусочно-дифференцируемая, то интеграл по кривой определяется как сумма интегралов по дифференцируемым кускам кривой.

Утверждение 35. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^k$, — параметризованная дифференцируемая кривая, и $\omega_u^1 \in \mathcal{F}(U)$. Тогда $\int_\gamma \omega_u^1 = \int_{\gamma([a,b])} (u(x), \tau(x)) d\mathcal{H}^1$, где $\tau(x)$ — единичный касательный вектор к кривой γ .

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О . Касательный к параметризованной кривой вектор определяется равенством $\tau(\gamma(t)) = \gamma'(t) / \|\gamma'(t)\|$. Имеем

$$\int_{\gamma([a,b])} (u(x), \tau(x)) d\mathcal{H}^1 = \int_a^b \left(u(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right) \|\gamma'(t)\| dt = \int_\gamma \omega_u^1.$$

$\blacktriangle$

Утверждение 36. (формула Ньютона — Лейбница)

Если $f \in C^1(U)$ и $\gamma : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^k$ — параметризованная дифференцируемая кривая, то $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Утверждение следует из формулы Ньютона — Лейбница для одномерного интеграла. Поскольку $\gamma^*df = d(f \circ \gamma) = (f \circ \gamma)'dt$, имеем $\int_\gamma df = f \circ \gamma(t)|_a^b$.

Определение 20. Векторное поле $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — открыто, называется *потенциальным*, если $F = \text{grad} f$ (или эквивалентно $\omega_F^1 = df$).

Множество называется *линейно связным*, если любые его две точки можно соединить кусочно гладкой Жордановой кривой.

Замечание 13. Известно, что открытое множество связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно.

Утверждение 37. (критерий потенциальности поля) Векторное поле $F \in C(U)$ потенциально тогда и только тогда, когда для любой кусочно гладкой замкнутой кривой γ , $\text{Im}(\gamma) \subset U$ верно равенство $\int_\gamma \omega_F^1 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если поле потенциально, то равенство $\int_\gamma \omega_F^1 = 0$ следует из формулы Ньютона — Лейбница. Пусть интегралы по любой замкнутой кривой равны нулю. Тогда интеграл по кривой зависит только от начальной и конечной точки $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$. Действительно, пусть $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ и $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Определим $-\gamma_2(t) = \gamma_2(2 - t)$, $-\gamma_2 : [1, 2] \rightarrow U$. Рассмотрим замкнутую кривую $\gamma : [0, 2] \rightarrow U$, полученную как "сумма" кривых γ_1 и $-\gamma_2$. По условию $0 = \int_\gamma \omega_F^1 = \int_{\gamma_1} \omega_F^1 + \int_{-\gamma_2} \omega_F^1 = \int_{\gamma_1} \omega_F^1 - \int_{\gamma_2} \omega_F^1$.

В каждой компоненте связности U_i множества U выберем точку a_i . Из линейной связности U_i следует, что для любой точки $y \in U_i$ найдётся кусочно гладкая кривая такая, что $\gamma(0) = a_i$ и $\gamma(1) = y$. Определим $f(y) = \int_\gamma \omega_F^1$. Вычислим по определению $\frac{\partial f(y)}{\partial x_j}$. Поскольку множество U открыто, найдётся такое $\delta > 0$, что $B(y, \delta) \subset U$. Тогда $f(y + \delta e_j) - f(y) = \int_\psi \omega_F^1$, где $\psi(t) = y + te_j$, $t \in [0, \delta]$. Тогда $\frac{\partial f(y)}{\partial x_j} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} (f(y + \delta e_j) - f(y)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta F_j(y + te_j) dt = F_j(y)$. ▲

Замечание 14. В формулировке критерия потенциальности можно заменить кусочно гладкие кривые на ломаные.

Рассмотрим 1-мерное дифференцируемое многообразие $C \subset \mathbb{R}^k$. Нетрудно видеть, что любая гладкая параметризация γ кривой $C = \gamma([a, b])$ задаёт направление обхода, индуцированное порядком на множестве параметров $t_1 < t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \prec \gamma(t_2)$. В случае, когда C есть простая кривая Жордана, направление обхода является линейным порядком и для его задания достаточно из двух концов кривой один считать началом, а другой — концом. В случае замкнутой кривой Жордана транзитивность отношения $\prec$ нарушается в точке $\gamma(a) = \gamma(b)$. Тем не менее, в малой окрестности каждой точки направление обхода является линейным порядком. Для каждой компоненты связности кривой направление обхода (*ориентацию*) можно выбрать двумя способами и задавать независимо. Кривая с заданным направлением обхода называется *ориентированной*. Кривую с противоположной ориентацией будем обозначать $-C$.

Определение 21. Пусть $C \subset \mathbb{R}^k$ ориентированная кривая. Параметризация γ сохраняет ориентацию кривой, если для каждой компоненты связности кривой верно

$t_1 < t_2 \Leftrightarrow \gamma(t_1) \prec \gamma(t_2)$, когда разность $t_2 - t_1$ достаточно мала.

Замечание 15. Если две параметризации γ^0 и γ^1 сохраняют ориентацию кривой, то их касательные вектора $\frac{d\gamma^0}{dt}$ и $\frac{d\gamma^1}{dt}$ сонаправлены.

Определение 22. Пусть $C \subset \mathbb{R}^k$ ориентированная кривая и её параметризация γ сохраняет ориентацию кривой. Тогда интеграл от 1-формы ω по C определяется равенством $\int_C \omega = \int_\gamma \omega$.

Утверждение 38. (корректность определения)

Пусть $C \subset U \subseteq \mathbb{R}^k$ ориентированная кривая и $\omega \in \mathcal{F}(U)$.

1) Если гладкие параметризации γ и ψ сохраняют ориентацию кривой C , то $\int_\gamma \omega = \int_\psi \omega$; 2) $\int_C \omega = -\int_{-C} \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем полагать, что кривая C имеет одну компоненту связности. В противном случае нужно рассмотреть сумму интегралов от 1-формы по каждой компоненте в отдельности. Пусть $g = \psi^{-1} \circ \gamma : [a, b] \rightarrow [c, d]$. Имеем $\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^* \omega = \int_a^b (\psi \circ \psi^{-1} \circ \gamma)^* \omega = \int_a^b (\gamma \circ \psi^{-1})^* (\psi^* \omega) = \int_a^b g^* (\psi^* \omega)$. Пусть $\psi^* \omega = f(t)dt$. По формуле замены переменных в интеграле получаем $\int_\psi \omega = \int_c^d f(t)dt = \int_a^b f(g(\tau))g'(\tau) d\tau = \int_a^b g^* (f(t)dt)$, если $g(a) = c$ и $g(b) = d$. Таким образом, имеем $\int_\gamma \omega = \int_\psi \omega$, когда параметризации γ и ψ сохраняют ориентацию кривой C . Если γ сохраняет ориентацию C , а ψ сохраняет ориентацию $-C$, то $g(a) = d$ и $g(b) = c$. Тогда $\int_\psi \omega = \int_b^a f(g(\tau))g'(\tau) d\tau = -\int_\gamma \omega$. $\blacktriangle$

Далее *областью* в $\mathbb{R}^2$ будем называть открытое множество, границей которого является кусочно-гладкая кривая. Границу области U будем обозначать через ∂U . *Индукцированной ориентацией* кривой ∂U будем называть направление обхода, при котором область U остаётся слева. Область U называется *s-связной*, если её граница состоит из s компонент связности. В рассматриваемом случае ∂U совпадает с $\text{Fr}(U)$.

Замечание 16. Из теоремы Римана о комформном отображении известно, что односвязная область $U \subset \mathbb{R}^2$ диффеоморфна кругу (для $U = \mathbb{R}^2$ это легко проверить непосредственно). Из теоремы Жордана известно, что любая замкнутая кривая Жордана является границей односвязной области.

