"Self-celection"Textbook piece:

1 Модель пакетной ценовой политики (самовыявления типов)

Стандартная постановка модели следующая. Монополист (Principal) может производить единственный тип товара, и предлагать несколько пакетов (наборов количество-тариф $(x_1, t_1), ..., (x_n, t_n) \in R^2$) нескольким типам n потребителей (Agents), которые индексированы как $i \in I := \{1, ..., n\}$. Число $m_i > 0$, обозначает многочисленность или частоту появления в природе каждого типа. Спросы всех возможных типов известны продавцу, но "кто есть кто"скрыто, или персональная дискриминация невозможна. Каждый агент выбирает один пакет, и и многократные приобретения и арбитраж предотвращены. Чтобы упростить анализ, все потребители данного типа выбирают один и тот же пакет (никакого "дробления типа"не допускается). В некоторых обстоятельствах это предположение можно считать не-ограничительным, так как несколько идентичных потребителей могут рассматриваться как различные типы. В некоторых других ситуациях, оно ограничительно. Как широко признано, при наших гипотезах, для монополиста достаточно разработать ровно n пакетов для n типов потребителей (в том числе некоторые пакеты могут быть идентичны или равны нолю). Таким образом фактическое число пакетов может быть меньше, чем n. По другому общему соглашению, мы предполагаем, что среди всех эквивалентных для себя опций агент выбирает пакет, предпочитаемый принципалом ("дружественный агент"). (Оба эти предположения сомнительны при не-упорядоченных предпочтениях.)

Количество $m_i > 0$ потребителей типа i может быть целым числом или дробью (долей) от совокупности потребителей. В вероятностной интерпретации модели, каждое m_i есть вероятность этого типа, так что $\sum_i m_i = 1$. Функции полезности приняты квази- линейными и зависят от количества и тарифа в виде: $u_i(x_i, t_i) = V_i(x_i) - t_i$, так что эффекты дохода исключены. Каждая функция оценки (valuation) $V_i(.)$ нормализована как $V_i(0) = 0 \, \forall i$. Функция издержек $C : R^{2n} -> R$ зависит от общего количества выпуска в линейной форме $C(., x) = c(\sum_i m_i x_i)$, (где $c > 0$). В вероятностном случае, это обозначает *ожидаемые* промышленные издержки.[1] Согласно упомянутым предположениям, наша игра покупателя

[1]Подразумевается, что в каждый период, продавец ожидает *одного* пользователя, чей тип окажется - i с вероятностью m_i.

- последователя и лидера (предлагающего пакеты) может быть сведена к стандартной проблеме "оптимизации пакета"следующего вида.

$$\begin{aligned} \pi(t,x) &= \sum_{i=1}^{n} m_i t_i - C(m, x_1, ..., x_n) \to \max_{(t,x)\in(R^n,\, X^n)}, \quad \textbf{s.t.} && (1)\\ V_i(x_i) &- t_i \geq V_i(x_k) - t_k \quad \forall i \in I, \forall k \in I \cup \{0\} \setminus \{i\}, && (2)\\ (x_0, t_0) :=& \quad (0,0). \end{aligned}$$

Здесь $X^n := X \times ..... \times X \subset R^n$ - это допустимый набор общего потребления, объединяющий нескольких наборов $X \subset R$, одинаковых для всех агентов, для простоты. (Новшество в нашей формулировке - то, что потребительское множество X может быть выпуклое или не-выпуклое, непрерывное или дискретное, единственое ограничение - предположение нормализации $0 \in X$.) Для удобства записи, мы ввели фиктивного агента #0, чей пакет по определению - $(0,0)$. С фиктивным агентом ограничения участия $V_i(x_i) - t_i \geq V_i(0) - 0 = 0$ могут восприниматься как специальные случаи "ограничений стимулирования", (self-selection constraints) $V_i(x_i) - t_i \geq V_k(x_k) - t_k$. Все такие ограничения подразумевают, что никакой потребитель не желает переключить свой выбор на любой чужой пакет, включая пакет #0, то есть, каждый i не является "завидующим строго"любому другому. Ситуация, когда ограничение (i,k) активно (то есть, является равенством) может интерпретироваться (Wilson - 1993) так: потребитель i "почти завидует"пакету потребителя k. Обратите внимание, что никакой предположений положительности или возрастания функций пока не сделано, так что модель может быть *непосредственно* применима к задаче найма. Тогда $(-C(m, x_1, ..., x_n)) \geq 0$ интерпретируется как функция дохода принципиала, и $(-t_i) \geq 0$ есть награда (платеж) нанятым агентам, чья полезность от работы x_i часов есть $V_i(x_i)$ она может убывать и быть отрицательна. Кроме того, убывание функции оценки может выражать насыщаемость спроса.

