Лекции по теории игр и политологии

С. Г. Коковин

12 мая 2003 г.

Введение

Данное пособие (которое дорабатывается) составляет курс лекций "Элементы теории игр и политологии" – обязательный курс 3-го года обучения экономического факультета Новосибирского государственного университета. Это определяет специфику подбора тем и их освещения.

Курс опирается на базис теории кооперативных игр, изученной в предыдущем курсе "Математическая экономика" (поэтому здесь кооперативная теория почти не затрагивается), и служит базисом для последующего курса "Микроэкономический анализ: несовершенные рынки", а также для изучения теории отраслевых рынков и теории общественного сектора. Он обучает скорее методам и средствам анализа, чем эмпирическим фактам. Какие "практики"или типы поведения логически объяснимы гипотезой индивидуальной рациональности, а какие нет - вот главный вопрос во всех рассматриваемых ситуациях, и умение точно рассуждать об этом является главным вырабатываемым навыком. Студенты должны освоить формализацию и решение наиболее типичных игр, прежде всего экономических и политических. В соответствии с задачами, курс организован в виде 2 частей: первая часть - "Теория Игр" сфокусирована на общих понятиях игр и методах решения, а вторая - "Политическая Теория" - на моделях политических объектов и процессов.

Курс занимает 18 лекций (36 академических часов), без семинаров, с заключительным дифференцированным зачетом и несколькими контрольными проводимыми в ходе лекций.

Методическая разработка может использоваться и как вспомогательное пособие для занятий по некоторым разделам курсов "Микроэкономики", "Экономики общественного сектора", "Теории отраслевых рынков", "Финансовой экономики", "Мат. моделей экономики" Раздел 1 пособия является вводным (базовым); он вводит необходимые понятия теории игр. Раздел 2 рассматривает модели политики. Задачи собраны в разделе 3.

В тексте использованы известные международные учебники: R.B.Myerson - *Game Theory (Analysis of Conflict)*, H.Varian - *Microeconomic Analysis.*, D. Krebs - *A Course in Microeconomic Theory,* P.C. Ordeshook- *Political Theory Primer,* J. Tirole - *Industrial Organization,* а также более продвинутая литература из приведенного списка литературы и пособия изданные в НГУ: В.Бусыгин, С.Коковин, Е.Желободько, А.Цыплаков (1999) - *Микроэкономический анализ несовершенных рынков*, В.Бусыгин, С.Коковин, А.Цыплаков (1996) - *Методы микроэкономического анализа: фиаско рынка*, пособие В.И.Данилова *Лекции по теории игр*, изданное в РЭШ.

Характер изложения практически приспособлен к типу и возможностям восприятия студентов НГУ, в рамках временных ограничений курса. Во многих случаях предпочтение отдано не формальному изложению того или иного понятия, а его освоению на конкретном примере, по возможности – занимательном. Необходимой частью пособия является задачник, поскольку практическое освоение разнообразных идей теории игр и политической теории – интереснее, чем запоминание общих положений.

Раздел 1. Элементы теории игр

1 Глава. Игры в стратегической форме ("статические")

В изучаемой здесь теории принятия решений под понятие игры подходит *любая* ситуация с рациональными, то есть целеполагающими, оптимизирующими субъектами (“ участниками”), а также некоторые ситуации с неполной рациональностью.[1] В частности, любая оптимизационная задача - это, по сути дела, просто игра с одним участником. Напротив, задачу поиска многоцелевого оптимума, то есть сильного или слабого Парето-оптимума, игрой назвать еще нельзя. Недостает описания *индивидуальных* прав или возможностей участников в рамках общих возможностей, и описания информационно-поведенческих особенностей ситуации.

Описание структуры любой игры содержит три блока: 1)физические возможности, то есть допустимые множества ходов или стратегий участников; 2)цели участников; 3)тип поведения участников, зависящий от их информированности и др., часто описываемый “концепцией решения” игры. **Задача анализа игры** — по этим трем известным блокам параметров ситуации уметь прогнозировать действия игроков, то есть множество возможных действий и их результатов (исходов) — “*решение*” игры:

$$\left.\begin{array}{r} \text{возможности каждого (допустимые множества)} \\ \text{цели участников (целевые функции)} \\ \text{тип поведения и информированности участников} \\ \text{(“ожидания” и концепция решения)} \end{array}\right] \Rightarrow \text{исход (решение) игры}$$

По каждому из этих признаков, и по некоторым другим, огромное разнообразие игр можно классифицировать. Например, игры разделяют по характеру доступных стратегий — на конечные или бесконечные (в частности, бесконечные во времени, дискретные или непрерывные и др.), на статические (с одновременными ходами) или динамические; по соотношению целей участников — на антагонистические или неантагонистические (с непротивоположными интересами); по типу поведения — на кооперативные (где участники ищут решение в переговорах) и некооперативные (где договоры неосуществимы или не обеспечены механизмом выполнения).

Для строгого анализа условия игры обычно записывают в одной из трех форм: в *развернутой* (детальное описание последовательностей возможных ходов), в *характеристической* (описываются значения выигрышей каждой коалиции, для анализа кооперативных игр) или в *стратегической* (описываются цельные стратегии), подразделяющейся на *нормальную* стратегическую форму и *мультиперсонную* (*ситуационную*) форму.

Мы начнем с варианта “нормальной” формы игры. Часто ее соотносят со случаем “статической” игры (однократные одновременные ходы участников), а развернутую

[1] Напротив, в психологии и в быту под игрой понимают лишь деятельность, непосредственные цели которой кажутся условными, не связанными с жизненными интересами участников.

форму — с "динамическими" играми (последовательные ходы), но мы увидим, что возможны и другие трактовки. Нормальная форма означает, что исходная физическая и целевая структура игры описана как объект

$$G := \langle I, X, u(.)\rangle = \langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{u_i(.)\}_{i\in I}\rangle \ , \ \text{где}$$

$I := \{1, ..., m\}$ — множество участников i,

$X := (X_i)_{i\in I} := \prod_i X_i = (X_1 \times X_2 \times ... \times X_m)$ — набор (профиль) допустимых множеств стратегий участников,

$u := (u_i)_I = (u_i)_{i\in I}$ — набор (профиль) целевых функций участников (заметим: каждая целевая функция $u_i: \ X_i \mapsto I\!R$ зависит, вообще говоря, от всех $(x_j)_{j\in I}$).

Возможно также более общее представление игр в нормальной форме (оно соответствует, в частности, Вальрасовскому равновесию игр обмена). Оно предполагает, что не только выигрыши, но и текущее допустимое множество стратегий $B_i(x_{j\neq i}) \subset X_i$ каждого участника может зависеть от текущих действий $x_{j\neq i}$ других участников. Однако, изменение допустимого множества можно представить как изменение выигрышей, или как динамическую игру, и мы не будем отдельно рассматривать эту обобщенную формализацию.

Состоянием игры в нормальной форме будем называть пару (x, β) выбранных стратегий и ожиданий всех участников. Ожидание β_i каждого участника о всех его партнерах может совпадать с их настоящими (намеченными к исполнению) стратегиями, или не совпадать.

Найти *решение* игры означает, вообще говоря, указать множество ее состояний, соответствующих нашим гипотезам о принципах поведения и информации участников. Эти гипотезы задают некоторое согласование стратегий и ожиданий, обычно формализуемым в "концепции решения". В том числе, часто под решениями подразумеваются "равновесия", то есть состояния, от которых участники не станут переходить к другим состояниям, если игра повторится. (Равновесий может и не быть: иногда процесс выбора стратегий и корректировки ожиданий не останавливается).

Проиллюстрируем используемые далее принципы обозначений и простейшее понятие решения на примере. Рассмотрим игру "семейная дилемма" (известную как "Battle of Sexes": Luce, Raiffa, 1953), нами незначительно модифицированную. Пусть Анна (персонаж, который далее во всех обсуждаемых динамических играх ходит первым и обозначается A) и Виктор (персонаж, который ходит последним и, соответственно, обозначается буквой V из *конца* латинского алфавита) могут выбрать, пойти ли вечером на футбол или в кино, и предпочли бы пойти вместе, что отражено в *таблице выигрышей* на Рис. 1: совместное попадание в кино ($(x_A, x_V) = (c_A, c_V)$) дало бы вектор удовлетворений $(u_A(c_A, c_V), u_V(c_A, c_V)) = (3, 2)$, а совместное попадание на футбол дает $(u_A(f_A, f_V), u_V(f_A, f_V)) = (1, 4)$.

В каждой клетке, соответствующей одному из 4-х возможных исходов, помещен сначала субъективный выигрыш строчного игрока – Анны (измеренный в некоторых единицах полезности), затем - выигрыш Виктора. Стрелки отражают последовательность ходов, в данном случае - то, что игроки вынуждены принять решения

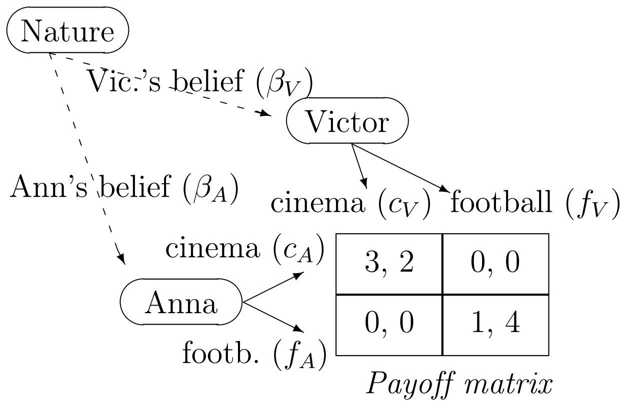


Рис. 1: Игра "Семейная дилемма" ("Battle of Sexes"). Приношу извинения, английские надписи на рисунках вынуждены программным обеспечением.

одновременно, не зная выбора другого, а только имея какие-то *"ожидания"* (beliefs) об этом выборе, предопределенные природой (случаем). В частности, если оба ожидают от партнера выбор "футбол", то есть $\beta_A = footb_V$, $\beta_V = footb_A$, тогда рациональный выбор каждого — присоединиться к выбору партнера, и исходом будет счастливая (более счастливая для Виктора) встреча на футболе: $x_A = footb_A$, $x_V = footb_V$. Аналогично, совпадающие гипотезы о кино приведут к счастливой (особенно для Анны) встрече в кино, а несовпадающие гипотезы – к развлечениям порознь. Далее, как и здесь, мы будем большими буквами обозначать участников (или множества), малыми латинскими буквами – переменные стратегий. Греческие буквы используются для ожиданий или вероятностей, в данном случае β_V – это ожидание Виктора. Нечетные цифры выигрышей во многих наших примерах соответствуют первому игроку, четные – второму.

В данном случае, для предсказания исхода мы использовали простейшую концепцию решения – *решение с заданными заранее ожиданиями ходов*, известными откуда-то нам – предсказывающему наблюдателю, причем ожидания не предполагались "согласованными". (Естественно, независимое не-кооперативное принятие решений здесь, как и во многих других случаях, может приводить к не-Паретовскому, то есть невозможному при кооперации исходу.) Более сложные гипотезы о характере поведения и информации (ожиданий) участников, порождают другие типы или концепции решений. Перечислим изучаемые далее решения игр в нормальной форме [2] (Табл.1):

1.1 Доминирование, решение Нэша и другие концепции

Будем обозначать через $x_{-i} := (x_j)_{j \in I \setminus \{i\}}$ профиль (набор) стратегий всех игроков кроме i, и аналогично индексировать множества и функции.

Сначала рассмотрим случай, когда игроки не обладают информацией ни о целях,

[2]Конечно, в данном пособии рассмотрены не все возможные типы кооперативных и некооперативных решений.

Информация, на которую ориентируется участник $j \in I$:	*Тип возникающих решений (равновесий) :*
- только на знание множеств $(X_i)_I$	$\Rightarrow MM$ — "осторожное" (максимин), $\mathbb{D}E$ — "доминирующее",
- еще и на чужие цели $(u_i)_{I\setminus\{j\}}$	$\Rightarrow INDS, INDW, SE$ — "сложное",
- на текущий чужой ход $(x_i)_{I\setminus\{j\}}$	$\Rightarrow NE$ — "Нэшевское"
- на текущую вероятность ходов	$\Rightarrow NEm$ — "Нэшевское в смешанных стратегиях"
- лидер знает цели, ведомые - текущий ход	$\Rightarrow StE$ — "Штакельберговское"
- на соглашение с партнерами	$\Rightarrow \mathcal{C}_W$ — "Ядро"

Таблица 1: Разные типы решений игр в нормальной форме. Всюду подразумевается знание собственных целей, и "общее знание" множества возможных ходов или стратегий всех участников.

ни о намеченных стратегиях партнеров. Если они к тому же ведут себя "очень осторожно", то подходит следующая концепция решения.

Определение 1.1.1 Множество X_{MMi} *осторожных* или *максиминных стратегий* игрока i задается как аргументы, максимизирующие гарантированный выигрыш:[3]

$$X_{MMi} \;\; := \;\; \{x_i \in X_i | \; \forall x_{-i} \Rightarrow u_i(x_i, x_{-i}) \geq \sup_{y_i \in X_i} (\inf_{z_{-i} \in X_{-i}} u_i(y_i, z_{-i}) \;) \; \}, \qquad (1)$$

при этом $MM := \prod_{i \in I} X_{MMi}$ – множество *максиминных решений* игры.

Поясним: в осторожном решении игроки ожидают от партнеров самого худшего для себя (равновесием это решение называть не совсем точно, поскольку ожидание всего худшего может не оправдываться), и максимизируют гарантированный выигрыш. Это иногда кажется правдоподобным поведением при неизвестности целей партнеров, крайней осторожности, и однократном розыгрыше (см. пример "Перекресток" - Табл. 2); либо в ситуации антагонистической игры, то есть игры с противоположными интересами (определяемой ниже).

		Victor	
		Go_V	Stop_V
Anna	Go_A	-1000, -1000	1, -1 (NE)
	Stop_A	-1, 1 (NE)	0, 0 (MM)

Таблица 2: Игра "Нерегулируемый перекресток", без правил: каждый может продолжать быстро ехать или затормозить. Худший исход – столкновение – игроки оценивают для себя в -1000\$, а возможность опередить соперника – в 1\$. Осторожное решение – MM: (Stop,Stop).

[3]Как обычно, $\sup = \max, \; \inf = \min$, если $\max, \min$ существуют.

Во многих случаях применимость концепции максимина вызывает сомнения: если игроки осторожны, то почему не внести степень их неприятия риска в явном виде в значения выигрышей, приписывая одновременно некоторые вероятности ожидаемым ходам партнеров? К тому же, игра типа “Перекресток”, но разыгрываемая многократно, вряд ли будет приводить к такому же взаимно-осторожному решению с *несогласованными* ожиданиями, ожидания тем или иным путем скорректируются и согласуются (см. “повторяющиеся игры”).

Впрочем, бывают ситуации “доминирования”, когда ожидания не играют роли. Для описания их введем понятия сравнения стратегий. Естественно считать, что одна моя стратегия “слабо доминирует” вторую, то есть “лучше” для меня чем вторая моя стратегия – когда первая стратегия при любых действиях партнеров не хуже второй стратегии и по крайней мере для одного варианта действий партнеров строго лучше (приносит мне больший выигрыш). Формально:

Определение 1.1.2 Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i (слабо) *доминирует* стратегию $y_i \in X_i$, если

$$\forall x_{-i} \in X_{-i} \Rightarrow u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}),$$

$$\exists x_{-i} \in X_{-i}: \quad u_i(x_i, x_{-i}) > u_i(y_i, x_{-i}),$$

где $-i := I \setminus \{i\}$, $X_{-i} := (X_j)_{j \neq i}$. Если же оба приведенные неравенства строгие, то x_i *строго доминирует* над y_i (то есть x_i лучше при любых действиях партнеров).

Если две стратегии x_i, y_i доставляют одинаковые выигрыши при любых действиях партнеров (то есть $u_i(x_i, x_{-i}) = u_i(y_i, x_{-i})\ \forall x_{-i}$), то они *эквивалентны*. Если же из пары стратегий ни одна не слабо-доминирует другую и они не эквивалентны, то они *несравнимы*.

Понятие доминирования позволяет разбить множество стратегий X_i на классы:

Определение 1.1.3 Стратегия $x_i \in X_i$ игрока i называется (слабо) *доминирующей* стратегией (среди его стратегий) — если она доминирует любую другую его стратегию либо эквивалентна ей:

$$\forall y_i \in X_i, \forall x_{-i} \in X_{-i} \Rightarrow u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}),$$

и *сильно доминирующей* если все такие неравенства строгие. Множество всех (слабо) доминирующих стратегий игрока i далее обозначается $\mathbb{D}_{Wi}$, а сильно доминирующих стратегий – $\mathbb{D}_{Si}$. Множество всех *недоминируемых* слабо (ни одной другой стратегией) стратегий игрока i обозначается далее $\mathcal{ND}_{Wi}$, множество всех *недоминируемых сильно* – $\mathcal{ND}_{Si}$.

Проверьте

Утверждение. *Множество осторожных стратегий игрока X_{MMi} пересекается с множеством его слабо- недоминируемых стратегий когда оба непусты ($[X_{MMi} \neq \emptyset, \mathcal{ND}_{Wi} \neq \emptyset] \Rightarrow X_{MMi} \cap \mathcal{ND}_{Wi} \neq \emptyset$), и входит в множество сильно-недоминируемых стратегий: $X_{MMi} \subset \mathcal{ND}_{Si}$.*

Например, пусть множество стратегий Анны есть $X_A = (a, b, c, d, e)$, и выигрыши ее заданы таблицей (выигрыши партнера опущены):

$Ann \backslash Victor$	x	y	z
a	$2, *$	$3, *$	$5, *$
b	$3, *$	$3, *$	$4, *$
c	$2, *$	$4, *$	$5, *$
d	$3, *$	$3, *$	$3, *$
e	$1, *$	$3, *$	$4, *$

Тогда $\{b, d\} = X_{MM,A} \subset \mathcal{ND}_{S,A} = \{a, b, c\} \supset \mathcal{ND}_{W,A} = \{b, c\}$.

Понятия доминирования, примененные *ко всем игрокам* сразу, позволяют сформулировать четыре типа решений, по два для сильной и для слабой концепции.

Определение 1.1.4 Множество *равновесий в (слабо) доминирующих стратегиях* есть множество профилей (наборов) слабо-доминирующих стратегий игроков:

$WI\!\!DE := \prod_{i \in I} I\!\!D_{Wi} = (I\!\!D_{W1} \times I\!\!D_{W2} \times ... \times I\!\!D_{Wm})$.

Аналогично, множество *равновесий в сильно-доминирующих стратегиях* есть:

$SI\!\!DE := \prod_{i \in I} I\!\!D_{Si} = (I\!\!D_{S1} \times I\!\!D_{S2} \times ... \times I\!\!D_{Sm})$.

Определение 1.1.5 Множество *(слабо) недоминируемых решений* есть множество профилей (наборов) слабо-недоминируемых стратегий игроков:

$W\mathcal{ND} := \prod_{i \in I} \mathcal{ND}_{Wi} = (\mathcal{ND}_{W1} \times \mathcal{ND}_{W2} \times ... \times \mathcal{ND}_{Wm})$.

Аналогично, множество *сильно-недоминируемых решений* есть:

$S\mathcal{ND} := \prod_{i \in I} \mathcal{ND}_{Si} = (\mathcal{ND}_{S1} \times \mathcal{ND}_{S2} \times ... \times \mathcal{ND}_{Sm})$.

Сопоставим эти четыре концепции. Очевидно, всегда $\mathcal{ND}_{Wi} \subset \mathcal{ND}_{Si}$, поэтому $W\mathcal{ND} \subset S\mathcal{ND}$. Кроме того, очевидно, $WI\!\!DE = SI\!\!DE$, когда $SI\!\!DE \neq \emptyset$. При этом $WI\!\!DE$ имеет больше шансов существовать: если есть слабо-доминирующие стратегии, это еще не значит, что есть сильно-доминирующие. Недоминирующие же решения существуют всегда (при компактности множеств стратегий и достижимых выигрышей), но часто оставлют слишком большую неопределенность решения. Сопоставляя слабо-доминирующие и слабо-недоминируемые стратегии некоторого игрока i, заметим, что

попарно эквивалентны три утверждения: 1) $I\!\!D_{Wi} \neq \emptyset \Leftrightarrow$ 2) $\mathcal{ND}_{Wi} = I\!\!D_{Wi} \Leftrightarrow$ 3) все стратегии в $\mathcal{ND}_{Wi}$ эквивалентны. Отсюда, $W\mathcal{ND} = WI\!\!D$ когда $WI\!\!D \neq \emptyset$.

Выбор между введенными концепциями с точки зрения правдоподобия их применимости неочевиден. Иногда гипотеза поведения со слабым доминированием оправдана смыслом игры, а иногда – нет, как видно из игры на Рис. 3:

Здесь по слабому доминированию игра приходит к мало выгодному решению b, y. Оно вполне возможно в однократной игре без всякой информации, а другое, более выгодное, решение a, x кажется менее разумным прогнозом их поведения. Однако,

		Victor	
		x	y
Anna	a	$ 101, $ 100	$ 1, $ 100
	b	$ 101, $ 0	$ 3, $ 2 (WDE)

Таблица 3: Применимость слабого доминирования - неочевидна.

если a, x – состояние не в однократной игре, а в некоторой *популяции*, то игроки могут не захотеть переходить на индивидуально- нестрого-более выгодные позиции b и y, основательно опасаясь сползания популяции к выигрышам $1, 1$ (b, y) (в сущности, здесь мы неявно подразумеваем использование этой статической модели для описания динамической ситуации). Тем более подобные динамические соображения могут удержать их, если это модель повторяющейся игры двух лиц. Даже и при однократном розыгрыше втемную, исход (a, x) не кажется слишком глупым: достаточно ли велика разница между 0 и 2, чтобы мотивировать отбрасывание слабо доминируемой стратегии x? Не повлияет ли на выбор Виктора его “порог чувствительности” или (не учтенное пока в таблице выигрышей) нежелание причинить вред своему партнеру? Впрочем, это бы означало, что игра неточно формализована в данной таблице: в ней учтены лишь денежные выигрыши, а должны быть учтены “полезности”. Так или иначе, прежде чем применять ту или иную концепцию решения, желательно сопоставить ее с нашими представлениями о поведении и психологии партнеров.

Что касается концепций доминирующих равновесий WDE, SDE, то в большинстве игр оба варианта довольно убедительны, но к сожалению, редко существуют, из-за частого отсутствия доминирующих стратегий. Приведем популярный пример игры, где оба эти решения есть: $SDE = W\not{D}E \neq \emptyset$.

Пример 1.1 “Дилемма заключенных” (R.Luce, H.Raiffa,1957).

Двух человек арестовали по подозрению в совершении двух разных преступлений, причем у каждого есть улики на партнера. Известно, что если один “стучит” на другого, а другой нет, то информатор получает 1 год наказания, а “молчун” – 10 лет. Если информируют оба, то каждый получит по 7 лет. Заключенным известно, что если никто из них не информирует, то оба получат по 3 года.

Игру можно представить с помощью следующей матрицы (Табл.4), в клетках которой слева внизу стоит выигрыш первого заключенного, а справа вверху – второго. Таким образом, две матрицы выигрышей совмещены в одной диаграмме, каждая клетка отражает один из исходов. Это типичный способ представления игр с конечным множеством стратегий — “матричных” (“биматричных”, по другой терминологии, не поддерживаемой нами).

Здесь у каждого игрока имеется стратегия строго доминирующая среди возможных стратегий – стучать: соответствующий вектор возможных выигрышей (-7,-1) строго доминирует над вектором (-10,-3), то есть $(-7, -1) \gg (-10, -3)$ поэтому
SDE ={(стучать, стучать) }.

		Victor			
		стучать		молчать	
			-7		-10
Anna	стучать	-7	SDE	-1	
			-1		-3
	молчать	-10		-3	

Таблица 4: “Дилемма заключенных”.

Забегая вперед, заметим, что все рассмотренные ниже виды некооперативных решений (равновесий) в этой игре совпадают (ниже формулируются их определения и соответствующее общее утверждение о совпадении разных решений в случае $SDE = WDE \neq \emptyset$). Действительно, худшее, что может получить заключенный, если стучит это 7 лет, если же не стучит, то 10 лет. Поэтому “осторожным” поведением для них будет сознаться. С другой стороны, каждому из них не выгодно изменять этот выбор при текущем выборе партнера, поскольку при этом он ухудшил бы свое положение. Поэтому это будет и равновесием по Нэшу. Далее, если первому из заключенных предложили сделать свой выбор первым (он находится в положении лидера), то он, зная, что реакцией второго на любой его выбор будет информировать, выберет наилучшее для себя – стучит. То есть равновесие Штакельберга будет там же. Сложное равновесие тоже совпадает с равновесием в доминирующих стратегиях. Любой некооперативный исход выглядит парадоксально- неудачным: ведь если бы оба не выбирали лучшее для себя по отдельности, и не стучали, то оба получили бы меньшее наказание, достигнув Парето-оптимума $(u_1 = -3, u_2 = -3)$.

Такая неоптимальность довольно типична для некооперативных решений в разных играх. Если же участники способны скооперироваться и верят в выполнение соглашения партнером, то достигают ядра $(-3, -3)$, и одновременно Парето-оптимума.

Структуру игры аналогичную дилемме заключенных мы видим во многих играх, в частности, при рассмотрении *гонки вооружений* двух сверхдержав (СССР и США): при невысокой вооруженности обоих их безопасность выше, чем при высокой вооруженности обоих. Но при любой фиксированной вооруженности партнера безопаснее поднимать свою. Поэтому, при отсутствии сдерживающих договоров (кооперативного поведения) страны скатываются к не-Парето оптимальному, то есть невыгодному обоим состоянию: чрезмерной вооруженности.

Такая же структура игры у дуополии. Например, в дуополии Бертрана каждому конкуренту выгодно отклониться от монопольно- высокой цены, но после таких шагов обоих, оба проиграют.

Пример игры с непрерывными стратегиями, где есть доминирующее равновесие – аукцион Викри (аукцион второй цены – см. задачник).

Итак, когда доминирующее равновесие существует, то оно кажется вполне естественным (особенно – строго доминирующее) исходом некооперативной игры, причем не требующим от игрока никаких знаний о партнерах. Однако, игры чаще всего не имеют равновесия в доминирующих стратегиях. В этом случае возникает проблема выбора концепции равновесия (решения), которая бы наилучшим образом подходила к моделируемой ситуации. Как и во всяком моделировании, этот выбор подчинен интуиции исследователя, в нем трудно дать точные общие рекомендации. Мы рассмотрим здесь некоторый арсенал концепций, различающихся, в сущности, *ожиданиями* игроков: IND, SE, NE, MM, StE, а позже коснемся попыток универсализации концепции решения.

Рассмотрим концепции решений, в которых подразумевается, что игроки информированы о целях друг друга, причем, это является "общим знанием": все знают, что все всё знают о целях. Также подразумевается, что игроки неограниченно дальновидны и расчетливы, и это тоже является общим знанием. В том числе, в "итерационно недоминируемом" равновесии считается, что игроки, зная цели друг друга, последовательно отбрасывают свои доминируемые стратегии и ожидают того же от других, взаимно просчитывая ходы (я отбросил свои доминируемые стратегии, знаю, как партнер отбросил свои, и он знает о моих отброшенных, следовательно...). Итерации этих расчетов взаимного предсказывания могут привести к решению, называемому "итерационно-недоминирующим решением". Оно возможно и в сильном и в слабом варианте.

Определение 1.1.6 Определим последовательность игр $G^1 \subseteq G^2 \subseteq ..., G^t, ...$, задавая каждый раз множество всех стратегий новой игры как прошлое множество (слабо) недоминируемых стратегий: $X^{t+1} := \mathcal{ND}^t_W$ $(t = 1, 2, ...)$ (предполагается что все игроки отбрасывают доминируемые стратегии одновременно).[4] Множество $INDW$ *итерационно недоминируемых (слабо) исходов* игры G^1 есть стационарное множество этой последовательности: $INDW := \mathcal{ND}^{\hat{t}}_W = \mathcal{ND}^{\hat{t}-1}_W$ $(\exists \hat{t} \geq 1)$. Аналогично определена концепция *итерационно сильно-недоминируемых исходов* $INDS$, отличаясь только типом доминирования.

Множество *сложных равновесий* SE_W (sophisticated equilibrium) есть такое $INDW$, где каждый игрок имеет только эквивалентные стратегии[5] в финальной игре $G_{\hat{t}}$, иначе считают, что $SE_W = \emptyset$. Если $SE_W \neq \emptyset$, тогда говорят, что игра "разрешима по (слабому) доминированию". Аналогично определяется разрешимость по сильному доминированию'.

Заметим, что эквивалентность моих стратегий в финальной игре не означает, что выигрыши не зависят от деятельности партнера, и сложные равновесия (как и доминирующие) могут включать исходы с различными выигрышами всех игроков:

В игре на Табл. 5 у обоих участников все стратегии эквивалентны, поэтому вся игра есть $SDE = SE = \{(a, x), (b, x), (a, y), (b, y)\}$. Но выигрыши различны!

Применение концепций сильного и слабого итерационного доминирования – рассмотрите на примере "Экзамен" (Табл. 7).

[4]Рассматривают также сложные равновесия с неодновременным отбрасыванием худших стратегий, а с заданной последовательностью отбрасываний (Мулен, 1985, стр.40). Они подобны вводимым ниже равновесиям игр в развернутой форме и равновесиям Штакельберга.

[5]Это не значит, что все исходы приносят одинаковые выигрыши, см. Табл. 5.

	$--x--$	$-----y--$
a	$2,\ 2\,(SDE)$	$0,\ 2\,(SDE)$
b	$2,\ 0\,(SDE)$	$0,\ 0\,(SDE)$

Таблица 5: Множество неэквивалентных доминирующих решений, SDE=SE.

Заметим, что решение $INDW$ может зависеть от порядка слабого доминирования (см. пример (Табл. 13)), в отличие от сильного, где порядок ходов **безразличен** (докажите). Какую из концепций – сильную или слабую – предпочесть, и какой порядок отбрасывания является реалистичным – тонкий вопрос. Ответ определяется дополнительной информацией об игре (далее мы касаемся этого в динамических играх).

