

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2 семестр

1. Интегрирование.

1.1. *Неопределенный интеграл.* Первообразная и неопределенный интеграл. Их свойства. Таблица основных интегралов. Основные общие приемы отыскания первообразной. Замена переменных и интегрирование по частям. Первообразные рациональных функций. Первообразные тригонометрических функций и некоторых алгебраических функций.

1.2. *Определенный интеграл.* Определение пространства интегрируемых по Риману функций и интеграла Римана. Площадь как первообразная. Свойства интеграла Римана. Интеграл как аддитивная функция промежутка интегрирования. Оценки для интеграла. Дифференцирование функции верхнего предела.

1.3. *Классы интегрируемых функций.* Критерий интегрируемости в терминах колебаний. Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость ограниченной функции, имеющей конечное число точек разрыва. Интегрируемость монотонной функции. Интегральные суммы Римана. Теорема о сходимости интегральных сумм к интегралу Римана.

1.4. *Критерий интегрируемости Лебега.* Определение множества меры нуль. Свойства. Термин "почти всюду". Теорема Лебега о функциях, интегрируемых по Риману.

1.5. *Основные формулы интегрального исчисления. Теоремы о среднем.* Формула Ньютона — Лейбница. Формула интегрирования по частям. Первая и вторая теоремы о среднем. Неравенство Чебышёва.

1.6. *Некоторые приложения интеграла.* Интегральный признак сходимости ряда. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме. Аддитивная функция ориентированного промежутка и интеграл. Длина пути. Площади геометрических фигур. Объем тела вращения.

1.7. *Несобственный интеграл.* Определения, примеры и основные свойства несобственных интегралов. Критерий сходимости несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Исследование сходимости несобственных интегралов. Признак сравнения. Признаки сходимости Абеля и Дирихле.

2. Бесконечные произведения, степенные и функциональные ряды.

2.1. *Бесконечные произведения.* Определение сходимости бесконечного произведения. Признаки сходимости. Формула Валлиса. Формула Стирлинга.

2.2. *Последовательности и ряды функций.* Понятие функционального ряда. Плотечная и равномерная сходимости. Примеры. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости ряда.

2.3. Теорема о перестановке пределов. Непрерывность равномерного предела. Теорема Дини о равномерной сходимости монотонной последовательности непрерывных функций. Теорема об интегрировании ряда. Теорема о дифференцировании суммы ряда.

2.4. *Степенные ряды.* Понятие степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда. Формула Коши — Адамара для радиуса сходимости степенного ряда. Свойства суммы степенного ряда. Операции над степенными рядами. Теорема Абеля о непрерывности степенного ряда на границе круга сходимости.

2.5. *Ряд Тейлора.* Ряд Тейлора бесконечно дифференцируемой функции. Понятие аналитической функции.

2.6. Равномерное приближение непрерывных функций многочленами. Теорема Вейерштрасса.

3. Метрические пространства.

3.1. *Определение метрического пространства и основных топологических понятий в метрическом пространстве.* Понятие метрической структуры. Примеры. Понятие открытой окрестности и окрестности множества. Точки прикосновения, предельные и изолированные точки по отношению к данному множеству. Открытые и замкнутые множества и их свойства. Понятие замыкания множества. Понятие границы и ее свойства. Шар как открытое множество. Понятие внутренности множества. Понятие плотного множества. Сепарабельные пространства. Примеры.

3.2. *Предел последовательности в метрическом пространстве.* Предельная точка последовательности и частичный предел. Фундаментальные последовательности. Полные метрические пространства.

3.3. *Непрерывные отображения метрических пространств.* Понятие предела функции. Эквивалентные определения. Свойства предела. Критерий Гейне. Теорема о суперпозиции. Элементарные теоремы о продолжении в равенствах и неравенствах. Непрерывные отображения. Понятие гомеоморфных отображений метрических пространств.

3.4. *Компактные множества в метрическом пространстве.* Свойства компактных множеств. Понятие полной ограниченности. Эквивалентные определения компактных множеств в метрических пространствах. Компактные множества в конечномерных евклидовых пространствах. Теорема о непрерывном образе компактного множества. Теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях.

3.5. *Равномерно непрерывные отображения.* Теорема Кантора. Теорема о продолжении равномерно непрерывных отображений, определенных на плотном множестве. Пополнение метрического пространства.

3.6. *Понятие нормированного пространства.* Свойства нормы. Нормы в $\mathbb{R}^n$. Пространства $B(E)$ и $C^n(E)$. Основные топологические понятия в нормированном пространстве: понятия окрестности (свойства), сходимости (свойства). Теорема об эквивалентности норм в конечномерном нормированном пространстве. Сходимость в $B(E)$ и равномерная сходимость. Понятие полного пространства. Полнота пространства непрерывных функций в равномерной норме.

3.7. *Пространство функций интегрируемых по Риману.* Неполнота пространства интегрируемых по Риману функций с интегральной нормой. Конструкция канторовских множеств. Их свойства (мера, замкнутость, совершенность, мощность). Пример всюду дифференцируемой функции, производная которой неинтегрируема по Риману.

Основная литература

1. Водопьянов С. К. *Интегрирование по Риману*. 2012.
2. Зорич В. А. *Математический анализ*. Т. 1, Т. 2
3. Решетняк Ю. Г. *Курс математического анализа*. Ч. 1 Книга 2., Ч. 2 Книга 1. Новосибирск: Изд-во Института математики, 1999.
4. Шведов И. А. *Компактный курс математического анализа*. Ч. 1. и Ч. 2., 2-е изд. переработ. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003.

Литература, рекомендуемая для работы на семинарах

5. Грешнов А. В. и др. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. 2-й семестр, 2-е изд. испр. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2012.
6. Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*.
7. Кудрявцев Л. Д. и др. *Сборник задач по математическому анализу*. т.2, т.3

Дополнительная литература

8. Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе*.
9. Дьедонне Ж. *Основы современного анализа*. М.: Мир, 1964.
10. Дятлов В. Н. Учебные пособия для студентов ММФ. <http://math.nsc.ru/~dvn/>
11. Львовский С. М. *Лекции по математическому анализу*, М.:Изд-во МЦНМО.
12. Рудин У. *Основы математического анализа*.
13. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 2

Программу составил

доцент В. Н. Потапов