Существование решений - стандартный результат, и мы не обсуждаем его здесь (компактность допустимого множества и непрерывность функций достаточны).

Заслуживает некоторого обсуждения стандартное предположение (в сущности включенное прямо в задачу оптимизации (1)) об покупателях, являющихся "дружественными"продавцу. Благодаря "цепной"структуре решений (обсуждаемой ниже), в традиционной ситуации упорядоченных спросов это предположение вполне оправданно. И в более общем случае, когда структура решения - хотя бы транзитивна, то есть не имеет "циклов зависти", тогда продавец может обеспечить дружественность и выполнимость (с точностью до малого ε) оптимальной схемы пакетов $(\bar{x}, \bar{t})$, предлагая произвольно маленькую награду (то есть, уменьшение тарифа размера ε_i) каждому потребителю i за выбор предпочитаемого продавцом пакета $(\bar{x}_i, \bar{t}_i - \varepsilon_i)$ из равно-выгодных в предложенном меню. Эти скидки делают все ограничения стимулирования строгими неравенствами. (При не-упорядоченных оценках товара V_i, инструмент скидок может быть недостаточным и стандартная оптимизация может стать неадекватной игре продажи пакетов, но мы не касаемся этого.)

[Figure 1]

Пример 1 ....

При гипотезе линейности издержек, можно доказать, что структура решений является "деревом", то есть агенты не окажутся связаны циклами зависти. Специфический случай "правила дерева"для упорядоченных спросов установлен в теореме о цепном правиле.

Теорема "Chain-Rule"). *Пусть агенты пронумерованы так, что функции полезности (оценки товара), удовлетворяют условию упорядочения Spence-Mirrlees:*
$[x, z \in X,\ \ x > z \Rightarrow V_i(x) - V_i(z) > V_{i-1}(x) - V_{i-1}(z)\ \ \forall i = 2, ..., n]$.
Тогда любое решение $(\bar{x}, \bar{t})$ *задачи (1) соответствует цепочке* $(n \to n-1 \to n-2 ... \to 0)$, *активных ограничений вида*

$$V_i(x_i) - t_i = V_i(x_{i-1}) - t_{i-1}, \quad i = 2, ..., n$$

где каждый агент "почти-завидует"только одному агенту, а именно, ближайшему меньшему по номеру. Все прочие ограничения стимулирования (1) могут быть заменены ограничениями $x_{i-1} \leq x_i$ $(\forall i \in I)$, $x_0 = 0$ *в задаче оптимизации (1)-(2) без изменения решений.*[2]

Опираясь на эту теорему, легко выразить все переменные тарифов t_i через переменные объемов x_i, сократив тем самым не только количество ограничений (это главный смысл теоремы), но и количество переменных. Тарифы выразятся в виде

$$\mathbf{T}_k(x) := \sum_{i \leq k} [V_i(x_i) - V_i(x_{i-1})]\ \ (\forall k \in I),\ \mathbf{T}_0(.) \equiv 0 \quad .$$

Задача сведется (как можно проверить подстановкой) к максимизации суммы n целевых функций типа

$$Q_i(x_i) := S_i V_i(x_i) - \sum_{j > i} S_j V_j(x_i) - c x_i \qquad S_i := \sum_{j \geq i} m_j \quad (\forall i \leq n).$$

[2]Теорема 1 - по существу обобщает подобные утверждения (Katz, 1973) в некоторых отношениях.