Определение 23. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$. Два пути $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$ называются *гомотопными в U* , если найдётся такое непрерывное отображение (*гомотопия*) $\zeta : [0, 1]^2 \rightarrow U$, что $\gamma_0(t) = \zeta(t, 0)$ и $\gamma_1(t) = \zeta(t, 1)$.

Утверждение 39. Любой замкнутый путь в шаре гомотопен (закреплённой) точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что шар имеет центр $\bar{0}$ и $\gamma(0) = \bar{0}$. Рассмотрим $\zeta(t, s) = s\gamma(t)$. Очевидно, $\zeta(t, s) = \bar{0}$, т. е. точка. Заметим, что точка $\zeta(0, s) = \bar{0}$ при гомотопии не меняется, т. е. закреплена. $\blacktriangle$

Следствие 22. В любой односвязной области в $\mathbb{R}^2$ каждый замкнутый путь гомотопен точке.

Доказательство следствия основано на теореме Римана, поскольку гомеоморфизм областей переводит пути в пути и гомотопию в гомотопию.

Определение 24. Линейно связное множество в $\mathbb{R}^k$ называется *односвязным*, если любой замкнутый путь в нём гомотопен точке (стягивается в точку).

Замечание 17. Г.Перельман доказал, что любое связное односвязное компактное трёхмерное многообразие без края гомеоморфно трёхмерной сфере (гипотеза Пуанкаре). Для 4-мерных многообразий аналогичное утверждение было доказано М.Фридманом, а для многообразий больших размерностей — С.Смейлом. Для 2-мерных многообразий аналогичное утверждение следует из их полной классификации.

Будем говорить, что область U допускает простое представление, если её можно представить в виде конечного объединения областей $U = \cup U_i$, пересекающихся только по границам так, что каждая область U_i представляется в виде $U_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a_i, b_i], y \in [u_i(x), h_i(x)], u_i, h_i \in C^1([a_i, b_i])\}$ и, одновременно, конечного объединения областей $U = \cup V_j$, пересекающихся только по границам так, что каждая область V_j представляется в виде $V_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [a_j, b_j], x \in [u_j(y), h_j(y)], u_j, h_j \in C^1([a_j, b_j])\}$. Предполагается, что u_i, h_i, u_j, h_j непрерывно дифференцируемы.

Утверждение 40. (формула Грина)

Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — область, допускающая простое представление и $P, Q \in C^1(U) \cap C(\bar{U})$. Тогда $\int_{\partial U \uparrow} P dx + Q dy = \int_U (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) d\mu_L$, где $\partial U \uparrow$ — граница U с индуцированной ориентацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим область $U = \cup U_i = \cup V_i$. Вычислим отдельно интеграл $\int_{\partial U \uparrow} P dx$. Рассмотрим $U_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a_i, b_i], y \in [u_i(x), h_i(x)], u_i, h_i \in C^1([a_i, b_i])\}$. Тогда ∂U_i состоит из 4-х гладких частей, которые можно параметризовать следующим образом: $\gamma_1(t) = (t, u_i(t)), t \in [a_i, b_i]$; $\gamma_2(\tau) = (b_i, \tau), \tau \in [u_i(b_i), h_i(b_i)]$; $\gamma_3(t) = (t, h_i(t)), t \in [a_i, b_i]$; $\gamma_4(\tau) = (a_i, \tau), \tau \in [u_i(a_i), h_i(a_i)]$. Причём кривые γ_1 и γ_2 имеют индуцированную ориентацию, а γ_3 и γ_4 — противоположную.

$$\begin{aligned} \text{Имеем } \int_{\partial U_i \uparrow} P dx &= \int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_2} P dx - \int_{\gamma_3} P dx - \int_{\gamma_4} P dx; \int_{\gamma_2} P dx = \int_{\gamma_4} P dx = 0; \\ \int_{\gamma_1} P dx - \int_{\gamma_3} P dx &= \int_{a_i}^{b_i} (P(t, u_i(t)) - P(t, h_i(t))) dt. \end{aligned}$$

$$\text{С другой стороны } \int_{U_i} \frac{\partial P}{\partial y} d\mu_L = \int_{a_i}^{b_i} dx \int_{u_i(x)}^{h_i(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_{a_i}^{b_i} (P(t, h_i(t)) - P(t, u_i(t))) dt.$$

$$\text{Нетрудно видеть, что } \int_{\partial U \uparrow} P dx = \sum_i \int_{\partial U_i \uparrow} P dx = - \sum_i \int_{U_i} \frac{\partial P}{\partial y} d\mu_L = - \int_U \frac{\partial P}{\partial y} d\mu_L.$$

Аналогично, разделяя область U на горизонтальные полосы, имеем равенства $\int_{\partial U \uparrow} Q dy = \sum_i \int_{\partial V_j \uparrow} Q dy = \sum_i \int_{V_j} \frac{\partial Q}{\partial x} d\mu_L = \int_U \frac{\partial Q}{\partial x} d\mu_L$. $\blacktriangle$

В дальнейшем, как следствие обобщённой формулы Стокса, формула Грина будет доказана для произвольной области.

Следствие 23. Для любой ограниченной области $U \subset \mathbb{R}^2$ справедливо равенство $\mu_L(U) = \int_{\partial U \uparrow} x dy = - \int_{\partial U \uparrow} y dx$.

Следствие 24. (теорема Коши) Пусть для функций $u, v \in C^1(V)$, V — односвязная область в $\mathbb{R}^2$, выполнены условия Коши — Римана, т. е. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Тогда для

любой ориентированной замкнутой кривой Жордана $C \subset V$ справедливо равенство $\int_C (u + iv)(dx + idy) = 0$.

Задача 16. Пусть (x_i, y_i) , $i = 1 \dots n$ вершины многоугольника в $\mathbb{R}^2$, занумерованные в порядке обхода так, чтобы при обходе многоугольник оставался слева. Докажите, что площадь многоугольника равна $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \dots + x_ny_1 - x_1y_n)$.

Теорема 13. (изопериметрическое неравенство) Пусть U — область в $\mathbb{R}^2$, граница которой гладкая кривая Жордана. Тогда $4\pi\mu_L(U) \leq (\mathcal{H}^1(\partial U))^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть границей области U является гладкая кривая длины 2π . Рассмотрим натуральную параметризацию $(x(t), y(t)) : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ границы области, т. е. $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$. Полагаем, что параметризация сохраняет индуцированную ориентацию границы (в противном случае нужно заменить $(x(t), y(t))$ на $(x(-t), y(-t))$). По следствию формулы Грина имеем $2\mu_L(U) = \int_{\partial U \uparrow} (xdy - ydx) =$

$\int_{-\pi}^{\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt$. Из неравенства Коши — Буняковского имеем

$$x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = ((x, y)(y', -x')) \leq \|(x, y)\|_2 \|(x', y')\|_2 \text{ и}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} (x(t)^2 + y(t)^2) dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (x'(t)^2 + y'(t)^2) dt \right)^{1/2}.$$

Без ограничения общности можно полагать, что $\int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} y(t) dt = 0$, поскольку сдвиг кривой вдоль осей x или y не меняет площадь и длину кривой, но произвольным образом изменяет первый или второй интегралы. Из неравенства Виртингера имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x(t)^2 + y(t)^2) dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} (x'(t)^2 + y'(t)^2) dt. \text{ Тогда } 2\mu_L(U) \leq \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Рассмотрим область с границей длины $\ell = \mathcal{H}^1(\partial U)$. Рассмотрим растяжение пространства $\mathbb{R}^2$ в $2\pi/\ell$ раз. Тогда область $\frac{2\pi}{\ell}U$ имеет границу длиной 2π , так как $\mathcal{H}^1(\partial(\frac{2\pi}{\ell}U)) = \mathcal{H}^1(\frac{2\pi}{\ell}\partial U) = \frac{2\pi}{\ell}\mathcal{H}^1(\partial U)$. По доказанному выше имеем $\frac{8\pi^2}{\ell^2}\mu_L(U) = 2\mu_L(\frac{2\pi}{\ell}U) \leq 2\pi$. ▲

Замечание 18. Изопериметрическое неравенство означает, что круг имеет наибольшую площадь среди областей с фиксированной длиной границы. Аналогичное свойство справедливо для шара произвольной размерности. А именно, справедливо неравенство $k^k \omega_k \mu_L(U)^{k-1} \leq (\mathcal{H}^{k-1}(\text{Fr}(U)))^k$ для любых измеримых множеств $U \subset \mathbb{R}^k$.

