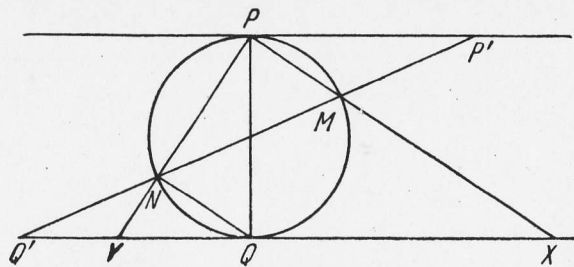


Отложим $PP' = -2\frac{a}{b}$ и $QQ' = -\frac{c}{2b}$, учитывая знаки¹⁾ (фиг. 4). Соединим P' и Q' прямой, которая пересекает окружность в точках M и N . Проведем PM и PN , которые пересекут QQ' в X и Y . Тогда QX и QY представляют корни уравнения по величине и по знаку.



Фиг. 4

Доказательство весьма просто, и мы оставляем его в качестве упражнения читателю. Другим, даже более простым, построением является следующее. Возьмем отрезок AB единичной длины. Проведем $BC = -\frac{2b}{a}$

перпендикулярно к AB и $CD = \frac{c}{a}$ перпендикулярно к BC в направлении BA . На AD как на диаметре построим окружность, пересекающую BC в X и Y . Тогда BX и BY являются корнями.

3. Если ac положительно, то PP' и QQ' имеют одно и то же направление. Проверить, что $P'Q'$ не пересечется с окружностью, если $b^2 < ac$, и будет касаться ее, если $b^2 = ac$. Проверить также, что если $b^2 = ac$, то во втором построении окружность будет касаться BC .

4. Доказать, что

$$\sqrt{pq} = \sqrt{p} \times \sqrt{q}, \quad \sqrt{p^2q} = p \sqrt{q}.$$

14. Некоторые теоремы о квадратичных иррациональностях. Две чистые квадратичные иррациональности будем называть *подобными*, если они являются рациональными кратными одной и той же иррациональности. Так,

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2},$$

и, следовательно, $\sqrt{8}$ и $\sqrt{\frac{25}{2}}$ — подобные иррациональности. С другой стороны, если M и N — положительные взаимно простые числа, причем ни одно из них не является квадратом целого числа, то $\sqrt{M}$ и $\sqrt{N}$ не являются подобными иррациональностями.

Действительно, допустим, что

$$\sqrt{M} = \frac{p}{q} \sqrt{\frac{t}{u}}, \quad \sqrt{N} = \frac{r}{s} \sqrt{\frac{t}{u}},$$

¹⁾ На фигуре изображен случай, когда b и c имеют одинаковый, а a — противоположный знак. Рекомендуем читателю начертить фигуры для других случаев.

где все буквы обозначают целые числа. Тогда $\sqrt{MN}$, очевидно, является рациональным числом, и, следовательно (см. пример II. 3), целым. Таким образом, $MN = P^2$, где P — целое число. Пусть $a, b, c, \dots$ — простые делители числа P , так что

$$MN = a^{2\alpha} b^{2\beta} c^{2\gamma} \dots,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — положительные целые числа. Тогда MN делится на $a^{2\alpha}$, откуда следует, что либо M делится на $a^{2\alpha}$, либо N делится на $a^{2\alpha}$, либо M и N оба делятся на a^α . Но эта последняя возможность должна быть отброшена, так как M и N , по предположению, взаимно простые числа. Это рассуждение применимо к каждому из множителей $a^{2\alpha}, b^{2\beta}, c^{2\gamma}, \dots$, так что M должно делиться на некоторые из этих множителей, а N — на остальные. Но тогда

$$M = P_1^2, \quad N = P_2^2,$$

где P_1^2 означает произведение некоторых из множителей $a^{2\alpha}, b^{2\beta}, c^{2\gamma}, \dots$, а P_2^2 — произведение остальных. Следовательно, M и N оба являются квадратами целых чисел, что противоречит нашему предположению.

ТЕОРЕМА. Если A, B, C, D рациональны и

$$A + \sqrt{B} = C + \sqrt{D},$$

то либо $A = C$ и $B = D$, либо B и D являются каждое квадратом рационального числа.

Действительно, $B - D$ рационально и

$$\sqrt{B} - \sqrt{D} = C - A$$

также рационально. Если B не равно D (в противном случае также и A равно C), то мы найдем, что

$$\sqrt{B} + \sqrt{D} = (B - D) / (\sqrt{B} - \sqrt{D})$$

также рационально. Следовательно, $\sqrt{B}$ и $\sqrt{D}$ рациональны.

