

Содержание

1. Подготовительные занятия	3
2. Метод математической индукции	6
3. Комбинаторика и бином Ньютона	10
4. Верхние и нижние границы множеств	11
5. Предел последовательности	15
6. Операции над пределами	18
7. Признаки существования пределов	21
8. Подпоследовательности и частичные пределы	24
9. Экспонента	29
10. Предел функции	31
11. Предел функции и арифметические операции	34
12. Символы O и o	38
13. Непрерывные функции	40
14. Асимптотические разложения	41
15. Производная	48
16. Обратная функция	50
17. Дифференциал	51
18. Теоремы Ролля и Лагранжа	51
19. Производные старших порядков	52
20. Многочлен Тейлора	53

21. Приложения производной	54
22. Производная и экстремум	55
23. Вторая производная и выпуклость	55
24. Исследование функции	56
Список литературы	58

СЕМИНАР 1. Подготовительные занятия

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Повторить определение модуля и решить задачи с модулями.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение 1.1. Абсолютной величиной или модулем числа $x \in \mathbb{R}$ называется число $|x|$, равное x , если $x \geq 0$, и $-x$, если $x < 0$.

СВОЙСТВА МОДУЛЯ

1) Для любых x и y из $\mathbb{R}$ выполнено

$$|xy| = |x| \cdot |y|.$$

В частности, имеем $|-x| = |-1| \cdot |x| = |x|$ для всякого $x \in \mathbb{R}$.

2) Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Тогда

a) неравенство $|x| \leq a$ равносильно системе неравенств

$$-a \leq x \leq a;$$

b) неравенство $|x| < a$ равносильно системе неравенств

$$-a < x < a.$$

НЕРАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКА

1) Для любых чисел $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (1.1)$$

2) Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$||x| - |y|| \leq |x - y|. \quad (1.2)$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.1. Решить неравенство: $|2x - 1| < |x - 1|$.

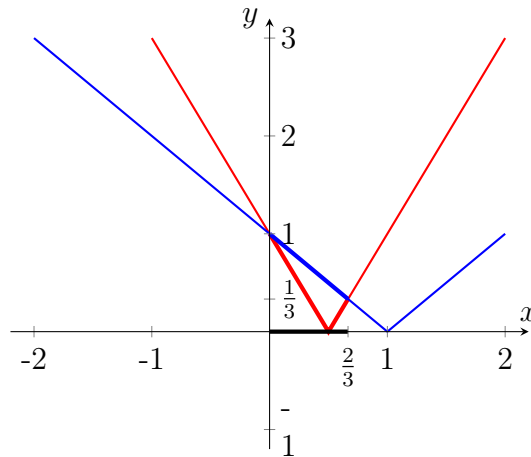


Рис. 1: $y = |2x - 1|$, $y = |x - 1|$.

Решение. Вспомним некоторые свойства модуля. Для произвольного a имеем: $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Для произвольного a и произвольного $b > 0$ справедливо следующее утверждение: $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$.

Таким образом, $|x - 1| = 0$ справедливо только при $x - 1 = 0$. Поскольку модуль всегда неотрицателен, получаем, что $|x - 1| > 0$ при $x - 1 \neq 0$.

При $x - 1 = 0$ исходное неравенство обращается в $|2 \cdot 1 - 1| < |1 - 1|$ и не выполняется. Таким образом, $x = 1$ не принадлежит множеству решений исходного неравенства.

При $x \neq 1$ можно применить второе свойство и переписать наше неравенство:

$$-|x - 1| < 2x - 1 < |x - 1|, \quad x \neq 1.$$

Раскроем модуль по определению на множестве $\{x - 1 \neq 0\}$:

$$\begin{cases} -(x - 1) < 2x - 1 < x - 1, & x - 1 > 0, \\ x - 1 < 2x - 1 < -(x - 1), & x - 1 < 0. \end{cases}$$

Добавим $x - 1$ к обоим двойным неравенствам:

$$\begin{cases} 0 < 3x - 2 < 2x - 2, & x > 1, \\ 2x - 2 < 3x - 2 < 0, & x < 1. \end{cases}$$

Заметим, что, какое бы $x > 1$ мы не выбрали, неравенство $3x - 2 < 2x - 2$, эквивалентное $x < 0$, не будет выполняться. Следовательно, при $x > 1$ решений у неравенства нет.

При $x < 1$ из неравенства $2x - 2 < 3x - 2$ следует, что $x > 0$, а из неравенства $3x - 2 < 0$ следует, что $x < \frac{2}{3}$.

Получаем ответ: $\{x < 1\} \cap \{x > 0\} \cap \{x < \frac{2}{3}\} = (0, \frac{2}{3})$. □

Задача 1.2. Решить неравенство: $|x + 2| - |x| > 1$.

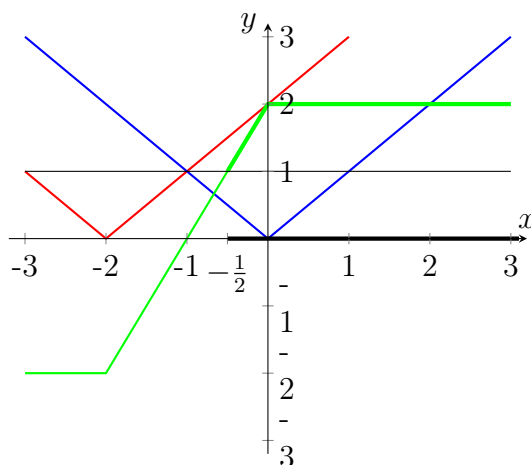


Рис. 2: $y = |x + 2|$, $y = |x|$, $y = |x + 2| - |x|$.

Решение. Найдем интервалы на которых выражения под модулями знакостоянны.

На интервале $(-\infty, -2)$ справедливо неравенство $x + 2 < 0$, а, соответственно, на промежутке $[-2, \infty)$ имеем $x + 2 \geq 0$. Аналогично рассмотрим второе подмодульное выражение. Неравенство $x < 0$ справедливо на интервале $(-\infty, 0)$, а неравенство $x \geq 0$ — на промежутке $[0, \infty)$.

Разобьем числовую прямую на промежутки так, чтобы каждое из подмодульных выражений сохраняло знак на каждом из промежутков:

$$\mathbb{R} = (-\infty, -2) \cup [-2, 0) \cup [0, \infty).$$

Выпишем неравенство на каждом промежутке, раскрывая модули по определению:

$$\begin{cases} -(x + 2) - (-x) > 1, & x \in (-\infty, -2), \\ (x + 2) - (-x) > 1, & x \in [-2, 0), \\ (x + 2) - (x) > 1, & x \in [0, \infty). \end{cases}$$

Решаем каждое из неравенств с учетом интервала, на котором оно определено.

На интервале $(-\infty, -2)$ не существует ни одного значения x , для которого неравенство $-2 > 1$ выполнено.

На промежутке $[-2, 0)$ неравенству удовлетворяют все $x > -\frac{1}{2}$.

На промежутке $[0, \infty)$ любое значение удовлетворяет неравенству $2 > 1$.

Таким образом, ответом будет множество $\{x \mid x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup [0, \infty)\} = \{x \mid (-\frac{1}{2}, \infty)\}$. $\square$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[Д, 21а, 22, 23, 24, 25, 26, 27].

СЕМИНАР 2. Метод математической индукции

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Знать формулировку принципа математической индукции и уметь использовать его решения задач.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение 2.1. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если с каждым числом $x \in X$ ему принадлежит также число $x + 1$.

ПРИМЕРЫ: $\mathbb{R}$; $[0, \infty)$; $(0, \infty)$; $[1, \infty)$.

Задача 2.1. Пересечение любой совокупности индуктивных множеств является индуктивным множеством.

Множеством натуральных чисел называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащих 1.

Совокупность натуральных чисел обозначается символом $\mathbb{N}$; его элементы называются *натуральными числами*.

Множеством целых чисел называется совокупность

$$\mathbb{N} - \mathbb{N} = \{x - y \mid x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Совокупность целых чисел обозначается символом $\mathbb{Z}$; его элементы называются *целыми числами*.

Теорема 2.1 (Принцип математической индукции [В, раздел 1.12]). *Если подмножество $E \subset \mathbb{N}$ таково, что*

- 1) $1 \in E$ и
 - 2) *вместе с каждым числом $x \in E$ множеству E принадлежит число $x + 1$,*
- то $E = \mathbb{N}$.*

Принцип математической индукции можно сформулировать также в следующей эквивалентной форме.

Пусть дано высказывание $P(n)$, зависящее от натурального n . Предположим, что

- 1) высказывание $P(1)$ истинно (база индукции),*
- 2) из истинности $P(n)$ можно вывести истинность $P(n + 1)$ (индукционный шаг).*

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ высказывание $P(n)$ истинно.

Задача 2.2. Доказать эквивалентность двух сформулированных принципов математической индукции.

УКАЗАНИЕ. Если дано $P(n)$, то полагаем

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ истинно}\}.$$

Если же дано множество E , то в качестве высказывания $P(n)$ возьмем следующее: $P(n)$ верно, если $n \in E$.

При решении задач часто приходится применять следующие более общие принципы математической индукции (см. [В, раздел 1.12]).

Формулируемый ниже вариант индукции называется индукцией вверх:

Если подмножество $E \subset \mathbb{Z}$ таково, что

- 1) $k_0 \in E$ и*
- 2) вместе с каждым числом $x \in E$, $x \geq k_0$, множеству E принадлежит число $x + 1$, то $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq k_0\} \subset E$.*

Вариант индукции, формулируемый ниже, называется индукцией вниз.

Если подмножество $E \subset \mathbb{Z}$ таково, что

- 1) $k_0 \in E$ и*
- 2) вместе с каждым числом $x \in E$, $x \leq k_0$, множеству E принадлежит число $x - 1$, то $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq k_0\} \subset E$.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 2.3. Пусть даны $n \geq 2$ вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. Пусть $x_m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, а $x_M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (существование наименьшего и наибольшего чисел конечной совокупности в $\mathbb{R}$ доказано в [В, раздел 1.12.1]). Тогда существует перенумерация $y_1, y_2, \dots, y_n$ такая, что $y_{n-1} = x_M$, а $y_n = x_m$.

Решение. База индукции начинается с $n = 2$. Среди двух чисел x_1, x_2 всегда известно в каком порядке они располагаются: либо $x_1 \leq x_2$, либо $x_2 \leq x_1$.

Если $x_2 \leq x_1$, то желаемая перенумерация совпадает с исходной. Если же $x_1 \leq x_2$, то полагая $y_1 = x_2$, $y_2 = x_1$, получаем желаемую перенумерацию.

Пусть всегда можно получить желаемую перенумерацию для совокупности, состоящей из $n \geq 2$ элементов. Докажем возможность такой перенумерации для совокупности $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$, состоящей из $n + 1$ элемента. По индукционному предположению элементы совокупности $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно переставить так, что в новой совокупности $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ элемент $y_n = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, а $y_{n-1} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Рассмотрим теперь три элемента y_{n-1}, y_n, x_{n+1} . Возможны три случая:

- 1) $x_{n+1} \leq y_n$;
- 2) $x_{n+1} \geq y_{n-1}$;
- 3) $y_n \leq x_{n+1} \leq y_{n-1}$.

В первом случае желаемой перенумерацией будет

$$\{y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, y_n, y_{n-1}, x_{n+1}\};$$

во втором —

$$\{y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}, x_{n+1}, y_n\};$$

а в третьем —

$$\{y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, x_{n+1}, y_{n-1}, y_n\}.$$

□

Задача 2.4. Доказать, что если $y_1 > 0, y_2 > 0, \dots, y_n > 0$ и $y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n = 1$, то

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n \geq n. \quad (2.1)$$

Равенство в этом неравенстве будет тогда и только тогда, когда все числа равны между собой.