1.2 Игры в популяциях и решение Нэша

Заметим, что разрешение игры по итеративному доминированию не обязательно отражает знание целей и соображений партнеров, а может быть применимо и к другим ситуациям. Эти *"популяционные"* ситуации играют в дальнейшем изложении большую роль.

Подразумевается, что конкретная однократная игра между партнером типа A и партнером типа B – есть одна из *типичных* игр в достаточно большой популяции подобных игр. Тогда свои ожидания о поведении партнера (и, возможно, о его целях) каждый игрок строит по прошлому опыту подобных игр. Скажем, конкретный пассажир, раздумывая, торговаться ли с таксистом, учитывает свой опыт в этом деле. В таких ситуациях устойчивое в каком-то смысле решение игры естественно называть "равновесием" этой популяции.

Очевидно, когда итеративно строго-недоминируемое решение единственно, то оно выглядит естественным "равновесием" популяционной игры, и не требует знания целей. Интерпретация итеративного доминирования здесь иная, чем ранее: однажды некоторые игроки отбросили (перестали использовать) доминируемые стратегиями – игра уменьшилась, их партнеры это наблюдали, в следующих розыгрышах отбросили еще какие-то стратегии, и т.д. Не-единственность же равновесия и/или только слабое доминирование могут вызывать вопросы. Какое из нескольких равновесий более правдоподобно? Какая концепция – сильная или слабая – лучше прогнозирует исход? Прежде чем сопоставить на примерах сильное и слабое доминирование, введем еще одну, конкурирующую с ними, концепцию равновесий.

Наиболее часто к ситуациям без знаний целей партнеров применяют концепцию равновесия Нэша — это *"рациональное решение при таких ожиданиях ходов партнеров, где все ожидания оправдались"*.

Выражая это формально, обозначим $\beta_i^j \in X_j$ ожидание (belief) игрока i о выбранной стратегии игрока j. Набор стратегий и ожиданий $(\bar{x}, \bar{\beta}) = (\bar{x}_i, (\bar{\beta}_i^1, ..., \bar{\beta}_i^n))_{i \in N} \in X \times (X \times ... \times X)$ можно назвать Нэшевским равновесием если:
1) решение $\bar{x}_i \in X_i$ каждого игрока является наилучшим для него ответом на ожи-

даемые ходы $\bar\beta_i^{-i} \in X_{-i}$ прочих игроков, в смысле: $u_i(\bar x_i, \bar\beta_i^{-i}) = \max_{x_i\in X_i} u_i(x_i, \bar\beta_i^{-i})$; 2) все ожидания совпадают с истинным выбором: $\bar x_i = \bar\beta_j^i$ $(\forall i, j)$.

В примере "Семейный спор" (Футбол или кино) на Рис. 1 два таких равновесия ((футбол,футбол),(кино,кино)), причем одно из них выгоднее для Анны, другое – для Виктора. Аналогично и в игре "Перекресток" два неравноценных равновесия Нэша.

В некоторых играх равновесие Нэша может выражать идею *наблюдаемости текущих ходов* партнеров. Скажем, в игре "Перекресток", если Анна видит, что Виктор не тормозит, а Виктор видит, что Анна тормозит, то этот исход и реализуется; никто не отступит от текущей стратегии. Впрочем, подобные динамические рассуждения (в том числе об игре "Перекресток") не совсем корректны, возникают мотивы угроз. Точнее было бы обсуждать подробно последовательность моментов сохранения стратегии, то есть повторяющуюся динамическую игру (см. далее). Более адекватно концепция Нэша применима к повторяющейся игре среди *популяции* игроков, а не пары игроков. Тогда мои ожидания некоторого поведения от моего сегодняшнего партнера могут быть основаны на прошлом опыте взаимодействия с *другими* подобными партнерами, но мотивы угроз не возникают, и не искажают решения.

По сути, Нэшевское равновесие родственно равновесиям в доминирующих стратегиях в том смысле, что $I\!D E, INDS, INDW$ "глобально стационарны" среди всех стратегий, а Нэшевское равновесие — по крайней мере "локально стационарно". Совпадение ожиданий с истинным выбором позволяет упростить его определение, не формулируя ожиданий явно, ограничиваясь стратегиями:

Определение 1.2.1 Множество *равновесий по Нэшу* (нэшевских равновесий) есть
$$NE := \{\bar x \in X|\ y_i \in X_i \Rightarrow u_i(\bar x_i, \bar x_{-i}) \geq u_i(y_i, \bar x_{-i})\ \ (i \in I)\}, \tag{2}$$
если же все неравенства строгие, то говорят о *строгих равновесиях по Нэшу* (SNE).

Иными словами, Нэшевское равновесие – точка из которой ни одному игроку нет пользы уходить (он либо ничего от этого не приобретает, либо теряет) при текущих ходах партнеров, а строгое Нэшевское равновесие – точка, из которой *вредно* уходить.[6] Иначе эту идею можно выразить через понятие "рационального отклика" или лучшего ответа на действия партнеров ("best response").

Отображение (то есть многозначная функция) $\mathcal{X}^*{}_i(.) :\ X_{-i} \mapsto X_i$ *рационального отклика* i-го участника на ожидаемые действия x_{-i} его партнеров состоит из аргументов, максимизирующих его целевую функцию:
$$\mathcal{X}^*{}_i(x_{-i}) = \arg\max_{x_i\in X_i} u_i(x_i, x_{-i}) = \{x_i \in X_i|\ u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i})\ \forall y_i \in X_i\}. \tag{3}$$
В этих терминах, Нэшевское равновесие – это профиль рациональных откликов всех игроков на рациональные отклики партнеров:
$$\bar x \in NE \Leftrightarrow \bar x \in \prod_i \mathcal{X}^*{}_i(\bar x_{-i}).$$

[6] Иногда еще вводят понятие *сильных* или коалиционных равновесий Нэша - когда ни одна коалиция не может улучшить своего положения. Такие равновесия редки.

Focal points

Понятие NE может оказаться применимо в разных случаях. Наряду с популяционной ситуацией, и в однократной игре может случиться, что ожидания партнеров почему-либо “сфокусированы” на каком-либо профиле стратегий, считающемся вероятным. Например, в игре “Футбол или кино”, если оба почему-то ожидают от партнера выбор “кино”, или хотя бы я ожидаю, что партнер ожидает такой выбор от меня (например, известна уступчивость Виктора, или было сделано какое-то намекающее сообщение), то это и случится. Этот довольно распространенный эффект “самоподдерживающихся ожиданий” называют еще **“эффектом фокусной точки”** (focal point).[7] В некоторых ситуациях эта фокусная точка возникает в результате предварительных переговоров. Тогда Нэшевское равновесие рассматривают как полукооперативную концепцию: если оно принадлежит ядру (определяемому ниже), то это “такое соглашение, от которого никто не склонен отступать”, по крайней мере, если ожидает не отступления партнеров. Напротив, хороший для обоих участников исход (молчать,молчать) в “Дилемме заключенных” таким естественно-устойчивым соглашением быть не может, а требует каких-то мер принуждения к выполнению такого соглашения. В этом смысле принадлежность некоторого соглашения к NE – важное преимущество.[8]

Оказывается, Нэшевское решение, может быть естественным исходом и в противоположной – “совсем некооперабельной” ситуации, то есть в *антагонистических* играх.

Определение 1.2.2 *Антагонистической* называют игру с одинаковой (например, нулевой) суммой выигрышей при любом исходе, т.е. такую, что
$\sum_{i\in I} u_i(x) = s \ \ \exists s \in I\!R, \forall x \in X$.[9]

В таких играх тоже применяют NE, точнее, его сужение, называемое “седлом” или седловой точкой.

Определение 1.2.3 Множество *седловых точек* есть

$$Sad := MM \cap NE$$

Это те Нэшевские равновесия, где худшие предположения о партнерах сбываются.

Например, в играх “Семейный спор” и “Перекресток” седла нет: максимин и Нэшевское решение не пересекаются. Впрочем, существование и самого NE не всегда гарантировано, см. игру “Монетки” (Табл. 6).

[7] Популярный пример: “если люди верят, что у тебя есть власть, то у тебя она есть, они слушаются”.

[8] В качестве упражнения на эту тему, рассмотрите всевозможные варианты подобных игр 2x2 с точки зрения совместимости кооперативного и не-кооперативного поведения.

[9] Синонимы – игра “с противоположными интересами”, “с нулевой суммой”. Как ни покажется странным, но в этой терминологии войну, в отличие от шахмат, нельзя назвать антагонистической игрой, поскольку обе стороны могут очень пострадать в одних вариантах действий и не очень – при других.

		Victor: guessing	
		guess Left	guess Right
Anna	hold Left	-1, 1	1, -1
	hold Right	1, -1	-1, 1

Таблица 6: Игра “Монетки”: Нужно угадать, в какой руке у партнера монетка, тогда ее забираешь, иначе – отдаешь свою (Анна держит, Виктор угадывает). $NE = \emptyset$.

В повторяющихся играх типа игры “Монетки” под NE может подразумеваться, что каждый игрок наблюдает определенный текущий выбор партнеров на предыдущем шаге и ведет себя *близоруко* – не учитывает, что партнеры могут изменить свой выбор когда он изменит свой (неполная рациональность). Пустоту $NE = \emptyset$ тогда надо рассматривать как несуществование стационарных точек такой игры: игра "болтается". Заметим, что применение концепций доминирования (INDW, INDS) в этой игре тоже никак не увеличивает определенность наших предсказаний о ее исходах: вся исходная игра недоминируема.

В отличие от рассмотренных концепций решения “симметричных” относительно игроков, в равновесии Штакельберга (Stackelberg) ожидания разных игроков формируются по разным принципам. Первый игрок (лидер) ориентируется на индивидуально - оптимальные ответы партнеров зная их предпочтения, а остальные (ведомые) играют, как в NE, близоруко реагируя на его ход и на ходы друг друга. Скажем, на рынке алмазов фирма Де Бирс, контролирующая более 70% продаж, при выборе цен просчитывает отклики на это мелких продавцов, а они играют примитивно подстраиваясь под лидера: ведь каждый из них не рассчитывает существенно повлиять на рынок в целом. Эта несимметричная концепция решений годится также для случая, когда лидер просто ходит первым (последовательная игра).

Определение 1.2.4 Считая 1-го игрока лидером, обозначим множество рациональных откликов его партнеров на его стратегию x_1 через
$\mathcal{X}^*{}_{-1}(x_1) := (\mathcal{X}^*{}_2(x_1, x_3, ...x_n), ..., \mathcal{X}^*{}_n(x_1, x_2, ...x_{n-1}))$, а решение Нэша среди последователей при фиксированной стратегии $\bar{x}_1$ лидера – через $NE_{-1}(\bar{x}_1)$:

Равновесие Штакельберга с лидером N 1 ($StEP_1$) есть такой набор $\bar{x}$ что

$$\mathbf{\bar{x}_1} \in \arg\max_{x_1 \in X_1} \mathbf{u_1}(x_1, \bar{x}_{-1}), \quad \exists \bar{x}_{-1} \in NE_{-1}(x_1) \tag{4}$$

$$\mathbf{\bar{x}_{-1}} \in NE_{-1}(\bar{x}_1)\mathbf{u_1}(\bar{x}_1, x_{-1}) \ . \tag{5}$$

В частности, осторожное (пессимистическое) равновесие Штакельберга[10] с лидером N 1 есть такой набор $\bar{x} \in StEP_1$, что

$$\mathbf{\bar{x}_1} \in \arg\max_{x_1 \in X_1} \min_{x_{-1} \in NE_{-1}(x_1)} \mathbf{u_1}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_{-1}}),$$
$$\mathbf{\bar{x}_{-1}} \in \arg \min_{x_{-1} \in NE_{-1}(\bar{x}_1)} \mathbf{u_1}(\mathbf{\bar{x}_1}, \mathbf{x_{-1}}).$$

[10]Наши определения $StEO_i, StEP_i$ не традиционны.

Оптимистическое равновесие Штакельберга с лидером N 1 $\bar{x} \in StEO_1$ определяется так же, но с заменой min на max.

Равновесие Штакельберга может возникать, например, когда один из игроков (лидер) делает свой выбор раньше других ("ведомых") и знает их цели. Или когда он один, а однотипных "ведомых" достаточно много, чтобы каждый не пытался просчитывать общие последствия своего хода. Например, это повторяющаяся игра монополиста с разрозненным множеством клиентов. Концепция $StEO_1$ предполагает доброжелательность партнеров к лидеру при выборе из эквивалентных для себя вариантов (из $\mathcal{X}^*$), а $StEP_1$ — недоброжелательность; если же выбор "ведомых" однозначен, то разницы между $StEO$ и $StEP$ нет. Если не различать оптимистические и пессимистические решения, то можно определить $StE = \{StEO, StEP\}$

Смысл борьбы за лидерство, скажем, в игре "Семейный спор" ("Battle of Sexes" - Рис. 1) таков. Рассмотрите возможность одному из игроков, например, Виктору, сообщить другому (Анне) свое решение: футбол. Эта возможность ставит его в положение Штакельберговского лидера, и позволяет форсировать более выгодное для себя из двух Нэшевских равновесий. Аналогично и для второго игрока. (А есть игры, где выгодно, наоборот, уступить первый ход.)

В заключение обзора наиболее типичных решений статических игр, упомянем также основные понятия *кооперативных* решений.

Определение 1.2.5 *Ядром* $\mathcal{C} = \mathcal{C}_W$ (обычным, слабым ядром) называется множество состояний неблокируемых никакой коалицией $T \subset I$, при обычном (сильном) определении блокирования: T *блокирует* вариант $x \in X$ если существует альтернатива $\tilde{x}_i \in X_i$ $(i \in T)$ такая, что все участники из T выигрывают по сравнению с x, т.е.[11] $u_T(\tilde{x}_T, x_{-T}) \gg u_T(x_T, x_{-T})$ — при любых действиях x_{-T} не входящих в коалицию T игроков. *Сильным ядром* $\mathcal{C}_S$ назовем множество состояний, неблокируемых никакой коалицией при слабом блокировании (что означает $u_T(\tilde{x}_T, x_{-T}) > u_T(x)$ вместо $u_T(\tilde{x}_T, x_{-T}) \gg u_T(x)$ в определении блокирования).

Определение 1.2.6 Назовем (сильным) *множеством Парето* (*Парето-оптимумом*, или "сильной Парето-границей") множество неулучшаемых по Парето точек (исходов), то есть множество исходов неблокируемых-слабо большой коалицией I:

$\mathcal{P} := \{\hat{x}| \ \nexists x \in X \ : u(x) > u(\hat{x})\}$,

Слабая Парето-граница есть множество исходов неблокируемых-сильно большой коалицией I: $\mathcal{P}_W := \{\hat{x}| \ \nexists x \in X \ : u(x) \gg u(\hat{x})\}$.

Итак, Парето-оптимум — это такое состояние, в котором никто из участников не может увеличить своего выигрыша не уменьшив выигрыша кого-то другого, а слабый Парето-оптимум — это состояние, неулучшаемое для всех сразу (т.е., по сильному доминированию большой коалиции).

[11] Для пар векторов знак $>$ здесь и далее означает $\geq\neq$, а знак $\gg$ — покомпонентно больше. В сущности, здесь вектор выигрышей коалиции T от альтернативы $\tilde{x}_i$ сильно доминирует ($\gg$) над вектором выигрышей от альтернативы x_i.

1.2.1 Смешанные стратегии и NE_m

Мы отмечали, что в повторяющихся играх типа игры "Монетки" несуществование решений $NE = \emptyset$ можно рассматривать как "раскачивание" игры. При отсутствии стационарного решения типа NE (а иногда и в других случаях, в популяциях игр) естественно пользоваться вероятностной концепцией решения (исхода) игры: как игроки будут ходить *в среднем*? Для этого используется понятие ожидаемой полезности.

> **Лотереи, ожидаемая полезность.** Пусть имеется множество $Q = \{1, 2, ..., q\}$ возможных в мире событий, причем оно задано полным (все возможные события учтены), события взаимоисключающие, и субъективные вероятности событий (мнение рассматриваемого игрока i) есть $\sigma_i := (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, ..., \sigma_{iq}) \in I\!R^q_+, \sum_{k\leq q} \sigma_{ik} = 1$. Пусть полезность набора $x \in X$ для рассматриваемого игрока выражена "элементарной" целевой функцией $u_i(x)$. Вектор $(x_1, ..., x_q) \in (X \times ... \times X)$ вместе с ассоциированными вероятностями событий $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, ..., \sigma_{iq})$ можно назвать *лотереей*: заданы уровни выигрыша в каждом событии и вероятности. Мы называем участника максимизирующим ожидаемую полезность (участником типа Неймана-Моргенштерна), если его выбор среди всех возможных лотерей описывается функцией вида $U_i(\bar{x}) = \sum_{j\in Q} \sigma_j u_i(x_{ij})$, то есть функцией линейной по вероятности, или, иначе, матожиданием полезности. Именно такими мы и будем считать участников игр далее.

Определение 1.2.7 Для игры G, где у каждого игрока $i \in I$ есть конечное число $(n_i \geq 1)$ стратегий $X_i = \{x_{i1}, ..., x_{in_i}\}$, определим *смешанную стратегию* каждого игрока i как набор вероятностей[12]
$\sigma_i = (\sigma_i^k)_{k=1}^{n_i} = (\sigma_i^k(x_i^k))_{k=1}^{n_i} \in \Omega_i := \{\sigma_i \in I\!R^{n_i}_+ | \ \sum_{k=1}^{n_i} \sigma_i^k = 1\}$ с которыми данный игрок применяет соответствующие исходные "чистые" стратегии $x_i^k \in X_i$. Определим *смешанное расширение игры* $G_m := \langle I, (\Omega_i)_I, (U_i)_I \rangle$, как игру, где допустимые множества есть наборы вероятностей $\Omega_1, ..., \Omega_m$, а целевая функция любого игрока есть матожидание выигрыша:

$$U_i(\sigma) := \sum_{(x_1,x_2,...,x_m)\in X} \sigma_1(x_1) \cdot \sigma_2(x_2) \cdot ... \cdot \sigma_m(x_m) \cdot u_i(x_1, x_2, ..., x_m) \qquad (6)$$

Нэшевское равновесие в смешанных стратегиях $\bar{\sigma} \in NE_m$ исходной игры G есть Нэшевское равновесие в ее смешанном расширении G_m, то есть набор $(\bar{\sigma}_i)_I$, таких, что ни один игрок не может меняя смешанную стратегию улучшить матожидание своего выигрыша, при неизменных (смешанных) стратегиях партнеров.

Аналогично можно определить понятие NE_m для игры с бесконечным множеством стратегий, только смешанные стратегии σ_i оказываются не векторами, а вероятностными мерами, матожидания – из сумм превратятся в интегралы. Переход

[12] Обычно имеют в виду популяционную или повторяющуюся игру. Обозначение m – от англ. "mixed".

к смешанному расширению (то есть к вероятностному варианту) игры овыпукляет ее множество стратегий и множество достижимых уровней полезности. Это благоприятно сказывается и на существовании Нэшевских равновесий (см. теорему Нэша ниже), и на возможности их охарактеризовать. Очевидно, к расширенной игре можно применять все те же приемы, что и к исходной, а обычные равновесия Нэша остаются равновесиями и в вероятностном расширении игры (чистые стратегии – это просто орты в пространстве вероятных стратегий).

Применяя для смешанного расширения игры понятие сильного доминирования, можно сузить множество недоминируемых стратегий еще одним методом, альтернативным к слабому доминированию и расширяющим множество сильно доминируемых:

Определение 1.2.8 Стратегию x_i называют смешанно-доминируемой, если существует смешанная стратегия $\sigma_i \in \Omega_i$ сильно доминирующая над x_i.

Пример: три стратегии дают игроку выигрыши (4,1), (1,4), и (2,2) соответственно. Ясно, что ни одна из трех не доминирует другую ни сильно ни слабо, но комбинация первых двух с весами 0.5 смешанно-доминирует третью.

Утверждение. Некоторая чистая стратегия может быть смешанно-недоминируемой тогда и только тогда, когда является рациональным откликом на некоторую смешанную (в частности, возможно, на чистую) стратегию партнеров.

Этот факт следует из овыпукления игры (док. см. Myerson 1999, Данилов 2002). Наиболее интересно он отражается на антагонистических играх. Из него также можно вывести вложение $NE \subseteq INDS$ (покажите).

Для антагонистической игры двух лиц *ценой игры* u_{sad} называют полезность первого игрока в седловой точке Sad, то есть

$$u_{sad} := \sup_{x_1 \in X_1} \inf_{x_2 \in X_2} u_1(x_1, x_2) \; = \inf_{x_2 \in X_2} \sup_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, x_2) \; .$$

Если седловой точки, то есть пары стратегий удовлетворяющей этому равенству нет, то игру считают неразрешимой по принципу седла, то есть “не имеющей цены”.

Легко заметить, что
антагонистическая игра двух лиц (где $u_1(x_1, x_2) = -u_2(x_1, x_2)$) имеет цену тогда и только тогда, когда функция $u_1(.,.)$ имеет седловую точку на $X_1 \times X_2$.

Смешанное же расширение игры всегда имеет цену (теорема фон Неймана, см. ниже).

1.3 Практическое нахождение решений и обсуждение

Сопоставим все введенные понятия решений на примере единой (би-)матричной игры.

Пример 1.2 Студент и экзаменатор (Поиск решений матричной игры)

Рассмотрим гипотетическую популяцию ленивых студентов и более-менее старательных преподавателей. За точку отсчета возьмем случай, когда студент учит, а преподаватель внимательно смотрит на экзамене за наличием шпаргалок: студент имеет 5, и удовлетворение преподователя оценим в 5 (см. Табл. 4). Если при внимательном экзамене студент не учит, то имеет оценку 2, но +1 от приятно проведенного в семестре времени, в целом 3, а удовлетворение преподователя 2. Если при невнимательном экзамене, но с дополнительными вопросами, студент учит, то имеет оценку 5, но -1 от утомления на экзамене, в целом 4, а удовлетворение преподователя тоже 5, но -1 от утомления, в целом 4. Если же в этом случае студент не учит, то имеет 3 (все же он что-то рассказал) +1 от отдыха в семестре, всего 4. Осталось предположить малое моральное удовлетворение =3 преподавателя от плохого экзамена, еще немного гипотез, и получим игру Табл. 7.

		Студент			
	Стратегии и выигрыши	Учить (У)	Шпорить (Ш)	Гарантир. выигрыш	Расчетный выигрыш
Препо-	Смотреть строго (С)	SE 5 5 SNE	3 2	2	5 *
дава-	мягко, но с Вопросами (В)	4 4	4 3 NE	3 *	4 или 3
тель	Мягко, без вопросов (М)	5 3	6 3 NE	3 *	3

Таблица 7: Игра “Экзамен”.

В подобных (“матричных”) играх с конечными множествами стратегий двух игроков легко проверить наличие доминирующих стратегий: достаточно сравнить вектор выигрышей (5,4,5) при стратегии “Учить” с вектором (3,4,6)- “Шпорить”, чтобы заметить, что они несравнимы, следовательно доминирующих стратегий у студента нет, тогда и доминирующего равновесия нет: $\mathbb{D}E = \emptyset$.

Осторожное равновесие практически ищется так: игрок выбирающий строки в каждой строке находит свой гарантированный выигрыш (то есть минимум в строке), а затем в качестве решения принимает строку или строки с максимальным гарантированным выигрышем. Аналогично поступает со столбцами игрок выбирающий столбцы. В данном случае две нижние клетки - среди осторожных решений $MM = \{(,),(,)\}$. Возможно, при однократной встрече некоторой группы с некоторым (впервые приглашенным в университет) преподавателем такое осторожное решение реалистично. Чаще же можно ожидать, что популяция студентов знает по прошлому опыту типичную стратегию преподавателя(-лей), тогда уместнее искать NE.

Множество Нэшевских равновесий ищем перебором всех клеток; равновесия – это клетки из которых первому участнику не выгодно “уйти вверх или вниз”, а второму - “уйти в сторону” - то есть сменить стратегию при фиксированной чужой; здесь таких три: $NE = \{(,),(,),(,)\}$. Последнее наиболее благоприятно для студентов, но его реалистичность сомнительна, если преподаватели склонны отбрасывать слабо доминируемые стратегии.

Итерационно недоминируемое (слабо) множество $INDW$ ищем последовательным исключением из игры доминируемых строк и столбцов. На первом шаге рассуждений стратегия В=(4,3)>М=(3,3) слабо доминирует нд М, а у студента нет доминирования (иначе бы мы одновременно отбросили и его доминируемые стратегии). Таким образом, если об типа игроков действительно отбрасывают слабо доминируемые стратегии и знают партнера, то стратегия М невозможна, и по сути рассматривается игра 2x2: {(С,У),(С,Ш),(В,У),(В,Ш)}. Тогда для студента стратегия У=(5,4)>Ш=(3,4), и последняя на втором шаге рассуждений отбрасывается, что понятно преподавателю, остается игра 2x1: {(С,У),(В,У)}. Аналогично, на третьем шаге, по рациональности преподавателя, останется игра 1x1: INDW=SE= {(С,У)}, то есть итерационно-недоминируемое множество свелось к однозначному по выигрышам исходу и является поэтому SE. Напротив, по сильному доминированию здесь нельзя отбросить ни одной стратегии, поэтому INDS - это вся исходная игра.

Решение Штакельберга, если лидер - первый игрок, ищем, приписывая каждой стратегии (строке) расчетные оценки его выигрыша, с учетом ответного ход партнера (Нэшевского отклика). Среди них наилучшей для него является С=5, поэтому решение StE=(С,У)=(5,5). Если бы вместо (5,5) в клетке (С,У) были выигрыши (3.5,5), то преподаватель, просчитывая варианты, оказался бы в неясном положении. Студенту при (В) безразлично, сыграть (У) или (Ш). При оптимистической позиции преподавателя, он выбрал бы StEO=(В,У)=(4,4), а при пессимистической StEP= (С,У)= (3.5,5).

С другой стороны, если бы в правой нижней клетке стояло (М,Ш)=(4,6), то студенты, в случае их организованности и неорганизованности преподавателей, могли бы выступить лидером и форсировать вариант StE_2=(М,Ш)=(4,6).

Равновесие Штакельберга типа StE_1 реалистично, если преподаватель надеется заработать у студентов некоторую личную репутацию (например, “строгого”), и тем самым лидировать в игре. Если же предмет принимает большая группа преподавателей, то его личные усилия мало изменят репутацию “популяции преподавателей”, и, соответственно, поведение студентов - тогда лидерство и соответствующее решение StE неправдоподобны. Теперь попробуем представить, что преподаватели за столом переговоров нашли с коллективом студентов общее решение, то есть элемент ядра.

Для нахождения ядра, из множества слабо-Паретовских исходов $\mathcal{P}_W$ = {(С,У),(М,У),(М,Ш)}= {(5,5),(3,5),(3,6)} (то есть из множества неблокируемого большой коалицией) нужно отбросить исходы, в которых меньшие коалиции получают менее своего гарантированного выигрыша. В качестве индивидульно- гарантированного выигрыша при нахождении ядра довольно реалистичным будет взять ожидаемые (но не фактические) значения полезностей рассматривающиеся в максимине; ведь именно их каждый игрок может себе гарантировать *независимо от действий партнеров.* Здесь преподаватель может гарантировать себе 3, а студент 4, поэтому никакие варианты не отброшены: (3,4)≤(5,5), (3,4)≤(3,5), (3,4)≤(3,6), и $C = \mathcal{P}_W$.

Аналогично из сильной Парето-границы $\mathcal{P} = C$ ={(С,У), (М,Ш)}={(5,5), (3,6)} получим сильное ядро, совпадающее здесь с ней.

На первый взгляд, если переговоры начинались из ситуации решения Штакельберга, то реалистичным будет предполагать, что преподаватели в них в качестве альтернативы договоренностям (точки угрозы) станут выдвигать не свой гарантированный выигрыш 3, а выигрыш 5 в точке (С,У). Тогда ядро могло бы сузится до (С,У). Но этот вариант правдоподобен только при “слабой” организации коалиции студентов, ведь студенты могут ответить контругрозой (Ш). А вводя “силу и слабость” коалиций мы уже отступили бы от стандартной концепции ядра.

Для поиска решения Нэша в смешанных стратегиях, обозначим три стратегии преподавателя $0 \leq (s, v, m): \ s + v + m = 1$, и две стратегии студента $u, (1-u)$. Нам нужно найти пару $[(s, v, m), u]$, при которой популяция студентов и преподавателей не изменяет вероятности своих "чистых" ходов. Поскольку решения в чистых статегиях всегда присутствуют среди решений в смешанных, то $NE_m \subset \{[(s, v, m) = (1, 0, 0), u = 1], [(s, v, m) = (0, 1, 0), u = 0], [(s, v, m) = (0, 0, 1), u = 0]\}$. Но будут ли среди NE_m еще какие-либо (дробные) решения? В данной здаче - да, только в смеси $0 < v < 1$. При любом нетривиальном $0 < u < 1$ чистая стратегия преподавателя (С) оказывается строго выгоднее прочих, а откликом на нее будет (У). Напротив, все смеси $(s, v, m) = (0, v, 1-v): \ 0 < v < 1$ дают студенту ожидаемый выигрыш от (Ш) больше, чем от (У), откликом же на (Ш) может быть любое $(s, v, m) = (0, v, 1-v): \ 0 < v < 1$.

Вообще говоря, в подобных задачах поиск NE_m ведется перебором гипотез о целых (0,1) значениях некоторых переменных и решением уравнений относительно системы прочих (предполагаемых дробными) переменных (здесь - только v). Уравнения составляются соответственно гипотезе рациональности выбора: все стратегии с дробным значением должны давать одинаковый выигрыш.

1.3.1 Обсуждение

В каких ситуациях логично применять какие из концепций решений? Из примеров мы уже видели, что трудно дать однозначный ответ, выбор решается интуицией, знанием особенностей конкретных участников и ситуации. Вот, скажем, две простые игры (см. Данилов 2001).