Теорема 14. (критерий потенциальности поля II) Пусть U — односвязная область в $\mathbb{R}^k$. Векторное поле $F \in C^1(U)$ потенциально тогда и только тогда, когда $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ для всех $i \neq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть векторное поле F потенциально, т. е. $F = df$. Тогда из теоремы о равенстве смешанных производных имеем равенства $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$.

Пусть $k = 2$ и справедливо равенство $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$. По критерию потенциальности поля достаточно доказать, что $\int_\gamma \omega_F^1 = 0$ по любому замкнутому пути. Если путь является замкнутой Жордановой кривой, то равенство интеграла нулю следует из формулы Грина. Далее рассмотрим случай произвольного $k \geq 2$ и произвольного замкнутого пути.

Покажем, что для двух гладко гомотопных путей $\gamma_0 = \zeta(t, 0)$ и $\gamma_1 = \zeta(t, 1)$, если при гомотопии закреплены концы, т. е. $\zeta(0, s)$ и $\zeta(1, s)$ не зависят от s , верно равенство $\int_{\gamma_0} \omega_F^1 = \int_{\gamma_1} \omega_F^1$.

Рассмотрим 1-форму $\zeta^* \omega_F^1 : [0, 1]^2 \rightarrow U$. Имеем $\zeta^* \omega_F^1 = \sum_{i=1}^k F_i(\zeta(t, s)) \left(\frac{\partial \zeta_i(t, s)}{\partial t} dt + \frac{\partial \zeta_i(t, s)}{\partial s} ds \right) = Pdt + Qds$. Непосредственное вычисление показывает, что $\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial s} = 0$. Это частный случай равенства $d(\zeta^* \omega_F^1) = \zeta^*(d(\omega_F^1))$, которое будет доказано в следующем разделе. Тогда по формуле Грина имеем

$$0 = \int_{[0,1]^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial s} \right) = \int_{[0,1] \times 0} (Pdt + Qds) + \int_{1 \times [0,1]} (Pdt + Qds) - \int_{[0,1] \times 1} (Pdt + Qds) - \int_{0 \times [0,1]} (Pdt + Qds) = \int_{\zeta(t,0)} \omega_F^1 + \int_{\zeta(1,s)} \omega_F^1 - \int_{\zeta(t,1)} \omega_F^1 - \int_{\zeta(0,s)} \omega_F^1 = \int_{\gamma_0} \omega_F^1 - \int_{\gamma_1} \omega_F^1.$$

Любой замкнутый путь γ в односвязанной области гомотопен закреплённой точке, а интеграл от точки равен нулю. Тогда $\int_\gamma \omega_F^1 = 0$ и, следовательно, векторное поле F потенциально. $\blacktriangle$

Двумерной формой Гаусса называется $d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$. Величина угла в полярной системе координат равна $\arctg(\frac{y}{x})$ при $x > 0$ и $\pm\pi + \arctg(\frac{y}{x})$ при $x < 0$. Нетрудно видеть, что $d\theta(x, y) = d\arctg(\frac{y}{x})$, но в то время как функция $\arctg(\frac{y}{x})$ имеет разрыв на оси $x = 0$, форма $d\theta$ разрывна только в начале координат. Не существует такой дифференцируемой функции на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, что $d\theta$ является её дифференциалом. В данном случае историческое обозначение $d\theta$ следует рассматривать как "цельный" символ.

Пример 14. Если ограниченная область $U \subset \mathbb{R}^2$ не содержит точку $\bar{0}$, то $\int_{\partial U \uparrow} d\theta = 0$; если содержит, то $\int_{\partial U \uparrow} d\theta = 2\pi$. Действительно, равенство $\int_{\partial U \uparrow} d\theta = 0$ следует из формулы Грина. Если $\bar{0} \in U$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ область U содержит круг $V = \bar{B}(\bar{0}, \varepsilon)$. Тогда $0 = \int_{\partial(U \setminus V) \uparrow} d\theta = \int_{\partial U \uparrow} d\theta + \int_{\partial V \downarrow} d\theta$. Вычислим $\int_{\partial V \uparrow} d\theta$, где окружность обходится так, что $\bar{0}$ остаётся слева. Рассмотрим параметризацию $x = \varepsilon \cos t$, $y = \varepsilon \sin t$, которая сохраняет ориентацию окружности $\partial V \uparrow$. Тогда $\int_{\partial V \uparrow} d\theta = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$.

6. Дифференциальные k -формы

Определение 25. Внешней k -формой называется полилинейный кососимметричный оператор $\omega \in \mathcal{L}(\underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{k \text{ раз}}, \mathbb{R})$, т. е. $\omega\langle v^{\tau(1)}, v^{\tau(2)}, \dots, v^{\tau(k)} \rangle = \text{sgn}(\tau) \omega\langle v^1, v^2, \dots, v^k \rangle$

При $k = 2$ полилинейный оператор задаётся матрицей $\omega\langle u, v \rangle = (Au, v)$. 2-Форма (Au, v) кососимметрична тогда и только тогда, когда $A_{ij} = -A_{ji}$ при $i \neq j$ и $A_{ii} = 0$ для всех $i = 1, \dots, m$. Другим примером k -формы при $k = m$ является определитель $\omega\langle v^1, v^2, \dots, v^k \rangle = \det A$, где матрица A составлена из столбцов (или строк)

$v^1, v^2, \dots, v^k$.

Определение 26. Определим операцию *внешнего умножения* k различных 1-форм

$$\text{равенством } (\omega_1^1 \wedge \omega_2^1 \wedge \dots \wedge \omega_k^1) \langle v^1, v^2, \dots, v^k \rangle = \det \begin{pmatrix} \omega_1^1 \langle v^1 \rangle & \dots & \omega_1^1 \langle v^k \rangle \\ \omega_2^1 \langle v^1 \rangle & \dots & \omega_2^1 \langle v^k \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_k^1 \langle v^1 \rangle & \dots & \omega_k^1 \langle v^k \rangle \end{pmatrix}.$$

На множестве внешних k -форм определены операции сложения и умножения на скаляр. Относительно этих операций множество внешних k -форм является векторным пространством $\mathcal{F}^k$.

Утверждение 41. (координатное представление k -форм) Набор координатных форм $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, где $I = (i_1 < i_2 < \dots < i_k)$, $1 \leq i_1, i_k \leq m$ является базисом в пространстве внешних k -форм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e_1, \dots, e_m$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^m$. Из определения следует, что $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \langle e_{j_1}, \dots, e_{j_k} \rangle \neq 0$ тогда и только тогда, когда наборы $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ и $\{j_1, i_2, \dots, j_k\}$ совпадают. Тогда k -формы ω и $\sum_I c_I dx_I$, где $c_I = \omega \langle e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k} \rangle$, совпадают на любых наборах базисных векторов. Из полилинейности следует, что если две формы совпадают на любых наборах базисных базисных векторов, то они совпадают на любых наборах векторов. Тогда $\omega = \sum_I c_I dx_I$. Подставляя различные наборы базисных векторов, нетрудно убедиться, что формы dx_I линейно независимы. $\blacktriangle$

Определение 27. Определим операцию *внешнего умножения* k_1 -формы и k_2 -формы, которые представлены в виде разложения по базисным формам, равенством

$$\left(\sum_I c_I dx_I \right) \wedge \left(\sum_J a_J dx_J \right) = \sum_{I,J} (c_I a_J) dx_I \wedge dx_J.$$

Степень формы $\omega = \sum_I c_I dx_I$ равна количеству сомножителей в наборах dx_I и обозначается через $\deg \omega$.