Доказательство. База индукции очевидна. Пусть неравенство справедливо для n чисел. Докажем его для $(n + 1)$ -го числа.

Рассмотрим $n + 1$ положительных чисел $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$, не равных между собой и таких, что $y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_{n+1} = 1$. Если нужно, перенумеруем эти числа так, чтобы $y_n > 1, y_{n+1} < 1$. Для этого достаточно взять

в качестве y_n наибольшее число совокупности $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$, а в качестве y_{n+1} — наименьшее. (Возможность такой перенумерации доказана в предыдущей задаче.)

Введем теперь следующие обозначения:

$$z_1 = y_1, z_2 = y_2, \dots, z_{n-1} = y_{n-1}, z_n = y_n \cdot y_{n+1}.$$

Тогда все z_i положительны и

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = 1.$$

Следовательно, по индукционному предположению

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n \cdot y_{n+1} \geq n.$$

Докажем, что $y_n + y_{n+1} > y_n \cdot y_{n+1} + 1$ или

$$y_n + y_{n+1} - y_n \cdot y_{n+1} - 1 > 0.$$

Разложим левую часть на множители:

$$\begin{aligned} y_n + y_{n+1} - y_n \cdot y_{n+1} - 1 \\ = y_n(1 - y_{n+1}) - (1 - y_{n+1}) \\ = (y_n - 1)(1 - y_{n+1}) > 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство очевидно, так как $y_n > 1$, $y_{n+1} < 1$.

Из написанного выводим

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n + y_{n+1} \\ > y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n \cdot y_{n+1} + 1 \geq n + 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если все числа y_i равны между собой, то в соотношении (2.1) мы имеем очевидное равенство.

Если же в соотношении (2.1) мы имеем равенство, а числа y_i не равны между собой, то в силу (2.2) не может быть равенства и в соотношении (2.1). $\square$

Задача 2.5. Вывести из задачи 2.4 неравенство Коши между геометрическими и арифметическими средними: пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — неотрицательные числа и $n \geq 1$. Тогда

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}. \quad (2.3)$$

Строгое неравенство выполняется тогда и только тогда, когда не все x_i равны между собой.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[Д, 1–4, 6–10], [ГМП, Глава 2].

СЕМИНАР 3. Комбинаторика и бином Ньютона

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Узнать, как вычислять число перестановок, размещений и сочетаний. Уметь вычислять комбинаторные числа $n!$, A_n^k , C_n^k . Узнать выражение для бинома Ньютона и уметь применять его для конкретных степеней.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В формулируемой ниже теореме мы используем следующие обозначения: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k+1))}{k!}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, $0! = 1$, $C_n^0 = 1$.

Теорема 3.1 (Бином Ньютона [В, раздел 1.12.5]). *Если $x, y \in \mathbb{R}$, то*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k = x^n + \frac{n}{1!} x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} y^2 + \dots + y^n \quad (3.1)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть множество E состоит из натуральных чисел, для которых справедливо равенство (3.1). Принадлежность $1 \in E$ очевидна, так как

$$(x + y)^1 = x + y$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Докажем, что E — индуктивное множество. Если натуральное число n принадлежит E , т. е. выполнено (3.1), то

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)^n (x + y) = (x + y) \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^{n+1-k} y^k \\ &= C_{n+1}^0 x^{n+1} + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) x^{n+1-k} y^k + C_{n+1}^0 y^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Остается проверить $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Действительно,

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1-k+k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k. \end{aligned}$$

Окончательно, (3.2) равно

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^{n+1-k} y^k.$$

Таким образом, в силу принципа математической индукции $E = \mathbb{N}$. $\square$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 3.1. $\sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}.$

Задача 3.2. $\sum_{s=0}^n C_n^s C_m^{k-s} = C_{n+m}^k.$

Задача 3.3. $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$

СЕМИНАР 4. Верхние и нижние границы множеств

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Уметь находить точные верхние и нижние грани для модельных множеств. Изучить основные свойства точных верхних и нижних границ числовых множеств, их связь с арифметическими и теоретико-множественными операциями.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пусть дано непустое множество $A \subset \mathbb{R}$. Число $L \in \mathbb{R}$ ($l \in \mathbb{R}$) называется *верхней* (*нижней*) границей множества A , если $x \leq L$ (соответственно, $x \geq l$) для всякого $x \in A$.

Совокупность всех верхних (нижних) границ для множества $A \subset \mathbb{R}$ обозначается символом $\Gamma^+(A)$ ($\Gamma^-(A)$).

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху (снизу)*, если существует число L (l) такое, что

$$x \leq L \quad (l \leq x) \quad \text{для любого числа } x \in A. \quad (4.1)$$

Из этого определения выводим, что если множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху (снизу), то множество $\Gamma^+(A)$ ($\Gamma^-(A)$) непустое.

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если оно одновременно ограничено сверху и снизу.

Определение 4.1. Пусть дано непустое множество $A \subset \mathbb{R}$.

(I) Число $M \in \mathbb{R}$ называется *наибольшим* элементом множества A , если

- 1) $M \in A$ и
- 2) $M \in \Gamma^+(A)$, т. е. M является верхней границей множества A .

(II) Число $m \in \mathbb{R}$ называется *наименьшим* элементом множества A , если

- 1) $m \in A$ и
- 2) $m \in \Gamma^-(A)$, т. е. m является нижней границей множества A .

Определение 4.2. Пусть дано непустое множество $A \subset \mathbb{R}$. Наименьшая из его верхних границ, если таковая существует, называется *точной верхней границей* множества A и обозначается символом $\sup A$ ($\sup$ сокращение латинского слова *supremum* — наивысший). Таким образом,

$$\sup A = \min \Gamma^+(A).$$

Наибольшая из нижних границ множества A , если таковая существует, называется *точной нижней границей* множества A и обозначается символом $\inf A$ ($\inf$ сокращение латинского слова *infimum* — низайший). Таким образом,

$$\inf A = \max \Gamma^-(A).$$

Теорема 4.1 (о существовании точных верхней и нижней границ числового множества [В, 1.25]). *Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю (нижнюю) границу.*

При нахождении точных верхних и нижних границ множества $A \subset \mathbb{R}$ удобно использовать следующий признак.

Теорема 4.2 ([В, 1.27]). (I) Для того чтобы число $b \in \mathbb{R}$ было точной верхней границей непустого множества $A \subset \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $b \in \Gamma^+(A)$, т. е. b — одна из верхних границ;
- 2) для любого числа $b' < b$ существует элемент $x \in A$ такой, что

$$b' < x \leq b. \quad (4.2)$$

(II) Для того чтобы число $a \in \mathbb{R}$ было точной нижней границей непустого множества $A \subset \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 3) $a \in \Gamma^-(A)$, т. е. a — одна из нижних границ;
- 4) для любого числа $a' > a$ существует элемент $x \in A$ такой, что

$$a \leq x < a'. \quad (4.3)$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 4.1. Найти $\sup$ и $\inf$ множества $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Решение. Очевидно $1 \in A$ и $x \leq 1$ для любого $x \in A$. Следовательно, $\max A = 1$ и $\sup A = \max A$.

С другой стороны, если $0 \leq \frac{1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $\sup A \geq 0$. Возьмем произвольное $b' > 0$. Найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $0 \leq \frac{1}{n} < b'$. В качестве такого $n \in \mathbb{N}$ достаточно взять любое натуральное n , удовлетворяющее условию $\frac{1}{b'} < n$. Существование такого натурального n гарантируется теоремой Архимеда [В, 1.55]. $\square$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 4.2. Если L — верхняя граница множества A , то и любое число $L' \geq L$ является верхней границей для A : если $L \in \Gamma^+(A)$ и $L' \geq L$, то $L' \in \Gamma^+(A)$.

Задача 4.3. Сформулировать определение неограниченного сверху (снизу) множества. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}$ не ограничено сверху (снизу) тогда и только тогда, когда $\Gamma^+(A) = \emptyset$ ($\Gamma^-(A) = \emptyset$).

Задача 4.4. Доказать, что наибольший (наименьший) элемент множества $A \subset \mathbb{R}$ единствен.

Задача 4.5. Доказать, что если множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший и наименьший элементы, то $A \subset [\min A, \max A]$.

Задача 4.6. Доказать, что если для множества $A \subset \mathbb{R}$ имеем $\min A = \max A$, то множество A одноточечное.

Задача 4.7. Доказать, что если множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший (наименьший) элемент, то $\max A = \min \Gamma^+(A)$ ($\min A = \max \Gamma^-(A)$). Привести пример ограниченного сверху (снизу) множества, не имеющего наибольшего (наименьшего) числа, но для которого совокупность верхних границ $\Gamma^+(A)$ имеет наименьшее (наибольшее) число.

Задача 4.8. Множество $A \subset \mathbb{R}$ одноточечное тогда и только тогда, когда $\Gamma^-(A) \cup \Gamma^+(A) = \mathbb{R}$.

Задача 4.9. Множество $A \subset \mathbb{R}$ одноточечное тогда и только тогда, когда $\Gamma^-(A) \cup \Gamma^+(A) = \mathbb{R}$.

Задача 4.10. Доказать, что полуинтервал $[a, b) \subset \mathbb{R}$ имеет наименьший элемент и не имеет наибольшего.

Что можно сказать и наименьшем и наибольшем элементе полуинтервала $(a, b] \subset \mathbb{R}$?

Задача 4.11. Непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший (наименьший) элемент тогда и только тогда, когда пересечение $A \cap \Gamma^+(A) \neq \emptyset$ ($A \cap \Gamma^-(A) \neq \emptyset$). Если это пересечение непустое, то оно состоит из одной точки, которая и будет максимальным (минимальным) элементом множества A .

Задача 4.12. 1) Если множество $A \in \mathbb{R}$ имеет наибольший элемент, то он является и точной верхней границей множества A : $\max A = \sup A$.

2) Если множество $A \in \mathbb{R}$ имеет наименьший элемент, то этот элемент является точной нижней границей множества A : $\min A = \inf A$.

Задача 4.13. 1) Если ограниченное сверху множество $E \subset \mathbb{R}$ не имеет максимального элемента, то $\max\{E \cup \{\sup E\}\} = \sup E$.

2) Если ограниченное снизу множество $E \in \mathbb{R}$ не имеет минимального элемента, то $\min\{E \cup \{\inf E\}\} = \inf E$.

Задача 4.14. Если непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено, то $A \subset [\inf A, \sup A]$ и отрезок $[\inf A, \sup A]$ не может быть уменьшен.

Задача 4.15. $\inf A = \sup A$ тогда и только тогда, когда множество $A \subset \mathbb{R}$ одноточечное.

[Д, 16–20].

СЕМИНАР 5. Предел последовательности

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Научиться доказывать существование предела последовательности по определению. Знать значения пределов последовательностей n^k , q^n , $\sqrt[n]{a}$, $\frac{n^k}{a^n}$, $\frac{a^n}{n!}$, $\sqrt[n]{n}$, $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение 5.1. Пусть $\mathbb{N}$ — совокупность натуральных чисел. Отображение

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.1)$$

называется последовательностью точек множества $\mathbb{R}$, индексированных натуральными числами. Последовательность (5.1) обозначается одним из следующих символов:

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}; \quad x_n, \quad n \in \mathbb{N};$$

или $\{x_n\}$, если множество индексов $\mathbb{N}$ в контексте не меняется.

Определение 5.2. Пусть $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность утверждений. Будем говорить, что утверждение P_n выполнено для больших n , и обозначать

$$\langle P_n \text{ при } n \rightarrow \infty \rangle \quad \text{или} \quad P_n|_{n \rightarrow \infty},$$

если найдётся номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что P_n выполнено для всех $n \geq N$.