Ann \ Bob	x	y
a	7 ,99	1 ,-1000
b	8 ,99	1 ,100 (NE)

Ann \ Bob	x	y
a	3 ,3 (NE)	0 ,1
b	1 ,0	2 ,2 (NE)

В первой у Анны слабо-доминирующая стратегия b, и исход (b, y) является разумным решением и по слабому доминированию, и единственным равновесием Нэша. Поэтому, зная цели друг друга, или играя однократную игру в популяции, игроки должны бы остановиться на этом решении. Но если Боб допускает хоть малую вероятность того, что Анна из безразличных для нее (при ожидаемой стратегии Боба y) может выбрать a, тогда осторожность требует от него сходить x, а теряет он от этого немного. Поэтому, осторожная стратегия и максиминное решение (b, x) вполне реалистичны.

Во второй игре верхнее из Нэшевских равновесий с выигрышами (3,3) выгоднее нижнего, и в случае переговоров оно может быть точкой соглашения, причем устойчивого. Но при однократной игре втемную каждый может осторожничать, и среди двух Нэшевских решений выбирать то, где выше гарантированный выигрыш, то есть худшее: MM=$\{(b, y)\}$. Итак, выбор концепции решения бывает нетривиален, и должен учитывать информационные особенности ситуации. В конце раздела мы остановимся на идеях универсальной концепции.

Теперь – о соотношении кооперативных концепций ($\mathcal{P}$, $\mathcal{C}_W$, $\mathcal{P}_W$) с различными некооперативные решениями. Не всегда, но очень часто результаты некооперативного поведения оказываются не оптимальными по Парето, как показывают следующие примеры.

Пример 1.3 Покажем разнообразие возможных ситуаций *совпадения или несовпадения некооперативных решений с кооперативными* на примерах.

В частности, можно разобрать все симметричные игры 2×2 с неодинаковыми выигрышами каждого участника. Для этого достаточно посмотреть все различные (с точностью до перестановок) расположения чисел 0,1,2,3 по матрице, и дополнить их симметрично полезностями второго игрока:

Good friends: enforced, or at least stable co-operation

0 0	1 2
2 1	DE 3 3 C

0 0	3 1 C
1 3 C	DE 2 2 C

1 1	2 0
0 2	DE 3 3 C

NE 1 1	0 2
2 0	NE 3 3 C

Struggle for leader-ship, or unstable co-operation

0 0	NE 3 2 C
NE 2 3 C	1 1

0 0	NE 3 1 C
NE 1 3 C	2 2 C

NE 2 2	1 0
0 1	3 3 C

2 2 C	3 0 P
0 3 P	DE 1 1

Таблица 8:

Игры, где 0 на главной диагонали:

“Услуга за услугу” “Борьба за лидерство”

```
     a     b          a     b          a     b          a     b
   ------------     ------------     ------------     ------------
  |   0 |   1 |    |   0 |   3 |    |   0 | N 3 |    |   0 | N 1 |
y |0    |2    |  y |0    |1 C  |  y |0    |2 C  |  y |0    |3 C  |
  |-----------|    |-----------|    |-----------|    |-----------|
  |   2 | D 3 |    |   1 | D 2 |    | N 2 |   1 |    | N 3 |   2 |
z |1    |3 C  |  z |3 C  |2 C  |  z |3 C  |1    |  z |1 C  |2 C  |
   -----------      -----------      -----------      -----------
```

Игры, где 0 вне главной диагонали:

“Услуга за услугу” “Дилемма заключенных”

```
     a     b          a     b          a     b          a     b
  ------------     ------------     ------------     ------------
  |   1 |   0 |    |   1 |   2 |    |   2 |   3 |    | N 2 |   1 |
y |1    |2 C  |  y |1    |0    |  y |2 C  |0 P  |  y |2    |0    |
  |-----------|    |-----------|    |-----------|    |-----------|
  |   2 | N 3 |    |   0 | D 3 |    |   0 | D 1 |    |   0 |   3 |
z |0 C  |3 C  |  z |2    |3 C  |  z |3 P  |1    |  z |1    |3 C  |
   -----------      -----------      -----------      -----------
```

“Обходимая ловушка” “Дилемма заключенных”

```
     a     b          a     b          a     b          a     b
  ------------     ------------     ------------     ------------
  |  N 2|   0 |    | N  3|   2 |    | D 2 |   0 |    | N 2 |   0 |
y |2    |1    |  y |3 C  |0    |  y |2 C  |3  P |  y |2    |1    |
  |-----------|    |-----------|    |-----------|    |-----------|
  |   1 | N 3 |    |   0 | N 1 |    |   3 |   1 |    |   1 | N 3 |
z |0    |3 C  |  z |2    |1    |  z |0 P  |1    |  z |0    |3 C  |
   -----------      -----------      -----------      -----------
```

В первой игре участникам незачем вступать в переговоры: наилучшее решение из ядра (C) и так доминирующее (D). Во второй - аналогично, с той разницей, что есть еще два потенциальных соглашения (C), одно выгодное для одного, а другое для другого, но они неустойчивы относительно некооперативного поведения. В третьей игре два Нэшевских равновесия (N), оба из ядра, но одно выгоднее для одного, а другое для другого, что создает борьбу за лидерство: кто первый займет выгодную позицию, это осложняет переговоры. Четвертая аналогична, только переговоры могли бы иметь компромисс с выигрышами (2,2), если бы было принуждение к выполнения соглашений, иначе договор неустойчив. Прочие игры прокомментируйте самостоятельно.

1.4 Утверждения о совпадениях различных решений

Приведем утверждения о соотношениях разных некооперативных концепций.

Лемма 1.4.1 (см. Мулен-1985, с.21?.) *Попарно эквивалентны три случая: 1) $\mathbb{D}E \neq \emptyset$; 2) Все стратегии в $\mathcal{ND}$ эквивалентны; 3) $\mathbb{D}E = \mathcal{ND}$.*

Утверждение 1.4.2 1) $NE \subset NE_m$; $\mathcal{ND} \cap MM \neq \emptyset$,

2) если $\mathbb{D}E \neq \emptyset$, то $MM \supset \mathbb{D}E = \mathcal{ND} = SE \subset NE$, $\mathbb{D}E \subset Sad$, причем если доминирующее равновесие сильное, то $MM = S\mathbb{D}E = SNE = NE = SE \supset StE_O$.[13]

3) $SE \subset NE \subset INDS$.

4) $SNE \subset INDW$, причем если $SE \neq \emptyset$, то $SNE \subset SE$.

Доказательство. 1) Вложения $NE \subset NE_m, \mathcal{ND} \cap MM \neq \emptyset$ очевидны из определений: среди смешанных стратегий могут быть и чистые, аргмаксимум по векторам пересекает аргмаксимум по их минимумам. Доказательсто (2) элементарно, при использовании приведенной леммы: поскольку доминирующие стратегии покомпонентно "не хуже" остальных стратегий, то принадлежат и другим некооперативным решениям. Пункт (3): предположим противное: существует равновесие $\bar{x}$: $\bar{x} \in SE$, $\bar{x} \notin NE$, то есть для некоторого (например 1-го) участника $(\exists \tilde{x}_1 : u_1(\tilde{x}_1, \bar{x}_{-1}) > u_1(\bar{x}_1, \bar{x}_{-1}))$. Эта альтернативная стратегия $\tilde{x}_1$ не может входить в финальное множество $INDW = SE$, поскольку в нем все эквивалентны. Тогда, на каком-то этапе итеративного доминирования, она была продоминирована какой-либо стратегией $\hat{x}_1 : u_1(u_1(\hat{x}_1, \bar{x}_{-1}) \geq \tilde{x}_1, \bar{x}_{-1}) > u_1(\bar{x}_1, \bar{x}_{-1})$. Продолжая аналогичные рассуждения, по индукции получим, что в финальном множестве есть стратегия не хуже, чем $\tilde{x}_1$, - противоречие. (ср. доказательство $SE \subset NE$ в [Мулен, 1985, Теорема 1, стр 74]).

Вложение $NE \subset INDS$ доказывается аналогично: $\bar{x} \in NE$ означает $[u_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{-i}) \geq u_i(x_i, \bar{x}_{-i}) \forall i \forall x_i]$. Но такая стратегия не может строго доминироваться какой-либо другой. (4) доказывается аналогично. ▥

Относительно соотношения разных решений и равновесия Штакельберга: хотя оно совпадает со строго доминирующим равновесием (если то непусто), но может лежать вне отдельной строго доминирующей стратегии(!), как в Табл. 9.

Утверждение 1.4.3 В конечной антагонистической игре двух лиц $SE \subset Sad$.
Следствие: если $SE \neq \emptyset$ (игра разрешима по доминированию), то у игры есть цена (игра разрешима и по принципу седла).

Доказательство см. в [Мулен, 1985, Лемма 4, с. 49].

Кооперативные концепции легко сравнить по определениям:

[13] Последнее вложение сравните на игре Табл. 5.

		Victor	
		x	z
Anna	a	101, 0	1, 1 (SE)
	b	100, 100 (StE)	0, 0

Таблица 9: Несовпадение SE и StE.

Утверждение 1.4.4 Ядро принадлежит слабой Парето-границе, а сильное ядро — сильной (обычной) Парето-границе:

$$\mathcal{C}_W \subset \mathcal{P}_W \ , \ \mathcal{C}_s \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}_W \ .$$

Совпадение или несовпадение кооперативных концепций ($\mathcal{P}$, $\mathcal{C}_W$, $\mathcal{P}_W$) с различными некооперативные решениями мы уже обсуждали, и видели что часто результаты некооперативного поведения оказываются не оптимальными по Парето (см. примеры).

1.5 Утверждения о существовании и компактности множеств решений

Утверждение 1.5.1 *Если все X_i компактны, функции u_i непрерывны, то 1) $\mathcal{P} \neq \emptyset$; 2) множества $I\!DE, MM, NE, \mathcal{P}_W$ компактны.*
3) Если допустимые множества X_i конечны, то непусты множества: итерационно-недоминируемых стратегий ($INDW \neq \emptyset$), осторожных решений ($MM \neq \emptyset$), решений Штакельберга ($StE \neq \emptyset$).

Доказательство (см. в [Мулен, 1985, с. 79] более подробное доказательство этой теоремы.). Пункт (1) и компактность MM – см. [Мулен, 1985,, стр. 26]. Пункт (2): компактность NE проверена в теореме Нэша (ниже), а компактность $I\!DE$ доказывается опираясь на приведенную лемму (докажите самостоятельно) [Мулен, 1985,]. Компактность слабой Парето-границы доказывается рассмотрением пределов.

3) Непустота названных множеств при конечности X_i очевидна из определений.

▥

Теорема 1 (Нэш, 1951) *Пусть все X_i ($i \in I$) компактны и выпуклы, все функции $u_i(.)$ ($i \in I$) непрерывны по совокупности переменных и вогнуты по x_i, тогда непусто множество нэшевских равновесий ($NE \neq \emptyset$), и оно компактно.*

Следствие 1.1 Если все X_i конечны, то непусто множество равновесий в смешанных стратегиях ($NE_m \neq \emptyset$), и оно компактно.

Следствие 1.2 *[см. Мулен, 1985,, с. 79]* В конечной антагонистической игре удовлетворяющей условиям теоремы есть седло (Sad) и, следовательно, цена.

Доказательство (для случая, когда множества $X_i \in I\!R^l$ - в действительном пространстве). Определим отображение $\mathcal{F}: \ I\!R^l \mapsto I\!R^l$ как декартово произведение Нэшевских откликов (см. выше) каждого игрока: $\mathcal{F}(x_1, ..., x_n) := \prod_i \mathcal{X}^*{}_i(x_{-i})$. Каждое отображение $\mathcal{X}^*{}_i(x_{-i})$ выпуклозначно и замкнуто, как аргмаксимум по x_i непрерывной вогнутой функции (зависящей непрерывно также от x_{-i}) на выпуклом компакте X_i (док. см. напр. в [Гильденбранд, стр.26], там же см. теорему Какутани). Тогда к $\mathcal{F}(.)$ применима теорема Какутани о неподвижной точке,[14] следовательно имеется неподвижная точка $\tilde{x}: \ \tilde{x} \in \prod_i \mathcal{X}^*{}_i(\tilde{x}_{-i})$, то есть $\tilde{x} \in NE$, что и требовалось.

Для проверки компактности NE можно построить последовательность неподвижных точек $\{\tilde{x}_t\}_{t=1,2,...} \in NE$ сходящуюся к некоторой точке $\bar{x}$. Равновесность каждого элемента последовательности $\tilde{x}_t \in NE$, в терминах неравенств (2) сохраняется и в пределе, что завершает доказательство. ▥

Для доказательства Следствия 1.1 достаточно проверить, что рассматриваемое в нем смешанное расширение G_m исходной конечной игры удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, выпуклая оболочка любого конечного множества стратегий есть выпуклый компакт. Кроме того, матожидание полезности $U_i(\sigma_1, ...\sigma_n)$ определенное в (6), есть не только непрерывная, но и линейная (следовательно вогнутая) по переменным σ_i функция, что и требовалось для применения Т.Нэша. ▥

1.6 Нахождение решений в непрерывных играх и NE_m

Связь матричных игр с линейным программированием и нахождение NE_m.

Доказательство Следствия 1.1 для антагонистических конечных (т.е. "матричных") игр двух лиц можно проводить и независимо от теоремы Нэша, через линейное программирование, которое дает также *способ поиска* решений NE_m для этих игр.

Для этого задачу 1-го игрока записывают в форме максимизации (неизвестной игрока заранее) цены игры u_s по переменным u_s, μ, (где $\mu := \sigma_1$) при ограничениях

$$\mu \geq 0, \ \sum_{k=1}^{n_1} \mu^k = 1, \ \ \mu a^k \geq u_s \ (k = 1, ..., n_2),$$

где $a^k \in I\!R^{n_i}$ — столбцы матрицы платежей $(a^k_j) := (u_1(x^j_1, x^k_2))$. Здесь ограничения типа $\geq$ выражают гипотезу 1-го о неблагоприятном поведении противника (максимин, который совпадает здесь с седлом из-за антагонизма игры). Легко проверить, что задача противника есть двойственная к описанной задаче. В обеих двойственных друг другу задачах есть допустимые решения, следовательно симплекс- методом можно найти седловую пару в игре G_m. Она является и Нэшевской парой и максимином, по смыслу неравенств – ограничений.

Для случая биматричной (то есть не обязательно антагонистической) игры задачи игроков не окажутся двойственными друг к другу, и поиск NE_m методом

[14]Теорема Какутани о неподвижной точке: замкнутое (т.е. имеющее замкнутый график) выпуклозначное отображение $\mathcal{F}(.)$ выпуклого компакта X в себя имеет неподвижную точку $x: \ x \in \mathcal{F}(x)$.

линейного программирования не очевиден. Все же его общая идея - перебор возможных базисов (наборов активных ограничений) сохраняет ценность для поиска решений. В сущности, нужно перебрать все гипотезы о возможных комбинациях стратегий применяемых с ненулевой интенсивностью (это не всегда все стратегии!), для обоих игроков. Например, рассмотрим повторяющуюся игру матери с сыном из известного детского стишка.[15] Сыну могут давать чаще или реже карманные деньги, в зависимости от того, часто ли от него пахнет табаком, а если пахнет сигарами - то пороть. Посчитайте вероятности (смешанные стратегии) при такой, например, матрице выигрышей (субъективных полезностей) исходов:

	Давать	Не давать	Пороть
Не курить	$+0, +0$	$+1, -2$	$-5, -5$
Курить	$+2, -2$	$+0, -1$	$-4, -4$
Сигары	$+1, -5$	$-1, -4$	$-3, -3$

Решение NE_m окажется включающим только первые две стратегии и у матери и у сына.

Для простого случая биматричной игры 2×2 также можно найти NE_m графически, строя функции (или отображения) $\mathcal{X}^*{}_i(x_{-i})$ — отклики игроков на действия партнеров; их пересечение окажется равновесием. Эту же идею нахождения решения для неантагонистической игры, даже с большим числом стратегий, можно реализовать и в терминах системы равенств и неравенств: все активные (имеющие ненулевой вес) стратегии игрока должны быть равновыгодны, а неактивные менее выгодны. Перебирая все потенциальные базисы (наборы активных стратегий) найдем те, в которых система совместна, то есть NE_m.

Решение NE_m можно найти также на компьютере многократными итерациями, опираясь на следующую теорему [см.??].

Теорема 2 (Брауна-Джексон) *Пусть в повторяющейся матричной (антагонистической) игре двух лиц каждый игрок при выборе своего отклика на каждой итерации считает прошлую среднюю частоту, с которой выбиралась конкретная стратегия партнера за вероятность ее будущего появления. Тогда эти итерации асимптотически сходятся к элементу из NE_m.*

Данная теорема служит также идейной опорой понятия NE_m. Ее сложное доказательство не приводим.

.

При нахождении равновесия по Нэшу, особенно в играх с непрерывными стратегиями, можно воспользоваться понятием *функции (отображения) отклика* $\mathcal{F}_i(x_{-i}) = \mathcal{X}^*{}_i(x_{-i})$ определенном в (3). Тогда можно переформулировать определение NE так:

Точка $\bar{x}$ является равновесием по Нэшу т. и т. т., когда

$$\bar{x}_i \in \mathcal{F}_i(\bar{x}_{-i}) \quad \text{или} \quad \bar{x}_i = \mathcal{F}_i(\bar{x}_{-i}) \qquad \forall i \in I. \tag{7}$$

[15]"...сын курил сигары по рублю за штуку. Мать, узнав об этом, дала сыну порку: не кури сигары, а кури махорку."

Здесь равенство – если функции $\mathcal{F}_i(.)$ являются однозначными, тогда нэшевское равновесие задается просто системой уравнений и соответственно вычисляется.

Найдем этим путем NE, StE в примере игры с непрерывными стратегиями.

Пример 1.4 Рэкетиры (или орган налогообложения) выбирают, какую долю $\tau \in [0,1]$ валовой выручки y забирать у фирмы. Они при этом максимизируют функцию вида $T(\tau, y) = \tau y$, то есть желают побольше получить. Фирма имеет функцию $\pi(\tau, y) = (1-\tau)y - y^2$, то есть максимизирует прибыль при квадратичной функции затрат выбирая объем продаж $y \geq 0$. Найдем решения этой игры при различных гипотезах о поведении: 1)осторожном, 2)"близоруком" (ситуативном), 3)когда рэкетиры - лидер игры, знающий цели и просчитывающий ответы фирмы.

1) Осторожное равновесие (MM). Оно не очень правдоподобно в рассматриваемой ситуации: ведь участники должны бы знать ходы друг друга; но найдем MM для примера. Самое худшее, что может сделать фирма с точки зрения рэкетира – не выпустить ничего: $y = 0$. При этом рэкетиру все равно, какую долю $\tau \in [0,1]$ установить. С другой стороны, самое худшее, что может сделать рэкетир с точки зрения фирмы – установить максимальную $\tau = 1$. При этом фирма максимизирует прибыль

$$\pi(y) = (1-\tau)y - y^2.$$

Находим функцию отклика, приравняв производную этой функции по l к нулю:

$$y^*(\tau) = (1-\tau)/2,$$

равное нулю при $\tau = 1$. Таким образом, осторожное равновесие $MM = [0,1] \times 0 \ni (\tau, y)$.

2) Равновесие по Нэшу (NE). При любом ненулевом выпуске y близорукому рэкету выгодно установить максимальную долю ($\tau = 1$). Поэтому его (многозначной) функцией отклика будет:

$$\tau^*(y) = 1 \text{ при } y > 0; \quad \tau^*(y) = [0,1] \text{ при } y > 0.$$

Функция отклика фирмы $y^*(\tau)$ получена выше. Решив систему $\{\tau^*(\bar{y}) \ni \bar{\tau}, \quad y^*(\bar{\tau}) = \bar{y}\}$, найдем единственное Нэшевское равновесие $(\bar{\tau}, \bar{y}) = (1, 0)$, которое совпадает с одним из осторожных, поэтому является и седлом.

3) Равновесие по Штакельбергу (StE) (лидер – рэкет). Рэкет знает функцию отклика фирмы, и подставляя ее в свою целевую функцию, максимизирует

$$\tau(1-\tau)/2.$$

Очевидно, максимум достигается при уровне $\tau = 1/2$, чему соответствует уровень выпуска $y = 1/4$.

4) Парето-оптимум ($\mathcal{P}$). Если предполагать, что фирма способна передавать рэкету не только налог, но и фиксированную сумму r, то Парето-оптимум можно найти как максимум суммы целевых функций. Получим $\mathcal{P} = \{\tau = 0,\ y = 1/2,\ r \in [0, 1/2]\}$ (здесь же и слабый Парето-оптимум). Этот исход достижим, если фирма обещает рэкету некоторую сумму r за нулевой налог (кооперативное поведение). Очевидно, что ни одно из перечисленных некооперативных равновесий не является Парето-оптимальным.

5) Ядро ($\mathcal{C}_W$). Какова упомянутая сумма r достижимая в переговорах? Точки ядра не должны блокироваться ни одной коалицией: ни коалицией из обоих участ-

ников (т.е. должны принадлежать слабой Парето-границе), ни коалицией из одного участника. Если в качестве индивидуально достижимых выигрышей берем гарантированные *минимаксные* выигрыши $T(\tau, y) = 0, \pi(\tau, y) = 0$, то ядро состоит из всех точек $\mathcal{P}$. Если же считать, что лидирующее положение рэкета известно обоим участникам, то он считает гарантированным доходом свой доход 1/8 достижимый в равновесии Штакельберга, тогда ядро меньше Парето-границы: $= \{\tau = 0, y = 1/2,\ r \in [0, 1/2]\}$.

Пример 1.5 Пусть есть отрасль с функцией цены P от суммарного выпуска $Y = \sum y_i$ (обратной функцией спроса) вида $P(Y) = 40 - 2Y$. Пусть есть $n > 1$ одинаковых конкурентов $i = 1, ..., n$ с линейными издержками, то есть с постоянными предельными издержками, причем $\dot{C}_i = 1$. Найдите решение y_i каждого об объеме выпуска при разных гипотезах о поведении: 1)MaxMin, 2)StE (один из конкурентов лидирует, например, имея возможность первым объявить выпуск), 3)NE, 4)C-ядро.

Приближается ли при росте числа конкурентов n решение по Нэшу (каждый понимает, что при росте его выпуска цена уменьшится) к решению совершенной конкуренции (каждый считает себя несущественно влияющим на общую цену)?

Нарисуйте для числа конкурентов $n = 2$ график кривых безразличия в пространстве y_1, y_2 и отметьте на нем все 4 типа решений.

1.7 Как обобщить концепцию решения?

Завершая раздел статических игр, попробуем сформулировать для них универсальную, достаточно широкую концепцию решения, охватывающую прочие некооперативные решения как частные случаи.

Определение 1.7.1 Набор $\bar{x} \in (X \times X \times ... \times X)$ ожидаемых стратегий (гипотез о всех партнерах, включая себя, причем ожидания любого игрока о себе совпадают с реально выбранной его стратегией) $\bar{x}_{i*} = (\bar{x}_{i1}, ..., \bar{x}_{in}) \in X \quad (i = 1, ..., n)$ можно назвать равновесием с правилом ожиданий – отображением $E: \quad (X \times X \times ... \times X) \Rightarrow (X \times X \times ... \times X)$ если

1) выбор $\bar{x}_{ii} \in X_i$ каждого игрока i является одним из наилучших для него ответов на ожидаемые стратегии $x_{ij} \in X_j$ прочих игроков $j \neq i$, то есть: $u_i(\bar{x}_{ii}, \bar{x}_{ij}) = \max_{x_{ii} \in X_i} u_i(x_{ii}, \bar{x}_{ij})$;

2) ожидания любого игрока i о всех игроках соответствуют заданному правилу согласования ожиданий: $(\bar{x}_{1*}, ..., \bar{x}_{n*}) \in E(\bar{x}_{1*}, ..., \bar{x}_{n*})$.

В частности, для Нэшевской концепции решения, правило соответствия ожиданий очень простое $E(x) = (x_{11}, x_{22}, ..., x_{nn}) \times (x_{11}, x_{22}, ..., x_{nn}) \times ... \times (x_{11}, x_{22}, ..., x_{nn})$, то есть ожидания должны соответствать действительно выбранным стратегиям. Напротив, для концепции осторожного решения (MaxMin) ожидания соответствуют наихудшим гипотезам о партнерах. В ситуации антагонистической игры это достаточно реалистично, но в других случаях решения (одновременные) игроков при таком правиле ожиданий могут приводить к исходу, неожиданному для всех них:

когда ходы открываются, то многие получают более, чем ожидали при своем пессимизме. В этом смысле MaxMin, в отличие от NE, не во всех играх можно назвать равновесием, то есть представить себе популяционную игру, где одни и те же ожидания и решения повторяются из раунда в раунд.

Возможно записать в форме отображения предположений $E(.)$ и правила, соответствующие равновесию Штакельберга и сложному равновесию, но это не так очевидно, и мы этого не коснемся.

Итак, здесь выражен взгляд, возможно, спорный, на различные концепции решений, как на ситуации, различающиеся именно ожиданиями о партнерах, но не типами рациональности поведения (методами рассуждений игроков).

2 *Глава.* Игры в развернутой форме ("динамические")

Перейдем к рассмотрению игр, заданных в развернутой форме, то есть в виде описания не стратегий, а отдельных ходов и их последовательностей. Для этой цели часто применяются сетевые структуры – графы, причем преимущественно — "исходящие" деревья.

Исходящим деревом (out-tree) называют связный направленный (ориентированный) граф с единственным истоком ("корнем"), если в графе нет циклов, и каждый узел имеет единственного предшественника.

Часто полезно отражать игры и графами более общего вида, но, как правило, "фундированными". *Фундированным* называют связный направленный граф с одним истоком (корнем) и без циклов.

Упражнение. Чтобы понять, что дерево - не всегда самое экономное представление игры из возможных, представьте девятиклеточные "Крестики-нолики" фундированным графом, не являющимся деревом (в некоторые позиции можно попадать из разных предшественников). Для упрощения можно считать первый ход "+ В центр" уже сделанным, и идентифицировать ходы именами типа "0 В угол", "+ В противоположный угол", отождествляя тем самым эквивалентные ситуации. Докажите, что цена игры - "ничья".

Граф игры мы будем обозначать $\Gamma(G)$, точки выбора участников будут "узлами", а ходы – "дугами" графа. Каждому конечному узлу, то есть (финальной) "вершине", или "исходу" игры, приписываются некоторые выигрыши всех участников. Тем самым, граф игры задает физическую и целевую структуры игры, а информационная структура игры отражается "информационными множествами", а также отдельно от графа, например, в той или иной концепции решения.

2.1 Формализация игр с разной информацией о ходах

Пример 2.1 ("Террорист") Предположим, в самолете летящем из Майами в Нью-Йорк обнаруживается террорист, обещающий взорвать бомбу, если самолет не повернет на Кубу. Допустим, пилот, от которого зависит решение, оценивает, что смерть (неважно где) хуже посадки на Кубе, которая, в свою очередь, хуже посадки в Нью-Йорке. Это можно отразить, например, его выигрышами $U_{Pilot}(...) := (Bomb \to 0, Cuba \to 1, New\text{-}York \to 2)$. Предположим, данный террорист также жизнелюбив и не хочет умирать, и это видно по его лицу, только он Кубу предпочитает Нью-Йорку. То есть его цели можно задать в виде $U_{Terrorist}(...) := (Bomb \to 0, Cuba \to 2, New\text{-}York \to 1)$. Пилот должен выбрать, поворачивать ли на Кубу, а затем террорист – взрывать ли бомбу, как обещал. Что произойдет, если летчик вполне уверен в своем (истинном) предположении о целях террориста, то есть его ожидания есть $\tau_{pilot} = (Bomb \to 0, Cuba \to 2, N - Y \to 1)$?

Для представления этой игры с последовательными ходами нарисуем два дерева: Рис. 3 отражает случай, когда террорист НАБЛЮДАЕТ ход пилота, а Рис. 2 - противоположный случай (довольно глупый: что тогда угрожать?). То есть, в случае "Б" террорист не способен глядя в иллюминатор определить, куда ведут самолет. Это *игра с несовершенной (неполной) информацией о сделанных ходах*. Это отражается на дереве игры объединением *пунктиром* узлов, неразличимых для игрока принимающего здесь решение, объединенные так узлы составляют **информационное множество**, или "историческую позицию" игры.

В этом случае игрок вынужден принимать решение вслепую, и то, что он ходит вторым, а не первым – не имеет значения, равно как и его объявленная стратегия (N-Y → bomb, Cuba → peace). Тогда мы можем представить соответствующее дерево "Б" (Рис. 2) в уже известной нам нормальной стратегической форме следующей матрицей стратегий и выигрышей:

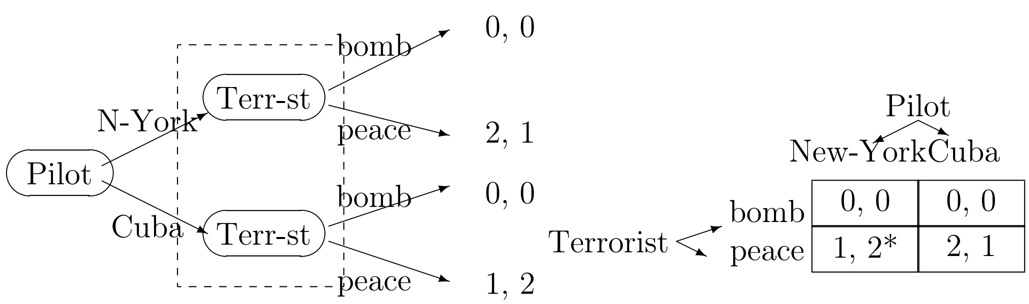
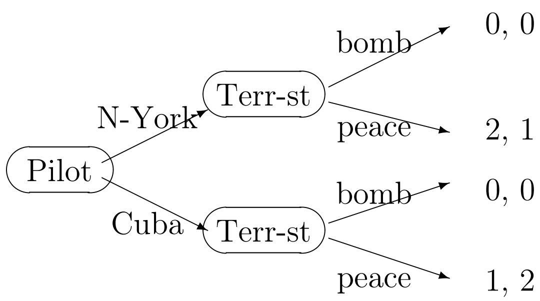


Рис. 2: Игра "Террорист"-Б (без наблюдаемости хода).

Если пилот знает цели партнера, то легко предсказать, что он определит его стратегию "peace" как строго доминирующую, и выберет для себя "New-York". Это произойдет и в том случае когда он рассуждает как Штакельберговский лидер, и по концепции "сложного равновесия", и просто по доминированию – независимо от знания целей партнера. По сути, подобная игра без наблюдаемости хода эквивалентна одновременным играм, изученным выше, и новых понятий не требует.