СЛЕДСТВИЕ. Если $A + \sqrt{B} = C + \sqrt{D}$, тогда и $A - \sqrt{B} = C - \sqrt{D}$ (если только $\sqrt{B}$ и $\sqrt{D}$ не являются оба рациональными числами).

Примеры VIII. 1. Доказать, не применяя результатов предыдущего пункта, что $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ не являются подобными иррациональностями.

2. Доказать, что $\sqrt{a}$ и $\sqrt{1/a}$, где a рационально, — подобные иррациональности (если они вообще не рациональны).

3. Если a и b рациональны, то $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ не может быть рациональным без того, чтобы $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ были рациональными. То же справедливо и относительно $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, если $a \neq b$.

4. Если

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} + \sqrt{D},$$

то либо $A = C$ и $B = D$, либо $A = D$ и $B = C$, либо $\sqrt{A}, \sqrt{B}, \sqrt{C}, \sqrt{D}$ все рациональны или являются подобными иррациональностями. [Возвести в квадрат данное соотношение и применить теорему предыдущего пункта.]

5. Ни $(a + \sqrt{b})^3$, ни $(a - \sqrt{b})^3$ не могут быть рациональными, если $\sqrt{b}$ иррационально.

6. Доказать, что если $x = p + \sqrt{q}$, где p и q рациональны, то x^m , где m — любое целое число, может быть представлено в виде $P + Q\sqrt{q}$, где P и Q рациональны. Например,

$$(p + \sqrt{q})^2 = p^2 + q + 2p\sqrt{q}, \quad (p + \sqrt{q})^3 = p^3 + 3pq + (3p^2 + q)\sqrt{q}.$$

Отсюда следует, что любой многочлен

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

с рациональными коэффициентами $a_0, \dots, a_n$ может быть представлен в таком же виде: $P + Q\sqrt{q}$.

7. Если $a + \sqrt{b}$, где b не есть точный квадрат, является корнем алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами, то $a - \sqrt{b}$ также будет корнем этого уравнения.

8. Представить $\frac{1}{p + \sqrt{q}}$ в виде, указанном в примере 6. [Умножить числитель и знаменатель на $p - \sqrt{q}$.]

9. Вывести из примеров 6 и 8, что любое выражение вида $\frac{G(x)}{H(x)}$, где $G(x)$ и $H(x)$ — многочлены от x с рациональными коэффициентами, может быть представлено в виде $P + Q\sqrt{q}$, где P и Q рациональны.

10. Если p, q и $p^2 - q$ положительны, мы можем представить $\sqrt{p + \sqrt{q}}$ в форме $\sqrt{x + \sqrt{y}}$, где

$$x = \frac{1}{2} \{p + \sqrt{p^2 - q}\}, \quad y = \frac{1}{2} \{p - \sqrt{p^2 - q}\}.$$

11. Найти условия, при которых $\sqrt{p + \sqrt{q}}$, где p и q рациональны, может быть представлено в виде $\sqrt{x + \sqrt{y}}$, где x и y рациональны.

12. Если $a^2 - b$ положительно, то необходимым и достаточным условием для того, чтобы

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

было рационально, является рациональность чисел

$$\sqrt{a^2 - b} \text{ и } \sqrt{\frac{1}{2} \{a + \sqrt{a^2 - b}\}}.$$

15. Континуум. Совокупность всех действительных чисел, рациональных и иррациональных, называется *арифметическим континуумом*.

Мы будем предполагать, что прямая линия Δ , рассмотренная в п. 2, состоит из точек, соответствующих всем числам арифмети-

ческого континуума, и никаких других точек не содержит¹⁾. Точки прямой, совокупность которых можно назвать *линейным континуумом*, представляют тогда достаточно удобный образ арифметического континуума.

Мы достаточно подробно рассмотрели основные свойства небольшого числа классов действительных чисел, таких как, например, рациональные числа или квадратичные иррациональности. Приведем несколько дополнительных примеров, чтобы показать, насколько частными являются рассмотренные специальные классы чисел, и какую, грубо говоря, незначительную часть бесконечного разнообразия чисел, образующих континуум, они составляют.