- - - - -

В частности, для пяти равновероятных типов потребителей окажется:

$S_i := \sum_{j \geq i} j$, то есть $S = (5, 4, 3, 2, 1)$,

$Q_5(x_5) = 1 * V_5(x_5)$,

$Q_4(x_4) = S_4V_4(x_4) - S_5V_5(x_4) = 2 * V_4(x_4) - 1 * V_5(x_4)$,

$Q_3(x_3) = S_3V_3(x_3) - S_4V_4(x_3) - S5V5(x3) = 3 * V_3(x_3) - 2 * V_4(x_3) - 1 * V_5(x_3)$,

$Q_2(x_2) = S_2V_2(x_2) - 2S_3V_3(x_2) + Q_2(x_2) = 4V_2(x_2) - 3V_3(x_2) - 2V_4(x_2) - 1 * V_5(x_2)$,

$Q_1(x_1) = S_1V_1(x_1) - 2S_2V_2(x_1) + Q_2(x_1) = 5V_1(x_1) - 4V_2(x_1) - 3V_3(x_1) - 2V_4(x_1) - V_5(x_1)$

Производные этих функций, приравниваемые к предельным издержкам, и дадут размеры (объемы) пяти оптимальных пакетов, если только не нарушится ограничение упорядочения: $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$. А оно наверняка нарушится для всех пакетов, кроме четвертого и пятого, ведь $V_i(x) - V_{i+1}(x) < 0$. Поэтому, первые три пакета в решении - нулевые, да и четвертый должен быть выбран нулевым, если уравнение $2 * \dot{V}_4(x_4) - \dot{V}_5(x_4) = c$ даст решение меньше нуля.

- - - -

По сути, целевая функция сепарабельна, и задача может распасться на подзадачи, или не распасться. Конкретнее, в выпуклой задаче можно пробовать оптимизировать по x_i каждую целевую функцию независимо. Если при этом ограничения упорядочения окажутся выполнены, то это и есть решение. В противном случае, нужно внести нарушенные ограничения в задачу и повторить оптимизацию уже с ограничениями, а затем опять внести нарушенные ограничения, и т.д.

Анализируя условия первого порядка этой (упрощенной) формулировки задачи поиска равновесных пакетов, легко вывести свойства решений при упорядоченности спросов (следствия из "цепного правила"):

1) Каждый агент *безразличен* к выбору между своим пакетом (контрактом) и пакетом ближайшего по рангу более бедного агента.

2) Агенты с максимальным рангом (типом), и только они (наиболее богатые) получат пакеты эффективного размера, то есть Парето-улучшение между ними и производителем невозможно. А остальные типы получили бы строго большие пакеты в случае наблюдаемости их типа, то есть в равновесии они *недо-обслуживаются*.

3) Агенты с минимальным рангом (типом), и только они (наиболее бедные) получат нулевой потребительский излишек (выигрыш от контракта), то есть имеют только свою резервационную полезность. А остальные типы в нетривиальном случае несовпадения пакетов ($x_1 <$

$x_2 \leq ...$) получат положительный потребительский излишек, то есть "*информационную ренту*".

Доказательство Теоремы 1. Нужно показать, что в решении каждый агент $i \in I$ "почти-завидует"самому близкому соседу снизу (с более низким спросом), и никому более. То есть, мы должны доказать, что все подобные ограничения - связывающие (являются равенствами) в любом решении, в то время как все другие ограничения не связывают, то есть, они могут быть удалены или заменены ограничениями $x_i \geq x_{_{i-1}}$ без того, чтобы изменить решение.

1) Consider any incentive-compatible scheme $(\bar{x}, \bar{t})$. By rearranging any pair i, k of incentive-compatibility constraints we get relation $V_k(\bar{x}_i) - V_k(\bar{x}_k) \leq \bar{t}_i - \bar{t}_k \leq V_i(\bar{x}_i) - V_i(\bar{x}_k)$. (Note that when $\bar{x}_i = \bar{x}_k \Rightarrow \bar{t}_i = \bar{t}_k$.) For $i > k$, such inequality together with the Spence-Mirrlees assumption of ordered valuations (**OV**) entails $\bar{x}_i \geq \bar{x}_k$.