Интереснее случай "Н" с наблюдаемостью курса самолета. Для прояснения соотношения развернутой и нормальной форм игры на Рис. 3 она переведена и в нормальную форму.

Здесь стратегия (b, b) означает намерение бомбить и в случае поворота на Нью-Йорк (первая компонента вектора (b, b)), и в противоположном случае. Все стратегии террориста, кроме последней (p, p), выглядят глупо с точки зрения его целей, но они физически возможны, поэтому вносятся в матрицу. Важно заметить: стратегией является не ход, а полная инструкция себе — как ходить в ответ на каждый ход противника, то есть *в каждом информационном множестве* (исторической позиции). Поэтому, в отличие от случая "Б" с несовершенной информации о сделанных ходах (который можно интерпретировать и как игру с одновременными ходами) матрица нормальной формы соответствующая дереву оказывается размером не 2×2 а 2×4. Более того, в отличие от случая "Б", по ней нельзя однозначно восстановить дерево из которого она построена, часть информации утеряна. В этом смысле развернутая



Pilot:

Ter-st:	N-York	Cuba
(b,b)	0, 0	0, 0
(b,p)	0, 0	2, 1*
(p,b)	1, 2*	0, 0
(p,p)	1, 2*	2, 1

(N,C)

Рис. 3: Игра "Террорист-Н" (с наблюдаемостью хода).

форма записи игр более информативна, чем нормальная.

Можно сказать, что стратегии есть наборы ходов. Формально, если мы обозначим последовательные исторические позиции (historical nodes) игрока A символами $h_{1A}, h_{2A}, h_{3A}, ...$, а переменные ходов в этих позициях $x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, ...$ (каждая может принимать столько значений, сколько выходов из этой позиции), то нормальная стратегия есть набор $s_A = (x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, ...)$ описывающий поведение в каждой позиции.

2.2 Совершенное в подыграх равновесие и мультиперсонная форма игры

В матрице стратегий примера "Террорист-Н" можно заметить целых три Нэшевских равновесия, и одно из них ((b, p),(Cuba)) соответствует простой послушной реакции пилота на объявленную на словах стратегию террориста (b, p). Но это равновесие и еще одно ((p, b),(N-York)) – кажутся неправдоподобными с точки зрения содержательного описания игры, и с точки зрения дерева игры. Разве можно поверить, что жизнелюбивый террорист действительно взорвет бомбу после того как увидит, что его не послушались? Эти стратегии слабо доминируются стратегией "peace" (p, p). Кроме того, и это важнее, они сильно доминируются стратегией "peace" как в подыгре исходящей из узла N-York, так и в "подыгре" исходящей из узла Cuba.

Подыгрой называют подграф исходной игры, связный от некоторого узла — корня подграфа — до финальных вершин, не имеющий связей с другими подграфами, кроме своего корня.

В нашем примере правдоподобным в смысле рациональности поведения в подыграх представляется только одно из трех Нэшевских равновесий ((N-York),(p, p)). То есть, террорист, если он рационален, остановится на стратегии "не бомбить ни в каком случае", а пилот, понимая это, полетит в Нью-Йорк.

Итак, в примере "Террорист" мы выделили среди нескольких NE равновесий одно правдоподобное, с учетом складывающихся по ходу игры ситуаций. Эту идею сужения множества потенциальных исходов благодаря рациональности поведения *не только в начальной точке* можно задать так.

Определение 2.2.1 Назовем *совершенными в подыграх равновесиями* (SPE = Subgame Perfect (Nash) Equilibrium) Нэшевские равновесия, являющиеся Нэшевскими равновесиями во всех подыграх.

Заметим, что эту концепцию можно отразить и через другую форму стратегического представления исходной игры, называемую *мультиперсонной*. Ее также называют поведенческой (behavioral) или пошаговой. Она представлена в Таблице 10.

Pilot↓ \ N-Y-Terr-st→	bomb	peace
N-Y	0, 0, 0	2, 1, 1
Cuba	0, 0, 0	1, 2, 2

Pilot↓ \ Cuba-Terr-st→	bomb	peace
N-Y	0, 0, 0	2, 1, 1
Cuba	0, 0, 0	1, 2, 2

Таблица 10: Мультиперсонное представление игры "Террорист".

В мульти-персонном представлении один и тот же игрок, действующий в разных ситуациях (узлах дерева) представлен разными ("условно-ситуационными") игроками, в данном случае – Террористом в Нью-Йорке, и Террористом на Кубе. Естественно, выигрыши обоих Террористов в образующейся при этом игре трех лиц (Пилота и двух разных террористов) совпадают, но действуют они каждый за себя. Это соответствует гипотезе действия "по ситуации", в противоположность действию по заранее объявленному плану. Тем самым, при мультиперсонном представлении используется гипотеза *отсутствия возможности "creadible commitment"*, то есть "обязательства, вызывающего доверие". В этом примере мы предполагали, что пилот верит в поведение партнера "по ситуации", а не в обязательство бомбить в Нью-Йорке. Выражая это в мультиперсонных терминах, он просто выбирает, с кем из "условно-ситуационных" Террористов столкнуться. (Если бы летчик верил в обещание Террориста бомбить в Нью-Йорке, игру следовало бы представлять другим деревом, или вместо SPE применять другую концепцию решения.) Таким образом, оказывается, что (легко проверить):

Решение SPE есть Нэшевское равновесие в мультиперсонном (пошаговом) представлении игры, и обратно.

Заметим в заключение введения в динамику, что стратегии или ходы в динамических играх могут быть не только целыми, но и смешанными, как и в статических (одновременных). Решите: выгодно ли для игрока смешивать полные стратегии вида $s_A = (x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, ...)$, или выгоднее сначала смешивать отдельные ходы, а потом объединять их в полную смешанную стратегию, или все равно? Одинаково ли множество NE_m в том и другом случае?

2.3 Обратная индукция

Во многих динамических играх (при отсутствии гипотезы “creadible commitment”) довольно естественно решения типа SPE искать *алгоритмом обратной индукции*, то есть “алгоритмом Куна”, по сути эквивалентным определению SPE (проверьте это самостоятельно). Он описывается так:

1. Отбрасываем (вычеркиваем) сильно доминируемые стратегии во всех финальных подыграх (содержащих только вершины и предвершинные узлы).

2. Невычеркнутые значения выигрышей переносим на предвершинные узлы. Если невычеркнутых значений несколько – то переносим все эти варианты, или, что то же, создаем несколько вариантов дерева игры.

3. Редуцируем каждую игру (каждый из вариантов дерева), удаляя уже рассмотренные вершины, то есть считаем бывшие предвершинные узлы новыми финальными вершинами. Если остался не только корневой узел, то повторяем операцию, уже над редуцированной игрой.

END: В конце останутся возможные значения выигрышей в корневом узле и цепочки, которые их породили — каждая из них означает одно из равновесий SPE, и включает нереализовавшиеся, но подразумеваемые ветви дерева (ожидания).

Проще всего этот алгоритм срабатывает, когда (в отличие от примера “Террорист”) каждый игрок имеет различные выигрыши в различных вершинах.[16] Тогда результат алгоритма (то есть SPE) единственен. По сути дела, понятие SPE эквивалентно множеству итерационно-недоминируемых (сильно) стратегий, только понятие $INDS$ здесь несколько изменяется: порядок отбрасывания (сильно) доминируемых стратегий определен деревом игры Γ, а не требованием одновременности: $SPE = INDS_\Gamma$. Это может иметь значение: например, в игре “Террорист” $INDS_\Gamma$ не совпадает с $INDS$ игры в нормальной форме, а только с $INDS$ мультиперсонной формы игры.

Утверждение 2.3.1 *В развернутой форме конечной игры с совершенной информацией (о ходах) существование и обычных и совершенных решений Нэша гарантировано: $SPE \neq \emptyset$ (следовательно и $NE \neq \emptyset$).*

Действительно, существование решений очевидно из алгоритма Куна. Он по существу лишь задает (конечный) алгоритм отбрасывания сильно доминируемых стратегий; но отбрасывая одну стратегию, мы всегда сохраняем в множестве допустимых стратегий ту, что ее продоминировала, так что множество не может остаться пустым. Включение $NE \supset SPE$ следует из определения SPE и гарантирует $NE \neq \emptyset$. ▥

[16] К однозначности выигрышей игру иногда можно привести, объединяя вполне эквивалентные вершины графа в одну. Тогда, скажем, шахматы имеют всего три финальные вершины, только достигаемые многими путями: выигрыш, проигрыш, или ничья белых.

Существование же решений для игр с несовершенной информацией (нетривиальными информационными множествами) не гарантировано, как мы видели в разделе статических (одновременных) игр.

В динамической игре (на дереве Г) можно рассматривать и сложное равновесие SE_Γ. Оно определяется так же, как и в статических играх, через итерационное слабое доминирование и понятие $INDW_\Gamma$. Только в нем порядок отбрасывания стратегий задается деревом игры Г, а не одновременен, что иногда существенно, а иногда - нет. Скажем, в игре "Террорист" порядок слабого доминирования не важен: решение $INDW = INDW_\Gamma = SE_\Gamma$ оказалось одно и то же. Это не всегда так, как мы увидим в примере (Табл. 13). Итак, в общем случае совпадение SE_Γ=SPE или $INDW_\Gamma = INDW$ не обязательно, можно гарантировать только $INDW_\Gamma \subset SPE$, и вообще, вложение итерационно-слабо-недоминируемых решений в сильные при совпадении порядка отбрасывания. Это вложение можно доказать (проверьте это самостоятельно), поскольку "слабое" доминирование вычеркивает больше стратегий, чем "сильное", принятое для SPE.[17]

Частное достаточное условие единственности и, следовательно, совпадения решений SE_Γ=SPE есть "отсутствие неполного совпадения выигрышей в исходах". Здесь это утверждение распространено на фундированные графы, что упрощает формулировку (это позволяет пару вполне эквивалентных по выигрышам вершин объединить в графе, и считать одной вершиной). Заодно мы сформулируем теорему Куна:

Теорема 3 *Пусть в динамической конечной игре с полной и совершенной информацией, описанной фундированным графом, каждый игрок имеет различные выигрыши в любой паре вершин. Тогда*

1)Существует решение SPE, оно единственно (по исходу) и совпадает с единственным SE_Γ, причем является единственным результатом алгоритма Куна.

2) (Кун) Решения слабого итерационного доминирования по дереву и по одновременному доминированию в стратегическом представлении игры совпадают: $SE_\Gamma = SE$.

Доказательство пункта (1) о существовании SE_Γ (см. Мулен-1985) — довольно очевидно из алгоритма. Действительно, каждый шаг отсечения вершин в алгоритме Куна даст при принятых гипотезах единственный вектор выигрышей. По индукции получаем единственное решение алгоритма. Легко проверить, что это и есть SPE= SE_Γ, и что других равновесий SPE, SE_Γ нет.

Доказательство пункта (2) – теоремы Куна – нетривиально и опускается (см. Мулен, 1985). ▥

Отсюда следует существование решения SE в шахматах (теорема Цермело), шашках, и всех конечных настольных играх с полной информацией, но не в карточных играх, где информация о текущем положении игры обычно скрыта (неполна).

Упражнения:

[17] Напомним дополнительное различие SPE от SE: в определении SPE нет требования совпадения выигрышей во всех элементах множества равновесий, как в SE.

Пример 2.2 “Пираты”. *(Мулен, 1985).* Пусть на пиратском корабле 50 разного старшинства пиратов делят 100 кусков золота по следующему обычаю. Старший предлагает дележ – кому сколько. Если половина команды (включая его) согласна, то так и будет, иначе его выбросят за борт, а оставшийся старшим предложит дележ, и так далее.

Предскажите, кто сколько получит, вплоть до младшего юнги (SPE = INDW_Γ?).

Пример 2.3 “Камешки”. Пусть Андрей и Борис договорились, что из лежащих перед ними n=10 камушков Андрей возьмет 1 или 2, по желанию. Потом Борис 1 или 2, и так далее, а взявший последний камень проиграл.

Кто выиграет при идеальной игре обоих? Сохранится ли результат, если можно брать 1 или 2 или 3? Каков общий метод решения всех таких задач $\forall n$? (SPE = INDW_Γ?)

2.4 Решение SPE в непрерывной игре

В непрерывных (по стратегиям и/или времени) играх применение тех же идей и алгоритма обратной индукции аналогично. Только вместо дерева нужно представлять себе (даже если не удается нарисовать) некоторый граф с бесконечными разветвлениями типа секторов.

Пример 2.4 (“Последовательный торг по Рубинштейну”) *(Дележ убывающего пирога= дележ выгоды при инфляции).*
(A.Rubinstein, 1959, see also H.Varian “Microec.Analysis”)
Уезжая из дома, мать оставила двум жадным детям пирог, с таким условием. Сначала Анна предложит дележ $\bar{a}_1 \in [0,1]$ (свою долю), если Виктор согласен, то так и будет, иначе через час Виктор предложит дележ $\bar{v}_2 \in [0,1]$ (свою долю). Если Анна не согласна, она через час сделает третье предложение дележа $\bar{a}_3 \in [0,1]$, и так далее. С каждым часом полезность пирога убывает некоторым темпом (возможно, от нетерпения, или от засыхания пирога, когда $\alpha = \beta$). Конкретнее, через час остается $\alpha \in (0,1)$ исходной полезности для Анны и $\beta \in (0,1)$ полезности Виктора. Если, скажем, на k-й итерации они согласились на дележ $(\bar{a}_k, \bar{v}_k)$; $\bar{a}_k + \bar{v}_k = 1$, то полезность Анны от него будет $A(\bar{v}_k) = a_k = \alpha^k \bar{a}_k$, полезность Виктора — $V(\bar{v}_k) = v_k = \beta^k \bar{v}_k$. Зная конечный период T, в течение которого пирог остается съедобен, нужно предсказать, на какой итерации и как (рациональные и жадные) дети поделятся (подобная игра очень типична в ситуации, когда две фирмы способны осуществить взаимовыгодный проект, но надо договориться о разделе прибыли, а время переговоров означает упущенную прибыль).

Анализируя эту игру торга, для простоты будем считать $\alpha = \beta = 1/2$, T=4, и нарисуем дерево (если можно так выразиться) этой непрерывной по стратегиям игры:

Решение игры в изображенном простом случае (общий случай, и бесконечный вариант игры рассмотрите самостоятельно) легко найти с помощью ступенчатой диграммы уровней полезностей, алгоритмом обратной индукции. Действительно,

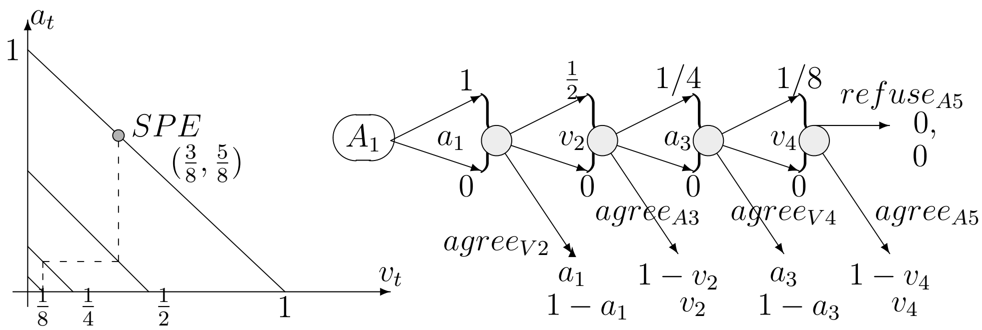


Рис. 4: Игра: дележ убывающего пирога по Рубинштейну (последовательный торг).

решим игру с конца: предположим она дошла до последнего, четвертого периода, где Виктор предлагает дележ. Если Анна откажется, то оба получат 0, поэтому она согласится на дележ $a_4 > 0$ сколь угодно близкий к нулю, что изображено нижним концом пунктира. Виктор же тогда получит почти все от оставшегося пирога, то есть почти $1/8$. Зная это, на третьем шаге Анна должна предложить партнеру полезность не менее $v_3 = 1/8$, тогда пунктирная линия дает точку 2, где оба имеют примерно по $1/8$. Зная это, Виктор на втором шаге предложит партнеру примерно $a_2 = 1/8$, а сам получит остальные $3/8$. Аналогично мы получаем SPE: дележ первого шага $a_1 = 5/8,\ v_1 = 3/8$, который и случится, при принятой гипотезе полной рациональности.

Упражнение. Предположите, что дисконты (“кофициенты терпения”) Анны α и Виктора β разные, как и в чью пользу (терпеливого ли) изменится решение? Обобщите решение для произвольного числа периодов Т, и для бесконечного $T = \infty$, например, переходом к пределу. (Проверьте $A = (1-\beta)/(1-\alpha\beta)$, $V = (1-\alpha)\beta/(1-\alpha\beta)$.)

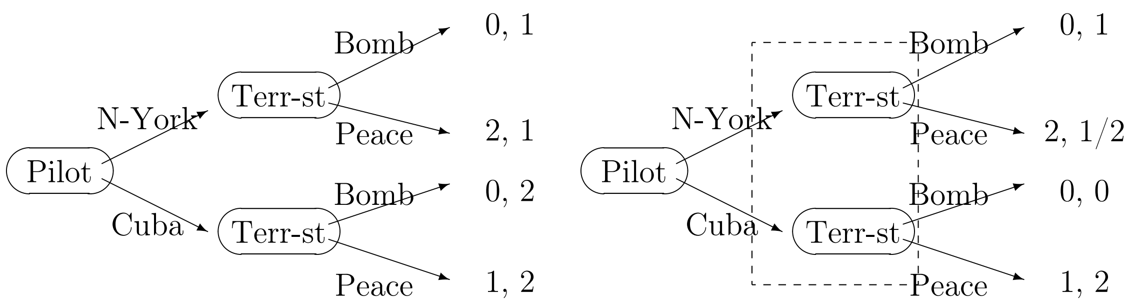
Пример 2.5 Упражнение: Игра входа в отрасль.

Пусть есть отрасль с функцией обратного спроса (ценой от суммарного объема) вида $p(Y) = 9 - Y$ и монополистом - старожилом в этой отрасли, с постоянными предельными издержками $\dot{c}_1(y_1) = 1$ (проверьте, что монопольная цена $p^M = 5$). Пусть потенциальный новичок входя в отрасль должен сделать невозвратные начальные капиталовложения $K = 1$ и ожидает предельные издержки $\dot{c}_2(y_2) = 2$. Пусть отрасль может просуществовать два периода (можно обобщить на n) и дисконта нет: прибыли сегодня и завтра равноценны, альтернативное вложение капитала K невозможно. Старожил обещает новичку в случае входа добиться (повышением выпуска) снижения цены достаточно низко (< 2), чтобы заставить новичка прекратить производство, предполагая, что после этого новичок банкрот и во втором периоде можно сохранять монополию. Если же новичок войдет, то ожидается решение Штакельберга (т.е. $SPE_{.,.}$): лидер- старожил установит выпуск раньше. Стоит ли верить этой угрозе или он блефует и можно входить? Обобщите задачу для различных $\dot{c}_2(y_2) \neq 2,\ K \neq 1$.

2.5 SPE и INDW$_\Gamma$ при неединственности или неполноте

Теперь рассмотрим, как выглядят SPE и INDW$_\Gamma$ в более сложном случае: при совпадении некоторых значений выигрышей и/или при неполной информации о сделанных ходах.

Пример 2.6 Случай “C” описанной на (Рис. 5) игры возможен, если террорист — психически особенный человек (это с ними бывает): ему все равно, жить или нет (решение он примет случайным образом), но приятнее умереть или жить на Кубе. Тогда возникает много равновесий SPE (все 4 исхода), но ни одного SE_Γ. Действительно, вектор выигрышей пилота при курсе Нью-Йорк (2,0) слабо доминирует над альтернативным, и множество $INDW_\Gamma$ итерационно (слабо) недоминируемых стратегий состоит из двух неэквивалентных исходов: $INDW_\Gamma = \{(N_Y, Peace) \Rightarrow (2,1);\ (N_Y, B) \Rightarrow (0,1)\}$.



Case C: full information, but equal payoffs

Case D: imperfect information

Рис. 5: Игра “Террорист - камикадзе”: много решений SPE $\neq$ SEГ.

В варианте “D” игры “Террорист” выигрыши различны, но неинформированность террориста о ходе летчика (не видно, куда летим) позволяет ожидать от него любых ходов. В результате опять много равновесий SPE (все стратегии), но ни одного SE, поскольку множество $INDW_\Gamma$ итерационно (слабо) недоминируемых стратегий снова состоит из двух неэквивалентных исходов: $INDW_\Gamma = \{(N_Y, Peace) \Rightarrow (2, 0.5);\ (N_Y, B) \Rightarrow (0,1)\}$.

Упражнение. Формализуйте игру графом и сравните SPE и INDW в игре “Выбери масть и картинку” (см. задачник).???

2.6 Неполная информация о типе партнеров: Байесовское равновесие

Ранее мы предполагали, что игроки либо ничего не знают о целях партнеров (концепции MM, DE), либо знают их точно (SE,SPE). Теперь рассмотрим случай, когда игрок имеет представление о нескольких типах возможных партнеров с известными целями и гипотезу о вероятности встретить каждого из них (Байесовское равновесие). Для этого мы используем общее представление о выборе в условиях риска, разработанное Нейманом и Моргенштерном - максимизацию ожидаемой полезности (см. микроэкономику).

Чтобы ввести понятие Байесовского равновесия, рассмотрим пример “Инспекция”. По сути, это описание равновесия в некоторой популяции инспекторов и нарушителей, но отдельный эпизод встречи такой пары - есть двухшаговая игра. Сначала ходит природа (случай), выбирая типы, которые встретились, а затем одновременно (не видя типа партнера) ходят настоящие игроки.

Пример 2.7 Нарушитель и инспектор. Рассмотрим игру, где две роли: потенциальный нарушитель и инспектор. Например, нарушение состоит в том, чтобы выпить садясь за руль, а инспектор — сотрудник ГАИ. Предположим, в первой роли бывает по два подтипа: “наглый” водитель, который не очень боится штрафов, или “робкий” водитель. Также и инспектор может быть “старательный”, или “ленивый” — то есть сильно недовольный, когда проверит зря. Эти гипотезы отражены в следующей матрице -

Таблице 11.

Таблица 11:

Инспекторы:

	Стара-	тельный	Лени-	вый
	Контр-ть	Лениться	Контр-ть	Лениться
Наглый: Пить	3 -1	0 2	1 -1	0 2
Наглый: Не пить	-1 1	0 0	-4 1	0 0
Робкий: Пить	3 -3	0 1	1 -3	0 1
Робкий: Не пить	-1 1	0 0	-4 1	0 0

Чтобы предсказать, какая обстановка сложится на этом посту ГАИ: часто ли водители станут проезжать его с нарушением, и часто ли их будут проверять (что, очевидно, связано), нужно задать гипотезы о частоте, с которой встречаются в природе типы. Пусть “наглым” водитель бывает с частотой $\nu \in [0,1]$, а робким — $(\nu - t)$, а инспектор бывает старательным с частотой $\mu \in [0,1]$. Зададим концепцию решения.

Определение 2.6.1 Рассмотрим игру, где имеется n игроков (ролей) $i = 1,..,n$ и каждый из них может оказаться одним из нескольких (T) типов $t = 1,..,T$, (для простоты записи пусть T одинаково во всех ролях) различающихся целевыми функциями, но не возможностями ходов. Пусть каждый игрок/тип (jt) знает “объективные”, то есть известные всем вероятности $(\mu_{i1},..,\mu_{iT})_{\forall i}$ появления типов и максимизирует матожидание своей полезности $U_{jt}(\bar{x})$, зависящее от матрицы $\bar{x} := (x_{it})_{i=1,..,n}^{t=1,..,T}$ текущих стратегий выбранных всеми игроками/типами.[18]

Тогда *Байесовское равновесие* BE есть такой набор $\bar{x}$ стратегий (возможно, смешанных) что ни одному игроку/типу нет выгоды отступать от текущей стратегии при знании частоты типов и гипотезе, что все остальные не отступают от своих. Равновесие называют "вполне разделяющим" (separating equilibrium), если разные типы всех ролей действуют в нем по-разному, его называют "вполне объединяющим" (pooling equilibrium), если разные типы действуют в нем одинаково в своих ролях. В других случаях говорят о частично разделяющем (объединяющем) решении.

Легко заметить, что BE есть (смешанное) SPE в двухшаговой игре, или просто Нэшевское равновесие в подходящим образом заданной игре, а именно в такой, где дополнительный игрок – природа – задал раз и навсегда свои смешанные стратегии $\mu_{i1},..,\mu_{iT}\ \forall i$.[19]

Чтобы найти BE в примере "инспектор/нарушитель", будем проверять все варианты. Проверим сначала "разделяющее" равновесие вида ($N_{nagl}, N_{robk}, I_{star}, I_{leni}$ = (Пить,Непить, Проверять, Непр.). Запишем условие, необходимое, чтобы "Наглый" не отступил в этой ситуации от стратегии Пить:

U_{nagl}(Пить, Непить, Контр., Лень)$=\ -1\nu + 2(1-\nu)\ \geq\ U_{nagl}$(Непить, Непить, Контр., Лень)$= 1\nu + 0(1-\nu) \Leftrightarrow 2 \geq 4\nu \Leftrightarrow 1/2 \geq \nu$.

Аналогично, чтобы "Робкий" не отступил в этой ситуации от стратегии Непить:

U_{robk}(Непить, Непить, Контр., Лень)$= 1\nu{+}0(1{-}\nu) \geq U_{robk}$(Пить, Непить, Контр., Лень)$= -3\nu + 1(1-\nu) \Leftrightarrow \nu \geq 1/5$.

Так же проверяя совместимость стратегий Проверять для Старательного и Непроверять для Ленивого с текущими стратегиями Наглого и Робкого, найдем, что огрничения на вероятность $\mu = t$, при которой обсуждаемое "вполне разделяющее" равновесие возможно, должна лежать в пределах ... $\leq t \leq$ ..., ... $\leq \nu \leq$ ....

Могут ли в этой игре быть "объединяющие" или "частично объединяющие" равновесия, то есть такие, где типы в одной из ролей ведут себя одинаково? Рассмотрев матрицу выинрышей, легко установить, что это невозможно. Например, если оба инспектора "Ленятся", тогда оба водителя начинают "Пить". После этого оба инспектора начнут проверять, и так далее, так или иначе, игра не стабилизируется в этом "объединяющем" состоянии. Аналогично проверяется и неравновесность остальных объединяющих состояний. Поэтому решения могут быть только среди "вполне разделяющих" вариантов.

Что же тогда произойдет, когда ν, t не попадают в пределы, при которых возможно "разделяющее" равновесие? Очевидно, Байесовского равновесия в чистых стратегиях тогда нет, игра раскачивается, и нужно обсуждать Байесовское равновесие в смешанных стратегиях, подобное NE_m. Впрочем, легко догадаться, что это

[18]Зависимость от ходов игроков той же роли и своего хода практически не используется, но формально удобнее аргументом считать всю матрицу.

[19]Подобного игрока с фиксированной стратегией называют "болваном" ("dummy").

и есть NE_m в подходящим образом сформулированной игре описанных игроков; игре между собой и с природой.

Упражнение: найти такое решение.

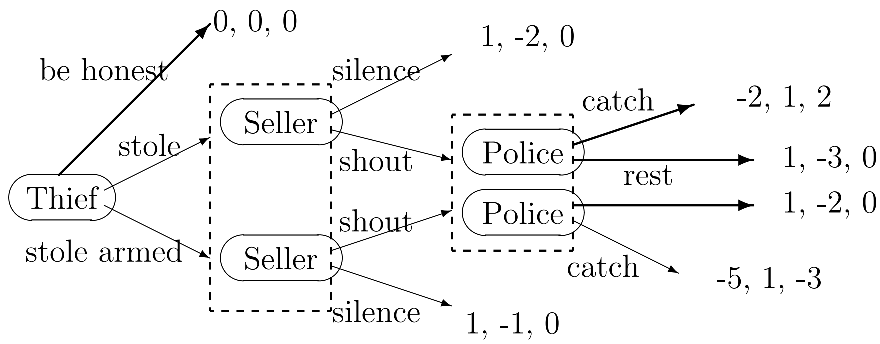


Рис. 6: Игра "Базар": решения SBE.

2.7 Совершенное Байесовское равновесие

Теперь рассмотрим более сложную концепцию, совмещающую вероятностный подход Байесовского равновесия и смешанные стратегии с развернутой (динамической) формой игры.

Пример 2.8 ("Вор на базаре") На Рис.6 представлена игра с несовершенной информация о ходах: второй и третий игроки не способны различать, какой ход сделан первым. Подразумевается популяция трех ролей: Воров, Торговок, Полисменов. Базарный вор может или отдыхать (быть честным), или воровать просто, или воровать с оружием. Торговка может кричать или молчать, когда у нее с лотка тянут товар. Полисмен может или бежать на крик и ловить, или лениться (отдыхать). Записанные на рисунке выигрыши берут за точку отсчета (0,0,0) вариант, когда Вор отдыхает, и остальные - тоже. Когда торговка что-то теряет, ей неприятно, но неприятно вдвойне, если она еще и кричит при этом зря (еще, она побаивается кричать, когда вор вооружен, а не кричать о безоружном считает стыдным, это отражает выигрыш -2 в этом варианте). Если же ее врага-вора поймают - она довольна. О Полисмене, предполагается, что он любит премии за поимку воров, но не любит риска с вооруженными, хотя справится и с таким. О Воре - что он больше отсидит, если пойман с оружием.