Утверждение 42. (свойства внешнего умножения)

- 1) $(\omega + \varpi) \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \varpi \wedge \eta$;
- 2) $\omega \wedge \varpi = (-1)^{\deg \omega \deg \varpi} \varpi \wedge \omega$;
- 3) $(\omega \wedge \varpi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varpi \wedge \theta)$.

Из определения и единственности координатного представления k -форм следует свойство 1). Из равенства 1) следует, что свойства 2) и 3) достаточно проверить для базисных форм.

Определение 28. Дифференциальной формой степени k (k -формой) называется отображение $\omega : M \rightarrow \mathcal{F}^k$, где $M \subseteq \mathbb{R}^m$.

Другими словами, каждой точке $x \in U$ и любому набору из k векторов $v^1, \dots, v^k \in \mathbb{R}^m$ сопоставлено число $\omega(x) \langle v^1, \dots, v^k \rangle$, причём отображение линейно и кососимметрично по векторным аргументам.

Для дифференциальных форм операции сложения и внешнего умножения определяются поточечно. Функции можно рассматривать как 0-формы и операцию умножения k -формы на функцию можно рассматривать как внешнее умножение на 0-форму.

Задача 17. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_k$ — линейно независимые внешние 1-формы в $\mathbb{R}^m$. Докажите, что 2-формы $\omega_i \wedge \omega_j$ при $i < j$ линейно независимы.

Определение 29. Пусть $f : V \rightarrow U$ — непрерывно дифференцируемое отображение и множества $V \subseteq \mathbb{R}^n, U \subseteq \mathbb{R}^m$ открыты. Операцией *переноса* k -форм называется отображение $f^* : \mathcal{F}^k(U) \rightarrow \mathcal{F}^k(V)$ действующее по правилу $(f^*\omega)(x)\langle v^1, \dots, v^k \rangle = \omega(f(x))\langle df(x)\langle v^1 \rangle, \dots, df(x)\langle v^k \rangle \rangle$.

Утверждение 43. (свойства операции переноса)

- 1) $f^*(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha f^*\omega_1 + \beta f^*\omega_2$; 2) $f^*(dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) = df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k} = df_I$;
3) $f^*(\sum_I u_I(y) dy_I) = \sum_I u_I(f(x)) df_I(x)$; 4) $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (f^*\omega_1) \wedge (f^*\omega_2)$; 5) $(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*(\omega))$.

Равенства 1) и 2) вытекают из определений; равенство 3) следует из 1) и 2); равенство 4) следует из 3); равенство 5) — следствие того, что дифференциал композиции есть композиция дифференциалов:

$$(f \circ g)^*\omega(x)\langle v^1, \dots, v^k \rangle = \omega(f(g(t))\langle dg(t)\langle v^1 \rangle, \dots, dg(t)\langle v^k \rangle \rangle) = g^*(\omega(f(y))\langle df(y)\langle u^1 \rangle, \dots, df(y)\langle u^k \rangle \rangle) = g^*(f^*\omega)\langle v^1, \dots, v^k \rangle, \text{ где } u^i = dg(t)\langle v^i \rangle.$$

Определение 30. Пусть k -форма $\omega = \sum_I c_I(x) dx_I$ такова, что все функции c_I дифференцируемы на U . Тогда операция *внешнего дифференцирования* определяется равенством $d\omega = \sum_I dc_I \wedge dx_I$.

Утверждение 44. (свойства операции внешнего дифференцирования)

- 1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$; 2) $d(\omega \wedge \varpi) = (d\omega) \wedge \varpi + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\varpi$;
3) $d^2\omega = d(d\omega) = 0$; 3) $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства 1) и 2) следуют из единственности координатного представления k -формы. Свойство 3) для функций, т. е. $d(dc) = 0$, следует из теоремы о равенстве смешанных производных. Тогда $d(d\omega) = \sum_I d(dc_I \wedge dx_I) = \sum_I (d^2c_I \wedge dx_I - dc_I \wedge d(dx_I)) = 0$. Докажем равенство 4). Очевидно, $f^*dc = d(c \circ f)$ для дифференцируемой функции c . Тогда $f^*(d(c_I dx_I)) = f^*dc_I \wedge f^*dx_I = d(c_I \circ f) \wedge df_I = d(f^*(c_I dx_I))$. ▲

Определение 31. Дифференциальная k -форма $\omega \in \mathcal{F}^k(U)$ называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$. Дифференциальная k -форма $\omega \in \mathcal{F}^k(U)$ называется *точной*, если $\omega = d\eta$.

Задача 18. Пусть дифференциальная форма ω_1 — точная, а форма ω_2 — замкнутая. Докажите, что дифференциальная форма $\omega_1 \wedge \omega_2$ — точная.

Замечание 19. Из свойства 3), которое называют 1-й леммой Пуанкаре следует, что каждая точная дифференциальная форма является замкнутой. Из критерия потенциальности поля Π следует, что в односвязной области замкнутая 1-форма является точной. Примером замкнутой, но не точной формы в неодносвязной области служит форма Гаусса. Вторая лемма Пуанкаре утверждает, что на множестве гомотопном точке (в частности диффеоморфном шару) любая замкнутая k -форма является точной.

Задача 19. Пусть замкнутая 1-форма ω определена на $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$. Докажите, что найдётся такая функция $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\})$, что $\omega = df + cd\theta$ для некоторой константы $c \in \mathbb{R}$.

Определение 32. *Сингулярным k -мерным кубом* будем называть отображение $\phi : [-1, 1]^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ класса C^1 , $k \leq m$. *Гранью* сингулярного k -мерного куба называется $(k-1)$ -мерный сингулярный куб ϕ_i^+ (или ϕ_i^-), полученный фиксацией одной из переменных $x_i = 1$ или $x_i = -1$. Грань куба ϕ_i^+ будем называть правой (+), если i — нечётно и левой (−) — если i чётно, для граней ϕ_i^- знак определяется противоположным образом.

Определение 33. Сумма сингулярных кубов с целыми коэффициентами называется *цепью*. Множество цепей, действующих в $U \subseteq \mathbb{R}^m$ образует свободную абелеву группу. *Границей* сингулярного куба называется цепь $\partial\phi$ равная сумме его граней с учётом знака. Граница цепи $\partial(\sum_i \phi^i) = \sum_i \partial\phi^i$ определяется как сумма границ кубов. Сингулярные кубы, отличающиеся только знаками, сокращаются.

Нетрудно показать, что для любого сингулярного куба ϕ и для любой цепи граница границы нулевая, т. е. $\partial(\partial\phi) = 0$.

Определение 34. Если k -форма $\omega^k = u(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ определена на $U \subseteq \mathbb{R}^k$, то интеграл от k -формы определяется равенством $\int_V \omega^k = \int_V u d\mu_L$ для любого измеримого множества $V \subseteq U$. Если ϕ — сингулярный k -мерный куб и k -форма ω^k задана на $\phi([-1, 1]^k)$, то интеграл от сингулярного куба определяется равенством $\int_\phi \omega^k = \int_{[-1, 1]^k} \phi^* \omega^k$.

Интеграл по цепи определяется как сумма интегралов слагаемых.