Therefore, constraints $[x_i \geq x_{_{i-1}} \forall i]$ are satisfied by any admissible (x, t), and adding them to initial constraints do not change the admissible set. When using ordering $[\bar{x}_i \geq \bar{x}_{_{i-1}} \forall i]$, note that when some consumer i does not (strictly) envy someone whose consumption level is lower $(\bar{x}_k < \bar{x}_i)$; then any higher-demand agent $j > i$ also does not envy $(\bar{x}_k, \bar{t}_k)$. Indeed, from $[\bar{t}_i - \bar{t}_k \leq V_i(\bar{x}_i) - V_i(\bar{x}_k),\ \bar{x}_k < \bar{x}_i] \Rightarrow$ (using **OV** under $j > i, \bar{x}_k < \bar{x}_i \leq \bar{x}_j$) $[\bar{t}_i - \bar{t}_k \leq V_j(\bar{x}_i) - V_j(\bar{x}_k)] \Rightarrow$ (using incentive constraint $\bar{t}_i \geq \bar{t}_j - V_j(\bar{x}_j) + V_j(\bar{x}_i)$ and replacing $\bar{t}_i$ with smaller expression) $[(\bar{t}_j - V_j(\bar{x}_j) + V_j(\bar{x}_i)) - \bar{t}_k \leq V_j(\bar{x}_i) - V_j(\bar{x}_k)] \Rightarrow$

$[\bar{t}_j - \bar{t}_k \leq V_j(\bar{x}_j) - V_j(\bar{x}_k)]$. Thus, without changing the admissible set, we can eliminate all constraints that represent envying to a lower number agents $(k < j)$ (they are nonessential after constraints $[x_i \geq x_{_{i-1}} \forall i]$ are added), except the neighboring constraints $(k = j - 1 < j)$.

2) Now suppose that $(\bar{x}, \bar{t})$ not only is feasible but it also is a solution. Consider the chain of "neighboring" constraints $[0 \leq V_1(\bar{x}_1) - \bar{t}_1; V_2(\bar{x}_1) - \bar{t}_1 \leq V_2(\bar{x}_2) - \bar{t}_2; ... \; ... V_n(\bar{x}_{n-1}) - \bar{t}_{n-1} \leq V_n(\bar{x}_n) - \bar{t}_n]$. If the first inequality were strict, we could increase tariff t_1, thereby improving the objective function and other inequalities would be satisfied. But, this contradicts the supposition that $(\bar{x}, \bar{t})$ was a solution. Similarly, all relations of this chain are equalities at any solution of the initial (and of the modified) problem. Combining these equalities with ordering $[\bar{x}_i \geq \bar{x}_{i-1}]$ and the assumption **OV**, entails $[V_i(\bar{x}_i) - V_i(\bar{x}_{i-1}) = \bar{t}_i - \bar{t}_{i-1} \geq V_{i-1}(\bar{x}_i) - V_{i-1}(\bar{x}_{i-1}) \geq V_{i-2}(\bar{x}_i) - V_{i-2}(\bar{x}_{i-1})]$, implying that any agent $i-1$ does not strictly-envy her higher-number neighbor i. Now take the similar relation $[\bar{t}_{i-1} - \bar{t}_{i-2} \geq V_{i-2}(\bar{x}_{i-1}) - V_{i-2}(\bar{x}_{i-2})]$ for agent $i-2$. By substituting here the left side of former-obtained expression $\bar{t}_i - V_{i-2}(\bar{x}_i) + V_{i-2}(\bar{x}_{i-1}) \geq \bar{t}_{i-1}$ for $\bar{t}_{i-1}$, we get

$[\bar{t}_i - V_{i-2}(\bar{x}_i) \geq \bar{t}_{i-2} - V_{i-2}(\bar{x}_{i-2})]$. Thus all constraints that represent not envying the higher-number agents are redundant in the modified problem. They follow from ordering $\bar{x}_i \geq \bar{x}_{i-1}$, **OV** and from equalities $[V_i(\bar{x}_i) - V_i(\bar{x}_{i-1}) = \bar{t}_i - \bar{t}_{i-1},\ \bar{x}_i \geq \bar{x}_{i-1}\ \forall i]$.