Будем рассматривать смешанные стратегии игроков ($\sigma_{thief} \in [0,1]^3, \sigma_{seller} \in [0,1]^2, \sigma_{police} \in [0,1]^2$) как вероятности, с которыми эти ходы в среднем встречаются на описанном базаре. Разыскивая равновесие (то есть стабильное поведение каждого типа), предположим, что ОЖИДАНИЯ всех игроков (предполагаемые вероятности ходов партнеров), а именно: ожидания вора, ожидания торговки, ожидания полисмена — соответствуют наблюдаемым частотам делаемых ходов. Но этого мало, поскольку нужно еще и вне пути игры задать так называемые ВЕРЫ, то есть ожидаемые вероятности нахождения в том или ином узле информационного множества, если игра вдруг, каким-нибудь чудом, туда попадет. Скажем, если все Воры обычно отдыхают, то Торговке, а еще более - Полисмену, все же любопытно знать, с ножом ли тот, кто стащил у нее вещь с лотка, если это случится. Это и есть их (Торговки и Полисмена) априорные, не проверенные жизнью, веры, которые между собой могут не совпадать. Например, Торговка может предполагать частоты верхнего и нижнего узлов графа типа (0.2, 0.8), а Полисмен - (0.9, 0.1), и каждый объявлять свою (возможно, ненаблюдаемую, но известную партнерам) стратегию, исходя из этих априорных вер.

Определение 2.7.1 Совершенное Байесовское равновесие (PBE, называемое также слабым секвенциальным равновесием) в игре n лиц есть набор (σ, μ) смешанных пошаговых (поведенческих) стратегий $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \Delta X$ и вер $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in \Delta M$ всех игроков,[20] таких что
1) стратегии σ являются секвенциально-рациональными (то есть итеративно недоминируемыми строго на графе), при данных верах μ;
2) веры μ слабо (только на пути игры) согласованы с наблюдаемым стратегиям σ, в смысле Байесовского правила условных вероятностей.[21]

Проверим, может ли быть решением (Отдыхать,[Кричать,Ловить]) (в квадратных скобках, как обычно, ходы вне пути игры) хоть при каких-либо верах. Заметим, что стратегия торговки КРИЧАТЬ лучше противоположной при ее ожидании от Полисмена хода "Ловить". Полисмен же может продолжать объявлять (только на словах, пока Вор не ворует) стратегию Ловить, только если он верит, что если уж Вор сворует, то без оружия. Если же с вероятностью более 2/5 он верит в противоположное, то отступит от Ловить. Иначе, проверяемое решение может оставаться SBE (а также SPE, NE) при вере более 3/5 в безоружность, и при любых верах Торговки, возможно и отличающихся от вер Полисмена!

Анализируя эту игру, можно найти, что в ней есть и другие Совершенные Байесовские равновесия, но несовпадение вер торговки и Полисмена в становится невозможным, если Вор хоть иногда ворует: определение PBE не позволяет несоответствие вер практике *на пути игры*.

Упражнение. Пример “Масти и Картинки”.

Здесь предполагается, что строчный игрок выберет: Старшие или Младшие, потом столбцовый - Красные или Черные, потом строчный - конкретную картинку из уже названной группы (из Старших или из Младших), потом столбцовый - конкретную масть из уже названного цвета. Найти SPE, INDW.

Вариант 2: Усложнение задачи - найти SPE, INDW, PBE если последний ход решается жребием - подбрасыванием монетки.

Вариант 3: То же, но результат подбрасывания известен до ходов второму игроку, и только ему.

Вариант 4: Найти SPE, INDW, PBE если *первый* ход решается жребием - подбрасыванием монетки, и никто не видит его.

Пример “Trivial quize”??

[20] Множество вероятностных пошаговых стратегий ΔX есть смешанное расширение чистых стратегий - ходов X. Ожидания любого игрока о себе считаем равными его стратегии: $\mu_{ii} = \sigma_i$.

[21] В частности, если все ходы из некоторого узла оканчиваются в одном (последующем) информационном множестве, то веры в нем должны совпадать с вероятностями ходов: $\mu_h = \sigma_{h-1}$.

Таблица 12:

	Масти:			
	Крас-	*ные*	*Чер-*	*ные*
	Черви ↓	Бубны ↓	Крести ↓	Пики ↓
Старшие: Туз	8 1	0 3	2 5	0 1
Старшие: Король	6 7	0 1	4 5	2 3
Младшие: Дама	2 3	6 9	8 3	0 1
Младшие: Валет	0 3	4 7	4 9	0 1

2.8 $PBE(\varepsilon)$, Секвенциальное равновесие (SeqE), $THPE$

В примере "Базар" проявилась логическая неясность понятия PBE: в нем разные игроки могут иметь разные ожидания об одном и том же партнере. И вообще, как обосновать ожидания игроков о тех ветках игры, которые никогда не реализуются? Это важно, поскольку от этих ожиданий зависят решения. Устранению этой неясности и сужению множество возможных решений можно с помощью понятия $PBE(\varepsilon)$ или понятия (сильного) секвенциального равновесия SeqE.

Определение 2.8.1 *Для заданного малого $\varepsilon > 0$ назовем ε-равновесием ($PBE(\varepsilon)$) - такой набор смешанных мультиперсонных стратегий $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ и вер $(\mu_1, ..., \mu_n)$, что веры слабо согласованы со стратегиями, а все стратегии секвенциально-рациональны при дополнительном ограничении: ни один ход не может иметь вероятность применения меньше ε.*

По сути, это определение модифицирует PBE, вводя возможность не-рациональных ходов игроков: у любого может "рука дрогнуть", можно ошибиться. То есть, предполагается, что есть случайности, и вероятность всякого хода не менее $\varepsilon > 0$.

Пример 2.9 Игра "Возьми или оставь" ("сороконожка"):

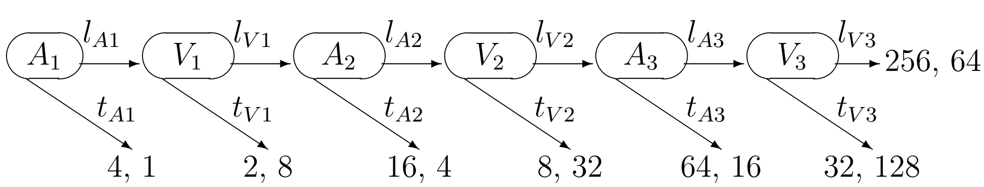


Рис. 7: Игра "Возьми или оставь" (Rosental, 1956?).

Пусть первый из двух игроков (Анна) может взять 4/5 общей прибыли (то есть \$4 из \$5 на ветви $take_{A1}$) на шаге 1, тогда игра закончится, а второму - Виктору

- останется \$1. Либо можно оставить банк на столе ($leave_{A1}$). На шаге 2 прибыль удваивается (например, ведущим), и черед 2-го выбирать: взять ли 4/5 прибыли (то есть \$8 из \$10-и) и закончить тем самым игру, или оставить, и т.д. Предсказывая исход для конечной (скажем, по 3 хода каждого) игры по принципу SPE, PBE, или $THPE$ мы увидим, что игра тривиально закончится на 1-м шаге $take_{A1}$ с выигрышами (4,1). А по принципу решения $PBE(\varepsilon)$ она может дойти до конца с большой суммой прибыли. (Здесь $\varepsilon-$ вероятность не ниже которой ожидается от любого хода, благодаря случайному поведению – иррациональности).

Покажите, что $\varepsilon > 1/7$ достаточно для ходов типа $leave_i$ и продолжения игры до счастливого конца (или хотя бы для продолжения рациональных ходов до узла V_3). Какое ε *необходимо* для рациональности ходов типа $leave_i$ в конечной и бесконечной играх? Достаточно ли его также и в бесконечной игре?

Но гипотеза о некотором $\varepsilon > 0$ кажется произвольной: какое именно ε реально? Если предполагать "очень малую" вероятность случайных ходов, то формируя концепцию решения приходится переходить в предел $\varepsilon- > 0$. Точнее, лучше предполагать неодинаковые частоты случайных ходов $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ у разных игроков, и идти в предел по "определенному направлению". Содержательно, идея секвенциального равновесия, вытекающего из этой идеи, описывается так. В популяции игроков (типов), которую мы рассматриваем, была некоторая предыстория нынешнего состояния. Все игроки ошибались, делая случайные ходы, и все предположения и веры о том, что обычно происходит в каждой информационной позиции или узле игры - обоснованы этой предысторией. При этом частоты случайностей уменьшались, возможно неравномерно, и сейчас практически нулевые. Но наши теперешние веры у всех одинаковы и обоснованы предысторией, что формально можно выразить так.

Определение 2.8.2 (Сильное) секвенциальное равновесие SeqE в игре n лиц есть набор $(\bar{\sigma}, \bar{\mu})$ смешанных пошаговых (поведенческих) стратегий $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1, ..., \bar{\sigma}_n) \in \Delta X$ и вер $\bar{\mu} = ($
$barmu_1, ..., \bar{\mu}_n) \in \Delta M$ всех игроков, таких что
1) стратегии $\bar{\sigma}$ являются секвенциально-рациональными (то есть итеративно недоминируемыми строго на графе), при данных верах $\bar{\mu}$;
2) веры $\bar{\mu}$ *сильно* согласованы с наблюдаемым стратегиям $\bar{\sigma}$, в том смысле, что существует последовательность вполне смешанных стратегий $\sigma^(k) \to \bar{\sigma}$ сходящаяся к равновесной, по которой однозначно строится последовательность вер $\mu^(k) \to \bar{\mu}$, сходящихся к $\bar{\mu}$.[22]

Если к тому же стратегии $\bar{\sigma}$ секвенциально-рациональны не только при финальных верах $\bar{\mu}$, но и при всех поздних (начиная с некоторого номера) членах построенной последовательности вер $\sigma^(k)$, то это равновесие SeqE называют (Совершенным) Равновесием дрожащей руки THPE (Trembling Hand Perfect Equlibrium).

[22]В частности, если все ходы из некоторого узла оканчиваются в одном (последующем) информационном множестве, то веры в нем должны совпадать с вероятностями ходов: $\bar{\mu}_h = \bar{\sigma}_{h-1}$.

2.9 Сопоставление решений SPE, SBE, SeqE, THPE, INDW

Введенные понятия $PBE(\varepsilon)$, $THPE$, и идеи случайных ходов оправдывают выделение равновесий со слабым доминированием типа INDW (или SE) среди равновесий типа SPE. Действительно, все слабо доминируемые стратегии отбрасываются, если есть вероятность (даже если она близка к нулю) любого исхода. Поэтому, во многих играх окажется $THPE = INDW$, и в любом случае $THPE \subset INDW$ (проверьте это).

В сущности, понятия PBE, $PBE(\varepsilon)$, $THPE$ кажутся достаточно богатыми, чтобы вместить большинство остальных некооперативных концепций как частный случай. Действительно, SPE обобщается до смешанного SPE_m, а смешанное - шире прочих концепций, в смысле

$$\mathbf{SPE_m \supset PBE \supset THPE \subset INDW_\Gamma \subset SPE_m}.$$

Кроме того, $THPE$ в большинстве случаев совпадает с $INDW_\Gamma$. Равновесие Нэша – это SPE в одношаговой игре с одновременными ходами. Пара равновесий Штакельберга (оптимистическое и пессимистическое) обычно совпадают с SPE двухшаговой игры, когда лидер ходит первым (в особых случаях SPE может включать еще какие-то исходы). Максимин может быть аппроксимирован $PBE(\varepsilon)$-равновесиями модифицированной игры, при элементарных функциях полезности участников с очень большим неприятием риска.

С другой стороны, полезно продемонстрировать, что понятия SPE, SBE, SeqE не тождественны, и понять, почему.

Пример 2.10 (“Ослик” Зелтена) .....

Благодаря приведенным выше цепочкам вложений, существование всех названных (смешанных) решений можно вывести из существования THPE. Сформулируем его условия (доказательство этой непростой теоремы мы опускаем).

Теорема 4 *В конечной игре с полной рациональностью и полной информацией об игроках (хотя, возможно, и несовершенной информацией о ходах) существует* $THPE \neq \emptyset$.

Следствие: $NE_m \neq \emptyset,\ PBE \neq \emptyset,\ INDW_\Gamma \neq \emptyset,\ SPE_m \neq \emptyset.$

В принципе, все эти концепции применимы и в играх с неполной информацией/рациональностью партнеров, но в них есть специфика, которой мы и займемся.

2.10 Отсутствие "общего знания", игры с репутацией, блеф

Изменим гипотезы игры “сороконожка”, добавив к возможности иррациональных ходов неопределенность знаний о степени иррациональности партнера (это уже не “общее знание”). Окажется, что концепция решения $PBE(\varepsilon)$ должна модифицироваться, и включать характеристику информации.

Пример 2.11 (Продолжение игры "Бери или оставь") Пусть, в разобранной выше игре "сороконожка" ситуация изменилась: игрок Victor слышал, что Анна в подобной игре из 10-ти ходов сделала 1 иррациональный (невыгодный, ошибочный), и ожидает, соответственно, вероятность иррациональности около $\alpha = 1/10$. Аналогично, Анна слышала, что Виктор в подобной игре из 30-ти ходов сделал 2 иррациональных хода, она ожидает вероятность иррациональности $\beta = 2/30$ (это окажется не то же, что $1/15$!). Предположим, игроки считают рациональным *брать* банк, когда вероятность ошибки партнера больше $1/7$ и ожидают от партнера такого же мнения. Очевидно, при такой "простоватой" рациональности, Анна на первом ходу ВОЗЬМЕТ (если не ошибется). Но если он ошибется, возьмет ли Виктор? Он может интерпретировать *оставление* Анной как ошибку, и тогда подправить свою субъективную вероятность ошибок А до величины (1+1)/(10+1)=2/11. Либо считать случившееся *оставление* рациональным ходом, и сделать отсюда вывод о текущих гипотезах ($\beta =$?) Анны относительно себя (Виктора). Независимо от того, верны ли эти гипотезы, выгодно ли теперь Виктору *оставлять* и пойдет ли игра до узла V_3?

1)По сравнению с предыдущей ситуацией, оставим Виктора "простым", а первого игрока предположим способным рассчитать предыдущую ситуацию. Станет ли он на первом шаге ОСТАВЛЯТЬ, независимо от своих гипотез о партнере (БЛЕФОВАТЬ)? Пойдет ли игра до 6-го хода?

2)Что если теперь оба игрока "сложные", и В просчитывает возможность блефа первого (считающего второго простым), изменит ли это результат?

2.11 Уточнение понятия рациональности; прямая индукция. Игры с несовершенной рациональностью.

Кольберг и Мертенс (1986) предложили возможность сужения множества совершенных или других равновесий основанных на обратной индукции с помощью "прямой индукции". По сути дела она означает решение игры по доминированию и в развернутой и в нормальной форме (по определенному порядку), и пересечение множеств ответов. Это затрагивает фундаментальный вопрос о "creadible commitment",[23] поднятый Нейманом и Моргенштерном: всегда ли игроки могут до игры рассчитать свои оптимальные стратегии (планируемые реакции на возможные ходы/информацию), а затем только придерживаться их? Часто это не так, и игроку было бы выгодно с самого начала объявить свою стратегию, и лишить себя возможности передумать затем в ходе игры (см. игру "Цезарь сжигает мосты" в разделе задач). В следующем же примере (Рис. 8) противоречия не возникает, и прямая индукция выглядит обоснованно.

В этой игре Виктор в ситуации V_1 не знает, сходила ли Анна c или d. Здесь два последовательных равновесия SPE в чистых стратегиях (и еще одно в смешанных): $(a, [d, z])$, (b, c, u). Однако, только последнее остается, если рассматривать прямую индукцию, определяемую так. Приведя эту игру к нормальной форме заметим, что

[23]Этот термин в играх означает "выполнимое обещание".

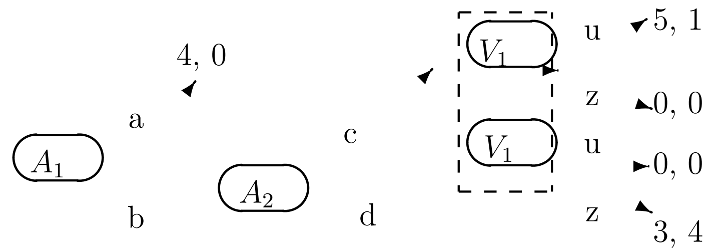


Рис. 8: Прямая индукция.

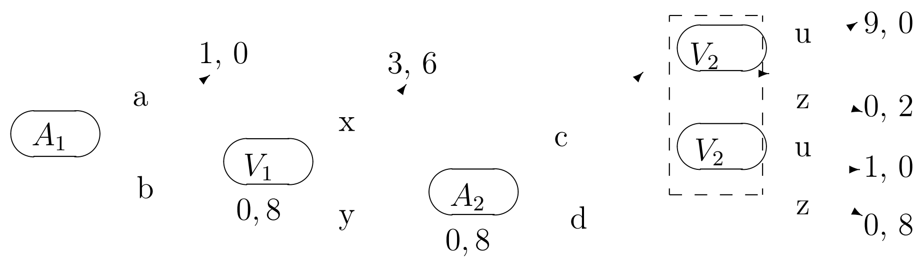


Рис. 9: Прямая индукция при неполной рациональности.

стратегия Анны (b, d), сильно доминируется ее стратегией (a). Зная это, Виктор, в случае наблюдаемого хода (b), должен решить, что Анна имела в виду стратегию (b, c), и сходила (c) а не (d). Тогда ему разумно ходить (u), другой ответ на (b) нерационален. Зная это, Анна пойдет (b) а не (a), и получит 5. Так дополнительные соображения о рациональности по "прямой индукции" сузили множество ожидаемых исходов игры.

Однако в другой подобной игре (Рис. 9) подобные соображения могут быть обоснованы только неполной рациональностью; множества решений по прямой и по обратной индукции не пересекаются!

На Рис. 9 игроки ходят по очереди, и Виктор также на последнем ходе не знает предыдущего хода Анны. Но это ему и не нужно, ведь в любом случае он сходил бы вниз: (z), этот ход строго доминирует над (u). Поэтому единственное SPE $=(a, [y, d, z])$. Если же мы переведем эту игру в нормальную форму (Табл. 13), то окажется, что стратегия Анны (bc) слабо доминирует над (bd). Одновременно стратегия Виктора (x) слабо доминирует над (yu). Затем (bc) сильно доминирует над (a) и единственное SE$=(b, x, [, z]) \neq$ SPE. Поэтому SE не кажется рациональным: как можно верить, что в ситуации A_2 Анна пойдет вверх на (c) ожидая на это рациональный отклик (z)? Но, с другой стороны, в ситуации V_1 Виктор может рассуждать и так: а почему же она вообще пошла сюда, в этот узел, если предполагает меня рациональным? Это невозможно. Тогда она может ожидать от меня иррационального хода: (u). И ожидая его, планировать ход (c). Тогда Виктор ходит (x) и SE действительно реализуется. При этом, возможно, Анна блефовала, демонстрируя ходом (b) свое неверие в рациональность Виктора, и получила 3 от блефа вместо 1 по тривиальной стратегии a.

После хода (b), Виктору надо решить что это: взятие на пушку, глупость или

Anna\ Victor	x	yu	yz
a	1, 0 (SPE, SE_{Γ})	1, 0	1, 0
bc	3, 6 ($SE_{forward}$)	9, 0	0, 2
bd	3, 6	1, 0	0, 8

Таблица 13: Прямая индукция.

подозрение партнера в глупости. В последних случаях надо ходить вверх! При гипотезе же полной рациональности обоих (известной обоим), нужно не покупаться на блеф, ходить вниз (y, z) и иметь 8. С другой стороны, если бы Анна имела возможность объявить, владея “creadible commitment”, стратегию (b, c) и не отступать от нее, то реализовала бы выигрыш 3. Тогда, при “creadible commitment”, Виктор вынужден отступить на (x).

Мораль из этого примера: в ситуациях неполной рациональности игрок может стараться сделанным ходом сигнализировать о своих гипотезах (истинных или блефовых) относительно партнера, к своей выгоде. Это практически эквивалентно сигнализированию о своем типе в Байесовских играх.

Аналогично, применение стратегий, а не ходов, резонно в повторяемой игре, где игрок способен завоевать репутацию. Тогда прямая индукция правдоподобна.

Упражнение. В примере “футбол или кино” (Рис. 1), рассмотрите следующую модификацию. Пусть, Виктор общается с Михаилом, который наверняка увидится с Анной до вечера, до выбора футбол/кино, но стесняется прямо попросить Михаила передать Анне просьбу прийти на футбол или в кино. Он сжигает 1 рубль на глазах Михаила, никак не объясняя своего поступка, но надеясь, что тот расскажет Анне об этом странном случае, и та сделает выводы. Покажите прямой индукцией, что это сжигание – разумный ход Виктора.

.....

2.12 Динамические игры с “почти-совершенной” информацией, повторяющиеся игры с угрозами.

“Почти-совершенной” называют информацию о всех сделанных ходах, кроме последнего или текущего. Подобная ситуация возникает в весьма распространенном классе “повторяющихся” игр. Это такие игры, где участники ходят одновременно, затем одновременно наблюдают результат действий партнеров, еще раз разыгрывают эту же игру, и т.д. Например, игра “Монетки”, “Перекресток”, “Футбол или кино” – могут быть разыграны в повтеряющемся режиме. Что тогда изменится в типе решения?

Строго говоря, при анализе такой игры уже нельзя обойтись просто матрицей нормальной формы игры. Правильный подход – рассматривать дерево игры с повторяющимися элементами, конечное или бесконечное. Оказывается, что решения при этом могут существенно отличаться от решений однократной аналогичной игры.

Пример 2.12 (“Камень в огород” или повторяющаяся “Дилемма заключенных”)

Предположим, два недолюбливающих друг друга соседа имеют выбор: бросить соседу камень в огород, уходя утром на работу, или воздержаться.[24] Выигрыши заданы следующей игрой в нормальной форме..

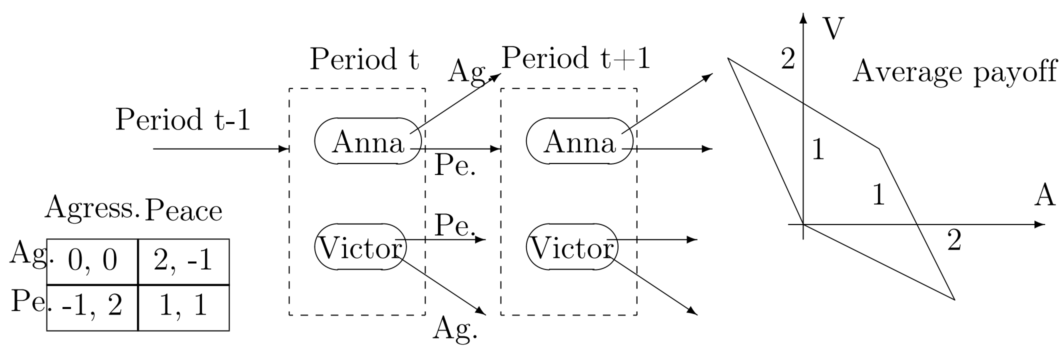


Рис. 10: Повторяющаяся игра “Камень в огород”.

Очевидно, структура игры та же, что в “дилемме заключенных”. Поэтому единственное строго доминирующее равноесие SDE (и одновременно единственный не-Парето-эффективный исход!) есть (Агрессия,Агрессия). Теперь рассмотрим дерево этой игры на конечном интрвале времени, предполагая цели игроков в виде дисконтированной суммы выигрышей по периодам. Окажется, что совершенное в подыграх равновесие (SPE) то же, что и DE: $(Agress., Agress.)^4 = ((Agr., Agr., Agr., Agr.,),$ $(Agr., Agr., Agr., Agr.,))$. Теперь отметим, что стратегией является не просто ход, а последовательность ходов. Точнее, это последовательность реакций на каждом этапе на каждую из возможных наблюдаемых ситуаций, поэтому точнее приведенное решение следует записать так: $SPE = \{(((Agr., Agr., Agr., Agr.,)_{anyway}, (Agr., Agr., Agr., Agr.,)_{anywa}$ Теоретически, можно рассмотреть и такие стратегии: $\{(< (Peace, Peace, Peace, Peace,)_{peaceful\ par}$ $(Peace, ..., Agr., Agr.,)_{agress.\ partner} >)\}$, то сеть, обещание быть мирным, пока партнер мирный, иначе переключаться на агрессию до конца. Однако эти стратегии “максимальной угрозы” (обещание мстить за агрессию максимально, иначе сохранять мир) не рациональны в смысле SPE в конечной игре. В бесконечной же игре они могут быть рациональны!

Теорема 5 (“Народная теорема” (Folk Theorem):) *В бесконечной повторяющейся игре, если дисконт стремится к единице, то множество возможных средних выигрышей стремится к множеству всех выигрышей выше гарантированных.*

Доказательство мы опускаем. Иллюстрацией смысла теоремы служит Рис.10. Множество возможных выигрышей - четырехугольник, помеченный (1,1). .....

[24]Аналогичная игра возникает во многих практических ситуациях. Например, между двумя олигополистами, каждый из которых может снизить цену продукта в некотором периоде, и отнять у конкурента долю рынка, зная, что тот может тоже ответить “агрессией”.

2.13 Игры с несовершенной памятью, и другие несовершенства рациональности

До сих пор мы предполагали, что каждый игрок помнит все, что он знал ранее, в том числе собственные предыдущие ходы. Иногда это не так: в картах слабые игроки нередко не помнят вышедших карт, даже своих. Как моделировать подобные ситуации? Очевидный ответ – с помощью мультиперсонного представления игры: одного и того же игрока нужно считать другим (хотя с теми же целями), после того, как он забыл часть информации.

Пример 2.13 ("Бабушка и очки".) Бабушка снимает очки, и идет умываться, а очки кладет на видное место у выхода из ванной. Она знает, что не вспомнит, куда их положила, и проектирует ситуацию, чтобы на них наткнуться. В данном случае, она смоделировала себя как другого игрока, чей ход (искать очки) состоится после умывания первого игрока, и приняла адекватное решение (постройте дерево игры и SPE).

Аналогично, мультиперсонное представление помогает моделировать ситуации, когда иррациональность участников заключается в изменении их целей по ходу игры.

Пример 2.14 ("Курильщик" (D.Kahneman, A.Tversky, 1982).) Бывший курильщик наиболее предпочитал бы выкуривать 2 сигареты в день, менее приятно для него совсем не курить, а совсем нехорошо (врачи запрещают) курить пачку в день. Он бы и выбрал 2 сигареты, но знает, что тогда предпочтения его изменятся, он не удержится, и будет курить пачку. Поэтому он останавливается на полном воздержании (постройте дерево игры и SPE).

В противоположность двум приведенным примерам иррациональности, рассмотрим ситуацию, которая кажется иррациональной, но ей не является.

Пример 2.15 ("Честный дележ" (J.Tirole 2001).) Паре игроков ведущий обещает $ 100 если дележ, предложенный первым будет принят с первого раза вторым. С точки зрения кооперативных игр, возможными дележами является все ядро, от 0 до 100. С точки зрения же Штакельберговского решения первого игрока (то же SPE), можно предлагать всего 1 второму и 99 себе, второй вынужден согласиться. Практически же, многочисленные опыты этой игры с неподготовленной аудиторией дают около 95% случаев дележа 50:50, около 2% других принятых дележей, около 3% отвергнутых дележей, когда оба получили 0! Тем не менее, это наблюдение не позволяет говорить о средней иррациональности людей. Просто нужно считать их целевые функции заданными не только на денежном выигрыше, но и на сопоставлении выигрыша своего и партнера. Практически люди чаще максимизируют **самоуважение**, чем непосредственный результат: им важно "не остаться в дураках". Кроме того, многие придерживаются некоторых концепций "справедливости" при дележе. Если внести определенный вариант подобных гипотез в конструируемую модель их целевых функций, то окажется, что обидеть "наглеца", предлагающего не равный дележ прибыли – рациональная стратегия, максимизирующая самоуважение, а первый игрок, зная это, предлагает дележ 50:50 (постройте целевые функции, дерево игры и SPE).

Аналогично, альтруизм – это не иррациональность, а нетривиальные цели. Современная "экспериментальная экономика" накопила достаточно фактов такого характера, демонстрирующих систематическое отклонение поведения от тривиально понимаемой рациональности (и немало фактов истинной иррациональности).

Истинная иррациональность может иметь разные причины: - несовершенный расчет игры; - несовершенная память; - изменение целей в ходе игры; - иррациональные предпочтения (неполные или нетранзитивные). Мы видели, что модели теории игр, с некоторыми модификациями, оказываются пригодны и к этим ситуациям. Теперь мы покажем, что они пригодны и к некоторым ситуациям совсем без рациональности.

2.14 Игроподобные ситуации без рациональности: псевдооптимизация. Эволюционное равновесие.

Биологи, исследуя популяции животных, построили различные модели динамических систем их взаимодействия. Системы могут иметь равновесия или не иметь (раскачиваться). В частности, хорошо известны модели Вольтерра "хищники и жертвы", описывающие динамику совместных колебаний численности популяций, например, волков и оленей, связанных в экосистеме.

Нас будут интересовать те ситуации, где переменными являются различные варианты поведения. Окажется, что даже если особи совсем иррациональны (болваны), результирующие равновесия чем-то похожи на рациональное (оптимизирующее) поведение. Это не удивительно, поскольку даже в неживой природе некоторые явления хорошо описываются оптимизационной моделью, например, расположение воды налитой в емкость минимизирует высоту ее центра тяжести. Такие явления можно назвать "псевдооптимизацией": оптимальный, в некотором смысле, исход в отсутствии оптимизирующего субъекта. Это феномен, волновавший религиозных мыслителей и Дарвина, в связи с естественным отбором. Когда игрок не один, то (Парето) оптимальность не гарантирована естественным отбором. Рассмотрим подобную ситуацию - равновесие типа Нэшэвского, но без рациональных субъектов.

Пример 2.16 ("Голуби и ястребы" (см. Ordeshook, p.183)) Пусть популяция воробьев (пример можно применить и к другим животным, или к *популяции типов поведения* людей) состоит из 2 типов птиц: "Агрессивный" (как ястреб) или "Мирный" (как голубь), причем ни один не меняет своего типа поведения (они "болваны"). Но тот тип, который в среднем имеет лучшее благосостояние, обильнее и размножается (либо особи перенимают образ поведения субъектов, выглядящих успешными). Так или иначе, доля агрессивных воробьев в популяции со временем будет возрастать, если они "обыгрывают" более мирных, и наоборот.

Предположим, тип поведения проявляется возле куска корма: двое мирных особей встретившись — вместе его клюют, мирный отступает перед агрессивным, а двое агрессивных деруться, с обоюдными потерями. Эти гипотезы о выигрышах в каждой из 4-х возможных комбинаций (кто с кем окажется возле корки хлеба) отразим матрицей выигрышей:

		Второй воробей			
		агресс.		мирный	
Первый воробей	агрессивный	-1	-1	2	0 SNE
	мирный	0	2 SNE	1	1

Таблица 14: “Голуби” и “ястребы”.