Теорема 15. (формула Стокса для сингулярных кубов) Пусть ϕ — сингулярный k -мерный куб, $\omega^{k-1} \in \mathcal{F}^{k-1}(\phi([-1, 1]^k))$ и коэффициенты $(k-1)$ -формы непрерывны на $\phi([-1, 1]^k)$ и дифференцируемы на $\phi((-1, 1)^k)$. Тогда

$$\int_\phi d\omega^{k-1} = \int_{\partial\phi} \omega^{k-1} = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{\phi_i^+} \omega^{k-1} - \int_{\phi_i^-} \omega^{k-1} \right) \quad (*).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале предположим, что $\phi = \text{id}$ — тождественное отображение. Любая $(k-1)$ -мерная форма в $\mathbb{R}^k$ имеет вид $\omega^{k-1} = \sum_{i=1}^k f_i(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k$, где $\widehat{dx_i}$ означает отсутствие данного сомножителя. Достаточно проверить формулу (*) для одного слагаемого. Имеем $\int_{\text{id}} d(f_i(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k) = (-1)^{i-1} \int_{[-1, 1]^k} \frac{\partial f}{\partial x_i} d\mu_L = (-1)^{i-1} \int_{[-1, 1]^{k-1}} (f_i(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) - f_i(x_1, \dots, -1, \dots, x_k))$.

С другой стороны $(\text{id}_j^\pm)^*(f_i(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k) = 0$ при $i \neq j$. Тогда $\int_{\text{id}} f_i(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k = (-1)^{i-1} \left(\int_{\text{id}_i^+} f_i(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k - \int_{\text{id}_i^-} f_i(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k \right) = (-1)^{i-1} \int_{[-1, 1]^{k-1}} (f_i(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) - f_i(x_1, \dots, -1, \dots, x_k))$.

Рассмотрим произвольный сингулярный куб ϕ . По определению интеграла имеем $\int_\phi d\omega^{k-1} = \int_{\text{id}} \phi^* d(\omega^{k-1})$. Из свойства внешнего дифференцирования имеем $d(\phi^*(\omega^{k-1})) =$

$$\begin{aligned}
& \phi^*(d(\omega^{k-1})). \text{ Тогда } \int_{\text{id}} \phi^* d(\omega^{k-1}) = \int_{\partial(\text{id})} \phi^*(\omega^{k-1}). \text{ По определению интеграла по цепи} \\
& \text{имеем } \int_{\partial\phi} \omega^{k-1} = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \int_{\phi_i^+} \omega^{k-1} - \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \int_{\phi_i^-} \omega^{k-1} = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \int_{[-1,1]^{k-1}} (\phi_i^+)^* \omega^{k-1} - \\
& \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \int_{[-1,1]^{k-1}} (\phi_i^-)^* \omega^{k-1} = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{[-1,1]^{k-1}} (\text{id}_i^+)^* (\phi^* \omega^{k-1}) - \int_{[-1,1]^{k-1}} (\text{id}_i^-)^* (\phi^* \omega^{k-1}) \right) = \\
& \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \int_{\text{id}_i^+} \phi^* \omega^{k-1} - \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \int_{\text{id}_i^-} \phi^* \omega^{k-1} = \int_{\partial(\text{id})} \phi^* \omega^{k-1}. \blacktriangle
\end{aligned}$$

Вспомним, что множество $M \subset \mathbb{R}^m$ называется *элементарным k -мерным многообразием с краем класса C^r* , если найдётся такой диффеоморфизм $\varphi : (-1, 1)^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ класса C^r , что $\varphi((-1, 1)^{k-1} \times [0, 1) \times 0^{n-k}) = M$. Далее рассматриваются многообразия как минимум класса C^1 .

Определение 35. *Краем* элементарного k -мерного многообразия называется множество $\partial M = \varphi((-1, 1)^{k-1} \times 0^{n-k+1})$.

Многообразием называется такое множество $M \subset \mathbb{R}^m$, что для каждой его точки $x \in M$ найдётся такая окрестность $U \in \mathcal{N}(x)$, что $U \cap M$ — элементарное многообразие с краем или без края.

Краем k -мерного многообразия M называется $(k-1)$ -мерное многообразие $\partial M \subset M$, состоящее из точек края элементарных подмногообразий $U \cap M$.

Утверждение 45. *(корректность определения края многообразия)*

Если $x \in M \cap U_1 \cap U_2$, где $M \cap U_1$ и $M \cap U_2$ — элементарные многообразия, то x является точкой края каждого из них одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$, $M \cap U_1$ — многообразие без края и φ_1 — его параметризация. Тогда $d\varphi_1(v)(\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}) = T_x M$, где $\varphi_1(v) = x$. Причём $T_x M$ является линейным подпространством. Предположим $x \in \partial(M \cap U_2)$. Имеем $(d\varphi_2(x))^{-1}(T_x M)$ — множество касательных векторов к множеству $\varphi_2(M \cap U_2)$ в точке $\varphi_2^{-1}(x)$. Образ линейного подпространства при линейном отображении есть подпространство. Но касательные вектора к $\varphi_2^{-1}(x)$ составляют полупространство $\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}_+ \times 0^{n-k}$ (все вектора имеют неотрицательные k -е координаты). $\blacktriangle$

Утверждение 46. *(о крае многообразия) Если M — k -мерное многообразие с краем, то ∂M — $(k-1)$ -мерное многообразие той же гладкости без края, т. е. $\partial(\partial M) = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой точки $x \in \partial M$ по определению края найдётся такая окрестность $U \in \mathcal{N}(x)$ и такой диффеоморфизм $\varphi : (-1, 1)^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, что $(\partial M) \cap U = \varphi((-1, 1)^{k-1} \times 0^{n-k+1})$. Тогда ∂M — $(k-1)$ -мерное многообразие без края по определению. $\blacktriangle$

Пример 15. Краем замкнутого шара $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ является сфера $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, а краем круга $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ является окружность $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. В первом случае $\partial M = \text{Fr}(M)$, а во втором $\partial M \neq \text{Fr}(M) = M$.

Утверждение 47. *(о неявном задании многообразия с краем)*

Пусть $f = (f_1, \dots, f_{m-1}, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество.

Если в каждой точке $a \in U$ функция f имеет ранг m , то $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) \geq 0, f_2(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0\}$ является $(n - m + 1)$ -мерным многообразием, причём $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим отображение $F(x) = (x_1, \dots, x_{n-m}, f_1(x), \dots, f_m(x))$. По теореме об обратной функции отображение F является диффеоморфизмом класса C^1 в некоторой окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$. Причём $F(U \cap M) = F(U) \cap (\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}_+ \times 0^{m-1})$ и $F(U \cap \partial M) = F(U) \cap (\mathbb{R}^{n-m} \times 0^m)$. ▲

Упорядоченный базис в $\mathbb{R}^m$ можно рассматривать как элемент $\underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_m$, т.

е. как квадратную матрицу A размера $m \times m$, элементами которой являются координаты векторов в стандартном базисе. Известно (см. третий семестр), что множество невырожденных матриц $GL(m)$, которым взаимно однозначно соответствуют упорядоченные базисы, состоит из двух компонент связности: $\det A > 0$ и $\det A < 0$. Базисы, для которых $\det A > 0$ называют правыми, а для которых $\det A < 0$ — левыми. Нечётная перестановка базисных векторов переводит правые базисы в левые и наоборот. Поскольку любое k -мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ изоморфно $\mathbb{R}^k$, базисы в нём также делятся на правые и левые. Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ — k -мерное дифференцируемое многообразие и $BM(x)$ — множество базисов в $T_x M$. Будем рассматривать $BM(x)$ как подмножество в $\underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_k$. Обозначим через

$BM \subset M \times (\mathbb{R}^m)^k$ множество касательных базисов к многообразию M .

Определение 36. *Ориентацией* многообразия M будем называть непрерывную функцию $\vartheta : BM \rightarrow \{-1, 1\}$, которая меняет знак при нечётной перестановке векторных аргументов и при замене любого базисного вектора v на $-v$. Многообразие называется *ориентируемым*, если на нём можно задать ориентацию. *Ориентированным многообразием* называется пара из многообразия и его ориентации.

Если ϑ — ориентация многообразия, то $-\vartheta$ также является его ориентацией. Ориентация многообразия — это деление базисов его касательного пространства на два класса, так что при непрерывном изменении как точки многообразия, так и базисных векторов нельзя перейти из одного класса в другой (без того, чтобы в некотором промежуточном случае набор векторов перестал быть базисом).