(1) Рассмотрим более сложные иррациональные выражения, как, например,

$$z = \sqrt[3]{4 + \sqrt{15}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{15}}.$$

Предположение существования z может быть обосновано следующим образом. Сначала, как в п. 12, мы показываем, что существует число $y = \sqrt{15}$, для которого $y^2 = 15$, а затем, как в п. 10, мы можем определить числа $4 + \sqrt{15}$ и $4 - \sqrt{15}$. Далее, рассмотрим уравнение для z_1

$$z_1^3 = 4 + \sqrt{15}.$$

Правая часть этого уравнения иррациональна. Но те же рассуждения, которые привели нас к предположению существования действительного числа x , для которого $x^3 = 2$ (или любому другому рациональному числу), приведут нас к заключению о существовании такого числа z_1 , для которого $z_1^3 = 4 + \sqrt{15}$. Так мы определяем $z_1 = \sqrt[3]{4 + \sqrt{15}}$, и аналогично определяем $z_2 = \sqrt[3]{4 - \sqrt{15}}$. Наконец, как в п. 10, мы полагаем $z = z_1 + z_2$.

Легко проверить, что

$$z^3 = 3z + 8,$$

и нетрудно дать непосредственное доказательство существования единственного числа, удовлетворяющего этому уравнению.

В первую очередь z , если оно существует, должно быть положительно. Ибо $z = -\zeta$ дает $\zeta^3 - 3\zeta + 8 = 0$ или $3 - \zeta^2 = 8/\zeta$. Но это невозможно, если ζ положительно, так как тогда $\zeta^2 < 3$, $\zeta < 2$ и, следовательно, $8/\zeta > 4$, тогда как $3 - \zeta^2 < 3$.

Далее, уравнение не может удовлетворяться двумя различными числами z_1 и z_2 . Ибо, если

$$z_1^3 = 3z_1 + 8, \quad z_2^3 = 3z_2 + 8,$$

то z_1 и z_2 положительны и $z_1^3 > 8$, $z_2^3 > 8$, или $z_1 > 2$, $z_2 > 2$, а это невозможно, ибо, вычитая из первого уравнения второе и деля на $z_1 - z_2$, мы получаем, что

$$z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2 = 3.$$

Таким образом, существует не более одного z , для которого $z^3 = 3z + 8$, и это z не может быть рациональным, так как каждый рациональный корень

¹⁾ Это предположение является лишь гипотезой, принятой, во-первых, в силу того, что она достаточна для целей нашей геометрии, и, во-вторых, потому, что она снабжает нас удобной геометрической иллюстрацией аналитических процессов. Так как мы применяем геометрический язык только для иллюстраций, изучение оснований геометрии не входит в нашу задачу.

собой разумеется, разбиение их на два класса, обладающих свойствами (1), (2) и (3). Такое сечение может быть превращено в сечение всех чисел присоединением к L всех чисел, меньших чем β , и к R — всех чисел, больших чем γ . Ясно, что утверждение теоремы Дедекинда останется в силе, если мы заменим слова „действительные числа“ словами „действительные числа интервала (β, γ) “, и что в этом случае число α удовлетворяет неравенствам $\beta \leq \alpha \leq \gamma$.

18. Точки накопления. Любая система действительных чисел или точек прямой, соответствующих им, определенная каким бы то ни было образом, называется *множеством* чисел или точек. Множество может состоять, например, из всех положительных целых чисел или из всех рациональных точек.

Здесь чрезвычайно удобно пользоваться языком геометрии¹⁾. Допустим, что мы имеем некоторое множество точек, которое обозначим через S . Возьмем любую точку ξ , которая может принадлежать, а может и не принадлежать к S . Тогда существуют две возможности. Либо можно выбрать положительное число δ так, что интервал $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ не содержит ни одной точки из S , отличной от ξ ²⁾, либо это невозможно.

Допустим, например, что S состоит из точек, соответствующих всем положительным целым числам. Если ξ — положительное целое число, то мы можем взять в качестве δ любое число, меньшее единицы, и тогда осуществляется первая из перечисленных выше двух возможностей; или, если ξ лежит посередине между двумя целыми числами, то мы можем взять любое δ , меньшее половины. С другой стороны, если S состоит из всех рациональных точек, то, каково бы ни было δ , всегда осуществляется вторая возможность, ибо любой интервал содержит бесконечно много рациональных точек.