Для примера докажем следующее важное соотношение: для больших чисел показательная функция всегда больше степенной.

Задача 5.1. Для любого фиксированного числа $\lambda > 1$ и степени $p > 0$ выполнено

$$\lambda^n > n^p|_{n \rightarrow \infty}.$$

Решение. Докажем утверждение для $p = \frac{1}{2}$, т. е., что $\lambda^n > \sqrt{n}$ при $n \rightarrow \infty$. Действительно, по неравенству Бернулли имеем

$$\lambda^n = (1 + (\lambda - 1))^n \geq 1 + n(\lambda - 1) > n(\lambda - 1).$$

По принципу Архимеда найдётся натуральное $N > \frac{1}{(\lambda-1)^2}$. Следовательно, для всех натуральных $n \geq N$ выполнено $\sqrt{n} \geq \sqrt{N} > \frac{1}{\lambda-1}$ и поэтому

$$\lambda^n > n(\lambda - 1) = \sqrt{n}\sqrt{n}(\lambda - 1) > \sqrt{n}\frac{1}{\lambda-1}(\lambda - 1) = \sqrt{n}.$$

Таким образом, утверждение доказано для степени $\frac{1}{2}$.

Общий случай сводится к предыдущему. Действительно, для числа $\sqrt[p]{\lambda} > 1$ найдётся номер N_p такой, что

$$(\sqrt[p]{\lambda})^n > \sqrt{n}$$

для всех $n \geq N_p$. Остается возвести это неравенство в степень $2p$. Получаем

$$\lambda^n = ((\sqrt[p]{\lambda})^n)^{2p} > (\sqrt{n})^{2p} = n^p \quad \text{для всех } n \geq N_p.$$

Утверждение доказано. □

Задача 5.2. Докажите, что для любого вещественного числа $\lambda > 1$ выполнено $\lambda^n < n!$ при $n \rightarrow \infty$.

Определение 5.3. Дана числовая последовательность $\{x_n\}_{n \rightarrow \infty}$. Говорят, что $\{x_n\}$ *сходится* к числу a , и обозначают

$$x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty \quad \text{или} \quad x_n \rightarrow a|_{n \rightarrow \infty},$$

если для больших n числа x_n сколь угодно близки к a . Это означает, что какое бы расстояние $\varepsilon > 0$ мы не взяли, выполнено $|x_n - a| < \varepsilon|_{n \rightarrow \infty}$. Само число a при этом называется *пределом* последовательности x_n и обозначается $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Таким образом,

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \text{ что } |x_n - a| < \varepsilon \text{ для всех } n \geq N.$$

Задача 5.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Решение. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Нужно доказать, что для больших n выполнено $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Действительно, по принципу

Архимеда найдётся натуральное $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда степени для всех $n \geq N$ требуемое неравенство выполнено:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Задача решена. □

Задача 5.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Задача 5.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{an+b} = 0$ для любых фиксированных чисел $a \neq 0$ и b .

Задача 5.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, если q — фиксированное число и $|q| < 1$.

Решение. В случае $q = 0$ решение тривиально. Пусть q положительно, т.е. $0 < q < 1$. Тогда $\frac{1}{q} > 1$, т.е. $\frac{1}{q} = 1 + x$ для некоторого $x > 0$. Применяя неравенство Бернулли, получаем

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n = (1+x)^n \geq 1 + nx \geq nx.$$

Таким образом, $|q^n - 0| = q^n \leq \frac{1}{nx}$. По задаче 5.5 правая часть неравенств сколь угодно мала для больших n . Если q отрицательно, т.е. $-1 < q < 0$, то $|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n$. Заметим, что $|q| \in (0, 1)$, а следовательно, как мы только что показали, $|q|^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. □

Задача 5.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{\lambda^n} = 0$ для любого фиксированного числа $\lambda > 1$ и степени $p > 0$.

Решение. Воспользуемся результатом задачи 5.1. Действительно, если $\lambda > 1$, то найдётся натуральное число N , что $n^{p+1} < \lambda^n$ для всех $n \geq N$. Но тогда

$$\frac{n^p}{\lambda^n} < \frac{n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}.$$

Правая часть этого неравенства сколь угодно мала для больших n . □

Задача 5.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ для любого фиксированного числа $a > 0$.

Указания. Случай $a = 1$ тривиален. Рассмотрим случай $a > 1$. Поскольку $1 < \sqrt[n]{a}$, нужно лишь проверить, что для произвольного $\varepsilon > 0$ выполнено $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$ для достаточно больших n . Но последнее неравенство эквивалентно следующему: $a < (1 + \varepsilon)^n$. Покажите, что найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что это неравенство выполнено для всех $n \geq N$ (можно воспользоваться принципом Архимеда и неравенством Бернулли).

Покажите, что случай $a < 1$ можно свести к уже рассмотренному. □

Задача 5.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Указание. Аналогично предыдущей задаче рассмотрите неравенство $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ при $n \rightarrow \infty$. Докажите, что оно верно, воспользовавшись задачей 5.1. $\square$

Задача 5.10. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 0$ для любого фиксированного $\lambda > 1$.

Указание. Если мы рассмотрим, чем каждый следующий член последовательности $x_n = \frac{\lambda^n}{n!}$ отличается от предыдущего, то заметим, что $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{\lambda}{n+1}$, т. е. каждый последующий член умножается на всё меньшее число. По принципу Архимеда найдётся $N > \lambda$. Тогда при $n \geq N$ имеем

$$x_n = x_{n-1} \cdot \frac{\lambda}{n} \leq x_{n-1} \cdot \frac{\lambda}{N} \leq x_{n-2} \cdot \frac{\lambda}{N} \cdot \frac{\lambda}{N} \leq x_N \left(\frac{\lambda}{N} \right)^{n-N}.$$

Проверьте, что правая часть неравенства сколь угодно мала для больших n . $\square$

Задача 5.11. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи и способом решения прошлых задач с корнем. $\square$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ
[Д, 58–66].

СЕМИНАР 6. Операции над пределами

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Знать связь между пределами последовательностей и арифметическими операциями. Научиться вычислять предел суммы, произведения, частного. Знать связь между пределами и операциями сравнения. Научиться вычислять пределы с помощью теоремы о зажатой последовательности.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Используя пределы, найденные в предыдущем семинаре, мы можем находить пределы широкого класса последовательностей, которые можно свести к арифметическим выражениям от известных.

Теорема 6.1 ([В, 3.42, 3.47, 3.51]). Пусть x_n и y_n — две числовые последовательности,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \in \mathbb{R}.$$

Тогда существуют пределы последовательностей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b.$$

Кроме того, если $b \neq 0$, то существует также предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Задача 6.1. Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Решение. Если в задаче встречается разность корней, имеет смысл использовать формулу для разности квадратов $a-b = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$. Преобразовывая наше выражение, получаем

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Поскольку знаменатель правой части неограниченно возрастает, делаем вывод, что предел равен нулю. $\square$

Задача 6.2. Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2^n}{n^2+2^{n+1}}$.

Решение. В подобных задачах нужно найти самую быстрорастущую последовательность из входящих в выражение, а затем разделить на неё числитель и знаменатель. В нашем случае такой последовательностью является 2^n (или 2^{n+1}). После преобразования получаем

$$\frac{n+2^n}{n^2+2^{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{\frac{n}{2^n}+1}{\frac{n^2}{2^n}+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

Задача решена. $\square$

Если не удаётся напрямую преобразовать член последовательности в выражение от известных последовательностей, можно попробовать оценить это выражение известными. Часто при решении задач полезна следующая теорема о зажатой последовательности:

Теорема 6.2 ([В, 3.39]). Пусть x_n, y_n, z_n — три числовые последовательности, причем

- 1) $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $z_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$;
- 3) $x_n \leq y_n \leq z_n$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда существует предел $y_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

Задача 6.3. Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$.

Решение. Заметим, что $-1 \leq \sin x \leq 1$ для любого аргумента $x \in \mathbb{R}$. Следовательно

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Поскольку и левая и правая части неравенства стремятся к нулю, делаем вывод, что $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. $\square$

Задача 6.4. Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

Решение. Чтобы интуитивно понять, какой у этого выражения предел и к какому ответу нужно стремиться, нужно найти в выражении самую быстрорастущую последовательность — как правило именно она оказывает решающее действие на предел. В нашем случае это 3^n . Таким образом, стоит ожидать, что

$$\sqrt[n]{2^n + 3^n} \sim \sqrt[n]{3^n} = 3.$$

Докажем это. Действительно, $3 = \sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{2^n + 3^n}$. С другой стороны

$$\sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{3^n \cdot 2} = 3 \sqrt[n]{2} \rightarrow 3 \cdot 1 = 3.$$

Следовательно, данная последовательность также имеет предел, равный 3. $\square$

Задача 6.5. Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-10}{2n+5} \right)^n$.

Решение. Вновь, чтобы понять значение предела, рассмотрим поведение выражения в скобках:

$$\frac{n-10}{2n+5} = \frac{n-10}{2n+5} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1 - \frac{10}{n}}{2 + \frac{5}{n}} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, следует ожидать, что $\left(\frac{n-10}{2n+5}\right)^n \sim \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$. Действительно, поскольку мы нашли предел выражения в скобках, найдётся номер N , такой что

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} < \frac{n-10}{2n+5} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

для всех $n \geq N$. Но тогда

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n < \left(\frac{n-10}{2n+5}\right)^n < \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Поскольку и левая и правая части неравенства стремятся к нулю, по теореме о зажатой последовательности, рассматриваемая последовательность также стремится к нулю. $\square$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[Д, 46, 127–130].

СЕМИНАР 7. Признаки существования пределов

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Уметь доказывать существование предела по признаку Коши и признаку сходимости монотонной последовательности. Уметь находить пределы рекурсивно заданных последовательностей.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение 7.1. 1) Последовательность $\{x_n \in \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется (*строго*) *возрастающей*, если $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n < x_{n+1}$) для любого номера $n \in \mathbb{N}$.

2) Последовательность $\{x_n \in \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется (*строго*) *убывающей*, если $x_n \geq x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) для любого номера $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 7.1 (Классическая теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности [В, 3.29]). *Монотонная ограниченная (сверху или снизу) последовательность $\{x_n \in \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ всегда имеет предел:*

1) *если x_n возрастает и ограничена сверху, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n;$$

2) *если x_n убывает и ограничена снизу, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Теорема 7.2 (Теорема о неравенстве пределов [В, 3.38]). Пусть даны две последовательности x_n, y_n , для которых существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Если

- 1) $a < b$, то $x_n < y_n \mid_{n \rightarrow \infty}$;
- 2) $x_n \leq y_n \mid_{n \rightarrow \infty}$, то $a \leq b$.

Определение 7.2. Последовательность $x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что

$$|x_m - x_l| < \varepsilon \quad (7.1)$$

для всех $m, l \geq n_0$.

Теорема 7.3 (Критерий Коши [В, 3.68]). Последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к некоторому числу в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда она фундаментальная.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Приведем другое решение задачи 5.7.

Задача 7.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$ для любых фиксированного чисел $k \in \mathbb{N}$ и q , $q > 1$.

Решение. УКАЗАНИЕ. Проверим, что последовательность $\frac{n^k}{q^n}$ монотонно убывает. Действительно, $\frac{(n+1)^k}{q^{n+1}} \leq \frac{n^k}{q^n} \mid_{n \rightarrow \infty}$, так как это неравенство эквивалентно $\left(\frac{n+1}{n}\right)^k \leq q \mid_{n \rightarrow \infty}$. Справедливость последнего свойства вытекает теоремы о неравенстве пределов 7.2 ввиду предела $\left(\frac{n+1}{n}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ и неравенства $1 < q$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса 7.1 о сходимости монотонной последовательности $x_n = \frac{n^k}{q^n}$ имеет предел $a \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$. Далее имеем соотношения

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)^k}{q^{n+1}} = \frac{n^k}{q^n} \cdot \frac{(n+1)^k}{qn^k} = x_n \cdot \frac{1}{q} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем $a = a \cdot \frac{1}{q}$. Последнее равенство возможно лишь при $a = 0$. $\square$

Приведем другое решение задачи 5.10.