Утверждение 48. (критерий ориентируемости многообразия) Дифференцируемое k -мерное многообразие $M \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq k$, ориентируемо тогда и только тогда, когда существует непрерывная на M k -форма ω^k такая, что $\omega^k(x) \langle (T_x M)^k \rangle \neq \{0\}$ (или эквивалентно $\omega^k(x) \langle BM(x) \rangle \neq 0$) для любой точки $x \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω^k — такая k -форма. Если внешняя k -форма $\omega^k(x)$ обращается в нуль на некотором базисном в $T_x M$ наборе векторов, то по линейности она равна нулю на любых наборах векторов из $T_x M$. Следовательно, ориентацию многообразия можно задать равенством $\vartheta(x, v^1, \dots, v^k) = \text{sgn}(\omega^k(x) \langle v^1, \dots, v^k \rangle)$.

Наоборот, если имеется ориентация ϑ многообразия M , то требуемую k -форму можно определить следующим образом. Для каждой точки $x \in M$ выберем упорядоченный ортонормальный базис $v^1(x), \dots, v^k(x)$ в $T_x M$ так, чтобы функции $v^i : M \rightarrow$

$\mathbb{R}^m$ были непрерывны (это возможно, поскольку ортогонализация базиса является непрерывным преобразованием). Определим k -форму на этом базисном наборе равенством $\varepsilon_M(x)\langle v^1(x), \dots, v^k(x) \rangle = \vartheta(x, v^1(x), \dots, v^k(x))$. На любых других наборах векторов из $T_x M$ форма $\varepsilon_M(x)$ определяется по линейности. $\blacktriangle$

Из доказательства видно, что k -форма ε_M определяет ориентацию многообразия.

Следствие 25. Пусть $u^j = \sum_i l_{ji} v^i(x)$, $j = 1, \dots, k$, — набор векторов в $T_x M$ и $L = (l_{ji})$ — квадратная матрица. Тогда $\varepsilon_M(x)\langle u^1, \dots, u^k \rangle = \det L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что оператор, заданный на $(T_x M)^k$ равенством $\eta(u^1, \dots, u^k) = \det L$ является линейным и кососимметричным, т. е. внешней k -формой. Причём $\eta(v^1(x), \dots, v^k(x)) = \varepsilon_M(x)\langle v^1(x), \dots, v^k(x) \rangle$. Из линейности двух функций по всем аргументам следует, что они совпадают на $(T_x M)^k$. $\blacktriangle$

В частности, на любом ортонормальном базисе в $T_x M$ k -форма ε_M принимает значения ± 1 .

Следствие 26. Пусть $\omega^k \in \mathcal{F}^k(M)$, M — k -мерное ориентированное многообразие, тогда найдётся функция $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\omega^k(x) = g(x)\varepsilon_M(x)$ на $T_x M$ для любого $x \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $g(x) = \frac{\omega^k(x)\langle v^1(x), \dots, v^k(x) \rangle}{\varepsilon_M(x)\langle v^1(x), \dots, v^k(x) \rangle}$. Тогда две k -формы совпадают на стандартном базисе $v^1(x), \dots, v^k(x)$ в $T_x M$, а значит по линейности и на всех наборах касательных векторов. $\blacktriangle$

Утверждение 49. (о задании ориентируемого многообразия)

Пусть $f = (f_1, \dots, f_{m-1}, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Если в каждой точке $a \in U$ матрица Якоби Df имеет ранг m , то $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0\}$ является $(n - m)$ -мерным ориентируемым многообразием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k = n - m$. Определим дифференциальную k -форму ω равенством $\omega(x)\langle v^1, \dots, v^k \rangle = \det \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(x) & & \\ \dots & \dots & \dots \\ & \text{grad } f_m(x) & \\ v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1^k & \dots & v_n^k \end{pmatrix}$. Из условия сле-

дует, что $\omega(x) \neq 0$ для любого $x \in M$. Тогда по критерию ориентируемости многообразие M ориентируемо. $\blacktriangle$

Заметим, что в условия предыдущего утверждения форму ε_M можно задать в некоторой открытой окрестности M . Действительно, $\omega(x) = g(x)\varepsilon_M$ и $g(x) \neq 0$ при $x \in M$, причём g непрерывно зависит от производных функции f . Тогда из непрерывности g следует, что g не обращается в нуль в некоторой окрестности точки $x_0 \in M$ и в ней k -форму ε_M можно определить равенством $\varepsilon_M = \omega(x)/g(x)$.

Любое открытое подмножество $U = \mathbb{R}^k$ ориентируемо, поскольку касательное пространство $T_x U = \mathbb{R}^k$ не зависит от точки $x \in U$ и множество базисов в $\mathbb{R}^k$ состоит из двух несвязных компонент. Стандартная ориентация $\mathbb{R}^k$ и любого его открытого подмножества задаётся как знак определителя матрицы, составленной из векторов

базиса. Из предыдущего параграфа видно, что все одномерные многообразия ориентируемы.

Пример 16. Примером неориентируемого двумерного многообразия с краем является лист (лента) Мёбиуса, а примерами неориентируемых двумерных многообразий без края являются проективная плоскость и бутылка Клейна.

Определение 37. *Индукцированной ориентацией края ∂M k -мерного многообразия M класса C^1 с ориентацией ϑ называется функция $\tilde{\vartheta}(x; v^2, \dots, v^k) = \vartheta(x; \overrightarrow{n(x)}, v^2, \dots, v^k)$, где $v^2, \dots, v^k$ линейно независимый набор векторов касательных к ∂M в точке $x \in \partial M$, а $\overrightarrow{n(x)}$ — вектор внешней нормали к ∂M , то есть такая нормаль, что $-\overrightarrow{n(x)} \in T_x M$.*

Будем обозначать через $\partial M \uparrow$ край ориентированного многообразия $M \uparrow$ с индуцированной ориентацией.

Утверждение 50. *(корректность определения ориентации края) Индуцированная ориентация является ориентацией края многообразия.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство функции $\tilde{\vartheta}$ менять знак при нечётной перестановке аргументов и замене вектора на противоположный следует из свойств функции ϑ . Функция $\tilde{\vartheta}$ непрерывна как композиция непрерывных функций ϑ и $\overrightarrow{n(x)}$. $\blacktriangle$

Определение 38. Пусть $M \uparrow$ — k -мерное ориентированное многообразие, $\omega^k \in \mathcal{F}^k(M)$ и $\omega^k(x) = g(x)\varepsilon_M(x)$ для любого $x \in M$. Тогда по определению $\int_{M \uparrow} \omega^k = \int_M g d\mathcal{H}^k$.

Пример 17. Пусть $A : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ — векторное поле. Обозначим через ω_A^{k-1} k -форму, определённую равенством $\omega_A^{k-1}\langle v^1, \dots, v^{k-1} \rangle = \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_k \\ v_1^1 & v_2^1 & \dots & v_k^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^{k-1} & v_2^{k-1} & \dots & v_k^{k-1} \end{pmatrix}$.

Пусть $M \uparrow$ — $(k-1)$ -мерное ориентированное многообразие. Нетрудно видеть, что $\varepsilon_M(x) = \frac{\omega^{k-1}}{\overrightarrow{n(x)}}$, где $\overrightarrow{n(x)}$ — нормаль длины 1 к многообразию M в точке $x \in M$, направленная так, чтобы для правого касательного базиса $v^1(x), \dots, v^{k-1}(x) \in T_x M$ базис $(\overrightarrow{n(x)}, v^1(x), \dots, v^{k-1}(x))$ был правым в $\mathbb{R}^k$. Имеем $A(x) = (A(x), \overrightarrow{n(x)})\overrightarrow{n(x)} + u$, где $u \in T_x M$. Тогда $\omega_A^{k-1}\langle v^1(x), \dots, v^{k-1}(x) \rangle = (A(x), \overrightarrow{n(x)})\varepsilon_M\langle v^1(x), \dots, v^{k-1}(x) \rangle$ и $\int_{M \uparrow} \omega_A^{k-1} = \int_M (A(x), \overrightarrow{n(x)}) d\mathcal{H}^{k-1}$.