Допустим, что мы имеем дело со вторым случаем. Тогда любой интервал $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, как бы мала ни была его длина, содержит, по крайней мере, одну точку ξ_1 , принадлежащую к S и отличную от ξ . И это независимо от того, принадлежит ли само ξ к S или нет. В этом случае мы будем говорить, что ξ является *точкой накопления* S . Легко видеть, что интервал $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ должен содержать не только одну, но даже бесконечно много точек S . Ибо после того, как найдено ξ_1 , мы можем взять интервал $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$, содержащий ξ , но не содержащий ξ_1 , и в этом интервале, по условию, также должна содержаться точка ξ_2 , входящая в S и отличная от ξ . Очевидно, что мы можем это рассуждение повторить, заменив точку ξ_1 точкой ξ_2 и т. д. Таким образом, мы получаем сколько угодно точек

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$$

¹⁾ Вряд ли читатель нуждается в особом напоминании, что мы прибегаем к этому исключительно в целях удобства изложения.

²⁾ Эта оговорка, конечно, не нужна, если ξ само не принадлежит к S .

принадлежащих к S и лежащих внутри интервала $(\xi - \delta, \xi + \delta)$.

Точка накопления множества S может сама принадлежать к S , но может к S и не принадлежать. Следующие примеры иллюстрируют различные возможности.

Примеры IX. 1. Если S состоит из точек, соответствующих положительным целым числам или всем целым числам, то точек накопления нет.

2. Если S состоит из всех рациональных точек, то каждая точка прямой является точкой накопления.

3. Если S состоит из точек $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, то имеется одна точка накопления, а именно, точка 0.

4. Если S состоит из всех положительных рациональных точек, то точками накопления являются точка 0 и все положительные точки прямой.

19. Теорема Вейерштрасса. Общая теория точечных множеств представляет большой интерес и чрезвычайно важна в высших областях анализа. Но в своей большей части она слишком сложна для того, чтобы быть включенной в эту книгу. В ней имеется, однако, одна теорема, которая легко выводится из теоремы Дедекинда и которая нам понадобится в дальнейшем.

ТЕОРЕМА. Если множество S содержит бесконечно много точек и заключено целиком в некотором интервале (α, β) , тогда по крайней мере одна из точек этого интервала является точкой накопления S .

Мы разбиваем точки прямой Λ на два класса следующим образом. Точка P принадлежит к L , если существует бесконечно много точек из S , лежащих справа от P , а в противном случае точка P принадлежит к R . Тогда ясно, что условия (1) и (3) теоремы Дедекинда удовлетворяются, а так как α принадлежит к L и β — к R , то выполнено и условие (2).

Следовательно, существует такая точка ξ , что, как бы мало ни было δ , $\xi - \delta$ принадлежит к L , а $\xi + \delta$ — к R , так что интервал $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ содержит бесконечно много точек из S . Точка ξ является точкой накопления множества S .

Эта точка может, конечно, совпасть с α или с β , как, например, в том случае, когда $\alpha = 0, \beta = 1$ и S состоит из точек $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$. В этом случае точка 0 является единственной точкой накопления. Другое доказательство теоремы будет дано в п. 71.

РАЗНЫЕ ПРИМЕРЫ К ГЛАВЕ I

1. Каковы условия для того, чтобы $ax + by + cz = 0$ (1) для произвольных x, y, z , (2) для всех x, y, z , удовлетворяющих условию $ax + by + cz = 0$, (3) для всех x, y, z , удовлетворяющих двум условиям:

$$ax + by + cz = 0 \text{ и } Ax + By + Cz = 0?$$

2. Любое положительное рациональное число может быть представлено одним и только одним способом в виде

$$a_1 + \frac{a_2}{1 \cdot 2} + \frac{a_3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{a_k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_k$ — целые числа и

$$0 \leq a_1, 0 \leq a_2 < 2, 0 \leq a_3 < 3, \dots, 0 \leq a_k < k.$$

3. Любое положительное рациональное число может быть одним и только одним способом представлено в виде непрерывной дроби

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — целые числа и

$$a_1 \geq 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \dots, a_{n-1} > 0, a_n > 1.$$

[Элементы теории непрерывных дробей можно найти в учебниках алгебры*), а также в книге Харди и Райта, *Введение в теорию чисел*, гл. X.]

4. Найти рациональные корни (или доказать, что их нет) уравнения

$$9x^3 - 6x^2 + 15x - 10 = 0.$$

5. Отрезок прямой AB делится точкой C так, что $AB \cdot AC = BC^2$ (так называемое *золотое сечение*, см. Эвклид, кн. II, 11). Доказать, что отношение $\frac{AC}{AB}$ иррационально.

6. Пусть A иррационально. В каких случаях будет рационально отношение $\frac{aA+b}{cA+d}$, где a, b, c, d рациональны?