Задача 7.2. Доказать $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} = 0$ для любого фиксированного числа q , $q > 1$.

Решение. Проверим, что последовательность $x_n = \frac{q^n}{n!} > 0$ монотонно убывает при $n \rightarrow \infty$. Действительно, неравенство $\frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{q^n}{n!}$ эквивалентно $q \leq n+1$. Последнее очевидно выполняется для всех натуральных $n > n_0 > q-1$, где $n_0 > q-1$ — натуральное число из принципа Архимеда.

Применим теперь теорему Вейерштрасса 7.1 о сходимости монотонной последовательности, ограниченной снизу, и получим существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq 0.$$

Остается в равенстве $x_{n+1} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} = x_n \cdot \frac{q}{n+1}$ перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, и получить $a = a \cdot 0 = 0$. □

Задача 7.3. Дана последовательность $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\dots$. Доказать, что эта последовательность сходится, и найти её предел.

Решение. По определению последовательности, имеет место тождество

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}. \quad (7.2)$$

Прежде всего, докажем, что эта последовательность монотонно возрастает. Доказательство этого факта проведем по индукции. Очевидно, что $x_2 > x_1$. Предположим теперь, что $x_n > x_{n-1}$ (индукционное предположение). Тогда

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} > \sqrt{2 + x_{n-1}} = x_n.$$

Итак, мы доказали, что если $x_n > x_{n-1}$, то и $x_{n+1} > x_n$ (шаг индукции). Значит, в силу принципа математической индукции, формула $x_n > x_{n-1}$ справедлива для всех натуральных n , что и требовалось доказать.

Теперь докажем ограниченность сверху этой последовательности. Более точно, проверим справедливость неравенства

$$x_n < 2$$

для всех натуральных $n \in \mathbb{N}$. Это неравенство вновь будем проверять по индукции. При $n = 1$ оно очевидно. Предположим, что оно выполнено при некотором n , т. е. $x_n < 2$ (индукционное предположение). Тогда

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2.$$

Итак, мы доказали, что если $x_n < 2$, то и $x_{n+1} < 2$ (шаг индукции). Значит, в силу принципа математической индукции, неравенство $x_n < 2$ справедливо для всех n , что и требовалось доказать.

По теореме Вейерштрасса 7.1, существует конечный предел $x_* = \lim x_n$. Поскольку квадратный корень — непрерывная функция, мы можем перейти к пределу в тождестве (7.2), и получим

$$x_* = \sqrt{2 + x_*}.$$

Возводя в квадрат, имеем

$$x_*^2 = 2 + x_*.$$

Данное квадратное уравнение имеет два корня, $x_* = 2$ и $x_* = -1$. Но наш предел не может быть отрицательным (т.к. все члены последовательности положительны). Значит, отрицательный корень отбрасываем, и получаем, что искомый предел равен 2. $\square$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[Д, 79–85, 87, 88, 637].

СЕМИНАР 8. Подпоследовательности и частичные пределы

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Освоить понятия подпоследовательности, частичных пределов, верхнего и нижнего предела последовательности. Уметь находить частичные пределы последовательностей вида $x_n \cdot (-1)^n$, $x_n \cdot \sin \frac{\pi n}{3}$ и т.п. Знать связь между верхним/нижним пределом последовательности и операциями сравнения.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение 8.1. Рассмотрим функцию $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, определенную на множестве $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $p \in \mathbb{R}$ — произвольная предельная точка множества A . Число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *пределом* функции $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ при $x \rightarrow p$ по множеству A , если

1) В СЛУЧАЕ $a \in \mathbb{R}$: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $0 < \delta \leq \sigma$ такое, что для всех $x \in A$ с условием $0 < |x - p| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon;$$

2) В СЛУЧАЕ $a = +\infty$: для любого $r \in \mathbb{R}$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in A$ с условием $0 < |x - p| < \delta$ выполняется неравенство

$$f(x) > r;$$

3) В СЛУЧАЕ $a = -\infty$: для любого $r \in \mathbb{R}$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in A$ с условием $0 < |x - p| < \delta$ выполняется неравенство

$$f(x) < r.$$

Вышесказанное записывают символически одним из способов:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x) = a, \quad f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow p} a, \quad f(x) \rightarrow a \Big|_{x \in A}^{x \rightarrow p}, \quad f(x) \rightarrow a \text{ при } x \rightarrow p, x \in A,$$

либо без указания $x \in A$, когда ясно о какой области определения A идет речь.

Предложение 1. Если последовательность сходится к $a \in \overline{\mathbb{R}}$, то все ее подпоследовательности сходятся к тому же пределу.

Теорема 8.1 (Теорема Вейерштрасса о частичных пределах [В, 3.61]). Совокупность частичных пределов последовательности $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, представляет собой непустое множество в $\overline{\mathbb{R}}$.

Среди всех частичных пределов данной последовательности есть наибольший

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{x_n, x_{n+1}, \dots, x_m, \dots\}, \quad (8.1)$$

называемый *верхним пределом* последовательности x_n . Предел (8.1) всегда существует в $\overline{\mathbb{R}}$, так как последовательность

$$y_n = \sup \{x_n, x_{n+1}, \dots, x_m, \dots\} \quad (8.2)$$

(нестрого) убывающая.

Сказанное выше означает, что существует подпоследовательность x_{n_k} такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Аналогично предыдущему можно найти наименьший из всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$. Для этого надо рассмотреть (нестрого) возрастающую последовательность

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto \inf \{x_n, x_{n+1}, \dots, x_m, \dots\},$$

и перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{x_n, x_{n+1}, \dots, x_m, \dots\}, \quad (8.3)$$

Предел (8.3) называется *нижним пределом* последовательности x_n .

Сказанное выше означает, что существует подпоследовательность x_{n_l} такая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x_{n_l} = \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad (8.4)$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 8.1. Исследовать последовательность $x_n = (-1)^n$ на сходимос-
мость.

Решение. Данная последовательность имеет две подпоследовательности $x_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \rightarrow 1$ и $x_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \rightarrow -1$, имеющих нарав-
ные пределы. Поэтому в силу предложения 1 исходная последователь-
ность не может быть сходящейся.

Задача 8.2. Доказать, что для последовательности $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$,
и некоторой ее подпоследовательности $x_{n_k} \in \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, всегда справед-
ливы соотношения

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad (8.5)$$

Доказательство. Всякий частичный предел последовательности $\{y_k = x_{n_k}\}$ является также частичным пределом и последовательности $\{x_n\}$. Отсюда совокупность M частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ содержит совокупность S частичных пределов последовательности $\{y_k\}$: $S \subset M$. Поэтому наименьший элемент множества M , равный мини-
мальному частичному пределу последовательности $\{x_n\}$, не превосходит
наименьшего элемента множества S , равного минимальному частичному
пределу последовательности $\{y_k\}$. Следовательно,

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}.$$

Аналогично доказывается правая часть соотношений (8.5) □

Задача 8.3. Пусть даны последовательности $\{x_n \in \mathbb{R}\}$ и $\{y_n \in \mathbb{R}\}$.
Доказать, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (8.6)$$

при условии, что сумма в правой части определена.

Решение. Пример последовательностей $x_n = n$ и $y_n = -n$ показывает, что условие определенности суммы в правой части (8.6) связано с существом дела: слагаемые в правой части не могут быть бесконечностями разных знаков.

Если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, то по условию $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n > -\infty$, и в этом случае неравенство (8.6) очевидно.

Если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty$, то в этом случае неравенство (8.6) также очевидно.

Если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, то по условию $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n < +\infty$, и в этом случае надо доказать, что верхний предел в левой части неравенства (8.6) равен $-\infty$. Действительно, в этом случае существует $L \in \mathbb{R}$ такое, что

$$y_n \leq L$$

для всех номеров $n \geq n_1$, где $n_1 \in \mathbb{N}$ — некоторое число. Для любого $r \in \mathbb{R}$ найдется номер $n_2 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$x_n < r - L$$

для всех номеров $n \geq n_2$. Если $n_0 = \max(n_1, n_2)$, то

$$x_n + y_n < r - L + L = r$$

для всех номеров $n \geq n_0$. Так как $r \in \mathbb{R}$ — произвольное число, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty$, и неравенство (8.6) также выполняется.

Рассмотрим основной случай: когда правая и левая части (8.6) — конечные числа. Пусть подпоследовательность $x_{n_k} + y_{n_k}$ сходится к

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$$

при $k \rightarrow \infty$. Подпоследовательность x_{n_k} может и не сходиться, но у нее есть (под)подпоследовательность $x_{n_{k_l}}$, сходящаяся к $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Заметим, что тогда по теореме 6.1 и $y_{n_{k_l}}$ сходится, так как

$$y_{n_{k_l}} = (x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}}) - x_{n_{k_l}} \rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) - \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$$

при $l \rightarrow \infty$. Из последнего, в частности, выводим, что $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \neq -\infty$, так как в противном случае и $\overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} y_{n_{k_l}} = -\infty$, и

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty,$$

что противоречит предположению конечности левой части (8.6). Окончательно,

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) &= \lim_{l \rightarrow \infty} (x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}}) = \lim_{l \rightarrow \infty} x_{n_{k_l}} + \lim_{l \rightarrow \infty} y_{n_{k_l}} \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n\end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались задачей 8.2).

□

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 8.4. Доказать, что частичный предел p последовательности $\{x_n\}$, найденный в (8.3), является минимальным из всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$.

Задача 8.5. Доказать, что для последовательности $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, всегда имеет место неравенство

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad (8.7)$$

Задача 8.6. Доказать, что если p , q — соответственно нижний и верхний пределы последовательности $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, то для любого $\alpha > q$ ($\beta < p$) множество

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n > \alpha\} \quad (\{n \in \mathbb{N} : x_n < \beta\}) \quad (8.8)$$

конечное.

УКАЗАНИЕ: Воспользуйтесь неравенством

$$y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots, x_m, \dots\} \leq x_n \leq z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots, x_m, \dots\},$$

$n \in \mathbb{N}$, и существованием такого n_0 , что для всех $n \geq n_0$ будет

$$\beta \leq y_n \leq y_{n+1} \leq x_{n+1} \leq z_{n+1} \leq z_n \leq \alpha.$$

Задача 8.7. Доказать, что для последовательности $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится тогда и только тогда, когда

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad (8.9)$$

Задача 8.8. Последовательность x_n , $n \in \mathbb{N}$, сходится тогда и только тогда, когда совокупность всех ее частичных пределов состоит из единственной точки.

Задача 8.9. Пусть даны последовательности $\{x_n \in \mathbb{R}\}$ и $\{y_n \in \mathbb{R}\}$. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

при условии, что сумма в правой части определена.

Задача 8.10. Пусть даны последовательности $\{x_n \in \mathbb{R}\}$ и $\{y_n \in \mathbb{R}\}$, $x_n, y_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

при условии, что произведение в правой части определено.

Задача 8.11. Пусть даны последовательности $\{x_n \in \mathbb{R}\}$ и $\{y_n \in \mathbb{R}\}$, $x_n, y_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

при условии, что произведение в правой части определено.

[Д, 111–120, 132–135].