Определение 39. Параметризация φ k -мерного ориентированного многообразия $M \uparrow$ сохраняет ориентацию, если линейный оператор $d\varphi(t) : \mathbb{R}^k \rightarrow T_{\varphi(t)} M$ переводит правые базисы в правые, а левые в левые.

Утверждение 51. *Если φ — параметризация ориентированного элементарного многообразия, то либо φ сохраняет ориентацию, либо $\tilde{\varphi}$, где $\tilde{\varphi}(t_1, t_2, \dots, t_k) = \varphi(-t_1, t_2, \dots, t_k)$, сохраняет ориентацию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть ϑ — ориентация многообразия. Отображение $\vartheta(\varphi(t))\langle d\varphi\langle v^1 \rangle, \dots, d\varphi\langle v^k \rangle \rangle$ непре-

равно зависит от переменных t и от линейно независимых наборов векторов $v^1, \dots, v^k$ в $\mathbb{R}^k$. Поэтому на любых правых базисах в $\mathbb{R}^k$ оно либо принимает значение 1, либо -1 . Очевидно, $d\tilde{\varphi}\langle e_1 \rangle = -d\varphi\langle e_1 \rangle$. Поэтому замена параметризации φ на $\tilde{\varphi}$ меняет знак композиции. $\blacktriangle$

Теорема 16. (об интегрировании дифференциальных форм) Пусть $M^\uparrow$ — k -мерное ориентированное многообразие в $\mathbb{R}^m$, $m \geq k$, $\omega^k \in \mathcal{F}^k(M)$, которое имеет сохраняющую ориентацию многообразия параметризацию φ . Тогда $\int_{M^\uparrow} \omega^k = \int_{\varphi^{-1}(M)} \varphi^* \omega^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдём координатное представление k -формы $\varphi^* \omega^k$. Имеем $\varphi^* \omega^k \langle e_1, \dots, e_k \rangle = \omega_k(\varphi(t)) \langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} \rangle$.

Пусть $\omega^k(x) = g(x) \varepsilon_M(x)$. Рассмотрим представления касательных векторов $\frac{\partial \varphi}{\partial t_j} = \sum_i l_{ji} v^i$, $j = 1, \dots, k$, где $v^1, \dots, v^k$ — стандартный базис в $T_{\varphi(t)} M$. Тогда

$$\omega_k(\varphi(t)) \langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} \rangle = g(\varphi(t)) \varepsilon_M(\varphi(t)) \langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} \rangle = g(\varphi(t)) \det L \quad (*).$$

Имеем $(\frac{\partial \varphi}{\partial t_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}) = \sum_s l_{js} l_{is}$. Таким образом $(D\varphi(t))^*(D\varphi(t)) = L^* L$.

По условию параметризация φ сохраняет ориентацию. Тогда $\det L > 0$ и $\det L = (\det(L^* L))^{1/2} = J[\varphi](t)$. Из формулы (*) получаем равенство

$$\int_{\varphi^{-1}(M)} \varphi^* \omega^k = \int_{\varphi^{-1}(M)} g(\varphi(t)) J[\varphi](t) d\mu_L = \int_M g d\mathcal{H}^k.$$

По определению интеграла от k -формы имеем $\int_{M^\uparrow} \omega^k = \int_M g d\mathcal{H}^k$. $\blacktriangle$

Любое компактное многообразие покрывается конечным числом карт. Предыдущая теорема применима и в этом случае: достаточно разделить многообразие на непересекающиеся части, каждая из которых покрывается одной картой, и использовать для каждой части свою параметризацию.

Теорема 17. (формула Стокса на многообразии) Пусть $M^\uparrow$ — компактное k -мерное ориентированное многообразие, $M \subset U$, $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $\omega^{k-1} \in \mathcal{F}^k(U)$ — $(k-1)$ -форма класса C^1 . Тогда $\int_{M^\uparrow} d\omega^{k-1} = \int_{\partial M^\uparrow} \omega^{k-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению компактное многообразие покрывается конечным числом открытых окрестностей U_i так, что $M \cap U_i$ — элементарное многообразие с краем или без края. Тогда $M \cap U_i = \varphi^i((-1, 1)^k)$ или $M \cap U_i = \varphi^i((-1, 1)^{k-1} \times [0, 1])$, где φ^i — некоторые параметризации.

Пусть $\text{supp}(\omega^{k-1}) \subset U_1$, тогда $\text{supp}(d\omega^{k-1}) \subset U_1$. Рассмотрим случай, когда $M \cap U_1 = \varphi^1((-1, 1)^{k-1} \times [0, 1])$, другой случай аналогичен. Тогда $\int_{M^\uparrow} d\omega^{k-1} = \int_{(M^\uparrow) \cap U_1} d\omega^{k-1}$ и $\int_{\partial M^\uparrow} \omega^{k-1} = \int_{(\partial M^\uparrow) \cap U_1} \omega^{k-1}$. Проведём линейное преобразование координат функции φ^1 так, чтобы полученная параметризация ϕ сохраняла ориентацию и $\phi((-1, 1] \times (-1, 1)^{k-1}) = U_1 \cap M$.

Тогда из определений, теоремы об интегрировании дифференциальных форм и формулы Стокса для сингулярного куба имеем равенства

$$\int_{(M^\uparrow) \cap U_1} d\omega^{k-1} = \int_{(-1, 1] \times (-1, 1)^{k-1}} \phi^* d\omega^{k-1} = \int_{[-1, 1]^k} \phi^* d\omega^{k-1} = \int_{\phi} d\omega^{k-1} = \int_{\partial \phi} \omega^{k-1}.$$

По определению края ∂M имеем $\partial M \cap U_1 = \phi(1 \times (-1, 1)^{k-1}) = \phi_1^+((-1, 1)^{k-1})$. Заметим, что если параметризация ϕ сохраняет ориентацию многообразия, то параметризация ϕ_1^+ сохраняет ориентацию его края. Поскольку $(k-1)$ -форма ω^{k-1} равняется нулю на всех гранях сингулярного куба кроме ϕ_1^+ , имеем

$$\int_{\partial\phi} \omega^{k-1} = \int_{\phi_1^+} \omega^{k-1} = \int_{[-1,1]^{k-1}} (\phi_1^+)^* \omega^{k-1} = \int_{(-1,1)^{k-1}} (\phi_1^+)^* \omega^{k-1} = \int_{\partial M \uparrow \cap U_1} \omega^{k-1}.$$

По лемме о разбиении единицы найдутся такие гладкие функции λ_i , что $\text{supp}(\lambda_i) \subset U_i$ и $\sum_i \lambda_i(x) = 1$ для любого $x \in M$. По доказанному выше формула Стокса верна для форм $\lambda_i \omega^{k-1}$. Тогда

$$\int_{M \uparrow} d\omega^{k-1} = \sum_i \int_{M \uparrow} d(\lambda_i \omega^{k-1}) = \sum_i \int_{\partial M \uparrow} \lambda_i \omega^{k-1} = \int_{\partial M \uparrow} \omega^{k-1}.$$

▲

Вспомним, что для дифференцируемой функции $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ оператор $\text{grad} f$ определяет векторное поле, удовлетворяющее условию $df = \omega_{\text{grad} f}^1$. Подобным образом определим другие дифференциальные операторы.

Определение 40. Пусть $A : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — дифференцируемое векторное поле. Тогда оператор $\text{rot} A$ определяется равенством $d\omega_A^1 = \omega_{\text{rot} A}^2$.

Определение 41. Для дифференцируемого векторного поля $A : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ дивергенция $\text{div} A$ определяется равенством $d\omega_A^{k-1} = \text{div} A(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k)$.