7. Некоторые элементарные неравенства. Пусть $a_1, a_2, \dots$ обозначают положительные числа (включая нуль) и $p, q, \dots$ — положительные целые числа. Так как разности $a_1^p - a_2^p$ и $a_1^q - a_2^q$ одного знака, то мы имеем $(a_1^p - a_2^p)(a_1^q - a_2^q) \geq 0$ или

$$a_1^{p+q} + a_2^{p+q} \geq a_1^p a_2^q + a_1^q a_2^p \quad (1)$$

— неравенство, которое может быть также записано в виде

$$\frac{a_1^{p+q} + a_2^{p+q}}{2} \geq \left(\frac{a_1^p + a_2^p}{2} \right) \left(\frac{a_1^q + a_2^q}{2} \right). \quad (2)$$

Повторно применяя эту формулу, мы получаем

$$\frac{a_1^{p+q+r+\dots} + a_2^{p+q+r+\dots}}{2} \geq \left(\frac{a_1^p + a_2^p}{2} \right) \left(\frac{a_1^q + a_2^q}{2} \right) \left(\frac{a_1^r + a_2^r}{2} \right) \dots \quad (3)$$

и, в частности,

$$\frac{a_1^p + a_2^p}{2} \geq \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^p. \quad (4)$$

*) См. также А. Я. Хинчин, *Ценные дроби*, ГТТИ, 1935; Ф. Клейн, *Элементарная математика с точки зрения высшей*, т. 1, ГТТИ, 1935. (Прим. перев.)

Когда $p=q=1$ в (1), или $p=2$ в (4), эти неравенства являются просто другими формами неравенства $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2$, которое выражает тот факт, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

8. Обобщения на n чисел. Если мы запишем $\frac{1}{2}n(n-1)$ неравенств типа (1), которые могут быть образованы из n чисел, и сложим их, то мы получим неравенство

$$n \sum a^{p+q} \geq \sum a^p \sum a^q \quad (5)$$

или

$$\frac{1}{n} \sum a^{p+q} \geq \left(\frac{1}{n} \sum a^p \right) \left(\frac{1}{n} \sum a^q \right). \quad (6)$$

Отсюда мы можем вывести очевидное обобщение неравенства (3), которое читатель сможет сформулировать сам, и, в частности, неравенство

$$\frac{1}{n} \sum a^p \geq \left(\frac{1}{n} \sum a \right)^p. \quad (7)$$

9. Общая форма теоремы об арифметическом и геометрическом средних. Несколько иным неравенством является то, которое выражает, что арифметическое среднее $a_1, a_2, \dots, a_n$ не меньше их геометрического среднего. Допустим, что a_r и a_s — наибольшее и наименьшее из этих чисел (если таких наибольших или наименьших несколько, то безразлично, какие из них мы возьмем), и пусть G будет их геометрическим средним. Мы можем предположить, что $G > 0$, так как если $G = 0$, то справедливость предложения очевидна. Если мы теперь заменим a_r и a_s числами

$$a'_r = G, \quad a'_s = a_r a_s / G,$$

то их геометрическое среднее не изменится. А так как

$$a'_r + a'_s - a_r - a_s = (a_r - G)(a_s - G)/G \leq 0,$$

то мы при этом заведомо не увеличим их арифметического среднего.

Ясно, что мы можем повторять это рассуждение до тех пор, пока не заменим каждое из $a_1, a_2, \dots, a_n$ числом G — для этого потребуется не более n шагов. Так как окончательное значение арифметического среднего будет G , исходное значение не могло быть меньшим.

10. Неравенство Коши. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ — любые две системы положительных или отрицательных чисел. Легко убедиться в справедливости тождества

$$(\sum a_r b_r)^2 = \sum a_r^2 \sum b_r^2 - \sum (a_r b_s - a_s b_r)^2,$$

где r и s принимают значения $1, 2, \dots, n$. Отсюда следует, что

$$(\sum a_r b_r)^2 \leq \sum a_r^2 \sum b_r^2.$$

11. Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ положительны, то

$$\sum a_r \sum \frac{1}{a_r} \geq n^2.$$

12. Если a, b и c положительны и $a + b + c = 1$, то

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8. \quad (\text{Экз. 1932 г.})^*)$$

13. Если a и b положительны и $a + b = 1$, то

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}. \quad (\text{Экз. 1926 г.})$$

14. Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ положительны и $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, то

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq 1 + s_n + \frac{s_n^2}{2!} + \dots + \frac{s_n^n}{n!}. \quad (\text{Экз. 1909 г.})$$

15. Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ — две системы положительных чисел, записанные каждая в убывающем порядке, то

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \leq n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n).$$

16. Если $a, b, c, \dots, k$ и $A, B, C, \dots, K$ — две системы чисел, причем все числа первой системы положительны, то

$$\frac{aA + bB + \dots + kK}{a + b + \dots + k}$$

лежит между алгебраически наименьшим и наибольшим из чисел $A, B, \dots, K$.
[Примеры 7—16 являются, большей частью, весьма специальными случаями известных общих теорем, которые систематически изложены в книге Харди, Литтльвуда и Поля, *Неравенства* (Кембридж, 1934 г.).]**)
См. также гл. IV, п. 74 и Приложение I.]