СЕМИНАР 9. Экспонента

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Знать, что последовательности $(1 + \frac{x}{n})^n$ и $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ сходятся к $\exp(x)$. Знать, что для целых чисел n выполнено $\exp(n) = e^n$. Изучить свойства отображения $\exp(x)$ и обратного ему $\ln(x)$, уметь строить их графики. Научиться применять эти знания для вычисления пределов, знать значения пределов последовательностей $\frac{n^k}{e^n}$, $\frac{\ln n}{n^k}$.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Теорема 9.1 (Существование экспоненциальной функции [В, 3.69]). Предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{9.1}$$

существует для любого $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, экспоненциальная функция может быть представлена в виде суммы

$$\exp x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \quad (9.2)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. При этом для остатка

$$R_n(x) = \exp x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

справедлива оценка [В, 3.72]

$$|R_n(x)| \leq \frac{2}{(n+1)!} |x|^{n+1} \quad (9.3)$$

при $|x| \leq \frac{n+2}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

В частности, $\exp x = 1 + x + R_1(x)$, где $|R_1(x)| \leq |x|^2$ при $|x| \leq \frac{3}{2}$.

Теорема 9.2 (Основное свойство экспоненциальной функции [В, 3.73]).

Экспоненциальная функция обладает следующим свойством:

$$\exp(u + v) = \exp u \cdot \exp v \quad (9.4)$$

для любых действительных чисел $u, v \in \mathbb{R}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 9.1. *Справедливо равенство*

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad (9.5)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

Задача 9.2. *Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-5}\right)^n$.*

Решение. Заметим, что мы не можем провести рассуждение, аналогичное рассуждению задачи 6.5, так как выражение в скобках стремится к 1. Для нахождения подобных пределов удобно преобразовать предел к виду $\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n$ и затем свести или оценить через экспоненциальную функцию. В данной задаче имеем

$$\left(\frac{n+2}{n-5}\right)^n = \left(1 - \frac{7}{n-5}\right)^n = \left(1 - \frac{7}{n-5}\right)^{n-5} \cdot \left(1 - \frac{7}{n-5}\right)^5 \rightarrow \exp(-7) \cdot 1^5.$$

Таким образом, предел последовательности равен $\frac{1}{e^7}$. $\square$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ
[Д, 70, 74, 75].

СЕМИНАР 10. Предел функции

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Знать определения предела функции по Коши и Гейне, правого и левого предела. Уметь находить предел функции по определению.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Все используемые здесь понятия и доказательства формулируемых теорем можно найти в [В].

Определение 10.1 (См. [В, 5.1]). Рассмотрим функцию $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, определенную на множестве $A \subset \mathbb{R}$. Пусть $p \in \mathbb{R}$ — произвольная предельная точка множества A . Число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *пределом* функции $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ при $x \rightarrow p$ по множеству A , если

1) В СЛУЧАЕ $a \in \mathbb{R}$: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $0 < \delta$ такое, что для всех $x \in A$ с условием $0 < |x - p| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon;$$

2) В СЛУЧАЕ $a = +\infty$: для любого $r \in \mathbb{R}$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in A$ с условием $0 < |x - p| < \delta$ выполняется неравенство

$$f(x) > r;$$

3) В СЛУЧАЕ $a = -\infty$: для любого $r \in \mathbb{R}$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in A$ с условием $0 < |x - p| < \delta$ выполняется неравенство

$$f(x) < r.$$

Вышесказанное записывают символически одним из способов:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x) = a, \quad f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow p} a, \quad f(x) \rightarrow a \Big|_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}, \quad f(x) \rightarrow a \text{ при } x \rightarrow p, x \in A,$$

либо без указания $x \in A$, когда ясно о какой области определения A идет речь.

Теорема 10.1 (Теорема о единственности предела [В, 5.17]). *Функция $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $A \subset \mathbb{R}$, может иметь только один предел при $x \rightarrow p \in \text{Lim } A$ по множеству A .*

Теорема 10.2 (Теорема о неравенстве пределов [В, 5.20]). Пусть даны две функции $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ и $g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $A \subset \mathbb{R}$, для которых существуют пределы

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x) = a \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} g(x) = b.$$

Если

- 1) $a < b$, то $f(x) < g(x) \mid_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}$;
- 2) $f(x) \leq g(x) \mid_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}$, то $a \leq b$.

Теорема 10.3 (Теорема о пределе промежуточной функции [В, 5.21]). Пусть даны три функции $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $h : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ и $g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $A \subset \mathbb{R}$, такие что

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \mid_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}.$$

Если существуют пределы

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x) = a \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} g(x) = a,$$

то существует также и предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} h(x) = a.$$

Теорема 10.4 (Теорема о пределе монотонной функции [В, 5.24]). Пусть $A \subset [-\infty, p]$ и $p \in \mathcal{L}im A$. Монотонная функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ всегда имеет предел при $x \rightarrow p$ по множеству A :

- 1) если f возрастает, то $\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x) = \sup_{x \in A \setminus \{p\}} f(x)$;
- 2) если f убывает, то $\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x) = \inf_{x \in A \setminus \{p\}} f(x)$.

Теорема 10.5 (Теорема о пределе композиции [В, 5.28]). Пусть даны две функции $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $A, B \subset \mathbb{R}$, такие, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x) = q, \quad \text{где} \quad p \in \mathcal{L}im A,$$

а

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} g(y) = s, \quad \text{где} \quad q \in \mathcal{L}im B.$$

Тогда при одном из следующих двух условиях

- 1) либо $f(x) \neq q \Big|_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}$
 2) либо $s = g(q)$

имеем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} g \circ f(x) = s.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 10.1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Решение. Действительно, существование предела вытекает из оценки $|x \sin \frac{1}{x}| < |x|$ для любого $x \neq 0$. □

Задача 10.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. В этом примере 0 — предельная точка для области определения $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Решение. Фиксируем $r > 0$. Нужно доказать, что $\frac{1}{x^2} > r \Big|_{x \rightarrow 0}$. Если $r \leq 0$, то неравенство $\frac{1}{x^2} > r$ выполнено всегда. Если $r > 0$, то неравенство выполнено при $|x| < \frac{1}{\sqrt{r}}$. Таким образом, выполнено определение предела. □

Задача 10.3. $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = +\infty$, где $\frac{\pi}{2}$ — предельная точка для области определения $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Решение. □

Задача 10.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \exp x = 1$.

Решение. Действительно, в силу оценки

Предложение 2 ([В, 3.79]). Справедлива оценка

$$|R_n(x)| \leq \frac{2}{(n+1)!} |x|^{n+1} \tag{10.1}$$

при $|x| \leq \frac{n+2}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. В частности, $\exp x = 1 + x + R_1(x)$, где $|R_1(x)| \leq |x|^2$ при $|x| \leq \frac{3}{2}$.

при $n = 0$ имеем $|\exp x - 1| = |R_0(x)| < 2|x|$ для $|x| < 1$. Следовательно, полагая в определении предела $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$, получаем

$$|\exp x - 1| < 2\delta = \varepsilon$$

для любого x такого, что $|x| < \delta$. □

Задача 10.5. $\lim_{x \rightarrow p} \exp x = \exp p$, $p \in \mathbb{R}$.

Решение. Для доказательства следует воспользоваться основным свойством экспоненциальной функции и предыдущей задачей 3:

$$|\exp x - \exp p| = \exp p \cdot |\exp(x - p) - 1|.$$

□

Задача 10.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$, $p \in \mathbb{R}$.

Решение. Для решения следует воспользоваться предложением 2:

$$\exp x = 1 + x + R_1(x),$$

где $|R_1(x)| \leq |x|^2$ при $|x| \leq \frac{3}{2}$. Тогда $\left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|$ при $|x| \leq \frac{3}{2}$. Отсюда по определению предела получаем требуемое. □

Задача 10.7. Функция $f(x) = e^{ix}$ имеет предел $f(p) = e^{ip}$ при $x \rightarrow p$, $p \in \mathbb{R}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ
[Д, 401].

СЕМИНАР 11. Предел функции и арифметические операции

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Знать взаимосвязь пределов функций и арифметических операций. Уметь вычислять пределы функций, используя арифметические операции над пределами.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Теорема 11.1 (Сумма пределов равна пределу суммы [В, 5.32]). *Если*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x) = a, \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} g(x) = b,$$

и определена сумма $a + b$, то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} (f(x) + g(x)) = \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x) + \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} g(x). \quad (11.1)$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} (f(x) + g(x)) = \begin{cases} a + b, & \text{если } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & \text{если } a > -\infty, b = +\infty, \\ -\infty, & \text{если } a < +\infty, b = -\infty. \end{cases} \quad (11.2)$$

Теорема 11.2 (Произведение пределов равно пределу произведения [В, 5.33]). *Если*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x) = a, \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} g(x) = b,$$

и определено произведение $a \cdot b$, то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} a \cdot b, & \text{если } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, \\ (\text{sign } a) \cdot \infty, & \text{если } a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, b = +\infty, \\ (-\text{sign } a) \cdot \infty, & \text{если } a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, b = -\infty. \end{cases} \quad (11.3)$$

Теорема 11.3 (Частное пределов равно пределу частного [В, 5.35]). *Если* *функция $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ сходится к числу $a \in \overline{\mathbb{R}}$ при $x \rightarrow p \in \mathcal{L}it A$ по множеству A , $g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ сходится к числу $b \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ при $x \rightarrow p$ по множеству A , то существует предел отношения функций, равный отношению пределов, когда оно определено:*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}. \quad (11.4)$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{a}{b}, & \text{если } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } a \in \mathbb{R}, b = \pm\infty. \end{cases} \quad (11.5)$$

Теорема 11.4 (Критерий сходимости Гейне [В, 5.36]). *Функция $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ имеет предел при $x \rightarrow p \in \mathcal{L}it A$ по множеству A тогда и только тогда, когда для каждой последовательности $s_n \in A \setminus \{p\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходящейся к p , последовательность $\{f(s_n)\}$ является сходящейся. Более того, все такие пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n)$ совпадают и их общее значение равно $\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x)$.*

Теорема 11.5 (Критерий сходимости Коши [В, 5.41]). *Функция $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ имеет конечный предел при $x \rightarrow p \in \mathcal{L}it A$ по множеству A тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется элементарная*

окрестность $V \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что для любых точек $x, y \in V \cap A \setminus \{p\}$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Приводимые ниже понятия верхнего и нижнего пределов функции $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ в точке $p \in \mathcal{L}im A$ обобщают таковые для последовательностей.

Определение 11.1 (См. раздел [В, 5.11]). Пусть $p \in \mathbb{R}$. Как известно, всякому числу $\delta > 0$ соответствует элементарная окрестность $\mathcal{O}_\delta(p) \in \mathcal{N}_e(p)$. Сопоставим числу δ величины

$$u(\delta) = \sup_{x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}} f(x)$$

и

$$l(\delta) = \inf_{x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}} f(x).$$

В силу включения

$$\mathcal{O}_\delta(p) \subset \mathcal{O}_{\delta_1}(p) \quad \text{при} \quad \delta < \delta_1 \quad (11.6)$$

выводим, что функция

$$0 < \delta \mapsto u(\delta)$$

монотонно возрастает: $u(\delta) \leq u(\delta_1)$ при $0 < \delta < \delta_1$, а функция

$$0 < \delta \mapsto l(\delta)$$

монотонно убывает: $l(\delta) \geq l(\delta_1)$ при $0 < \delta < \delta_1$. При этом всегда верны соотношения

$$l(\delta_1) \leq l(\delta) \leq u(\delta) \leq u(\delta_1), \quad 0 < \delta < \delta_1. \quad (11.7)$$

По теореме 10.4 заключаем, что существуют пределы функций $u(\delta)$ и $l(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0+$. Первый из них называется *верхним пределом функции* f в точке p по множеству A и обозначается символом

$$\overline{\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} u(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \sup_{x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}} f(x). \quad (11.8)$$

Второй предел называется *нижним пределом функции* f в точке p по множеству A и обозначается символом

$$\underline{\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} l(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \inf_{x \in \mathcal{O}_\delta(p) \cap A \setminus \{p\}} f(x). \quad (11.9)$$

Из соотношений (11.7) выводим неравенство

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x) \leq \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x). \quad (11.10)$$

Теорема 11.6 (Признак существования предела [В, 5.44]). *Функция $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ имеет предел при $x \rightarrow p \in \mathcal{L}it A$ по множеству A тогда и только тогда, когда в неравенстве (11.10) имеет место равенство:*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x) = \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x). \quad (11.11)$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 11.1. *Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$.*

Решение. Заметим, что тавтологически $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$. Однако, при подстановке значения 1 в выражение мы получаем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Таким образом, напрямую воспользоваться свойствами предела мы не можем. Воспользуемся тем, что 1 является корнем многочленов в числителе и знаменателе:

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \frac{(x - 1)^2(x + 2)}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 3)} = \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3}.$$

По свойствам арифметических операций

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1 + 2}{1^2 + 2 \cdot 1 + 3} = \frac{1}{2}.$$

Задача решена. □

Задача 11.2. *Найти предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.*

Решение. Как и в предыдущих задачах с корнями, домножим и разделим на сопряжённые множители

$$\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \frac{(1+2x)-9}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = 2 \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ для любого $a > 0$, и $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \sqrt{x} = 0$.