Определение 42. Для дважды дифференцируемого векторного поля $A : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ оператор Лапласа определяется равенством $\Delta A = \text{div}(\text{grad} A)$.

Из формулы $d(d\omega) = 0$ непосредственно следует

Утверждение 52. Для дважды дифференцируемых функции f и векторного поля A справедливы равенства: 1) $\text{rot}(\text{grad} f) = 0$; 2) $\text{div}(\text{rot} A) = 0$.

Следствие 27. (формула Гаусса — Остроградского) Пусть $(k-1)$ -мерное многообразие M является границей ограниченной области $U \subset \mathbb{R}^k$ и $A : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрерывно дифференцируемое векторное поле. Тогда $\int_U \text{div} A d\mu_L = \int_M (A(x), \overrightarrow{n(x)}) d\mathcal{H}^{k-1}$, где $\overrightarrow{n(x)}$ — внешняя нормаль (длины 1) к M в точке $x \in M$.

Следствие 28. (формула Стокса для кривой) Пусть замкнутая кривая C является краем двумерного компактного многообразия $M \subset \mathbb{R}^3$ и $A : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемое векторное поле. Тогда $\int_C (A(x), \overrightarrow{\tau(x)}) d\mathcal{H}^1 = \int_M (\text{rot} A, \overrightarrow{n(x)}) d\mathcal{H}^2$, где вектора $\overrightarrow{n(x)} \in N_x M$, $\overrightarrow{b(x)} \in -(T_x M \cap N_x C)$, $\overrightarrow{\tau(x)} \in T_x C$ в этом порядке составляют правый базис в $\mathbb{R}^3$.

Замечание 20. Формула Грина для области, границей которой является замкнутая гладкая кривая Жордана, является частным случаем (когда M лежит в плоскости) формулы Стокса для кривой. Формулу Ньютона — Лейбница также можно рассматривать как частный случай формулы Стокса, если считать функцию 0-формой, а точку 0-мерным многообразием.

Задача 20. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ и $\text{supp } f$ — компактное множество. Докажите равенство $3 \int_{\mathbb{R}^3} f = - \int_{\mathbb{R}^3} (x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3})$.

Задача 21. Пусть U — выпуклая область в $\mathbb{R}^k$, границей которой является компактное дифференцируемое многообразие $M = \partial U$ и $P_a(U)$ — проекция U на гиперплоскость перпендикулярную вектору $a \in \mathbb{R}^k$. Докажите, что $\mathcal{H}^{k-1}(P_a(U)) = \int_M \max\{(a, \vec{n}(x)), 0\} d\mathcal{H}^{k-1}$, где $\vec{n}(x)$ — внешняя нормаль (длины 1) к M в точке $x \in M$.

Теорема 18. (Брауэр) Пусть множество M гомеоморфно шару в $\mathbb{R}^k$ и функция $f : M \rightarrow M$ непрерывна. Тогда отображение f имеет неподвижную точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале рассмотрим $M = \overline{B(0, 1)}$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^k$ единичного радиуса с центром в $\bar{0}$ и $f \in C^1(B(0, 1 + \delta))$ для некоторого малого $\delta > 0$. Будем доказывать теорему от противного. Предположим имеется отображение $f : B(0, 1 + \delta) \rightarrow \overline{B(0, 1)}$ без неподвижных точек. Тогда рассмотрим луч из точки $f(x)$, проходящий через точку $x \in B(0, 1 + \delta)$. Точку пересечения этого луча с единичной сферой $S = \partial B(0, 1)$ обозначим через $g(x)$ при $x \in B(0, 1 + \delta)$. Ясно, что g есть тождественное отображение на S . Вычислим явную формулу отображения g из условий $g(x) = f(x) + t(x)(x - f(x))$, $t(x) > 0$ и $\|g(x)\|_2^2 = 1$. Имеем

$$t(x) = \frac{-(f(x), x - f(x)) + \sqrt{(f(x), x - f(x))^2 - (x - f(x), x - f(x))((f(x), f(x)) - 1)}}{(x - f(x), x - f(x))}.$$

Поскольку подкоренное выражение положительно и знаменатель не обращается в 0, из $f \in C^1(B(0, 1 + \delta))$ следует $g \in C^1(B(0, 1 + \delta))$. Определим $\omega^{k-1} = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k$. По формуле Стокса имеем $\int_{S^\uparrow} \omega^{k-1} = k \int_{\overline{B(0, 1)}} 1 d\mu_L = k \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)}$.

Для любой параметризации ψ части сферы имеем $\psi^*(g^* \omega^{k-1}) = (g \circ \psi)^* \omega^{k-1} = \psi^* \omega^{k-1}$, поскольку g тождественное отображение на любой части сферы — образе отображения ψ . Тогда из теоремы об интегрировании дифференциальных форм следует равенство $\int_{S^\uparrow} \omega^{k-1} = \int_{S^\uparrow} g^* \omega^{k-1}$.

Покажем, что однако $d(g^* \omega^{k-1}) = g^* d\omega^{k-1}$ тождественно нулевая форма в шаре $\overline{B(0, 1)}$. Из определения отображения g имеем $\sum_{i=1}^k g_i^2(x) - 1 = 0$. Тогда $\sum_{i=1}^k 2g_i(x) dg_i(x) = 0$. Таким образом, для любого фиксированного $x \in \overline{B(0, 1)}$ имеем $0 = dg_1(x) \wedge \dots \wedge dg_k(x) = \frac{1}{k} (g^* d\omega^{k-1})(x)$ по определению внешнего умножения 1-форм. Тогда по формуле Стокса имеем $\int_{S^\uparrow} g^* \omega^{k-1} = \int_{\overline{B(0, 1)}^\uparrow} d(g^* \omega^{k-1}) = 0$. Пришли к противоречию.

Теперь рассмотрим произвольное непрерывное отображение $f : M \rightarrow M$, где $M = \overline{B(0, 1)}$. Любую компоненту f_i можно непрерывно продолжить на $\mathbb{R}^k$ по формуле $f_i(y) = f_i(y/\|y\|_2)$ при $\|y\|_2 > 1$. По теореме об усреднении в C для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая гладкая функция $f_\varepsilon = (f_1^\varepsilon, \dots, f_k^\varepsilon)$, что $\sup_{x \in M_\delta} \|f - f_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$, где $M_\delta = \overline{B(0, 1 + \delta)}$, для некоторого $\delta > 0$. Тогда $\sup_{x \in M_\delta} \|f_\varepsilon\|_2 < 1 + \varepsilon$. Рассмотрим функции $h_\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon} f_\varepsilon$. По построению $h_\varepsilon(M_\delta) \subset M$. По доказанному выше найдётся такая точка $x_n \in M$, что $h_{\frac{1}{n}}(x_n) = x_n$. Кроме того, $\|f(x) - h_\varepsilon(x)\|_2 \leq \|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_2 + (1 - \frac{1}{1+\varepsilon})\|f_\varepsilon(x)\|_2 \leq 2\varepsilon$ при $x \in M$. Следовательно $\|f(x_n) - x_n\|_2 = \|f(x_n) - h_{\frac{1}{n}}(x_n)\|_2 \leq 2\frac{1}{n}$. Поскольку шар в $\mathbb{R}^k$ является компактным множеством, то из последовательности

(x_n) можно выделить подпоследовательность сходящуюся к $a \in M$. Переходя к пределу по этой подпоследовательности в неравенстве $\|f(x_n) - x_n\|_2 \leq 2\frac{1}{n}$ получим $f(a) = a$.

Предположим, что множество M гомеоморфно шару. Тогда имеется гомеоморфизм $\varphi : B(0, 1) \rightarrow M$. По доказанному отображение $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ имеет неподвижную точку. Тогда из $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(a) = a$ следует, что $f(\varphi(a)) = \varphi(a)$. $\blacktriangle$