

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1 семестр

1. Числа

1.1. *Числовые множества.* Множество натуральных чисел

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

множество целых чисел

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

множество рациональных чисел

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

и множество вещественных чисел $\mathbb{R}$. Геометрическая интерпретация множеств рациональных и вещественных чисел.

1.2. *Принцип математической индукции.* Натуральные числа и принцип математической индукции. Неравенство Бернулли. Соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим. Бином Ньютона.

2. Множества

2.1. *Операции и отношения.* Отношения принадлежности и включения. Операции над множествами (объединение, пересечение и разность). Математические высказывания и кванторы. Прямое произведение множеств и его свойства.

2.2. *Понятие и свойства функций.* Общее понятие функции и отображения. Понятие образа и прообраза точки (множества). Суперпозиция отображений и ее свойства. Сужение отображения. Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Понятие обратного отображения и критерий его существования. График отображения.

2.3. Вещественные функции. Последовательности. Примеры.

3. Линейный порядок на множестве вещественных чисел

3.1. *Линейный порядок.* Определение линейного порядка. Согласованность с алгебраическими операциями. Понятие наибольшего и наименьшего элементов числового множества. Существование наибольшего и наименьшего элементов конечного числового множества.

3.2. *Свойства натуральных чисел.* Существование наименьшего элемента в подмножестве натуральных чисел. Неограниченность множества натуральных чисел.

3.3. Расширенная числовая прямая.

3.4. *Супремум и инфимум.* Понятие точной верхней ($\sup$) и точной нижней ($\inf$) грани числового множества. Признак точной верхней и нижней граней. Точные верхние и нижние грани промежутка. Соотношения для $\sup$ и $\inf$ вложенных множеств. Примеры.

3.5. Верхняя и нижняя границы вещественной функции. Ограниченные функции. Точные верхние и нижние границы числовых функций. Признак точных верхних и нижних граней числовых функций.

3.6. *Аксиома непрерывности.* Аксиома непрерывности вещественной прямой. Теорема о существовании точных верхней и нижней граней числового множества. Теорема (принцип) Архимеда и его следствия. Свойства плотности рациональных и иррациональных чисел.

4. Предел последовательности

4.1. Определение предела последовательности. Примеры. Единственность предела.

4.2. *Монотонные последовательности.* Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности.

4.3. *Свойства предела.* Теорема о пределе промежуточной последовательности. Предел и алгебраические операции. Теорема о предельном переходе в неравенствах.

4.4. Определение и существование верхнего и нижнего пределов последовательности.

4.5. Частичные пределы последовательности. Лемма о множестве частичных пределов.

4.6. Теорема Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности.

4.7. Понятие фундаментальной последовательности. Критерий Коши существования предела.

4.8. Число e . Предел $\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$, $x \in \mathbb{R}$. Свойства функции $\exp x$.

4.9. *Ряды.* Понятие сходящегося ряда. Необходимый признак сходимости. Критерий сходимости Коши. Признаки сравнения, Даламбера, Коши. Телескопический признак сходимости.

5. Предел вещественной функции

5.1. Определение предела функции и примеры. Единственность предела функции.

5.2. *Свойства предела.* Теорема о пределе монотонной функции. Теорема о пределе промежуточной функции. Предел функции и алгебраические операции. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о пределе композиции функций.

5.3. *Критерии существования предела.* Частичный предел функции. Верхний и нижний пределы функции. Критерий Гейне существования предела. Критерий Коши существования предела функции.

5.4. *Классические пределы.* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

5.5. *Асимптотические отношения сравнения.* Символы O и o , правила оперирования с ними. Основные разложения. Примеры.

6. Непрерывные функции

6.1. Определение непрерывности функции в точке. Непрерывность и арифметические операции. Непрерывность композиции функций. Критерий непрерывности Гейне. Класс функций $C(A)$ непрерывных на $A \subseteq \mathbb{R}$.

6.2. Точки разрыва первого и второго рода. Точки устранимого разрыва. Примеры.

6.3. Теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях на замкнутых промежутках. Теорема Больцано — Коши о промежуточных значениях.

6.4. Признак Больцано строгой монотонности. Теорема о существовании непрерывной обратной функции.

7. Модели множества вещественных чисел

7.1. Аксиомы алгебраических операций (аксиомы поля). Аксиомы порядка. Согласованность с алгебраическими операциями.

7.2. Сечения Дедекинда.

7.3. Классы эквивалентности фундаментальных последовательностей.

7.4. Бесконечные десятичные дроби.

8. Топология вещественной прямой

8.1. Элементарные окрестности на расширенной числовой прямой. Понятие окрестности. Свойства окрестностей фиксированной точки. Понятие открытого множества.

8.2. Понятие точки прикосновения числового множества. Предельные и изолированные точки числового множества. Предельные точки отрезка и множества всех натуральных чисел.

8.3. Замкнутые множества. Замкнутость множества точек прикосновения числового множества на расширенной числовой прямой. Совокупность точек прикосновения промежутка $\langle a, b \rangle$ совпадает с $[a, b]$, где $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$.