С учетом упражнения задача сводится к арифметическим операциям над пределами. □

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 11.3. Найти из определения $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ и $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x)$ для функции

- 1) $f(x) = \frac{1}{x}$;
- 2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

[Д, 411–430].

СЕМИНАР 12. Символы O и o

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Освоить определения для O и o . Знать соотношения между асимптотическим поведением функций x^n , e^x в нуле и на бесконечности.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение 12.1 (См. [В, 5.37]). Будем говорить, что функция $f(x)$ бесконечно мала относительно функции $g(x)$ при x , стремящемся к p по множеству A , если для каждого $\varepsilon > 0$ справедливо следующее асимптотическое неравенство

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \Big|_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}.$$

В этом случае говорят также, что $f(x)$ есть o -малое от $g(x)$ при $x \rightarrow p$ по множеству A , и пишут $f(x) = o(g(x)) \Big|_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}$.

Предложение 3 (Основные свойства [В, 5.38]). 1) $f(x) = o(1) \Big|_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}$ тогда и только тогда, когда $f(x) \rightarrow 0 \Big|_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}$.

2) $f(x) = o(g(x)) \Big|_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}$ тогда и только тогда, когда существует функция $\alpha(x) = o(1)$ такая, что $f(x) = \alpha(x)g(x) \Big|_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 12.1. Доказать, что если $g(x) \neq 0 \Big|_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}$, то $f(x) = o(g(x)) \Big|_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}$ тогда и только тогда, когда $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \Big|_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}}$.

Решение.

□

Задача 12.2. Доказать, что

- 1) если $k < n$, то $x^n = o(x^k) \Big|_{x \rightarrow 0}$ и $x^k = o(x^n) \Big|_{x \rightarrow \infty}$;
- 2) $x^n = o(e^x) \Big|_{x \rightarrow \infty}$ для любого положительного числа n ;
- 3) $\ln x = o(x^\alpha) \Big|_{x \rightarrow \infty}$ для любого положительного числа $\alpha \in \mathbb{R}$;

Решение. □

Определение 12.2 (См. [В, 5.41]). Говорят, что $f(x)$ есть O -большое от $g(x)$ при $x \rightarrow p$ по множеству A , и пишут $f(x) = O(g(x)) \Big|_{x \rightarrow p, x \in A}$, если найдётся такая константа $C < \infty$, что

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \Big|_{x \rightarrow p, x \in A}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 12.3. Доказать, что $f(x) = O(g(x)) \Big|_{x \rightarrow p, x \in A}$ тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x)$, определенная формулой

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, & \text{если } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (12.1)$$

асимптотически ограничена при $x \rightarrow p$ по множеству A , т. е. $\alpha(x) = O(1) \Big|_{x \rightarrow p, x \in A}$.

Решение. □

Определение 12.3 (См. [В, 5.43]). Будем говорить, что вещественнозначная функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \rightarrow p$ по множеству A , и писать $f(x) \sim g(x)$, если

$$f(x) - g(x) = o(g(x)) \Big|_{x \rightarrow p, x \in A}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 12.4. Доказать, что $f(x) \sim g(x) \Big|_{x \rightarrow p, x \in A}$ тогда и только тогда, когда существует вещественнозначная функция $u(x) \rightarrow 1 \Big|_{x \rightarrow p, x \in A}$ такая, что $f(x) = u(x)g(x) \Big|_{x \rightarrow p, x \in A}$.

Решение. □

Задача 12.5 (Основные свойства асимптотических сравнений). 1) Отношение асимптотической эквивалентности

рефлексивно: $f \sim f$;

симметрично: если $f \sim g$, то $g \sim f$; и

транзитивно: если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$.

2) Если $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$, то $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$. Если к тому же функции g_1 и g_2 неотрицательны, то $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.

3) Если $f \sim g$ и $g \rightarrow a$, то $f \rightarrow a$.

Решение. □

Задача 12.6. Доказать, что если $g(x) \neq 0$ при $x \rightarrow p$, то $f(x) \sim g(x)$ тогда и только тогда, когда $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$.

Решение. □

Задача 12.7. 1) Если $f = o(g)$, то $f = O(g)$. Если $f \sim g$, то $f = O(g)$.

2) Если $f = o(g)$ и $g = O(h)$, то $f = o(h)$.

3) Если $f_1 = o(g_1)$ и $f_2 = O(g_2)$, то $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.

4) Если $f_1 = o(g_1)$ и $f_2 = o(g_2)$, то $f_1 + f_2 = o(|g_1| + |g_2|)$.

Решение. □

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[Д, 646, 650, 654, 655].

СЕМИНАР 13. Непрерывные функции

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Знать определение непрерывности и классификацию разрывов функции. Уметь исследовать функции на непрерывность и равномерную непрерывность.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение 13.1 (См. [В, 6.1]). Фиксируем множество $A \subset \mathbb{R}$, функцию $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и точку $p \in A$. Мы говорим, что функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $p \in A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in A$ с условием $|x - p| < \delta$ выполняется соотношение

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon. \quad (13.1)$$

Функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной на A , если она непрерывна в каждой точке множества A .

Теорема 13.1 (Непрерывность композиции [В, 6.5]). Если функция $f : A \rightarrow B$ непрерывна в точке $p \in A$, и функция $g : B \rightarrow S$ непрерывна в точке $q = f(p)$, то композиция $g \circ f : A \rightarrow S$ непрерывна в точке p .

Предложение 4 (Асимптотические неравенства [В, 6.8]). Если функции $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны в точке $p \in A$ и $f(p) < g(p)$, то $f(x) < g(x)$ в некоторой окрестности точки p , т. е. существует окрестность $V \in \mathcal{N}_e(p)$ такая, что

$$f(x) < g(x) \quad \text{для всех } x \in V \cap A \quad (\text{или } f(x) < g(x) \big|_{x \in A}^{x \rightarrow p}).$$

Теорема 13.2 (Непрерывность и арифметические операции [В, 6.9]). Сумма и произведение непрерывных функций непрерывны: если функции $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны в точке $p \in A$, то функции $f + g$ и $f \cdot g$ также непрерывны в этой точке.

Если функция f непрерывна в точке p и $f(p) \neq 0$, то функция $\frac{1}{f}$ непрерывна в точке p .

Теорема 13.3 (Критерий непрерывности Гейне [В, 6.11]). Функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $p \in A$ в том и лишь в том случае, когда она каждую последовательность $x_n \in A$, сходящуюся к p , переводит в последовательность $f(x_n)$, сходящуюся к $f(p)$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[Д, 666, 675–700, 730, 792, 795, 798] .

СЕМИНАР 14. Асимптотические разложения

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Знать асимптотические разложения для основных функций, уметь использовать эти разложения для вычисления пределов.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Предложение 5 (Основные асимптотические разложения [В, 5.47]). 1) При $x \rightarrow 0$ всякий полином $P(x)$ эквивалентен своему младшему члену, а при $x \rightarrow \infty$ — старшему.

2) $e^x - \left(1 + \dots + \frac{x^7}{7!}\right) \sim \frac{x^8}{8!} \big|_{x \rightarrow 0}.$

3) $\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \sim \frac{x^3}{3} \big|_{x \rightarrow 0}.$

- 4) $\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \sim \frac{x^5}{5!} \mid_{x \rightarrow 0}.$
- 5) $\arcsin x - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) \sim \frac{3x^5}{40} \mid_{x \rightarrow 0}.$
- 6) $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \sim \frac{x^4}{4!} \mid_{x \rightarrow 0}.$
- 7) $\arccos x - \left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6}\right)\right) \sim \frac{3x^5}{40} \mid_{x \rightarrow 0}.$
- 6) $\operatorname{tg} x - \left(x + \frac{x^3}{3}\right) \sim \frac{2x^5}{15} \mid_{x \rightarrow 0}.$
- 7) $\arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \sim \frac{x^5}{5} \mid_{x \rightarrow 0}.$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Рассмотрим сначала общий метод поиска разложения для функции $f(x)$.

Пусть асимптотические разложения функций $g(x)$ и $h(x)$ нам известны. Если функция $f(x)$ может быть представлена суммой: $f(x) = g(x) + h(x)$, произведением: $f(x) = g(x)h(x)$, или композицией: $f(x) = g \circ h(x)$, функций $g(x)$ и $h(x)$, для получения асимптотического разложения для $f(x)$ достаточно применить известные разложения для $g(x)$ и $h(x)$ и сгруппировать результат по степеням x .

В приводимых ниже задачах нам может потребоваться формула Эйлера, которая может быть записана в виде

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

где i — мнимая единица: $i^2 = -1$. Из этой формулы можно получить представление для тригонометрических функций через экспоненту, в частности,

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{aligned}$$

Если функция $f(x)$ является обратной к функции g : $f = g^{-1}$, то можно воспользоваться приемом, описанном ниже.

Пусть $g(t_0) = a_0$. Если коэффициенты разложения

$$g(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \dots + a_k(t-t_0)^k + o((t-t_0)^k) \quad \text{при } t \rightarrow t_0 \quad (14.1)$$

известны, естественно искать разложение для f в виде:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a_0) + c_2(x-a_0)^2 + \dots + c_k(x-a_0)^k + o((x-a_0)^k) \quad (14.2)$$

при $x \rightarrow a_0$. Заметим, что коэффициент c_0 этого разложения можно найти как

$$\lim_{x \rightarrow a_0} f(x) = c_0$$

и, для непрерывной в точке a_0 функции $f(x)$ закономерно получаем $f(x) = f(a_0) + o(1)|_{x \rightarrow a_0}$.

Рассмотрим функцию $F(x)$. Пусть существует $\lim_{x \rightarrow a_0} \frac{F(x)}{(x-a_0)^p} = c < +\infty$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a_0} \frac{F(x) - c(x-a_0)^p}{(x-a_0)^p} = 0$, а, значит, $\frac{F(x) - c(x-a_0)^p}{(x-a_0)^p} = o(1)|_{x \rightarrow a_0}$. Умножив обе части равенства на $(x-a_0)^p$ получаем, что $F(x) - c(x-a_0)^p = o((x-a_0)^p)|_{x \rightarrow a_0}$ и, следовательно,

$$F(x) = c(x-a_0)^p + o((x-a_0)^p)|_{x \rightarrow a_0}$$

или, что тоже самое, $F(x) \sim c(x-a_0)^p|_{x \rightarrow a_0}$.