Обозначим $\alpha(t) \in [0,1]$ текущую долю агрессивных птиц в популяции, тогда $\mu = (1-\alpha(t)) \in [0,1]$ есть доля мирных.

Найдем равновесие Нэша в смешанных стратегиях NE_m, понимая его как стационарное состояние $\bar{\alpha}$ доли агрессивных птиц, то есть решение уравнения:

$U(\bar{\alpha},(1-\bar{\alpha})) = -1\bar{\alpha} + 2(1-\bar{\alpha}) = 2 - 3\bar{\alpha} = U(1-\bar{\alpha},\bar{\alpha}) = 0\bar{\alpha} + 1(1-\bar{\alpha}) = 1-\bar{\alpha}$, $\Rightarrow \bar{\alpha} = 0.5$. При такой доле агрессивных эта пропорция могла бы не меняться.

Заметим, что кроме найденного симметричного равновесия NE_m $\bar{\alpha} = 0.5$ в системе есть и два крайних равновесия Нэша в чистых стратегиях: (Агр.,Мирн.), (Мирн.,Агр.), однако они не отвечают содержательной формулировке “игры”: нельзя придумать долю α отвечающую этим ситуациям. Напротив, содержательно возможны крайние ситуации, когда какого-то типа просто нет: $\tilde{\alpha} = 0$, $\hat{\alpha} = 1$. Однако, как легко проверить, в отличие от первого, они неустойчивы к возможным *мутациям*, то есть к ненулевой вероятности случайного появления особей любого типа (аналог случайных ходов в ситуациях с рациональностью).

Понятие *локальной устойчивости* эволюционных равновесий в системах такого типа можно сформулировать так. Пусть есть n типов игроков $i = 1,...,n$ с одинаковыми целевыми функциями $u_1(.) = ... = u_n(.) = u(.)$, доли их в популяции есть $\alpha_1, ...\alpha_n :\ \alpha_i \in [0,1],\ \sum_i \alpha_i = 1$ (в иной интерпретации, это одинаковые игроки, а $\alpha_1, ...\alpha_n$ есть частоты применения чистых стратегий).

Определение 2.14.1 В описанной ситуации набор стратегий (типов поведения) $(\bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_n)$ называется “эволюционным равновесием” EvE, если для любого типа поведения i выполняется $u_i(\bar{\alpha}_i,\bar{\alpha}_{-i}) > u_i(\alpha_i,\bar{\alpha}_{-i})\ \forall\alpha_i$ (стратегия $\bar{\alpha}_i$ строго предпочтительна при равновесных стратегиях партнеров $\bar{\alpha}_{-i}$), либо $u_i(\bar{\alpha}_i,\bar{\alpha}_{-i}) \geq u_i(\alpha_i,\bar{\alpha}_{-i})$, $u_i(\bar{\alpha}_i,\alpha_{-i}) > u_i(\alpha_i,\alpha_{-i})\ \forall(\alpha_i,\alpha_{-i})$ (стратегия $\bar{\alpha}_i$ нестрого предпочтительна, но начинает строго предпочитаться при отклонении партнеров от Нэшевского решения).

Очевидно, $SNE \subset EvE \subset NE$.

Заметим, что показанный эволюционный подход применим и к случаям частичной рациональности такого типа: участники популяции (особи) — это не люди или животные, а бытующие типы поведения. А игроки — люди или животные — поступают тем или иным образом случайно, с некоторой текущей частотой $\alpha(t)$, не занимаясь настоящей оптимизацией, но несколько увеличивая частоту тех ходов, где они в среднем, по опыту, больше выигрывают. Мутации есть случайные ходы. Концепция равновесия и результат в таких ситуациях те же, что в популяциях с реальными особями типа "болванов" (dummy).

Упражнение. В описанной в предыдущем примере ситуации с воробьями, предположите, что есть еще один тип воробьев, его доля в популяции β, он называется "буржуазным", поскольку уважает собственность. Подразумевается, что если такой воробей нашел корм первым, то считает его своим и дерется с любым претендентом, получая выигрыш (-1), как и претендент. Если же он подходит к корму вторым, то с мирным напарником кормится вместе (выигрыши (1,1)), а агрессивному уступает (выигрыши (0,2)). Считая вероятность быть первым $1/2$ и усреднив, получим, что выигрыши равны $u_\beta(\beta,\alpha,\mu) = -1\alpha + 1\mu + 1\beta...$ Найдите эволюционное равновесие (β,α,μ) (только ли "буржуазные" типы поведения останутся, единственно ли EvE?).

Пример 2.17 ("Обезьяны: альтруисты и эгоисты") Пусть, на равнине, равномерно покрытой джунглями рассеяна популяция обезьян. Обязьяна может быть типа альтруиста, вычесывая блох у соседей, либо типа эгоиста, подставляя спину другим, но сама не вычесывая. Предположим, что у каждой обезъяны 8 соседей (как у клетки на шахматной доске), и полезность ее возрастает пропорционально числу альтруистов среди них, но убывает по размеру собственных усилий. Покажите, что при подобной целевой функции окажется, что в этом лесу единственное эволюционное равновесие – полный эгоизм. Напротив, при некоторых параметрах подобной целевой функции и возможности парных мутаций нет эволюционных равновесий: возникающая в эгоистичном лесу пара альтруистов растет, как пятно, в ней возникает пятно эгоистов, и т.д. Подобная ситуация возможна и при единичных мутациях: не из всякого начального положения устанавливается равновесие. В другом варианте игры: когда альтруизм гаснет, если не взаимен – возможно равновесие с полным альтруизмом (точнее, дружелюбием), мутации эгоистов подавляются эволюцией.

Эти соображения о возможности предсказания эволюционных равновесий без рациональности хорошо переносятся с популяций животных и на "популяции" типов поведения людей. Дело в том, что в истории многие сообщества чаще всего не были способны свободно "конструировать" типы поведения, даже если они признавались полезными (вопреки Ж.-Ж.Руссо). Традиционализм перевешивал изменчивость. Нормы возникали, скорее, эволюционно. Другая причина применимости эволюционной концепции та, что даже в бизнесе, тот или иной тип маркетингового поведения зачастую слишком трудно просчитать и оптимизировать. Практически, популяция торговцев просто "пробует" (мутации) множество разных типов поведения, и некоторые из них выживают в равновесии, а неуспешные торговцы "обезъянничают" у успешных или выходят из игры (в обоих случаях их прошлый "тип поведения” погибает). Тем самым, ограниченная рациональность торговцев не препятствует описанию ситуации игроподобной моделью с максимизацией прибыли.

2.15 Сопоставление различных концепций решений (статических и динамических) игр

В заключение обзора (заведомо неполного) различных концепций решений игр попробуем сопоставить их между собой; в какой мере некоторые концепции могут считаться частным случаем других или, наоборот, отражать принципиально разные ситуации?

Прежде всего, сопоставляя некооперативные (NE, MaxMin) и кооперативные концепции решений (например, ядро, Парето-границу), можно заметить, что вторые, в отличие от первых, служат скорее критериями оптимальности для определенных ситуаций, чем способами предсказать исход. Действительно, указывая ядро как некоторое множество “интересных” исходов в ситуации, где возможны переговоры, следовало бы указать еще процедуру, которой будут вестись переговоры, построить по ней соответствующую некооперативную игру (кто что может предложить, кто отказаться, и т.д.) и тогда уже пытаться предсказать исход. Причем, исход при некоторых механизмах (дележ Шепли) может быть и не в ядре. Однако, польза простой концепции ядра как именно предсказательной концепции в том, что многие сложные реальные процедуры приводят к ядру, и мы можем иногда предсказывать множество потенциальных исходов *не зная конкретной процедуры*, а лишь ее принадлежность этому классу.

Далее, обсуждая некооперативные концепции, из предыдущего должно быть ясно, что статическая игра – это частный случай динамической, а именно, это однопериодная игра с одновременными скрытыми ходами партнеров. В таком разрезе, прямо по определению, решение Нэша есть SPE этой игры (не имеющей дополнительных подыгр). Но тонкость в том, что это же решение Нэша может быть применимо и к повторяемой игре с такой же структурой возможных ходов и выигрышей, в том числе - к игре бесконечной. Тогда его нужно рассматривать как одно из совершенных в подыграх равновесий (SPE) этой повторяемой игры, такое, где ходы неизменны от раунда к раунду (см. ситуации с Folk Theorem). Именно в этом смысле его называют “равновесием”, хотя строгое обоснование того, что это действительно равновесие должно проводиться именно через соответствующую развернутую форму динамической игры. Итак, NE – это простая концепция, иногда применимая к весьма сложной ситуации, которую мы пытаемся прогнозировать *не зная конкретной динамики*.

Напротив, решение Штакельберга, возникшее первоначально для “статических” игр, на самом деле выражает совершенно определенную динамику: на первом этапе ходит лидер, затем одновременно (по Нэшу) – его последователи. Итак, StE есть SPE в подходящим образом сформулированной двухпериодной игре. Небольшое отличие возникает только в “оптимистической” и “пессимистической” вариациях понятия StE.

Аналогично, понятие итерационно-слабо-недоминируемого множества IWND, приводящее к сложному равновесию SE, можно рассматривать как осуществляемое на определенном дереве игры, задающем последовательность отметания (слабо) доминируемых альтернатив. В классическом варианте определения SE последовательность предполагается такой: все игроки одновременно отбросили стратегии в первом раунде, увидели результаты, отбросили во втором, и т.д. Но в определенных случаях (например, при неповторимости выигрышей) и все другие варианты последовательности ходов приводят к тому же результату (см. Мулен, 1985,). Поэтому, опять, ценность данной простой концепции в попытке предсказывать исход *не зная конкретной динамики*. Все же, пытающийся делать такие предсказания должен ясно понимать, что корректным является все же именно анализ динамической игры, и оценивать, насколько принимаемое упрощение исказит прогноз.

Теперь сравним между собой несколько концепций решений динамических некооперативных игр.

....

Раздел II. Элементы политической теории

Целью второй половины нашего курса является знакомство с некоторыми концепциями и моделями достаточно распространенных политических процессов, не претендующее, конечно, на полноту. Представляется важным поупражняться в применении логики игрового анализа к политическим ситуациям, а также сконцентрироать внимание на причинах случающегося нередко **"фиаско государства"** (противопоставляемого в общественных дискуссиях случаям **"фиаско рынка"**). Под "фиаско государства" подразумевается неоптимальный по Парето (или в ином смысле) исход игры избирателей, парламентов, правительственных органов и др. Анализ механики этих игр помогает сопоставлять по эффективности различные варианты государственного устройства, в частности, виды государственного регулирования (или нерегулирования) различных сфер жизни, типы выборного законодательства.

3 Тема: Голосование, выборы. Общественный выбор при гипотезе полной рациональности

3.1 Некоторые эмпирические сведения[25]

Трудно описать все многообразие возможных, и встречавшихся, типов государственного устройства. Аристотель предлагал следующую простую шести- элементную классификацию "режимов" правления по двум признакам (цит. по [7]):

Кто правит:

		один	несколько	большинство
В чьих	общих	монархия	аристократия	полития
интересах:	своих	тирания	олигархия	охлократия

Таблица 15: Классификация режимов власти по Аристотелю.

В этой концепции названия режимов второй строки таблицы несут морально-негативный оттенок (охлократия – власть неразумной толпы), подчеркивающий подавление интересов не-правящих групп, в отличие от режимов первой строки.[26]

Определение 3.1.1 Под *режимом правления* подразумевается совокупность писанных и неписанных законов и правил политического поведения, вместе с реально применяемыми при этих правилах стратегиями игроков, то есть с равновесием некоторого типа.[27]

Кроме концепции Аристотеля, предлагалось много различных классификаций режимов по разным признакам. Марксистская классификация делит режимы по

[25]Эмпирический обзор заимствован из [Andrew Heywood. 1997. Politics]

[26]Заметим, что сам Аристотель в качестве синонима охлократии употреблял слово "демократия", теперь трактуемое большинством политиков близко по смыслу к его термину "полития".

[27]Много примеров, когда при близких законах практика их использования сильно отличается, таково отличие Индии от Англии, Мексики от США.

экономико-политическому устройству в соответствии со своими пятью терминами: "капитализм", "социализм" и др. (довольно неопределенными). Классификация времен холодной войны делила их на "демократические" и "тоталитарные", и т.д. Сейчас у некоторых политологов популярна эклективная классификация режимов на 5 групп, по нескольким признакам, затрагивающим как тип правления так и идеологию (цит. по [7]):

1)западные полиархии[28] (иначе – демократии западного образца, включающие и восточные страны, скажем Японию), 2)посткоммунистические режимы (подчеркивается их предыдущий тоталитаризм с коммунистическими идеями и нынешнее переходное состояние), 3)восточно-азиатские режимы (Гон-Конг, Тайвань и др, с сильным влиянием конфуцианской идеологии), 3)мусульманские режимы (где идеология ислама доминирует в политической практике), 5)военные режимы (без особой идеологии).

Можно заметить, что многие реальные страны не попадают в эту классификацию режимов, а являются "особыми".

Остановимся подробнее на режиме, называемом в этой типологии **"западной полиархией"**.

Ее первыми признаками считают: формальное и фактическое разделение властей на законодательную, исполнительную и судебную, фактическую выборность законодательных (и частично исполнительных) органов широким электоратом, включающим почти все взрослое население.

В группе западных полиархий есть много специфичных, неповторимых конституций, например Италия, США, но есть и две довольно распространенные: "Вестминстерская модель" и "Европейская децентрализованная модель" (consociational democracy).

К английской "Вестминстерской модели", более или менее близки устройства Новой Зеландии, Канады, Израиля. [29] К децентрализованной модели относят Нидерланды, Бельгию, Австрию, Швейцарию, характерно, что она возникла в ходе политической борьбы в странах с населением, существенно неоднородным по религиозным, языковым или другим признакам.

Естественно, многие страны сочетают часть признаков "Вестминстерской модели" с признаками децентрализованной, и в чистом виде это противопоставление не наблюдается, Таблица 1 скорее подчеркивает возможность противоположного решения важных конструктивных вопросов полиархии. Скажем, специфической страной являются США, где присутствуют явная двухпалатность, федерализм, всенародно избираемый президент (черты децентрализованной модели). Но президент имеет весьма существенную власть, участвуя в законодательстве и руководя госдепартаментом как премьер- министр, а правило голосования мажоритарное (черты централизации в духе Вестминстерской модели). Специфической страной является также

[28]"Полиархия" – власть многих – более специфичный термин, чем "демократия", указывает на разделение реальной власти, что не совсем верно для прочих упоминаемых режимов, независимо от их конституций.

[29]А также формально, но не фактически – и Индии.

“Вестминстерская модель”	Децентрализованная модель
- однопартийное правительство, - слабое разделение законодательной и исполнительной властей, - однопалатный по существу парламент, - 2 существенных политических партии, - мажоритарное правило представительства, - унитарность и централизм государства, - некодифицированная конституция, - суверенитет парламента между выборами: право сменять главу.	- коалиционное правительство - существенное разделение этих ветвей власти - двухпалатный по существу парламент - много реальных партий - пропорциональное представительство - федерализм: самоуправление земель - кодифицированная конституция - независимость главы государства от парламента.

Таблица 16: Два “крайних” типа западных полиархий.

Италия: унитарная страна, но пропорциональное, по закону, представительство многочисленных партий в парламенте (то есть, каждая партия получит в парламенте такую долю мандатов, какую долю голосов получила при голосовании по единым для страны партийным спискам), коалиционное правительство, ответственное перед парламентом (что в послевоенные десятилетия приводило к его частым сменам: чаще, чем раз в год!).

Нашей темой является связь различных типов конституций с результирующими равновесиями, то есть практикой их использования. Хотя конституции чаще всего не были спроектирваны, а сложились по частям как исход многоступенчатой политической борьбы, но их “удачность” в том или ином смысле можно обсуждать. Обсуждая сложный (и неразрешимый в строгом смысле) вопрос, какую конституцию можно считать удачной для конкретной страны; рассмотрим пример обдумывания закона о назначении судей одним из творцов конституции США Бенджаменом Франклином.

Пример 3.1 *Выбор судей (цит. по Ordeshook, p.155. [[2]]).* Бенджамен Франклин рассуждал, что от судьи, назначаемого в любом городе требуется высокая квалификация и справедливость. Предлагаемый им вариант, заимствованный из Шотландской практики, состоял в том, что кандидатуру судьи предлагают местные адвокаты из своего числа. Будучи заинтересованы в устранении сильного конкурирующего адвоката, и занятии его практики (судья не может оставаться и адвокатом) они предложат известного квалифицированного специалиста. А утверждает судью законодательный орган, депутаты которого заинтересованы выбрать человека слывущего справедливым. Тем самым равновесие в этой игре имеет шанс дать хороший результат, по крайней мере, по сравнению с назначением судей исполнительной властью.

3.2 Нормативная проблема группового выбора: желаемые свойства правил голосования

Напомним известные Вам из курса “Мат.Эк” идеи и факты о групповом выборе.

Задача группового выбора в двух формах. Пусть сообщество участников $N = \{1, ..., n\}$ имеет профиль предпочтений $R = (R_1, R_2, ..., R_n)$ на конечном или бесконечном множестве альтернатив A. Предпочтение $R_i = (\succeq_i)$ каждого участника i предполагается “рациональным”, то есть представляет “полный предпорядок” — полное транзитивное упорядочение (допускается эквивалентность альтернатив, но не циклы и противоречия). Задача группового выбора в форме *прямой* демократии состоит в том, чтобы по этому профилю, сообщаемому участниками, выбрать *одну* из альтернатив “наиболее отвечающую” в каком-либо смысле профилю интересов участников. Напротив, задача в форме *представительной* демократии означает необходимость “агрегировать профиль предпочтений”: упорядочить ВСЕ имеющиеся альтернативы, то есть построить полное коллективное предпочтение на множестве альтернатив. Подразумевается, что не все из потенциально возможных в мире альтернатив A могут оказаться доступными, но общественное предпочтение – список (какая альтернатива лучше какой или эквивалентна какой для сооообщества) будет вручен представителю сообщества, который и будет по нему выбирать из наличных альтернатив. Таковы выборы депутатов в законодательные органы: избиратели не знают заранее, какие именно законы предстоит принимать депутату. Я стараюсь выбрать депутата, близкого мне по предпочтениям в общественных вопросах, этот депутат и окажется “общественным предпочтением”.

Пример 3.2 Например, группа друзей $N = \{$Анна, Борис, Виктор, Григорий$\}$ решает вопрос о (едином для всех) использовании свободного вечера и имеет профиль предпочтений вида (Танцы $\succ_A$ Бар $\succ_A$ Кино), (Кино $\succ$ Танцы $\succ$ Бар), (Бар $\succ$ Кино $\succ$ Танцы) ..., удобнее представляемый Таблицей 8 (поставленная ниже альтернатива меньше ценится).

Таблица 17:

	Участники			
	Анна	Борис	Виктор	Григорий
	————	———-	———-	———-
Порядок	Танцы	Кино	Бар	Бар
предпо-	Бар	Танцы	Кино	Танцы
чтения	Кино	Бар	Танцы	Кино

Тогда некоторое правило голосования, дающее одну альтернативу, решало бы проблему типа прямой демократии, а правило (возможно, это же) дающее полное “агрегированное предпочтение коллектива”, то есть упорядочение алтернатив — решало бы проблему представительной демократии. Скажем, правило “турнира Кондорсе”, иначе называемого “простым большинством”, состоит в том, что каждая альтернатива голосуется против каждой, и побеждающие альтернативы ставятся выше побежденных в "предпочтении $\succeq_N$ коллектива N". Альтернатива победившая всех называется "сильным победителем по Кондорсе", а не проигравшая никому – "слабым победителем" (если таких много, то они эквивалентны). Если мы нашли только победителя, то решили задачу прямой демократии, а если добились упорядочения всех альтернатив в виде ($X \succeq_N Y \succeq_N Z \succeq_N ...$) — то и задачу представительной. На некоторых профилях, однако, ни полного транзитивного (т.о. непротиворечивого) полу-упорядочения (т.е. упорядочения допускающего и эквивалентность элементов), ни даже победителя Кондорсе не возникает. Так и в данном случае, окажется, что альтернатива Бар эквивалентна альтернативе Танцы, которая эквивалентна Кино, но Бар предпочтительнее, чем Кино – противоречие: (Б$\sim_N$Т $\sim_N$К,Б$\succ_N$К). Поэтому правило Кондорсе для подведения общего мнения здесь неудачно. Можно взять метод "очков" предложенный де Борда: максимум очков в бюллетене голосования вписывают наиболее желательной для себя кандидатуре, на 1 меньше – за второе место, и т.д., до 0 за последнее, затем очки всех суммируют. Он дает всегда (как легко догадаться) транзитивное упорядочение. В примере будет: Т=9 $\succ_N$ К=8 $\succ_N$ Б=7, т.е. победят Танцы. То же можно сказать и о наиболее распространенной в мире вариации метода очков, когда ненулевые очки (а именно, 1 очко) присуждаются только за первое место в бюллетене: одного оставить, остальных вычеркнуть. Этот метод – "правило относительного большинства" – даст здесь Бар=2 $\succ_N$ Танцы=1 $\succ_N$ Кино=1 (победит Бар). Очевидно, разные методы дают разные результаты.

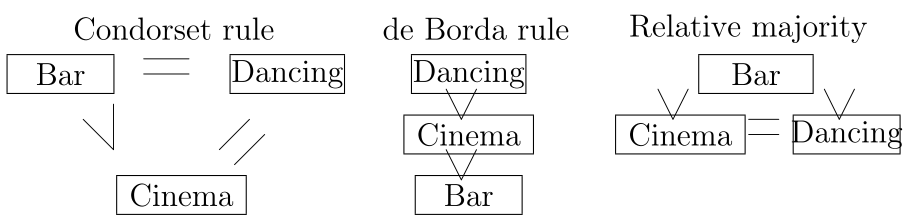


Рис. 11: Нетранзитивность правила большинства, несовпадение правил выбора.

Начиная с Великой Французской революции, политики и теоретики обсуждают вопрос: какие из методов группового выбора считать "лучшими" в каком-либо смысле? Например, Кеннетом Эрроу сформулированы в качестве важных желаемых свойств того или иного правила агрегирования предпочтений следующие (сформулируем их для задачи "представительной демократии"):

1. Универсальность: на любом рациональном (полном, транзитивном) профиле предпочтений правило должно давать рациональный результат.

2. Единогласие (слабая Парето-эффективность): если все участники считают одну альтернативу лучше другой, то правило не должно этому противоречить.

3. Анонимность: все выборщики должны быть в равном положении, то есть перенумерация (переименование) участников не должна изменять результат.

4. Нейтральность: все альтернативы должны быть в равном положении, то есть их перенумерация (переименование) не должна изменять результат.

5. Независимость от посторонних альтернатив: если при одном профиле предпочтений правило ставило одну альтернативу выше другой ($a_1 \succ a_2$), то это соотношение должно сохраниться и при новом профиле, где мнения участников об относительной предпочтительности между (a_1, a_2) не изменились, а изменились относительно других альтернатив. Аналогично для случая ($a_1 \sim a_2$).

Для задачи "Прямой демократии" требования к правилу такие же, за исключением модификации пунктов 1 и 5. А именно, требование пункта 1 ослабляется: достаточно хотя бы получать однозначного победителя или несколько *эквивалентных* победителей,[30] а требование 5 модифицируется: требуется "**неманипулируемость** правила ложными сообщениями". Правило выбора называют *манипулируемым*, если возможна ситуация, когда указав ложно свое предпочтение в бюллетене, выборщик имеет шанс улучшить для себя результат голосования. Оказывется, это свойство очень близко к свойству независимости от посторонних альтернатив, что можно понять на примерах разных правил. Например, правило Кондорсе удовлетворяет и "независимости" и "неманипулируемости", а правило Борда нарушает и то и другое. Скажем, в приведенном примере Борис может отклонить в свою пользу общественный выбор по правилу Борда, переставив (неискренне) в своем бюллетене Танцы ниже Бара (при двух и более победителях, будем считать, решает жребий).

Главный результат, касающийся названных пяти свойств - **Теорема Эрроу "о диктаторе"** (изученная Вами на 2 курсе). Она доказывает, что эти 5 требований несовместны: нельзя придумать удовлетворяющего им всем правила выработки общего упорядочения альтернатив из профиля индивидуальных предпочтений. Более того, единственным правилом удовлетворяющим требованиям 1,2,4,5 является "диктаторское" правило, приписывающее общественному предпочтению значение предпочтения *одного* из участников, то есть крайним образом нарушающее анонимность.

Аналогична **Теорема Жиббарда-Саттертуэйта** о методах прямой демократии. Она утверждает несовместность требований 1-5 в формулировках соответствующих этой постановке задачи: нельзя придумать всегда дающего ясный исход, неманипулируемого и удовлетворяющего требованиям 3,4,5 правила выбора наилучшей альтернативы по профилю индивидуальных предпочтений.

Итак, выбирая метод для голосований в некоторой области общественных действий, придется пожертвовать каким-либо из желаемых свойств метода выбора. Рассмотрим примеры отказа от того или иного свойства, начав с последнего - независимости (неманипулируемости).

Путем игнорирования манипулируемости идут конституции большинства стран, когда принимают наиболее простое правило - относительное большинство (в бюллетене указывается только наиболее желательный кандидат). Оно нарушает требования независимости и неманипулируемости.[31]

[30] В нашем примере три претендента на победителя по Кондорсе, но они не эквивалентны.

[31] Действительно, если я более всего предпочитаю кандидата А, но считаю, что шансы победить есть только у В и С, среди которых В мне предпочтительнее, то его (В) я и укажу в бюллетене,

Случай, когда некоторое сообщество предпочитает отказаться от свойства 4 (нейтральности) тоже достаточно типичен: в голосованиях о поправках к конституции в большинстве парламентов текущий вариант конституции (статус-кво) обладает преимуществом по сравнению с новшествами: нужно более 2/3 голосов, чтобы его изменить.[32]

Отказ от свойства 3 (анонимности) в наиболее резкой форме наблюдается в "диктаторском" правиле выбора: назначается участник, чье мнение и объявляется мнением коллектива. Дополнительно, можно назначить другого участника решать среди альтернатив, безразличных первому, и т.д. Удивительным является результат теоремы Эрроу: только это правило удовлетворяет остальным четырем требованиям. Пример сообществ охотно идущих на такое решение проблемы выбора можно встретить в некоторых семьях: решает глава семьи – старший, затем второй по старшинству, и т.д..

Отказ от свойства 2 можно реализовать бросанием жребия: предпочтительнее альтернатива, получившая больше очков. Очевидно, это правило удовлетворяет всем требованиям, кроме (2: Парето), но трудно назвать сообщество, согласное с этим вариантом.

Последнее и наиболее интересное: в каких случаях уместно пренебречь требованием 1 — универсальностью метода? Например, выбор всего из двух альтернатив страхует нас от возникновения нетранзитивного (противоречивого) результата голосования. Тогда применим метод Кондорсе, обладающий всеми достоинствами, кроме универсальности. Но оказывается, есть и более широкий класс ситуаций, где его можно применять не опасаясь нетранзитивного исхода голосования - *однопиковые предпочтения.*

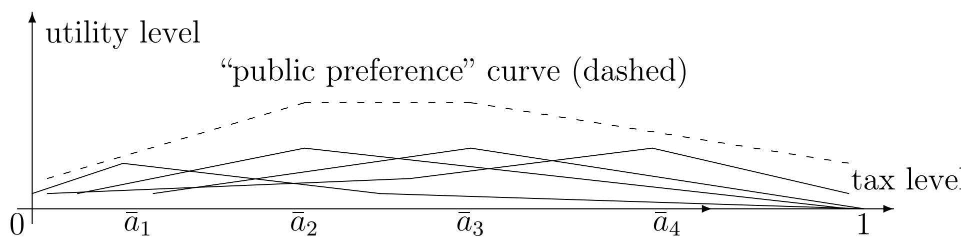


Рис. 12: Однопиковые предпочтения, слабые победители Кондорсе $[\bar{a}_2, \bar{a}_3]$.

ложно проявив свое предпочтение и улучшив, возможно, его позицию.

[32]Оказывается, именно "квалифицированного" большинства (>2/3) достаточно, чтобы голосование не давало строгих циклов, то есть, чтобы процесс переголосований заканчивался, а не продолжался до бесконечности. Это более слабое требование, чем требование транзитивности: в нашем примере правило Кондорсе цикла не дает, но дает нетранзитивность. Также, правила с требованием более значительного перевеса голосов: 3/4 и др., для победы одной альтернативы над другой – исключают строгие циклы, но не исключают нетранзитивность. Можно изменить правило "квалифицированного" большинства, объединив все цепочки эквивалентности в один класс эквивалентности (отбросив противоречивые сравнения ">"), но тогда потеряется неманипулируемость.

Определение 3.2.1 Профиль предпочтений называется *однопиковым*, если все альтернативы можно упорядочить на прямой таким образом, что каждый участник i обнаружит нестрого монотонное убывание своего предпочтения как влево от своей наиболее предпочитаемой альтернативы a_i^*, так и вправо.

Можно проверить, что предпочтения в примере Бар-Кино-Танцы, приведенном выше, не обладают этим свойством. Иначе правило Кондорсе давало бы в этом примере транзитивное упорядочение, как показывает следующая теорема.

Теорема 6 (о медианном избирателе) *Для ситуаций с однопиковыми рациональными предпочтениями правило простого большинства (турнир Кондорсе) дает как слабых победителей Кондорсе, так и полное транзитивное предпочтение коллектива. При нечетном числе участников n множество слабых победителей Кондорсе совпадает с множеством наиболее предпочитаемых альтернатив a_{med}^* медианного избирателя,*[33] *а при строгом профиле предпочтений и полное предпочтение коллектива совпадет с предпочтением медианного избирателя. В случае четного n слабый победитель Кондорсе совпадает с одним из двух средних пиков или находится между ними.*

Доказательство этого факта элементарно[34]. Но его выводы весьма важны для понимания эффектов голосований. В частности, они проясняют суть нечувствительности результатов голосований (это до некоторой степени распространяется и на правила, отличные от правила Кондорсе) к изменениям вкусов "маргинальных" избирателей и крайнюю чувствительность к изменениям вкусов медианного избирателя. Далее мы разберем и "подстраивание" программ политических партий под вкусы медианного избирателя.