Thus, the set of solutions to initial problem is equivalent to the set of solutions to the problem claimed by Lemma. Q.E.D. ||

We can add that when functions increase, then we have implication $[\bar{x}_i \geq \bar{x}_k \Leftrightarrow \bar{t}_i \geq \bar{t}_k]$.

Pictures for ``Optimal Packages"

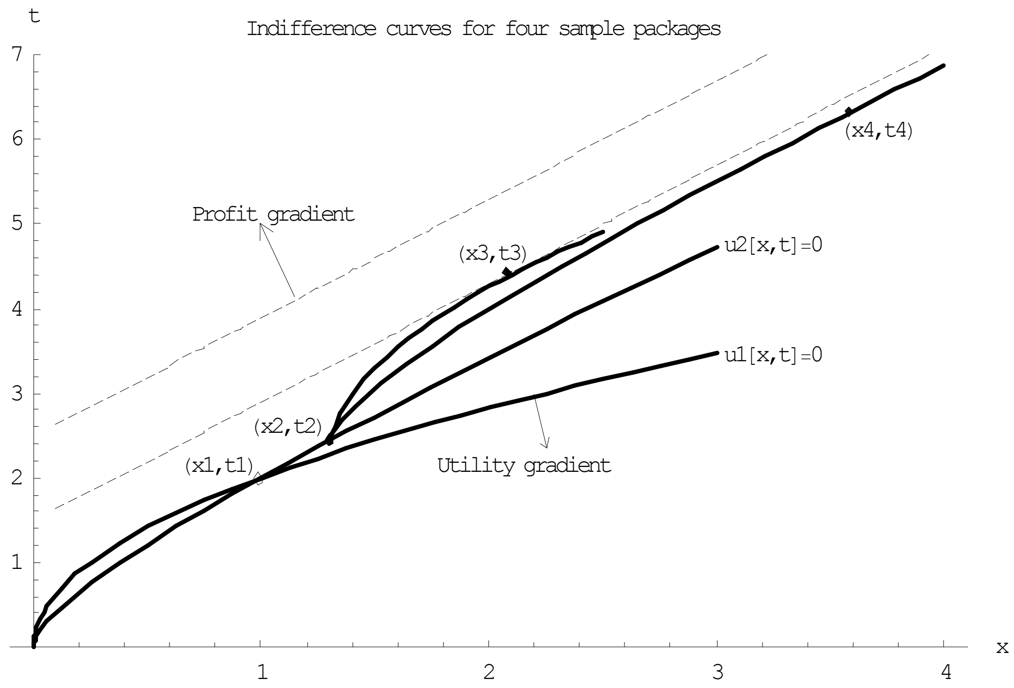

Fig 1. Sample graph structure for some (maybe non-optimal) solution ((x1,t1), (x2,t2), (x3,t3),(x4,t4)) to the package problem. Thin dashed lines denote profit indifference curves. Thick lines are "active" utility indifference curves of four consumers, points are the packages destined for them. First and second consumers here almost-envy to choosing 0. Third and fourth almost-envy to second package, both having "locally Pareto-efficient" packages.