Это соображение может быть полезным при нахождении коэффициентов в разложении (14.2). Предположим, что в разложении (14.2) коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, уже найдены. Для нахождения коэффициента c_n достаточно найти предел отношения функции

$$F(x) = f(x) - (c_0 + c_1(x-a_0)^1 + c_2(x-a_0)^2 + \dots + c_{n-1}(x-a_0)^{n-1})$$

к $(x-a_0)^n$. Этот предел, если он существует, будет коэффициентом c_n :

$$c_n = \lim_{x \rightarrow a_0} \frac{f(x) - (c_0 + c_1(x-a_0)^1 + c_2(x-a_0)^2 + \dots + c_{n-1}(x-a_0)^{n-1})}{(x-a_0)^n}. \quad (14.3)$$

Основной трудностью здесь является нахождение предела (14.3). Для решения формулируемых ниже задач подойдет следующий прием.

Пусть $f = g^{-1}$ — обратная к g функция. Пусть функция g определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой элементарной окрестности $\mathcal{O}_\tau(t_0)$ точки t_0 . Тогда f определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой элементарной окрестности точки a_0 (см. [В, 6.25]).

Для нахождения предела (14.3) сделаем следующую замену: $t = f(x)$, откуда $x = g(t)$. Поскольку образ $f(\mathcal{O}_\delta(a_0))$ элементарной окрестности $\mathcal{O}_\delta(a_0) = (a_0 - \delta, a_0 + \delta)$, $\delta \in (0, \tau)$, содержит некоторую элементарную окрестность точки t_0 (см. [В, 6.25]), по определению предела мы получаем равенство:

$$\lim_{x \rightarrow a_0} \frac{F(x)}{(x-a_0)^{n+1}} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t - (c_0 + c_1(g(t) - a_0) + \dots + c_n(g(t) - a_0)^n)}{(g(t) - a_0)^{n+1}}.$$

Далее для нахождения последнего предела следует воспользоваться известным разложением (14.1) для $g(t)$ при $t \rightarrow t_0$.

Задача 14.1. Доказать, что $\ln(1+x) - (x - \frac{x^2}{2}) \sim \frac{x^3}{3} |_{x \rightarrow 0}$.

Решение. Для решения этой задачи достаточно доказать, что

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

при $x \rightarrow 0$.

Поскольку $\ln(1+x)$ непрерывная функция во всех точках своей области определения, то $c_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = \ln 1 = 0$.

Найдем первый коэффициент в разложении $\ln(1+x)$. Запишем $F(x) = \ln(1+x) - c_0 = \ln(1+x)$. Функция $f(x) = \ln(1+x)$ как обратная к $g(t) = e^t - 1$ непрерывна и строго монотонна. Поэтому для нахождения предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ мы можем сделать замену

$$t = \ln(1+x), \quad (14.4)$$

а, значит, $x = e^t - 1$. Тогда получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1}.$$

Используя разложение для экспоненты выводим

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 + t + o(t) - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + o(1)} = 1.$$

Значит, в силу рассуждений, приведенных выше, $c_1 = 1$ и

$$\ln(1+x) = x + o(x).$$

Найдем второй коэффициент c_2 в разложении для $\ln(1+x)$. Запишем $F(x) = \ln(1+x) - c_0 - c_1x = \ln(1+x) - x$. Применяя замену (14.4) и используя разложение для e^t , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - e^t + 1}{(e^t - 1)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - (1 + t + \frac{t^2}{2!} + o(t^2)) + 1}{(1 + t + o(t) - 1)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}t^2 + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Из рассуждений, описанных выше, получаем

$$\ln(1+x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

а, значит, $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

Найдем третий коэффициент c_3 в разложении для $\ln(1+x)$. Запишем

$$F(x) = \ln(1+x) - c_0 - c_1x - c_2x^2 = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

Применяя замену (14.4) и используя разложение для e^t , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - (e^t - 1) + \frac{(e^t - 1)^2}{2}}{(e^t - 1)^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - (1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3) - 1) + \frac{(1 + t + \frac{t^2}{2!} + o(t^2) - 1)^2}{2}}{(1 + t + o(t) - 1)^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} + o(t^3)}{t^3 + o(t^3)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Из рассуждений описанных выше, получаем

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

а, значит,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

или, что тоже самое

$$\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \sim \frac{x^3}{3} \Big|_{x \rightarrow 0}.$$

□

Задача 14.2. Доказать, что

$$(1+x)^\alpha - \left(1 + x + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2\right) \sim \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 \Big|_{x \rightarrow 0}.$$

Решение. По определению $(1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$. Значит, функция $f(x) = (1+x)^\alpha$ представляет собой композицию функций, разложения которых нам уже известно. Поэтому имеем

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)} = e^{\alpha x - \alpha \frac{x^2}{2} + \alpha \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = e^{\alpha x} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} e^{\alpha \frac{x^3}{3}} e^{o(x^3)}.$$

Поскольку x , x^2 , x^3 и $o(x^3)$ стремятся к нулю, при $x \rightarrow 0$, можно применить разложение для экспоненты. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \left(1 + \alpha x + \alpha^2 \frac{x^2}{2!} + \alpha^3 \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \left(1 - \alpha \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \left(1 + \alpha \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \left(1 + o(x^3)\right) \\ &= 1 + \alpha x + (\alpha^2 - \alpha) \frac{x^2}{2!} + (\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha) \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Воспользовавшись определением асимптотической эквивалентности, получаем

$$(1+x)^\alpha - \left(1 + x + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2\right) \sim \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 \Big|_{x \rightarrow 0}.$$

□

Задача 14.3. Доказать, что $\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \sim \frac{x^5}{5!} \Big|_{x \rightarrow 0}$.

Решение. Воспользуемся формулой Эйлера и разложением для экспоненты:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^5 \frac{(ix)^k - (-ix)^k}{k!} + o(x^5) \\ &= \frac{1}{2i} \left(2i \frac{x}{1!} - 2i \frac{x^3}{3!} + 2i \frac{x^5}{5!}\right) + o(x^5) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5). \end{aligned}$$

Записав определение асимптотической эквивалентности, убеждаемся в том, что $\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \sim \frac{x^5}{5!} \Big|_{x \rightarrow 0}$. □

Задача 14.4. Доказать, что $\arcsin x - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) \sim \frac{3x^5}{40} \Big|_{x \rightarrow 0}$.

Указание. Функция $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ является обратной к функции $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, разложение которой известно. □

Задача 14.5. Доказать, что $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \sim \frac{x^4}{4!} \Big|_{x \rightarrow 0}$.

Указание. Нужно воспользоваться формулой Эйлера. □

Задача 14.6. Доказать, что $\arccos x - \left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6}\right)\right) \sim \frac{3x^5}{40} \Big|_{x \rightarrow 0}$.

Указание. Функция $\arccos x$ является обратной в функции $\cos x$, разложение которой было найдено в предыдущей задаче. $\square$

Задача 14.7. Доказать, что $\operatorname{tg} x - \left(x + \frac{x^3}{3}\right) \sim \frac{2x^5}{15} \big|_{x \rightarrow 0}$.

Указание. Функция $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x (\cos x)^{-1} = \sin x (1 + (\cos x - 1))^{-1}$. Значит, что функция $\operatorname{tg} x$ представляется в виде произведения и композиции функций, разложение которых уже известно. $\square$

Задача 14.8. Доказать, что $\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + x^3) \sim x^4 \big|_{x \rightarrow 0}$.

Указание. В этой задаче можно сразу проверять, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + x^3)}{x^4} = 1.$$

Второе решение состоит в том, что $\frac{1}{1-x} = (1 + (-x))^{-1}$. Далее следует воспользоваться методом решения задачи 14.2. $\square$

Задача 14.9. Доказать, что $\arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \sim \frac{x^5}{5} \big|_{x \rightarrow 0}$.

Указание. Функция $\operatorname{arctg} x$ является обратной в функции $\operatorname{tg} x$, разложение которой было найдено в предыдущей задаче. $\square$

Задача 14.10. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

Рассмотрим общий метод нахождения пределов отношения двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ таких, что каждая из них имеет предел 0 при $x \rightarrow 0$. Такую ситуацию называют неопределенностью вида $\frac{0}{0}$.

Понятно, что общие теоремы вычисления пределов в этом случае не работают.

Способ нахождения пределов в этом случае состоит в следующем.

1) Находим порядок стремления к нулю знаменателя:

$$g(x) = bx^k + o(x^k), \quad \text{где } k > 0, \quad \text{а } b \neq 0;$$

2) находим порядок стремления к нулю числителя:

$$f(x) = ax^l + o(x^l), \quad \text{где } l > 0, \quad \text{а } a \neq 0;$$

3) тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^l + o(x^l)}{bx^k + o(x^k)};$$

4) дальнейший анализ сводится к рассмотрению трех случаев:

a) $k = l$: в этом случае

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^k + o(x^k)}{bx^k + o(x^k)} = \frac{a + o(1)}{b + o(1)} \rightarrow \frac{a}{b} \Big|_{x \rightarrow 0};$$

a) $l > k$: в этом случае

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^l + o(x^l)}{bx^k + o(x^k)} = \frac{ax^{l-k} + o(x^{l-k})}{b + o(1)} \rightarrow 0 \Big|_{x \rightarrow 0};$$

a) $l < k$: в этом случае

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^l + o(x^l)}{bx^k + o(x^k)} = \frac{a + o(1)}{bx^{k-l} + o(x^{k-l})} \rightarrow \pm\infty \Big|_{x \rightarrow 0};$$

Применяя этот метод, найдем решение задачи 14.10.

Решение. Делаем замену переменной $x - 1 = y$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^2 - 1}{2(1+y)^2 - (1+y) - 1} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^2 - 1}{2(1+2y+y^2) - y - 2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^2 - 1}{3y + o(y)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y + o(y)}{3y + o(y)} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

□

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[Д, 452, 474–480].

СЕМИНАР 15. Производная

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Знать определение производной. Уметь вычислять производные по определению, производные суммы, произведения, композиции, производную функции вида $f(x)^{g(x)}$.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение 15.1 (См. раздел [В, 8.1]). Будем говорить, что функция f дифференцируема в точке p и писать $f \in \mathcal{D}(p)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{f(t) - f(p)}{t - p},$$

рассматриваемое как функция переменной t , имеет *конечный* предел при t , стремящемся к p . Этот предел

$$\lim_{t \rightarrow p} \frac{f(t) - f(p)}{t - p},$$

называется *производной* функции f в точке p и обозначается одним из символов $f'(p)$ или $Df(p)$. Символ $\mathcal{D}(p)$ обозначает класс всех функций, дифференцируемых в точке p . Функцию f называют дифференцируемой, если она дифференцируема в каждой точке своей области определения $\text{Dom } f$.

Множество всех точек, в которых функция f дифференцируема, будем обозначать $\text{Dom } f'$ или $\text{Dom } Df$. Функцию, которая каждой точке $t \in \text{Dom } f'$ сопоставляет число $f'(t)$, называют *производной* функции f и обычно обозначают одним из следующих символов

$$f', Df, \frac{df}{dx}.$$

Теорема 15.1 (Теорема о лейбницево разложении [В, 8.2]). Функция f дифференцируема в точке p в том и только в том случае, когда она определена в некоторой окрестности этой точки и существует такое линейное отображение $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$f(x) = f(p) + A(x - p) + \varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x - p). \quad (15.1)$$

В этом случае $A(v) = f'(p)v$ для всех $v \in \mathbb{R}$.

Правила дифференцирования суммы и произведения. Если функции f и g дифференцируемы в точке p , то функции $f + g$ и fg также дифференцируемы в этой точке, причём

$$D(f + g)(p) = Df(p) + Dg(p)$$

и

$D(fg)(p) = Df(p)g(p) + f(p)Dg(p)$ — формула Лейбница.