Как эти эффекты скажутся если предпочтения заданы не на прямой, а на большем пространстве, например, на плоскости?

Пример 3.3 Предположим, шестеро садоводов (Рис. 13) голосуют сразу по двум вопросам: уровень налога $t_{water} \geq 0$, направляемого на водоснабжение их участков, и уровень другого налога $t_{defence} \geq 0$, направляемого на организацию охраны собщества от воров (налоги целевые, равные по участникам). Естественно предположить, что эти два вопроса воспринимаются каждым избирателем i не независимо. Предположим, предпочтения **"круговые"** ("гравитационные"), то есть участник имеет наиболее предпочитаемую альтернативу $\bar{a}_i = (\bar{a}_{i1}, \bar{a}_{i2}) = (t_{i,water}, t_{i,defence}) \in R_+^2$, и чем далее от этого центра другая альтернатива (точка плоскости), тем менее желательна она. Тем самым целевые функции имеют вид Евклидова расстояния

[33] То есть того, чья наиболее предпочитаемая альтернатива – пик полезности $\bar{a}_i^*$ – оказывается средним среди пиков всех участников на прямой упорядоченных альтернатив,

[34] Оно изучалось Вами в курсе Мат. Экономики, см. Мулен, 1985, [10]. Любая альтернатива слева от медианной не может победить медиану в попарном голосовании, так как против этого медианный участник и все, кто правее его (аналогично в другую сторону). Медианный участник является единственным "ключевым", в том смысле, что малое изменение именно его мнения изменяет общий выбор.

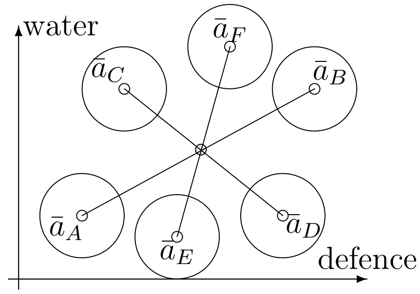


Рис. 13: Центральная альтернатива в двумерном прстранстве выбора.

$u_i(a_1, a_2) = -\sqrt{(\bar{a}_{i2} - a_1)^2 + (\bar{a}_{i2} - a_2)^2}$ (круговые линии безразличия и максимум в "центре предпочтений"). Однопиковы ли такие предпочтения? Интуитивный ответ положительный, но в действительности можно убедиться, что обычно это не так: для произвольного расположения (a_1^*, a_2^*, a_3^*) трех точек плоскости (для большего числа точек – тем более) редко найдется отображение плоскости на прямую, приводящее к однопиковости круговых предпочтений в смысле сформулированного определения. Исключением является, скажем, случай трех точек на одной линии. Эту идею обобщает следующая теорема.

Утверждение 3.2.1 *Пусть пространство альтернатив $A = R^2$ есть плоскость, и предпочтения каждого участника i круговые, с центром $\bar{a}_i$. В этих условиях правило простого большинства (турнир Кондорсе) дает слабого победителя Кондорсе тогда и только тогда, когда существует "центральная" альтернатива $a_{med} \in R^2$, в том смысле, что на любой прямой проходящей через a_{med} по одну сторону от a_{med} лежит такое же число пиков предпочтений участников $\bar{a}_i$, как и по другую. Этот победитель Кондорсе есть a_{med}, и он сильный тогда и только тогда, когда число участников нечетно и найдется "медианный" участник j с центром предпочтений $\bar{a}_i = a^*_{med}$.*

Доказательство элементарно: предположим, некая альтернатива $\bar{a}$ ставится на голосование против медианной альтернативы a_{med}. Проведем через a_{med} прямую, ортогональную к вектору $(a_{med}, \bar{a})$, она делит пространство альтернатив на две полуплоскости. Если в полуплоскости, противолежащей вектору $(a_{med}, \bar{a})$ не менее половины пиков избирателей, то не только альтернатива $\bar{a}$ не победит медианную a_{med}, но и любая альтернатива на луче с направлением $(a_{med}, \bar{a})$ не победит ее. Поскольку любая прямая, проходящая через a_{med} образует две полуплоскости с равным числом пиков, то a_{med} – слабый победитель Кондорсе. Аналогично доказывается обратное утверждение и вариант для нечетного числа.

Итак, мы указали некоторые ситуации, в которых правило простого большинства (Кондорсе), обладающее всеми преимуществами, кроме универсальности, дает рациональный результат. В общей же ситуации, вероятность получить победителя Кондорсе убывает с числом участников и особенно альтернатив (см. Мулен, 1991), при бесконечности числа альтернатив стремясь к нулю.

3.3 Дескриптивные модели выборов

Перейдем к дескриптивным, то есть описательным, моделям процессов выборов, не затрагивающим прямо, в отличие от нормативных моделей, вопросов "какой механизм лучше". В политической практике обычно к исходной ситуации группового выбора, описанной в предыдущем разделе, добавляются еще некоторые осложняющие элементы. Наиболее заметный из них - политические партии, которые, собственно, и выдвигают альтернативы для голосований (например, кандидатов). Насколько это изменяет общественный выбор по сравнению с более простой ситуацией, рассмотренной ранее?

3.3.1 Пространственные (гравитационные) модели выборов

Рассмотрим простой случай, когда пространство выбора участников одномерно, например, выбирается уровень одного параметра, и он может принимать значение от 0 до 1.[35] Предположим, сообщество выборщиков имеет однопиковые предпочтения на этом отрезке, и пики (любимые варианты) различных участников распределены *равномерно* между 0 и 1. Пусть также, есть 2 партии, выдвигающие перед выборами свои партийные программы (например, уровень налогов), и каждый избиратель станет голосовать за ту партию, чья программа ближе его вкусам ("гравитационные" предпочтения). Пусть каждая партия i стремиться получить больше голосов, чем другая, зная текущую программу другой партии P_{-i} и подстраивая свою программу P_i с учетом чужой. Каков будет исход игры по Нэшу между этими двумя партиями?

Простой анализ показывает, что партийные программы должны сойтись в одной точке – медиане отрезка $P_1 = 0.5 = P_2$, так что все избиратели практически окажутся без выбора, а медианный – вполне удовлетворен.[36] Важно, что этот исход совпадает с результатом прямой демократии (см. Теорему о медианном избирателе)! Итак, двухпартийные выборы в этом случае практически эквивалентны прямой демократии, и "отсутствие реального выбора" вовсе не беда, а успех механизма выборов.

Этот результат легко обобщить на случай неравномерного распределения пиков предпочтений на отрезке [0,1], исход должен быть тот же, только медиана окажется не просто серединой отрезка, а точкой делящей пополам площадь под кривой плотности распределения (пиков) избирателей. Совпадение равновесия с медианой кажется серьезным аргументом в пользу двухпартийной системы.

Теперь рассмотрим ситуацию с тремя партиями. Будем считать, что выборы

[35] Для формального обсуждения неважно, что означает выбираемый параметр, но в важном частном случае – это уровень перераспределительной активности государства. Значение 1 соответствует полному огосударствлению — коммунистический идеал. Противоположный идеал — анархистский — предполагает нулевую роль государства.

[36] Таким образом, сходство программ, например, республиканцев и демократов в США, объясняется борьбой за медианного избирателя. Аналогичная игра возникает при пространственной конкуренции за потребителя двух продавцов располагающихся на одной улице: потребитель подойдет к ближайшему продавцу, поэтому им есть стимул сходится к центру.

мажоритарны (лидер получает все места в парламенте, или речь о президентских выборах), в один тур голосования. Существует ли NE? Разберем все возможные варианты расстановки партийных программ: все три программы в одной точке, либо две вместе, третья отдельно, либо все три порознь. Рассматривая полезность альтернативных позиций, получим, что каждый вариант улучшаем для кого-то, и равновесия по Нэшу нет. Таким образом, если ничто (например, идеология) не мешало бы изменению программ, они то и дело перескакивали бы с одной позиции на другую в ответ на действия соперников (обобщите этот результат на N партий: окажется, что равновесий нет при нечетном N).

	Ситуации	Решения:		
		NE	$\mathbf{SPE_1}$	
:	2 партии; мажорит. 1 тур, то же для др. правил	P=(0.5,0.5) = Median Voter	P=(0.5,0.5) = Median Voter	
:	мажорит. 1 тур, 3 партии	$\emptyset$	P=(0.25,0.75,0.5) и ?	?
:	мажорит. 1 тур, 4 партии	P=(0.25,0.25,0.75,0.75)	?	?
:	мажорит. 2 тура, 3 партии	P=(0.5,0.5,0.5) = Median Voter	P=(0.5,0.5,0.5) и др.?	?
:	пропорц. 1 тур, 3 партии	P=(0.25,0.75,0.5)	?	?
:	пропорц. 1 тур, 4 партии	P=(0.15,0.25,0.75,0.85)?	?	?

Таблица 18:

Возможна альтернативная к Нэшевской концепция решения (ситуация). Представьте, что уже запланирован съезд одной партии, за ним съезд второй, за ним съезд третьей, и они должны утвердить свои программы на ближайшие выборы, переменить их потом нельзя. Эта ситуация в таблице названа SPE_1 (динамическая игра с одним ходом у каждого). Предположим, что три партии максимизируют вероятность своей победы, или, точнее, отношение своего электората к электорату лидера. Окажется, что набор программ P=(0.25,0.75,0.5) есть одно из равновесий SPE_1 (см. Табл. 18).

Действительно, первая и вторая партии имеют по 3/8 электората и равные шансы победить, а третья – меньше. Может ли третья партия, "вставшая" в 0.5 увеличить свою вероятность победы, равную (2/8)/(3/8)? Незначительно смещаясь от центра, она только уменьшит ее, подыграв одному из лидеров, и не изменив свой электорат. Присоединяясь же к одному из лидеров, она поделит с ним 4/8 электората пополам, и сохранит свое положение (2/8)/(3/8). Поэтому, третий не имеет стимула отступить от 0.5. Не отступит ли второй от 0.75? Смещаться к центру ему невыгодно, поскольку третий присоединится к этой новой точке, и позиция 2-го ухудшится. Если смещаться от центра на ε, то третий отодвинется в сторону первого на $\varepsilon/4$, уменьшаая электорат 1-го (лидера) без изменения своего, ведь сам он при любой промежуточной позиции собирает $2/8+\varepsilon/2$. Поэтому смещение 2-го вправо выгоды 2-му не принесет. Видимо, здесь множество равновесий: позиция P=(0.25,0.75+ε,0.5-ε/4) тоже равновесная, дающая 1-му и 2-му равные шансы победы. Первый не может улучшить свои шансы, по этим же причинам, но может их ухудшить, если встанет левее 1/6 или правее 1/4.

Можно проверить, что 4 партии при тех же правилах выборов и Нэшевском поведении займут попарно две позиции 0.25, 0.75. Решение для последовательно-го заявления четырех программ нам неизвестно. Что произойдет, когда программу можно один раз заявить, а затем поправить конечное число раз? Видимо, если порядок поправок задан, то значение имеют только три последние поправки, и решение такое же, как SPE_1. Заметим, что оказаться последним невыгодно. Поэтому, если бы на избирательную кампанию не оказывали влияние дополнительные факторы, не включенные в эту модель (обсуждаемые позже), то партии стремились бы раньше выдвигать программы.

Теперь посмотрим, что произойдет при мажоритарых выборах в два тура, с выбыванием отставшего (без пересмотра программ между турами)? Позиция P=(0.5,0.5,0.5) есть Нэшевское равновесие, поскольку отступивший от нее станет лидером в первом туре, но проиграет во втором. Есть ли другие NE, нам неизвестно.

В случае пропорционального представительства (в парламентских выборах) следует считать, что каждая партия просто максимизирует свой электорат. Тогда, можно проверить, NE=P=(0.25,0.5,0.75).

Итак, только при некоторых ситуациях (правилах голосования и числе партий) имеет место тенденция к сближению партийных программ друг с другом и с медианным выбором. В других же случаях партийный механизм может давать результат отличный от результата прямой демократии. Причем искажение окончательной позиции параметра выбора (например, налогов) может быть существенным, скажем 0.25 вместо 0.5. Это можно бы считать недостатком чрезмерной многопартийности, но второй тур голосования исправляет искажение. Может исправить его и пропорциональное представительство, если парламентские фракции поведут себя как избиратели (что не гарантировано).

Разобранная пространственная модель выборной борьбы поясняет также значение **выборных блоков**. Партии, выступающие в блоке, или левое и правое крыло одной партии, имеют возможность покрыть программами большее пространство, чем одна партия. При мажоритарном представительстве они имеют реальную возможность (скажем, выставив программы $P_1 = 0.25, P_2 = 0.5$) победить изолированную третью партию, а затем делить власть. Заметим также, что мажоритарное правило представительства благоприятствует исчезновению слабых партий (никто не голосует за партию не имеющую шансов, независимо от программы) и ведет к двухпартийности. Слабые, чтобы не исчезнуть, должны вступать в выборные блоки. Напротив, пропорциональное правило представительства дает возможность развиваться слабым партиям (и их действительно много в Италии). При нем блоки партий возникают не перед выборами, а *после*, в парламенте, и в нем представлен более широкий политический спектр. Это демократично, но уменьшает дееспособность.

С другой стороны, при несложившихся партиях (как в России) мажоритарное представительство создает возможность манипулирования выборами с помощью "дублеров". Можно отнять у своего главного конкурента часть голосов, выставив подставного кандидата-дублера с близкой конкуренту программой или социальной нишей, или просто поддержав агитацией и деньгами уже имеющегося дублера своего конкурента и "раздробив" его электорат.[37] Тем самым, выборы на беспартийной

[37]Итак, соседство двух партий в политическом спектре может быть полезно их идеям при сотрудничестве партий и неконкуренции в одних и тех же округах (как коммунисты и аграрии в

основе дают плохо предсказуемый результат: общественный вопрос решится случайными факторами (динамикой борьбы, самолюбиями и актерскими талантами), или неслучайными побочными факторами типа денег, обсуждаемыми далее.

Продолжим обсуждение "степени мажоритарности" разных выборных законов. Мажоритарность есть преимущество большинства (majority) над меньшинствами. Полная мажоритарность – один избирательный округ, например, при выборах президента, а наименьшая – пропорциональное представительство партий в парламенте (как в Италии). Промежуточным вариантом являются мажоритарные выборы по многим округам: чем мельче округа, тем ближе (учитывая случайность распределения) распределение мандатов в парламенте к пропорциональному представительству. Пропорциональное, в сущности, подобно малым округам по 1 выборщику в каждом: мнение меньшинств практически не подавляется. Эту идею пропорционального представления всех мнений в парламенте в древних Афинах решали так: в парламент выбирали по жребию из всех правоспособных граждан.

Что благоприятнее для выявления в выборах общественного мнения и решения общественного вопроса, пропорциональность или мажоритарность? Ответ неоднозначен. С одной стороны, при пропорциональности представители всех групп интересов имеют возможность в парламенте подробно изучить вопрос. Поэтому их мнение может быть осмысленнее, чем мнение малоинформированного среднего избирателя, реализующееся при прямой демократии или двухпартийности. Оно может отклоняться от медианы в "полезную" для самого же медианного избирателя (и прочих) сторону.[38] С другой стороны, выбор может отклониться и в случайную сторону, в результате парламентских блоков.

Действительно, представим, что, в рамках рассмотренной простой модели выборов на отрезке (0,1), при пропорциональном представительстве три партии разместили программы как NE=(P_1, P_2, P_3)=(0.25, 0.5, 0.75). Тогда они получат в парламенте, соответственно, (3/8, 2/8, 3/8) мандатов. Ни одна партия не может сформировать правительство в одиночку, не имея 50% мандатов +1, поэтому какая-то пара из них вынуждена вступить в блок и образовать *коалиционное правительство* (как обычно в Италии и происходило). Если, скажем, две левые партии кооперируют, отвергая правую, и договариваются при этом о среднем курсе правительства между их программами, то этот курс окажется равен 5/16, а вовсе не медиана! Более того, от прихоти центристской партии, решающей, влево или вправо блокироваться, зависит, не будет ли он равен 9/16. При неравных соседях слева и справа, центристу выгоднее блокироваться в меньшую сторону, и иметь большую долю власти. Поэтому выбор еще более смещен от центра.

Дополнительные проблемы пропорционального представительства возникают от изменений экономической и политической коньюнктуры, делающей выгодными но-

Думе России: они совокупно проводят больше родственных депутатов, чем если бы агитировали объединившись в одну партию). Однако родственные по электорату партии, выступающие в одном мажоритарном округе (как Анпиловцы к Зюгановцам) вредят друг другу.

[38]Кроме того, считают, что представительство меньшинств способствует консенсусу: оно заставляет большинство не просто подавлять меньшинства, а договариваться с ними, уступая в чем-то другом, что возможно при много-параметрическом выборе.

вые блоки и разрыв старых. Тогда коалиционное правительство распускается, и возникает новое. В Италии несколько политических партий сумели за 50 послевоенных лет около 55 раз поменять правительство (и в 1994 г. отказались от полной пропорциональности). На какое из них и на какую из партий можно возложить ответственность за управление страной? Скорее, в ответе законодательство.

Противоположный полюс – Британская мажоритарная система, где от выборов до выборов *одна* партия несет полную ответственность за происходящее и в законодательстве и в управлении (сильное устойчивое правительство). Это дает избирателю возможность адекватного оценивания партий по результатам, чего мы еще коснемся. [39]

Интересный эффект мажоритарности возникает в президентских выборах США. Их причудливое законодательство относит ВСЕ голоса некоторого штата на счет того кандидата в президенты, который получил в этом штате более 50% голосов. Поэтому, в предвыборной борьбе президенты не посещают те штаты, где заведомо выиграли, и штаты, где заведомо проиграли: там им нечего добавить к своему электорату.

Итак, мы рассмотрели простейшую модель общественного выбора на линейном пространстве. И отделили ситуации, где борьба политических партий "искажает" общественный выбор, от "неискажающих" ситуаций. Теперь введем в рассмотрение важные дополнительные факторы.

3.4 Голосование в парламенте, "парадокс власти", торговля голосами

Затронув вопрос о сравнительных преимуществах мажоритарного и пропорционального представительства, рассмотрим голосование в парламенте. Действительно, идея пропорциональности в том, что решение общественного вопроса решается не непосредственно избирателями в выборах (например, выбором президента, обещающего определенный уровень налогов), а на следующем этапе, представителями избирателей - депутатами. Если представители пропорционально представляют население, то, казалось бы, какая разница между этими двумя способами? Оказывается, большая, и есть плюсы и минусы.

Есть три принципиальных отличия. Два из них благоприятны: 1) депутаты имеют больше времени и возможности квалифицированно разобраться в решаемых вопросах, 2) издержки согласования мнения и избирательного поведения отдель-

[39] Недостатки этой системы – недостаточное представительство меньшинств – могут быть разрушительны в стране с перераспределительными тенденциями и с традициями переноса политической борьбы на улицы. Кроме того, большинство мандатов может получить меньшая партия. Например, если в округе А консерваторы имеют 51 голос из 100, в округе Б – 51 голос из 100, а в округе В всего 1 голос из 100, то они побеждают, имея в стране примерно 1/3 голосов, а в парламенте 2/3 мандатов. Их конкуренты имея 2/3 голосов проиграют! Так, в 1983 г. в Англии консерваторы получили 61% мандатов имея поддержку 43% избирателей. Впрочем, при двухпартийной системе обе программы близки, и это не так важно. Важнее (особенно для стран с высокой коррупцией и малой однородностью общества) – не станет ли партия со слишком большой властью злоупотреблять ею?

Таблица 19: “Парадокс власти”.

ной депутатской фракции значительно меньше, чем издержки согласования мнений тысяч избирателей соответствующих взглядов. Третье неблагоприятно: депутаты могут преследовать собственные интересы, отклоняясь от задач избирателей. Мы видели, что при мажоритарных выборах это отклонение позиций партий может быть систематическим, даже если не учитывать простой коррупции.

Рассмотрим интересный пример отклонения результата решения вопросачерез парламент от результата прямого голосования избирателей, известный как “парадокс власти”. Он реализуется в не-однопиковом пространстве политического выбора, мало затрагивавшемся нами до сих пор. Пусть, три парламентских фракции или партии P1, P2, P3 имеют численност 35, 32, 33 соответственно, и предпочтения на множестве трех общественных альтернатив заданные таблицей ...

Очевидно, если все три партии при голосовании относительным большинством искренне поддержат свои наиболее желательные альтернативы, то победит более многочисленная первая. Именно это и произошло бы при “простодушном” поведении прямого голосования избирателей по этому общественному вопросу. Но депутаты в парламенте не только имеют возможность изучить мнение каждой из соперничающих фракций, но и точно знать их численность. Поэтому реалистично предположить, что партия P3 вместо искреннего голосования за любимую ей альтернативу A, поддержит альтернативу C, вторую по предпочтительности. Тогда сильнейшая из партий получит худший из всех выигрыш, а слабейшая - лучший! (Проверьте, что голосовать (P1,P2,P3)=(A,C,C) есть равновесие Нэша).

....

3.5 Конкуренция партий при традиционных, идеологических ограничениях или неполной явке

В реальности партии не всегда могут так свободно менять свои программы, как в разобранных выше задачах (возможные “прыжки” программ в этой модели, вероятно, вызвали Ваше недоумение). Теперь усложним модель двухпартийной ситуации, введя в нее гипотезу, что партии имеют уже некоторые программы P_1, P_2, и отклонение от старой программы приводит к потере части избирателей *всех типов* за счет “потери доверия”, пропорционально дальности передвижения от старого (традиции). Эта гипотеза приводит к двумерной пространственной модели как на Рис. 14

Подразумевается опять равномерное распределение вкусов избирателей на отрезке (0,1). По вертикали откладывается уровень доверия, убывающий, с некоторым коэфициентом пропорциональности γ (задающим наклон треугольников) по мере удаления новой программы партии $\tilde{P}_i$ от старой ее программы P_i (избиратель может думать: “если партийцы маневрируют – то они просто политические предприниматели, оппортунисты, а не идейные борцы, и после выборов опять отклонятся от обещаний”). По-прежнему предполагется, что *все* избиратели станут голосовать, причем за ближайшую программу; ближайшую по положению на плоскости (лево-

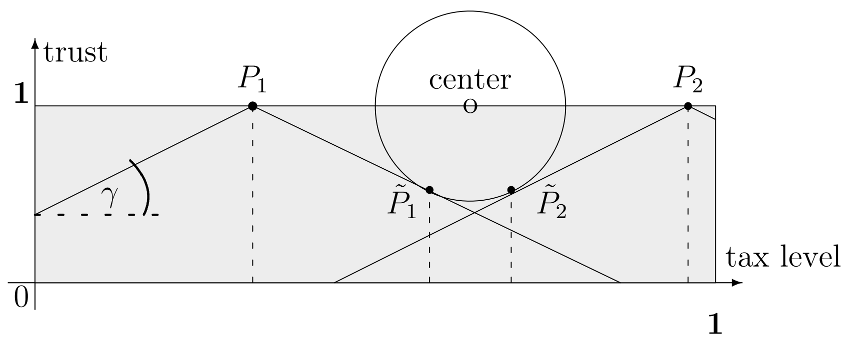


Рис. 14: Конкуренция партийных программ при идеологических ограничениях.

право / доверие-недоверие). Располагаются же избиратели на верхней грани заштрихованного прямоугольника. Поэтому, в случае неотклонения новых программ от старых, партии делят электорат по центральной между старыми программами точке "о". Каждое иное возможное положение новой программы $\tilde{P}_i$ относительно электората задано треугольником с вершиной в сторой точке P_i. Первая партия способна перемещать точку своей программы по левому треугольнику, а вторая – по правому. Приближая свою программу к программе конкурента на величину x, можно приобрести $x/2$ его голосов, но только если не перешагнуть определенного барьера.

Легко догадаться, что в этой ситуации Нэшевская (и, возможно, динамическая) программная конкуренция партий (за медианного избирателя, изображенного центральной точкой "о"), приведет к неполному сближению программ, а к такому $\tilde{P}_1$,$\tilde{P}_2$, что новые программы будут от центра равноудалены. При этом историческое положение этого центра до начала выборной компании определяет и победителя, и последующее решение общественного вопроса, следовательно медианный исход не гарантирован.

Что будет происходить от одних выборов к другим? Новый исторический центр раздел электората каждый раз остается тем же, а программы двух партий все более сближаются (конвергируют к нему), по крайней мере, если коэфициент падения доверия из-за непоследовательности γ не слишком велик. Если же он велик, то программы, наоборот, могут не сходиться! Так же они не сходятся, если форма распределения электората имеет два "горба" (разьерите это самостоятельно). В обоих случаях решение общественного вопроса довольно случайно, определено предысторией. Программы конвергируют недостаточно, и к тому же к случайной точке.

Сходная ситуация, когда вершина допустимого "треугольника доверия" не смещается от выборов к выборам, а стоит на месте благодаря твердо заданной в уставе *идеологии* партий. Программы не конвергируют, победившая партия реализует свои запросы, выражающие, возможно, центр одной из половин электората, левой или правой, а не целого. Это не желательно.

Итак, в некоторых ситуациях "оппортунизм" партий (подгонка программ под запросы) лучше для среднего избирателя, чем твердая идейность, "искажающая" общественный выбор. В других случаях (моделях поведения) это не так.

Рассмотрим аналогичную модель **с неполной явкой избирателей.**

Она предполагает, что идеологических и традиционных ограничений нет, избиратели также голосуют за ближайшую программу, но чем далее ближайшая из партийных программ от конкретного избирателя, тем меньше вероятность его прихода на выборы, пропорционально некоторому коэффициенту убывания явки γ. Отличие этой пространственной модели от предыдущей (Рис. 14) невелико: оно в том, что не точки новых программ движутся по допустимым множествам – конусам (треугольникам), а "конуса электората" движутся влево или вправо вместе с программами. Теперь площадь этих конусов изображает объем собираемого электората (а заштрихованный прямоугольник – все население); избиратели, не попавшие ни в чей конус – не голосуют совсем. Как и ранее, предположим, что каждая партия борется за преимущество своего электората над электоратом конкурента (их отношение). Тогда результатом конкуренции может бить либо (опять) сближение партий в медианной точке (при пологих конусах), либо произвол в их размещении (при слишком вытянутых вверх конусах, то есть при резком убывании явки избирателей по мере удаления от любимых программ). Таким образом, при достаточно сильном эффекте неявки эффект конвергенции программ может подавляться. Но если он не подавляется, то результат общественного выбора не случаен, а стремиться к медианному. Итак, умеренная "неявка из-за недовольства программами" неопасна для общественного выбора при равномерном распределении предпочтений. Несколько сложнее дело при сложной плотности распределения.

Пример 3.4 “Выборы”: Предположим, три факультета: Геолого-Геофиз.Ф, Эконом.Ф. и Физ.Фак выбирали бы общее представительство, которое имело бы право утверждать стандарт учебной нагрузки на студента: сколько часов лекций, семинаров и обязательных домашних заданий в день. Предположим, предпочтения распределились на шкале от 0 до 12 часов следующим образом:

```
/\  distribution density
|
|           -E=20-------|
|           |           |
|-G=15------|           |
|           |           |-F=10------|
|           |           |           |       learning
---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|-------> time
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10  11 12
```

Рис. 15:

Здесь числа G, F, E - ордината – задают плотность распределения студентов с соответствующим предпочтением учиться столько-то часов в день. В рисунок заложено (вряд ли верное) предположение, что все геологи ленивее экономистов и предпочитали бы не более 4 часов, а экономисты - от 4 до 8 часов, а физики – более трудолюбивы, и хотели бы от 8 до 12 (шкала непрерывна). Площади 3-х прямоугольников 4G, 4E, 4F - изображают численность факультетов (вряд ли верно), пусть это континуальная величина (люди делимы), кто-то имеет дробные предпочтения: 2.7, 4.5... Таким образом, на ФФ учится 40 человек, на ЭФ - 80, на ГГФ - 60.

Нужно найти:

1) Результат референдума при голосовании простым большинством всего электората (по турниру Кондорсе) за уровень нагрузки – точку на отрезке [0,12] (сколько будут учиться?).

2) Пусть, конкурируют 11 кандидатов уже выдвинувших программы, и в каждом целом делении кроме крайних: в точках 1, 2,...,11 - находится по программе одного из 11-ти кандидатов, предлагающего именно такой объем нагрузки (для точек 4, 8 подразумеваем средние значения плотности: $5(G+E)/2=17.5$, $(E+F)/2=30$, избиратель выбирает ближайшую альтернативу). При голосовании относительным большинством, при двух-туровом голосовании:

Кто из кандидатов имеет 2.а) какой процент мандатов при пропорциональном представительстве в едином округе трех факультетов, 2.б) какой шанс завоевать все мандаты при мажоритарном голосовании относительным большинством в едином округе (= стать президентом), 2.в)то же: какой шанс стать президентом - но при двухтуровом голосовании, по Российскому законодательству, 2.г) какой шанс завоевать один из трех мандатов при мажоритарном голосовании относительным большинством в трех округах по отдельности, 2.д)какой шанс стать президентом) - по американскому законодательству: все голоса каждого из трех округов считаются за лидера этого округа. [Пояснение: считаем, что при равенстве голосов победитель определяется случайным отклонением одного из голосов. Тогда ответ состоит в том, чтобы указать шансы каждого из возможных победителей.]

3)Результат конкуренции партий выдвигающих свои программы, при голосовании относительным большинством, при разных известных вам режимах голосования: 3.а):NE 2-х партий при одно-туровом голосовании, 3.б):NE 3-х партий при одном туре, 3.в):NE 3-х партий при двух турах, 3.г):SPE_1 3-х партий (первая выдвигает программу, зная, что затем выдвинет программу вторая, знающая, что затем выдвинет третья) при одно-туровом голосовании. Совпадет ли результат (часы учебы) с медианным решением (обязательно/ необязательно/ невозможно)?

4)Вопрос типа (3.а - две партии), но по американскому законодательству: голоса всего избирательного округа (здесь- факультета) засчитываются за того кандидата, кто набрал в нем большинство.