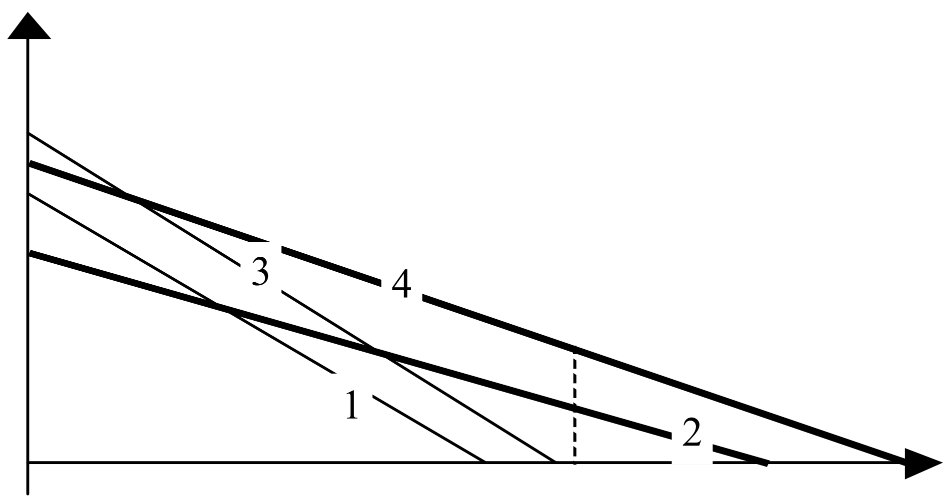

Fig 2. Related inverse demands = willingness to pay functions

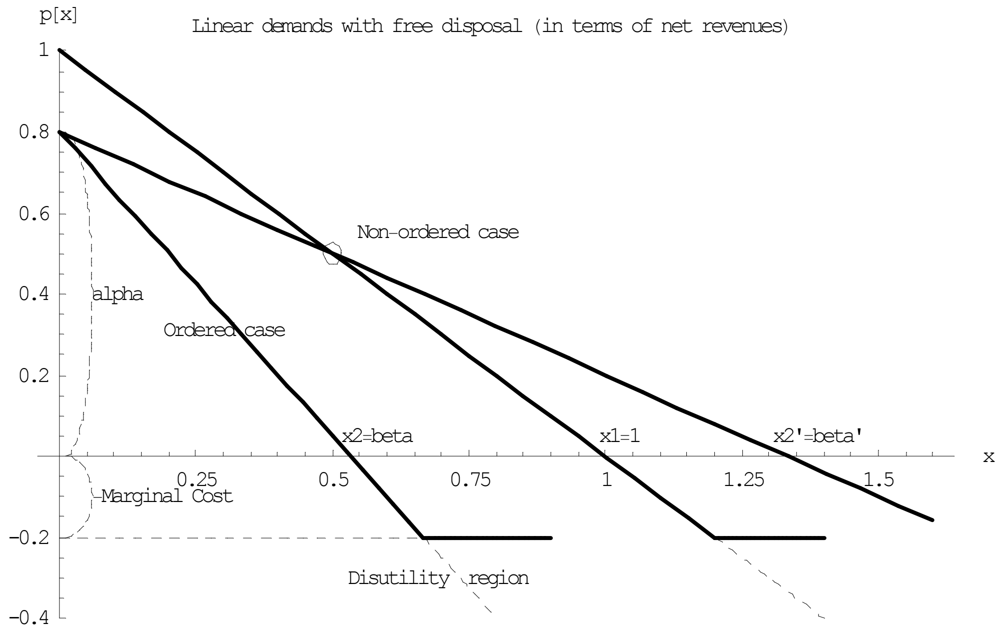

Fig 2. Demand triangles for two consumers in different cases: ordered or non-ordered demands, with or without free disposal.

Setting:

We face n types of consumers, each type relative probability is m_i (hidden types, so self-selection).

V_i - i-th valuation function.

x_i – quantity, in X – consump. set, T_i – tariff to pay, so

$U_i\ (x_i, T_i) = V_i(x_i) - T_i$ is i-th utility from buying the package, so quasi-linear. Normalized V(0)=0.

$C(m, x_1, \ldots, x_n)$ – cost function of a monopolist.

He/she is designing n-packages bundle $(x_i, T_i)_{i=1,\ldots,n}$, to maximize profit.

Список литературы: 1) Bernar Salanie "The Economics of Contracts", The Mit Press, Massachusetts, 1997 2) Michael L. Katz "Non-uniform Pricing, Output & Welfare under Monopoly", "Review of Economic Studies", #1, 1983 3) Guesnerie R., Seade J. "Nonlinear Pricing in a Finite Economy", "Journal of Public Economics", #17, 1982

4. Babu Nahata, Serguei Kokovin & Eugenius "Theory of Package Pricing: Size, Quantity, Discount & Premium", www.math.nsc.ru/~mathecon