17. Если $\sqrt{p}$ не подобно $\sqrt{q}$ и $a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq} = 0$, где a, b, c, d рациональны, то $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0$.

[Представить $\sqrt{p}$ в форме $M + N\sqrt{q}$, где M и N рациональны, и применить теорему п. 14.]

18. Показать, что если

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} = 0,$$

где a, b, c — рациональные числа, то $a = 0, b = 0, c = 0$.

19. Любой полином от $\sqrt{p}$ и $\sqrt{q}$ с рациональными коэффициентами (т. е. сумма конечного числа выражений вида $A(\sqrt{p})^m(\sqrt{q})^n$, где m и n — целые числа и A рационально) может быть представлен в форме

$$a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq},$$

где a, b, c, d рациональны.

20. Выразить $\frac{a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q}}{d + e\sqrt{p} + f\sqrt{q}}$, где $a, b, c, \dots$ рациональны, в форме

$A + B\sqrt{p} + C\sqrt{q} + D\sqrt{pq}$, где A, B, C, D рациональны.

*) В дальнейшем автор приводит много задач, фигурировавших на экзаменах повышенной трудности в Кембриджском университете (так называемых *Mathematical Tripos*), которые сдаются студентами, претендующими на диплом с отличием. По всему университетскому курсу анализа проводится обычно три таких экзамена. Для каждой задачи в книге указывается год, в котором она фигурировала на этих экзаменах. (Прим. перев.)

**) Книга переведена на русский язык (Москва, 1948). (Прим. ред.)

[Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q}}{d + e\sqrt{p} + f\sqrt{q}} &= \frac{(a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q})(d + e\sqrt{p} - f\sqrt{q})}{(d + e\sqrt{p})^2 - f^2q} = \\ &= \frac{\alpha + \beta\sqrt{p} + \gamma\sqrt{q} + \delta\sqrt{pq}}{\varepsilon + \zeta\sqrt{p}}, \end{aligned}$$

где α, β и т. д. — рациональные числа, которые могут быть легко определены. Окончательное преобразование к требуемому выражению производится теперь умножением числителя и знаменателя на $\varepsilon - \zeta\sqrt{p}$. Например, показать, что

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}.$$

21. Если a, b, x, y — рациональные числа, удовлетворяющие соотношению

$$(ay - bx)^2 + 4(a - x)(b - y) = 0,$$

то либо $x = a$ и $y = b$, либо $1 - ab$ и $1 - xy$ являются квадратами рациональных чисел. (Экз. 1903 г.)

22. Если все значения x и y , определяемые соотношениями

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 1, \quad a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 1,$$

где a, h, b, a', h', b' рациональны, также рациональны, то

$$(h - h')^2 - (a - a')(b - b') \text{ и } (ab' - a'b)^2 + 4(ah' - a'h)(bh' - b'h)$$

являются квадратами рациональных чисел. (Экз. 1899 г.)

23. Показать, что $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ суть полиномы третьей степени от $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ с рациональными коэффициентами и что $\sqrt{2} - \sqrt{6} + 3$ — дробно-линейная функция от $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. (Экз. 1905 г.)

24. Показать, что

$$\sqrt{a + 2m\sqrt{a - m^2}} + \sqrt{a - 2m\sqrt{a - m^2}}$$

равно $2m$, если $2m^2 > a > m^2$, и равно $2\sqrt{a - m^2}$, если $a > 2m^2$.

25. Показать, что любой полином от $\sqrt[3]{2}$ с рациональными коэффициентами может быть представлен в виде

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4},$$

где a, b, c рациональны.