8.4. *Полнота множества вещественных чисел.* Полнота $\mathbb{R}$ и аксиома непрерывности. Лемма о вложенных отрезках (принцип Коши — Кантора). Лемма о конечном покрытии (принцип Бореля — Лебега). Лемма о предельной точке (принцип Больцано — Вейерштрасса).

9. Мощность множества и несчётность отрезка вещественной прямой

9.1. *Мощность множества.* Определение и свойства мощности множества. Теорема Кантора—Бернштейна (без доказательства). Конечные множества. Критерий конечности множества.

9.2. *Счётные множества.* Операции над множествами, невыводящие из класса счётных множеств. Примеры счётных множеств. Теорема о точках разрыва монотонной функции.

9.3. Теорема Кантора о несчётности вещественного отрезка.

10. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

10.1. *Дифференцируемая функция.* Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал. Задача линейного приближения. Определение производной функции одной переменной. Геометрический смысл понятия производной. Касательная.

10.2. *Основные правила дифференцирования.* Дифференцирование и арифметические операции. Дифференцирование суперпозиции и обратной функции. Таблица производных основных элементарных функций. Дифференцирование неявно заданной функции, а также функции, заданной параметрически.

10.3. *Производные высших порядков.* Определение. Существование производных высших порядков суммы, произведения, частного, суперпозиции и обратной функции. Формула Лейбница. Классы D^k и C^k .

10.4. *Основные теоремы дифференциального исчисления.* Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа о конечных приращениях, Коши.

10.5. *Формула Тейлора.* Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Представления остаточного члена в формуле Тейлора в форме Лагранжа и Коши. Формула Тейлора суммы, произведения и композиции функций.

11. Применения дифференциального исчисления.

11.1 Равномерная непрерывность, модуль непрерывности и теорема Кантора. Признак равномерной непрерывности дифференцируемой функции.

11.2. *Правило Лопиталя* раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

11.3. *Исследование функций методами дифференциального исчисления.* Дифференциальный признак монотонности функции. Условие внутреннего экстремума функции (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции, достаточные условия). Понятие выпуклой функции. Дифференциальные признаки выпуклости функции. Точка перегиба функции. Построение графика функции.

11.4. *Классические неравенства анализа.* Неравенства Йенсена, Коши, Юнга, Гёльдера и Минковского.

12. Числовые и степенные ряды. Основные элементарные функции

12.1. *Условная сходимость.* Абсолютная и условная сходимость. Неравенство Абеля (суммирование по частям). Признаки Абеля, Дирихле, Лейбница. Примеры неабсолютно сходящихся рядов.

12.2. *Преобразования рядов.* Перестановки и группировки абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов.

12.3. *Умножение рядов.* Умножение абсолютно сходящихся рядов. Определение произведения условно сходящихся рядов. Теорема Мертенса об умножении рядов.

12.4. *Комплексные числа.* Совокупность $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Геометрическое представление. Определение предела функции комплексной переменной.

12.5. *Степенные ряды.* Понятие степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда. Формула Коши — Адамара для радиуса сходимости степенного ряда. Свойства суммы степенного ряда. Операции над степенными рядами. Теорема Абеля о непрерывности степенного ряда на границе круга сходимости.

12.6. *Ряд Тейлора.* Ряд Тейлора бесконечно дифференцируемой функции. Понятие аналитической функции.

12.7. *Линейные функции и их функциональное описание.*

12.8. *Экспонента.* Определение экспоненциальной функции. Свойства экспоненциальной функции. Определение логарифмической функции и ее свойства. Показательная и степенная функции.

12.9. *Тригонометрические функции.* Представление тригонометрических функций в виде ряда. Формула Эйлера. Функциональное описание тригонометрических функций.

Основная литература

1. Водопьянов С. К. *Пределы. Непрерывность. Дифференцируемость*. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2011. <http://math.nsc.ru/~matanalyse/basic1.pdf>
2. Зорич В. А. *Математический анализ*. Т. 1
3. Решетняк Ю. Г. *Курс математического анализа*. Ч. 1, Книга 1. Новосибирск: Изд-во Института математики, 1999.
4. Шведов И. А. *Компактный курс математического анализа*. Ч. 1. *Функции одной переменной.*, 2-е изд. переработ. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003.

Литература, рекомендуемая для работы на семинарах

5. Грешнов А. В. и др. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. 1-й семестр, 2-е изд. испр. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2012.
<http://math.nsc.ru/~potapov/>
6. Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*.
7. Кудрявцев Л. Д. и др. *Сборник задач по математическому анализу*. *Предел, непрерывность, дифференцируемость*.

Дополнительная литература

8. Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе*.
9. Дятлов В. Н. Учебные пособия для студентов ММФ. <http://math.nsc.ru/~dvn/>
10. Львовский С. М. *Лекции по математическому анализу*, М.:Изд-во МЦНМО.
11. Рудин У. *Основы математического анализа*.
12. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1

Программу составил

доцент В. Н. Потапов