Правило дифференцирования дроби. Если функции f и g дифференцируемы в точке p и $g(p) \neq 0$, то функция $\frac{f}{g}$ также дифференцируема в точке p и справедлива формула

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \Big|_p = \frac{f'g - fg'}{g^2} \Big|_p.$$

Правило дифференцирования композиции. Если функция f дифференцируема в точке p , а функция g дифференцируема в точке $q = f(p)$, то функция $g \circ f$ дифференцируема в точке p и имеет место формула

$$D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \cdot Df(p).$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[Д, 845–971].

СЕМИНАР 16. Обратная функция

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Научиться пользоваться теоремой об обратной функции для вычисления производных. Иметь представление о свойствах функций $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, построить их графики.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Правило дифференцирования обратной функции. Пусть $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$ — взаимно обратные отображения подмножеств числовой прямой и пусть f дифференцируемо в точке $p \in X$. В такой ситуации отображение g дифференцируемо в точке $q = f(p)$ в том и лишь в том случае, когда

- 1) производная $Df(p) \neq 0$,
- 2) отображение g непрерывно в точке q ,
- 3) множество Y является окрестностью точки q .

Кроме того,

$$Dg(q) = \frac{1}{Df(g(q))}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

СЕМИНАР 17. Дифференциал

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Знать определение линейной функции и уравнение прямой на плоскости. Освоить определение дифференциала. Научиться находить касательные к графику функции и к кривой, заданной параметрически.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение 17.1 (См. раздел [В, 8.6]). Линейное отображение A , для которого справедлива формула (15.1), называют *дифференциалом* функции f в точке p и обозначают $df(p)$. Образ элемента $v \in \mathbb{R}$ при отображении $df(p)$ будем обозначать $df(p)v$ или $df(p)\langle v \rangle$ и называть значением дифференциала df в точке p на элементе (векторе) v . Особо отметим формулу

$$df(p)\langle v \rangle = f'(p) \cdot v \text{ для всех } v \in \mathbb{R}. \quad (17.1)$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[Д, 1039–1047, 1061–1063, 1078–1080].

СЕМИНАР 18. Теоремы Ролля и Лагранжа

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Научиться применять теоремы Ролля и Лагранжа для доказательства неравенств и для оценки приращений.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Теорема 18.1 (Теорема Ролля о среднем [В, 8.13]). Если функция f непрерывна на отрезке $[a < b]$ и дифференцируема в каждой его внутренней точке и если $f(a) = f(b)$, то имеется такая точка $p \in (a, b)$, что $Df(p) = 0$.

Теорема 18.2 (Теорема Лагранжа о среднем [В, 8.14]). Если функция f непрерывна на ограниченном отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в каждой его внутренней точке, то на интервале (a, b) найдётся такая точка p , что

$$Df(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема 18.3 (Теорема о приращениях [В, 8.15]). Если функции f и h непрерывны на отрезке $[a \leq b] \subset \mathbb{R}$ и $|f'(x)| \leq h'(x)$ для всех $x \in [a, b]$, за исключением, быть может, конечной совокупности точек, то

$$|f|_a^b \leq h|_a^b.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[Д, 1238, 1240, 1246, 1251–1254, 1261, 1265].

СЕМИНАР 19. Производные старших порядков

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Уметь находить производные старших порядков от простейших функций по индукции. Познакомиться с дифференциалами старших порядков.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение 19.1 (См. [В, 10.1]). Будем говорить, что функция f дифференцируема один раз в точке p , если она дифференцируема в этой точке. Пусть определены производные функции f в точке p до порядка $k - 1 \geq 1$ включительно. При $k \geq 2$ будем говорить, что функция f дифференцируема k раз в точке p и писать $f \in \mathcal{D}^k(p)$, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки p , а её производная Df дифференцируема $k - 1$ раз в точке p .

Если $f \in \mathcal{D}^k(p)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то будем говорить, что функция f бесконечно дифференцируема в точке p , и писать $f \in \mathcal{D}^\infty(p)$. Будем говорить, что функция f дифференцируема k раз на множестве M и писать $f \in \mathcal{D}^k(M)$, если $f \in \mathcal{D}^k(x)$ для всех $x \in M$. Если $f \in \mathcal{D}^k(\text{Dom } f)$, то будем писать $f \in \mathcal{D}^k$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[Д, 1130–1139, 1156–1178, 1224, 1225].

СЕМИНАР 20. Многочлен Тейлора

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Познакомиться с разложением функций по Тейлору. Знать разложения основных функций. *Ряд Тейлора и аналитические функции?*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Теорема 20.1 (Теорема о разложении Тейлора с остаточным членом в форме Пеано [В, 11.2]). *Если $f \in \mathcal{D}^k(p)$, то имеется, и к тому же лишь один, полином*

$$P(x-p) = a_0 + a_1(x-p) + \dots + a_k(x-p)^k$$

степени, не большей k , такой, что

$$f(x) = P(x-p) + o((x-p)^k).$$

В этом случае $a_n = \frac{D^n f(p)}{n!}$ для всех $n \in \{0, \dots, k\}$.

Полином

$$\sum_{n=0}^k \frac{D^n f(p)}{n!} (x-p)^n$$

называют k -ым полиномом Тейлора функции $f(x)$ в точке p , а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(p)}{n!} (x-p)^n$$

— рядом Тейлора функции f в точке p . Если $f \notin \mathcal{D}^{\infty}(p)$, то в точке p ряд Тейлора функции f конечен.

Теорема 20.2 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа [В, 11.2]). *Допустим вещественная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема $k+1$ раз во всех точках интервала (a, b) и $D^k f \in C[a, b]$. Пусть $p, x \in [a, b]$. Тогда существует точка θ , лежащая между p и x , такая, что*

$$f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{D^n f(p)}{n!} (x-p)^n + \frac{D^{k+1} f(\theta)}{(k+1)!} (x-p)^{k+1}. \quad (20.1)$$

Знаменитые разложения в степенные ряды [В, см. раздел 11.7].

1) $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

3) $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

4) $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \dots$ для всех $t \in [-1, 1]$.

5) $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots$ для всех $t \in (-1, 1]$ (формула Н. Меркатора).

6) Ньютоново разложение бинома:

$(1+x)^s = 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3 + \dots$ для всех $x \in (-1, 1)$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[Д, 1377-1387, 1398-1406].

СЕМИНАР 21. Приложения производной

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Научиться использовать дифференциальный признак монотонности функции и правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Теорема 21.1 (Теорема о дифференциальных признаках монотонности [В, 9.1]). *Если функция f непрерывна на промежутке T и если её производная неотрицательна (положительна) в каждой его внутренней точке, то функция f возрастает (строго возрастает) на этом промежутке.*

Теорема 21.2 (Правило Лопиталя [В, 9.4]). *Если функции f и g дифференцируемы на полуинтервале $T = [a, b)$ и если*

1) *либо $\lim_{x \rightarrow b|_T} f(x) = \lim_{x \rightarrow b|_T} g(x) = 0$, либо $\lim_{x \rightarrow b|_T} g(x) = \infty$,*

2) $\frac{Df(x)}{Dg(x)} \xrightarrow{x \rightarrow b|_T} c$ и $Dg \neq 0$ на T ,

то $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow b|_T} c$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[Д, 1268-1278, 1280-1282, 1318-1370].

СЕМИНАР 22. Производная и экстремум

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Знать необходимые и достаточные условия существования экстремума. Уметь исследовать функцию на экстремум.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Предложение 6 (Лемма Ферма [В, 9.3]). Если p — точка локального экстремума функции f , то либо

- 1) f недифференцируема в этой точке, либо
- 2) f дифференцируема в этой точке, и в этом случае $Df(p) = 0$.

Теорема 22.1 (Достаточные признаки локального экстремума [В, 8.12]).

I. Если функция f непрерывна на интервале $T = (a < b)$ и $p \in T$ — такая точка, что на интервале (a, p) производная $f' < 0$, а на интервале (p, b) производная $f' > 0$, то p есть точка строгого минимума функции f на T .

II. Если $f'(p) = 0$, а $f''(p) > 0$ (< 0), то p является точкой строгого локального минимума (максимума) функции f .

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[Д, 1414–1422, 1429–1444, 1455].

СЕМИНАР 23. Вторая производная и выпуклость

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Знать определения выпуклости, вогнутости и точек перегиба. Уметь исследовать функцию на промежутки выпуклости, вогнутости.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пусть E — какое-нибудь векторное пространство (например, $\mathbb{R}^2$). Множество $B \subset E$ называют выпуклым, если оно вместе с любой парой своих точек p, q содержит отрезок $[p, q]$, их соединяющий:

$$\begin{aligned}[p, q] &= \{x = p + t(q - p) : t \in [0, 1]\} \\ &= \{x = \tau_1 p + \tau_2 q : \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}_+, \tau_1 + \tau_2 = 1\}.\end{aligned}$$

Определение 23.1 (См. [В, 9.5]). Говорят, что функция f является выпуклой на промежутке T , если надграфик

$$H_f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in T, y \geq f(x)\}$$

функции $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклым подмножеством плоскости $\mathbb{R}^2$.

Функцию f называют *вогнутой* на промежутке T , если на этом промежутке функция $-f$ выпуклая.

Теорема 23.1 (Дифференциальные признаки выпуклости [В, 9.7]). **I.** Если функция f дифференцируема на промежутке T и её производная возрастает на этом промежутке, то функция f выпукла на T .

II. Если функция f дважды дифференцируема на промежутке T и её вторая производная неотрицательна на этом промежутке, то функция f выпукла на T .

Теорема 23.2 (Неравенство Йенсена [В, 9.11]). Пусть f — выпуклая функция на промежутке T . Тогда для любой выпуклой комбинации $\tau_1 x_1 + \dots + \tau_k x_k$ точек $x_1, \dots, x_k \in T$ имеет место неравенство

$$f(\tau_1 x_1 + \dots + \tau_k x_k) \leq \tau_1 f(x_1) + \dots + \tau_k f(x_k),$$

где τ_i — произвольные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\tau_1 + \dots + \tau_k = 1$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 23.1. Функция $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой тогда и только тогда, когда всякая хорда, соединяющая какие-либо две точки графика функции f , находится выше дуги графика, соединяющей эти же точки.

[Д, 1299–1307, 1312–1317].

СЕМИНАР 24. Исследование функции

ЦЕЛЬ СЕМИНАРА

Закрепить полученные знания в исследовании функций одного переменного. Уметь получать максимум возможной информации о функции и использовать эту информацию для построения графика.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ
[Д, 1308, 1428, 1471–1529, 1536–1540].

Список литературы

- [Б] Берс Л. *Математический анализ*. Т. 1–2. М.: Высшая школа, 1975.
- [В] Водопьянов С. К. *Пределы. Непрерывность. Дифференцируемость*. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2011. (Электронный вариант.)
- [ГО] Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе*. М.: Мир, 1967.
- [ГМП] Грешнов А. В., Малюгин С. А., Потапов В. Н. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. 1-й семестр. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2008.
- [Д] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. М.: АСТ, 2009.
- [Дьед] Дьедонне Ж. *Современный анализ*. М.: Мир, 1964.
- [З] Зорич В. А. *Математический анализ*. Т. 1. М.: Наука, 1981.
- [К] Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. *Сборник задач по математическому анализу*. Т. 3. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003.
- [Н] Никольский С. М. *Курс математического анализа*. М.: Наука, 1975.
- [Р] Решетняк Ю. Г. *Курс математического анализа*. Ч. 1, Книга 1. Новосибирск: Изд-во Института математики, 1999.
- [Руд] Рудин У. *Основы математического анализа*. М.: Мир, 1976.
- [Ф] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1–3. М.: Наука, 1969.
- [Ш] Шведов И. А. *Компактный курс математического анализа*. Ч. 1. *Функции одной переменной*. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003. 112 с.