Вообще, если p — любое рациональное число, то любой полином от $\sqrt[p]{p}$ с рациональными коэффициентами может быть представлен в виде

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_{m-1}\alpha^{m-1},$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ рациональны и $\alpha = \sqrt[p]{p}$. Ибо всякий такой полином имеет вид

$$b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \dots + b_k\alpha^k,$$

где коэффициенты b рациональны. Если $k \leq m - 1$, то это уже есть требуемый вид. Если же $k > m - 1$, то пусть α' будет любая целая степень

выше $(m-1)$ -ой. Тогда $r = \lambda m + s$, где λ — целое число и $0 \leq s \leq m-1$. Следовательно $\alpha^r = \alpha^{\lambda m + s} = p^{\lambda} \alpha^s$, и, таким образом, мы можем избавиться от всех степеней α , больших чем $(m-1)$ -ая.

26. Выразить $(\sqrt[3]{2}-1)^5$ и $\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}$ в форме

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4},$$

где a, b, c рациональны. [Умножить числитель и знаменатель второго выражения на $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$.]

27. Если

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0,$$

где a, b, c рациональны, то $a=0, b=0, c=0$.

[Пусть $y = \sqrt[3]{2}$. Тогда $y^3 = 2$ и

$$cy^2 + by + a = 0.$$

Следовательно, $2cy^2 + 2by + ay^3 = 0$ или

$$ay^2 + 2cy + 2b = 0.$$

Умножая эти квадратные уравнения на a и c и вычитая одно из другого, получим, что $(ab - 2c^2)y + a^2 - 2bc = 0$ или $y = -\frac{a^2 - 2bc}{ab - 2c^2}$, т. е. рациональное число, что невозможно. Единственная другая возможность заключается в том, что $ab - 2c^2 = 0$ и $a^2 - 2bc = 0$.

Отсюда $ab = 2c^2, a^4 = 4b^2c^2$. Если ни a , ни b не равны нулю, мы можем разделить второе уравнение на первое, что дает $a^3 = 2b^3$. Но это невозможно, так как $\sqrt[3]{2}$ не может быть равно рациональному числу $\frac{a}{b}$. Следовательно, $a=0$ и $b=0$, а теперь из основного соотношения следует, что a, b и c все равны нулю.

Как следствие мы получаем, что если

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = d + e\sqrt[3]{2} + f\sqrt[3]{4},$$

то $a=d, b=e, c=f$.

Можно вообще доказать, что если

$$a_0 + a_1 p^{1/m} + \dots + a_{m-1} p^{(m-1)/m} = 0,$$

где p не есть точная m -ая степень, то $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$; но это доказательство менее просто.]

28. Если $A + \sqrt[3]{B} = C + \sqrt[3]{D}$, то либо $A=C$ и $B=D$, либо B и D суть кубы рациональных чисел.

29. Если $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} = 0$, то либо одно из чисел A, B, C равно нулю, а два остальных равны по величине, но обратны по знаку, либо $\sqrt[3]{A}, \sqrt[3]{B}, \sqrt[3]{C}$ — рациональные кратные одной и той же иррациональности $\sqrt[3]{X}$.

30. Найти рациональные числа α, β так, чтобы

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \alpha + \beta\sqrt{2}.$$

31. Если $(a-b^3)b > 0$, то

$$\sqrt[3]{a + \frac{8b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}} + \sqrt[3]{a - \frac{8b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}$$

рационально. [Каждое из выражений под знаками кубического корня может быть представлено в виде

$$\left\{ \alpha + \beta\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}} \right\}^3,$$

где α и β рациональны.]

32. Доказать, что

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25}),$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}} = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}.$$

33. Если $\alpha = \sqrt[n]{p}$, то любой полином от α является корнем некоторого уравнения степени n с рациональными коэффициентами.

[Мы можем представить любой полином от α в форме

$$x = l_1 + m_1\alpha + \dots + r_1\alpha^{n-1},$$

где $l_1, m_1, \dots$ рациональны (см. пример 25).

Аналогично,

$$x^2 = l_2 + m_2\alpha + \dots + r_2\alpha^{n-1}$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$x^n = l_n + m_n\alpha + \dots + r_n\alpha^{n-1}.$$

Отсюда

$$L_1x + L_2x^2 + \dots + L_nx^n = \Delta,$$

где Δ означает определитель

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & \dots & r_1 \\ l_2 & m_2 & \dots & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_n & m_n & \dots & r_n \end{vmatrix},$$

а $L_1, L_2, \dots$ — алгебраические дополнения элементов $l_1, l_2, \dots, l_n$.

34. Применить предыдущее рассуждение к $x = p + \sqrt{q}$ и вывести теорему п. 14.

35. Показать, что

$$y = a + bp^{1/3} + cp^{2/3}$$

удовлетворяет уравнению

$$y^3 - 3ay^2 + 3y(a^3 - bcp) - a^3 - b^3p - c^3p^2 + 3abcp = 0.$$

36. Алгебраические числа. Мы видели, что некоторые иррациональные числа (как, например, $\sqrt{2}$) являются корнями уравнений вида

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — целые числа. Такие иррациональные числа называются *алгебраическими*; все другие иррациональные числа, такие, как, например, π (см. п. 15), называются *трансцендентными*.

37. Если x и y — алгебраические числа, то таковыми же являются $x+y$, $x-y$ и xy , а также $\frac{x}{y}$, если $y \neq 0$.

[Требуется некоторые сведения из алгебры. Мы должны воспользоваться следующими теоремами: во-первых, что элементарные симметрические функции Σx_r , $\Sigma x_r x_s$, ... корней уравнения

$$x^m - p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} - \dots \pm p_m = 0 \quad (1)$$

равны $p_1, p_2, \dots$ и, во-вторых, что любой симметрический полином (см. пп. 23 и 31) от $x_1, x_2, \dots$ с целочисленными коэффициентами является полиномом от $p_1, p_2, \dots$ с целочисленными коэффициентами.

Мы можем записать уравнения, которым удовлетворяют x и y , в виде (1) и

$$y^n - q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} - \dots \pm q_n = 0, \quad (2)$$

где $p_1, p_2, \dots$ и $q_1, q_2, \dots$ рациональны. Мы предполагаем, что корни (1) и (2) суть $x_1, x_2, \dots$ и $y_1, y_2, \dots$, причем $x = x_1$ и $y = y_1$, и образуем произведение

$$P(z) = \prod_{h=1}^m \prod_{k=1}^n (z - x_h - y_k)$$

по всем mn парам значений h и k . Тогда $P(z)$ является полиномом степени mn от z , а его коэффициенты суть симметрические полиномы от x_h и y_k с целочисленными коэффициентами. Отсюда следует, что эти коэффициенты суть полиномы от $p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ с целочисленными коэффициентами, т. е. рациональны. Таким образом, $P(z) = 0$ является уравнением степени mn с рациональными коэффициентами; но $x+y$ является одним из его корней.

Доказательство для $x-y$ и xy аналогично. Если $y \neq 0$, и мы предположим (что не ограничивает общности наших рассуждений), что $q_n \neq 0$, то $z = \frac{1}{y}$ удовлетворяет уравнению

$$z^n - r_1 z^{n-1} + r_2 z^{n-2} - \dots \pm r_n = 0,$$

где $r_1 = \frac{q_{n-1}}{q_n}$, $r_2 = \frac{q_{n-2}}{q_n}$, ... Следовательно, z есть алгебраическое число, а, следовательно, $x/y = xz$ — также алгебраическое число.

В частности, $x+k$ и kx — алгебраические числа, если k рационально.]

38. Если

$$x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \dots + \alpha_m = 0,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — алгебраические числа, то x — также алгебраическое число.

[Это может быть доказано аналогично предыдущему. Каждое α_r удовлетворяет уравнению

$$\alpha_r^{n_r} - p_{r,1} \alpha_r^{n_r-1} + \dots \pm p_{r,n_r} = 0$$

с рациональными коэффициентами. Предположим, что корнями этого урав-

нения являются $\alpha_{r,1}, \alpha_{r,2}, \dots, \alpha_{r,n_r}$ (причем $\alpha_r = \alpha_{r,1}$), и образуем произведение

$$P(x) = \prod (x^m + \alpha_{1,s_1} x^{m-1} + \dots + \alpha_{m,s_m})$$

по всем $N = n_1 n_2 \dots n_m$ комбинациям индексов $s_1, s_2, \dots, s_m$. Таким образом, мы получаем полином от x степени mN с рациональными коэффициентами.

В частности, $x^{m/n}$ — алгебраическое число, если само x — число алгебраическое, а m и n — целые.]

39. Если

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0,$$

то

$$x^8 - 16x^6 + 58x^4 - 48x^2 + 9 = 0.$$

40. Найти уравнения с рациональными коэффициентами, которым удовлетворяют следующие алгебраические числа:

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}.$$

41. Если $x^3 = x + 1$, то $x^{3n} = a_n x + b_n + c_n x^{-1}$, где

$$a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n + c_n, \quad c_{n+1} = a_n + c_n.$$

42. Если $x^6 + x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 + 1 = 0$ и $y = x^4 - x^2 + x - 1$, то y удовлетворяет квадратному уравнению с рациональными коэффициентами.

(Экз. 1903 г.)

[Находим, что $y^2 + y + 1 = 0$.]