5) Тот же вопрос, что в пункте (3.а - две партии), но явка избирателей предполагается неполной, причем избиратель охотнее идет на выборы, если видит на них идеально – любимую для себя программу (а голосует, если пришел – уже за ближайшего). По мере отдаления ближайшей выдвинутой программы от моей любимой альтернативы вероятность моего прихода на выборы падает. Пусть, число голосующих падает линейно, пропорционально этому расстоянию (0.5 человека на 1 деление-час программ). Что произойдет?

По поводу мотивов участия/ неучастия в выборах, заметим, что участие не может быть объяснено мотивами выгоды в рамках индивидуальной рациональности. Действительно, идя на выборы, я знаю: шанс, что я окажусь "ключевым участником", то есть именно мой голос окажется решающим – пренебрежимо мал! Как бы я ни хотел победы какого-либо кандидата, этот малый шанс не оправдывает того получаса, что я потрачу, налицо "проблема безбилетника".[40] Итак, то, что я хожу на выборы, может объясняться только в более широкой модели поведения, включающей какие-то патриотические чувства, коллективистские представления, и т.д., преодолевающие "проблему безбилетника". Достаточная явка на выборы показыва-

[40]Так в экономической теории называют все ситуации, где вкладывая личные усилия или средства я могу принести общую пользу.

ет, что эти чувства и представления более-менее распространены, и изученной узкой моделью не надо ограничиваться.

С этим связан один из вопросов конституционного выбора: полезно ли для общества, что избиратель что-то (например, полчаса) тратит на участие в выборах? По описанным соображениям, эти затраты отсекают от участия в выборах последовательных индивидуалистов и равнодушных к общественным делам. Участвует же часть общества с более коллективистскими моральными представлениями и более заинтересованная. Если считать это благоприятным, то, может быть, стоило бы еще более затруднить выборы, удаляя участки от места жительства, или брать плату за возможность проголосовать? Постройте модель, где можно было бы вычислить необходимый размер такой платы.

3.6 Выборы с неполной или несовершенной информацией, опросы

До сих пор мы считали, что избиратель ясно представляет себе истинные программы партий: как решится интересующий его вопрос. В реальности же это чаще всего неверно. Мало кто читает заявленные партиями программы, и еще меньше людей умеет рассчитать поправку – насколько партия отклонится от заявленного. Дело с изучением программ обстоит так же, как с явкой на выборы – это затраты личного времени (более значительные, чем явка на выборы) с целью принести общественную пользу ("проблема безбилетника"). В результате, довольно типично нежелание тратить личное время на чтение газет и политические размышления, с примерно-нулевой вероятностью принести этим пользу не только себе, но и обществу (оказаться ключевым участником голосования). Это нежелание называют "рациональной неинформированностью".

Что же в таких ситуациях отражает процесс выявления общего мнения в голосовании? Не бессмысленны ли выборы?

Покажем на примере, что при некоторых гипотезах даже незначительной доли информированных избирателей достаточно, чтобы остальные по ней сориентировались, и голосовали адекватно своим интересам.

Предположим, есть два кандидата, Левый и Правый, и если бы все избиратели были хорошо информированы об их позициях (предполагаемой политике), то за Левого бы проголосовало 20%, а за Правого – 80%. Пусть, только 10% левых избирателей и 10% правых знают истинные позиции кандидатов, а остальные голосуют случайно (50%/ 50%). Что покажет опрос общественного мнения? 2 из 20-ти левых проголосуют сознательно за Левого, 8 из 80 правых – за Правого, остальные 90 голосов случайным образом распределятся, и опрос покажет 2+45=47% за Левого, 8+45=53% за Правого. Теперь, если неинформированный избиратель знает, что информированных именно 10%, и умееет считать, он обратным расчетом установит, что истинной распределение голосов должно было быть 20/ 80. Это показывает ему, где лежит линия раздела между сторонниками Левого и Правого на политической оси (распределение предпочтений на которой надо предварительно преобразовать в равномерное масштабированием оси). И он может адекватно соотнести ее с собственным предпочтением: левее я нахожусь линии раздела, или правее. А большего мне и не надо для выбора, конкретные позиции Левого и Правого меня не интересуют. Тогда уже по первому опросу все избиратели сумеют оценить позиции партий относительно себя, и уже второй опрос даст истину: 20/ 80. Столь же просто сработает механизм "ориентации по популярности" и при неодинаковой доли информированных среди левых и правых.

Сложнее, когда неинформированные менее рациональны. Пусть, неинформированный знает только общую медиану (0.5), свое положение, и думает, что все кроме него информированы. Можно показать, что и в этом случае последовательность опросов будет сходиться к полному выявлению предпочтений, но уже не за один шаг: "диффузия информации" идет медленнее. Все же, при адекватных опросах результат выборов адекватен.

Манипулируемые опросы. Теперь посмотрим, если организатор опроса хочет подыграть Левому или Правому, то в какую сторону ему выгодно исказить результаты? Очевидно, добавляя своему фавориту голосов на бумаге (в отчете), он создает иллюзию, что его противник – маргинал, близкий к краю, и добавляет фавориту голосов реально. При мажоритарных выборах, это влияние опроса еще более усиливается, ведь нет смысла голосовать за "непроходных" кандидатов.

Знатоки. Рассмотрим иную модель диффузии информации о кандидатах, возможно она более реалистична в России. Предположим, каждый избиратель причисляет себя к какой-то "референтной группе". Для одного это круг родственников, для другого - социальный слой или единомышленники, сплоченные некоторыми ценностями; те, к кому избиратель себя относит. Если в референтной группе есть человек, считающийся знатоком политики и вызывающий доверие, то достаточно ему разобраться в особенностях программ и кандидатов, чтобы доверяющие ему присоединились к его мнению, не тратя времени на чтение газет. У него, в свою очередь, есть социальный стимул изучать газеты для поддержания своего статуса знатока. В такой ситуации ловушка "рациональной неинформируемости" преодолима, и "искажения" общественного выбора не происходит.

Смещение к наблюдаемым факторам. Иной эффект неинформированности, когда "дешевого" способа информироваться, типа опросов и знатоков, у избирателя нет, а пространство общественного выбора многомерно. Представим себе, что несколько кандидатов в президенты различимы для избирателя по трем признакам: позиция по уровню налогов (левее или правее), позиция по внешней политике (за мировую интеграцию или за изоляцию), и внешняя представительность - "имидж" кандидата. Предположим, что значимость этих факторов для избирателя убывает: экономическая позиция важнее всего, внешняя политика на втором месте. А наблюдаемость факторов возрастает: телеобраз - самый наблюдаемый, разобраться во внешнеполитическом курсе кандидата несколько сложнее, а в экономическом еще сложнее. Предположим несколько случайным образом возникших кандидатов (позиций в трехмерном пространстве). Тогда мы легко поймем, что эффект неполной информированности окажется "искажающим выбор", а конкретнее, он будет смещать общественный выбор избирателей (даже если они имеют совершенно одинаковые вкусы!) в сторону более импозантных и международно-выигрышных кандидатов, в ущерб экономическим интересам избирателей.

Политический цикл. Рассмотрим другую простую модель с неинформированным или не вполне рациональным избирателем. Предположим, в стране с Вестминстерской моделью демократии (победившая партия несет полную ответственность за ход дел) долговременные экономические проблемы, вызванные мало зависящими от правительства, объективными условиями (как было в послевоенной Англии). Допустим, что достаточная доля избирателей оценивает партии не по их заявляемым политическим программам, а по результатам управления страной за ближайший отчетный период (как обсуждалось выше). Это довольно осмысленно, поскольку рядовому избирателю трудно проанализировать детали и выяснить, какая доля ответственности за неудачи на правительстве. Тогда возникает возможность политического цикла: каждая из двух соперничающих партий окажется обязательно смещенной "за неудачи", и неизбежно чередование то одной, то другой у власти. В результате, экономический курс приходящих к власти партий оказывается достаточно произволен, мало связан с запросами избирателя, на весь период неблагоприятных условий. Все равно оппозиционная партия должна победить, а правящая проиграть. Аналогично, в периоды объективно благоприятные для страны, правящая партия может десятилетия оставаться у власти с нелучшей (объективно) программой. В обоих случаях неполная информированность "искажает" общественный выбор.[41]

Эти искажения носят объективный характер: трудно придумать механизм принятия решений, который помогал бы людям, не вполне знающим, чего они хотят. А знать детали мешает проблема безбилетника. Это противоречие несколько смягчается, если репутация правящей партии (или королевской династии) образуется у населения не по краткосрочным, а по длительным периодам наблюдений. Нестабильность партий мешает такому накоплению информации, стабильность же (как в Англии) способствует.

Задача. Пусть в описанной ситуации пики предпочтений избирателей распределены равномерно на отрезке (0,1). Память избирателя - однопериодная, страна в длительной депрессии, так что возможен цикл. Пусть, каждый избиратель готов пожертвовать 0.2 единицы предпочтений на то, чтобы наказать неудачную партию (то есть, отклониться на столько в пользу оппозиции от своих истинных предпочтений). Пусть, обе партии имеют собственные идеологические предпочтения значительно правее медианы избирателей. Насколько две заявляемые (и выполняемые) программы могут отклониться от медианы и совпадут ли они? Рассмотреть однократную и повторяемую игры.

Рассмотрев набор различных моделей, предостережем от слишком прямого их использования. Скорее, к ним надо относиться как к некоторому конструктору, со-

[41]Вообще говоря, ситуация с "наймом" политиков избирателями весьма похожа на найм врачей или адвокатов: во всех этих случаях нанимающий плохо представляет, что для него нужно делать, а нанимаемый - хорошо, но не всегда мотивирован. Задача создания адекватной мотивации (Парето-оптимального контракта) в общем виде неразрешима. Но повторяемость ситуаций и возникновение репутаций смягчают проблему.

бирая из этих и других идей иные модели, более подходящие к реальным ситуациям. Главные поправки, которые придется сделать – многомерный характер политического пространства, влияние политических эмоций, и влияние денег, к разбору которого мы сейчас приступаем.

3.7 Участие денег в выборах или лоббировании

Прежде чем обсуждать переплетение денежных и неденежных факторов выбора, рассмотрим, что присходит в чисто-денежных ситуациях?

Представим себе, что инженер в царской России прокладывает государственную железную дорогу, и может провести ее западнее, через городок А, или восточнее, через городок Б, с равными издержками. Естественно, жители (особенно купцы) каждого городка заинтересованы в железной дороге и лоббируют в свою пользу. Судя по всему, в этой ситуации голосование большинством голосов двух городков может приводить к общественно-неоптимальному исходу, потере суммарной потенциальной выгоды (большинством всей страны - еще глупее). Важнее не число - а где от дороги больше прибыли.

Новизна этой ситуации, по сравнению с изучавшимися ранее - измеримость полезности в деньгах и возможность ими делиться (трансферабельность полезности - классическая экономическая ситуация "общего блага" при "квазилинейных целевых функциях"). Это несколько упрощает понятие общественного оптимума: это вариант, максимизирующий СУММУ целевых функций участников.

Но трансферабельность упрощает проблему выявления общественного спроса и общественный выбор не до тривиальности. Задача разрешима идеально, если обе стороны способны довести до конца переговоры об "отступном", которое заплатит выигравшая дорогу сторона проигравшей стороне. Это решение типа ядра. Оно, естественно, слабо Парето-оптимально. Но практически оно может реализоваться, только когда участников переговоров не слишком много, или когда информация об их потребностях (выгоде от блага, в данном случае - от дороги) очевидна всем.

В реальности же взаимовыгодные соглашения даже двух-трех участников нередко не реализуются из-за неудачной схемы переговоров и завышенных гипотез своей возможной доли. Скажем, купцы города А могут иметь суммарную прибыль 100 тыс. рублей, а купцы города Б - менее (скажем, 50), и готовы уступить, но предполагают ожидаемую прибыль противника в 110 т.р. Тогда они могут запросить 105 отступного, и переговоры зайдут в тупик. Инженер мог бы выступить среди этих двух сторон как аукционер, поднимая цену взятки за благоприятное решение, пока одна из сторон не отступит. Выигравшие заплатят 50, и сообщество двух городов потеряет эту сумму, она уйдет на сторону, но это - трудно избегаемые издержки выявления информации. Казалось бы, это - решение.

Однако в более сложной форме та же проблема адекватного дележа возникнет и внутри каждого города (если смотреть шире - в обществе в целом, среди сторонников варианта А и сторонников Б). Кто конкретно сколько заплатит (получит) из отступного? Если (реалистично) считать, что только сам участник знает, во что он ценит вариант А или Б, эта трудная задача формулируется как "проблема корректного выявления спроса на общественное благо". В общем виде она неразрешима: не существует механизма переговоров (способа обмена предложениями и сообщениями) гарантированно приводящего к варианту из ядра. Как показали Гровс и Кларк, единственным механизмом гарантирующим (при естественных условиях на целевые функции) искренность сообщений участников о своих потребностях является механизм Гровса-Кларка (см. Задачник: решите задачу Гровса-Кларка). Но и он может приводить к потере части выгоды (не более 50 т.р.) сообществом участников выбора, когда стимулирующие налоги Кларка ненулевые. Ведь для стимулирования искренности, сумму этих налогов должен получить кто-то посторонний. Например, инженер-строитель дороги.

Из этих рассуждений ясно, что участие денег в той или иной форме решения общих вопросов (от финансирования избирательных компаний до взяток чиновникам) не всегда вредно для эффективности выбора: больше затратить нередко готова та сторона, где выгода больше. Но бывают и противоположные ситуации, например "эффект малых групп".

Эффект "силы малых групп" Олсона. Манкур Олсон **??**, ссылаясь на исторические примеры, заметил, что одна и та же денежная сила (потенциальная выгода), лоббирующая некоторый общественный вопрос, действует успешнее, если персонифицирована в немногих представителях. Так, несколько автомобильных концернов страны способны добиться высоких ввозных пошлин на зарубежные автомобили. Противоположная же сторона (потребители), получающая от этой меры суммарный убыток, превышающий, по оценкам, выгоду авто-производителей вчетверо, проигрывает лоббирование. Эта ситуация была типична для всех стран в отдельные периоды, и для многих товаров. Там, где свобода торговли победила - победили не потребители, а экспортеры страны, способные организоваться не хуже импорто-заместителей, и фирмы-импортеры.

Суть эффекта относительно большей силы малых групп - организационная. Она сказывается там, где неочевидно, как согласовать совместные действия и/или дележ затрат/выгод, как в примере с железной дорогой. Вполне возможно, что один купец города Б, готовый дать взятку до 50 т.р. перевесит 110 купцов города А, ожидающих примерно по 1 т.р. выгоды каждый, но не знающих этого друг о друге наверняка. Шансы этих 110-ти договориться гораздо лучше, если они твердо знают, что одинаковы, и принимают единообразное решение, обязательное для всех. И вообще, улучшение информированности обычно увеличивает шансы Парето-эффективных договоренностей и снижает силу малых групп.

Эффект малых групп заметнее (но не приносит вреда), если рассматриваемый общественный вопрос - типа "игры с нулевой или постоянной суммой", то есть дележ пирога (сторона А и сторона Б ожидают равную выгоду).

Теперь на примерах посмотрим, как две разные силы - денежная и численная - могут перевешивать друг друга в решении общего вопроса.

Предположим, есть три варианта решения общественного вопроса (например, ввозных пошлин на автомобили): High, Moderate, Low (Таблица 20).

Цифры таблицы означают, что каждый из двух бизнесменов - производителей

Alt-s\gr.:	'U'=2100 v.	'E'=1000 v.	'I'=20 v.	'P'=2 v.	Total, result
'High'	0*2100	0*1000	0*20	0*2	$\Rightarrow$ 0
'Moder.'	(1.5)*2100	1.5*1000	30*20	-50*2	$\Rightarrow$ 5150 (2000?)**
'Low'	(1.6)*2100	1.6*1000	10*20	-100*2	$\Rightarrow$ 4960 (1600?)
no pay:	$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$2100	(0,0,1000)	(0,20,0)	(2,0,0)	$\Rightarrow$ L wins (no pay)*
Willingness to pay under cooperation cost c =\$0:					
M $\succ$ L?	-	$\geq$ -100	$\leq$ 400	$\leq$ 100	$\Rightarrow$ M wins ('I' pay \$1)*
M $\succ$ H?	-	$\leq$ 1500	$\leq$ 600	$\geq$ -100	$\Rightarrow$ M $\succ$ H (no pay)
L $\succ$ H?	-	$\leq$ 1600	$\leq$ 200	$\geq$ -200	$\Rightarrow$ L $\succ$ H (no pay)
Willingness to pay under cooperation cost c =\$28:					
M $\succ$ L?	-	-	$\leq$ 400-560	$\leq$100-56	$\Rightarrow$ M $\succ$ H (P pay)
M $\succ$ H?	-	-	$\leq$ 600-560	$\geq$ -44	$\Rightarrow$ H wins (P pay \$1)*
L $\succ$ H?	-	-	$\leq$ 200-560	$\geq$ -144	$\Rightarrow$ H $\succ$ L (P pay)

Таблица 20: Затраты на агитацию и "сила малых групп".

автомобилей в стране ('Producers') - оценивает вариант пошлин 'High' на 100 денежных единиц (например, долларов, или тысяч долларов) выше, чем 'Low', а вариант 'Moderate' - не 50 д.е. выше, чем Low. Каждый из 20 бизнесменов - импортеров ('Imorters') - оценивает вариант Moderate на 20 д.е. выше, чем High, a Low - на 10 выше, чем High (почему-то Moderate предпочтительнее всего). Каждый из 3100 рядовых потребителей оценивает вариант High в 0 прибыли, Moderate - в 1.5 д.е, Low - в 1.6 д.е. Но потребители делятся на две группы: 1000 хорошо информированы о своей выгоде ('Educated'), а остальные 2100 могут быть привлечены пропагандой к любому решению в голосовании, и не являются активными игроками ('Uneducated', они в положении "болвана"). Пропаганда стоит денег. Кто больше платит, тот и завоюет целиком группу неинформированных (Uneducated) на свою сторону, а при отсутствии плтаы или перевеса она делится на равные части между альтернативами благодаря случайному выбору.

Первый вариант гипотез: пропаганда невозможна, затраты не могут привлечь голоса. Тогда группа Uneducated проголосует случайным образом, например, поровну за каждый из трех вариантов, а победит альтернатива Low, поскольку 1000 голосов группы Educated перевесят голоса групп Importers, Producers. Это не Парето-эффективно с точки зрения суммарной прибыли, так что, выборы без денег здесь не очень удачны. Численно-сильная сторона передавливает богатое меньшинство не имея способа уступить и получить отступное.

Второй вариант: пропаганда эффективна, издержки кооперации, то есть организации в группу давления (лоббирования) нулевые. Тогда группа Educated способна вложить в лоббирование, для привлечения 2100 пассивных голосов Uneducated на свою сторону, сумму до 1500 д.е., в случае основной борьбы между High/Moderate, или до 1600 д.е., в случае основной борьбы между High/Low. Аналогично, другие группы определят для себя предельные вклады допустимые для достижения перевеса в той или иной паре альтернатив (см. Таблицу).

Пусть, все активные группы понимают величину предельных вкладов партнеров, и вклады (как часто бывает) осуществляются не единовременно, а последовательными порциями в ходе кампании. Тогда, группа 'Importers' может вложить средства, чтобы победила альтернатива Moderate. Если все понимают, что Importers - сильная сторона (готовы больше всех платить), то отступят, если 'Importers' вложат хотя бы 1 д.е. для привлечения 2100 пассивных Uneducated на свою сторону (решение по концепции SPE). Ведь проигрывающие группы понимают, что если вложить что-то в пользу другой альтернативы, то сильная сторона (Importers) ответит добавочными перевешивающими вложениями (до 600 против High, до 400 против Low). Эта угроза срабатывает; слабо-заинтересованные отступают. В результате в примере реализуется общественный Парето-оптимум 'Moderate' (он помечен знаком **, а некооперативные решения знаком *), при небольших потерях на агитацию (1 д.е.).

Из примера понятно, что этот счастливый исход обеспечен участием денег, и достаточно большой долей пассивных участников Uneducated, иначе задаром перевесили бы Educated, и готовность Importers проявить свою заинтересованность не сработала бы. Она может сработать в других предположениях: при возможности заплатить непосредственно группе Educated за сотрудничество в форсировании варианта Moderate. В реальности подобные идеи принимают форму благотворительных акций (вплоть до раздачи избирателям еды на улицах в Бразилии) со стороны агитирующих организаций. Это называют 'подкуп избирателя', но это благоприятное для эффективности результата поведение, если избиратель рационален. В частности, эта идея легче реализуется, если 'подкуп' идет не между самими избирателями, а между группами, представляющими их в парламенте. Это называют 'торговлей голосами' или 'log rolling' (англ.: катать бревна сообща): одна фракция поможет второй принять один закон (или субсидирование), а вторая – другой закон, нужный для первой. В случае пропорционального адекватного представительства групп избирателей это аналогично торговле между самими группами, но снижает издержки кооперирования. Тем самым, выше вероятность решения из ядра, следовательно вероятность общественной эффективности.

Кроме невозможности агитации, причина, которая может исказить оптимизирующие возможности агитации или подкупа избирателя - это отклонение интересов неинформированных от интересов совокупности информированных. В нашем примере достаточно увеличить численность недумающей массы всего на 200, и исход равновесия Нэша в игре агитации уже перестанет быть Парето-оптимумом. Впрочем, следует ли включать интересы недумающей массы в понятие Парето-оптимума? Это вопрос мнения, выбора между аристократическим и вполне демократическим взглядом.

Интересно, что сходная игра игра произойдет, если вместо группы Uneducated окажется просто чиновник, безразличный к самому общественному вопросу (High, Moderate или Low), но готовый за взятку решить его в ту или иную сторону. В этом случае вместо выборов рассматривается процесс лоббирования в исполнительных органах власти. Аналогично, победить должна наиболее заинтересованная сторона, а размер общественных потерь (взятки или средств потраченных на агитацию) тем меньше, чем лучше каждая сторона представляет готовность платить своих соперников. Это подобно предотвращению военных действий, когда стороны заранее знают, кто сильнее.

Противоположный, третий вариант гипотез нашего примера: пусть каждая группа не знает точно готовность других групп лоббировать, и допускает вероятность 2/3 своей победы, если вложить почти 2/3 своей максимальной возможной прибыли в лоббирование своего любимого варианта (это концепция решения с “фиксированными неадекватными ожиданиями”). Если еще и ожидания “главного конкурента” у всех разные и неблагоприятные, то может случиться, что группа Educated вложит до 2*1599/3 д.е. в лоббирование варианта Low, Importers вложат 2*599/3 д.е. в лоббирование варианта Moderate, Producers вложат 2*199/3 д.е. в лоббирование варианта High. Всего в ходе выборной кампании окажется непроизводительно растрачено почти 1600 д.е., то есть почти столько, сколько “стоит” решаемый вопрос для сильнейшей из активных групп! Неправдоподобно-высокая вероятность 2/3 предположена, чтобы подчеркнуть опасность неэффективной растраты средств при завышенных ожиданиях собственной победы всеми участниками (что часто наблюдается). Как и в войне, при адекватной оценке сил слабый отступал бы до столкновения.

Четвертый вариант гипотез: суммарные издержки организации в группу давления пропорциональны числу участников, и ненулевые. Например, пусть они составляют 1 у.е с человека. Это стоимость усилий (например, времени) каждого по кооперированию с единомышленниками. Тогда группа Educated объединившись способна вложить не более 500 д.е. для лоббирования альтернативы Moderate против High, и 600 - для лоббирования Low против High. А Importers могут вложить 580 против High, и 380 против Low. Как и при отсутствии издержек, Importers - сильная сторона, и результат ‘Moderate’ почти (за вычетом этой 1 д.е.) Парето-эффективен. Аналогично, при издержках $c = 2$, 3,4,5,... - побеждают Importers с результатом ‘Moderate’. Только при издержках более $c = 28$ с человека начинают побеждать Producers, готовые заплатить до 44 д.е. за альтернативу High против Moderate, это оказывается больше, чем противовес 2*20=40 выставляемый группой Importers. Исход не Парето-эффективен.

Итак, пример поясняет, что 1) участие денег в завоевании неинформированного или безразличного избирателя может быть Парето-улучшением, по сравнению с обычными выборами, где побеждает просто численность; 2) это может быть и неверным, особенно если издержки образования коалиций велики и приводят к “преимуществу малых групп”; 3) влияние денег и потери их на избирательную кампанию связаны с неинформированностью, как части избирателей, так и лоббирующих групп.

....

3.8 Незаписанные лекции:........

6. Режимы власти и их изменение

6.1. Популярные классификации режимов: тоталитарный, авторитарный, демократический, либеральный, и т.д. Режим как равновесие учреждений и их функционирования.

6.2. Режимы: модель группового выбора рациональным диктатором, монархией, олигархией: сравнительная эффективность. Модель выбора нации между демократией и диктатурой.

6.3. Перераспределение: модель Рёмера для социальной революции (игра "Ленин и царь"), связь неравенства собственности и неустойчивости режима. Модель перераспределения национального дохода избирателями: перераспределение от богатых, от будущих поколений; дефицит бюджета (национальный долг). Деньги в выборах как противовес перераспределительным мотивам.

7. Некоторые модели иррациональной политики

7.1. Идеологии: либерализм, консерватизм, социализм, коммунизм, мусульманский фундаментализм. Энтузиазм и модель харизматического лидера: нуждаются ли черные и белые расисты друг в друге. Гитлер в модели Рёмера: невозможность государства без идеологии. Модель Маккиавелли для князя. Установление поведенческой нормы: модель альтруистов, конформистов и эгоистов; возможность честного парламента. Другие модели революций и переворотов: пороги чувствительности.

7.2. Многопартийная игра выбора внутри идеологических ограничений.

7.3.=7.4. Модель лидера решающегося на диктатуру: ключевая роль идеологии.

8. Игры в иерархиях: бюрократия и коррупция.

8.1. Потеря контроля в бюрократии: базисная модель найма, информационная проблема; случай СССР.

8.2. Модель коррупции 1: бюрократы и взяточники.

8.3. Модель коррупции 2: рыцари, конформисты и эгоисты: сколько самураев нужно для нормальной работы иерархии (крах коммунизма). Низкие и высокие равновесия. Модель "поиска ренты".

9. Несколько международных игр: конфликт или сотрудничество

9.1. Формирование империй: Шумер и Египет. Борьба сверхдержав: Афины - Спарта, Рим - Карфаген, США - СССР. Маленькая страна: сопротивляться или сдаваться? Поддерживает ли ядерная угроза мир: модель Карибского кризиса.

9.5. Коллективная безопасность: " Европейское равновесие ".

....

Дополнительные задачи - в "Задачнике":

З1 "Повестка дня". Три равномощные фракции в парламенте: X, Y, Z собираются голосовать за 4 варианта закона: L, G, D, Q, причем известна повестка дня: сначала предстоит проголосовать, что лучше - L или G, затем столкнуть победителя с D, затем победителя с Q. Предпочтения фракции $X: \quad L > G > D > Q$.
Предпочтения фракции $Y: \quad D > L > Q > G$.
Предпочтения фракции $Z: \quad Q > G > D > L$.

Что произойдет:

1)при искреннем голосовании
2)при искреннем голосовании всех, кроме Z, просчитывающей партнеров, зная цели
3)при неискреннем голосовании всех, просчитывающих партнеров. (SPE).

....

Список литературы

[1] David M. Kreps. 1990. A Course in Microeconomic Theory.- Princeton University Press, Princeton.

[2] Peter C. Ordeshook. 1992. A Political Theory Primer.- Routledge, N.-Y., London.

[3] R.B.Myerson. 1991. Game Theory (Analysis of Conflict).- Harvard U.P., Camridge, London.

[4] Fudenberg, Drew & Jean Tirole. 1991. Game Theory.- MIT Press.

[5] Eric Rasmusen. 1989. Games and Information (An Introduction to Game Theory).- Blackwell. Cambridge MA, Oxford UK.

[6] Jean Tirole. 1988. The Theory of Industrial Organization.- MIT Press. Cambridge, Massachusets.

[7] Andrew Heywood. 1997. Politics.- London, Macmillan.

[8] . J.-E.Lane & S.Ersson. 1994. Comparative politics.- Cambridge, Blackwell.

[9] Э.Мулен. 1985. Теория игр (с примерами из математической экономики).- М., Мир.

[10] Э.Мулен. 1995?. Кооперативное принятие решений: аксиомы и проблемы.- М., Мир.

[11] H.Varian “Microec.Analysis”

[12] В.Бусыгин, С.Коковин, Е.Желободько, А.Цыплаков. 1999. “Микроэкономический анализ несовершенных рынков”.- TEMPUS (TACIS), NSU, Новосибирск.

[13] В.Бусыгин, С.Коковин, А.Цыплаков. 1996. “Методы микроэкономического анализа: фиаско рынка”.- TEMPUS (TACIS), NSU, Новосибирск.

Расширенная Библиогра-фия

1) Рекомендуемая студентам литература:

1. J. Tirole. 1988. Industrial organization.- MIT Press. Cambridge, Massachusets. (Ж.Тироль. Теория отраслевых рынков.- М.Экономика, 1999.) (Глава 11).

2. В.Бусыгин, С.Коковин, Е.Желободько, А.Цыплаков. 1999. “Микроэкономический анализ несовершенных рынков".- TEMPUS (TACIS), NSU, Новосибирск. (Глава 1).

3. В.Бусыгин, С.Коковин, А.Цыплаков. 1996. “Методы микроэкономического анализа” - TEMPUS (TACIS), NSU, Новосибирск. (Глава 1).

4. D.M. Kreps. 1990. A Course in Microeconomic Theory.- Princeton University Press, Princeton. (Part III, Chapters 11-15)

5. Peter C. Ordeshook. 1992. A Political Theory Primer.- Routledge, N.-Y., London.

6. Andrew Heywood. 1997. Politics .- London, Macmillan.

7. R.B.Myerson. 1991. Game Theory (Analysis of Conflict).- Harvard U.P., Camridge, London.

8. Fudenberg, Drew and Jean Tirole. 1991. Game theory.- MIT Press. Cambridge, Massachusets.

9. J.-E.Lane and S.Ersson. 1994. Comparative politics.- Cambridge, Blackwell.

2) Дополнительная литература используемая в курсе:

9. Э.Мулен. 1985. Теория игр, с примерами из мат. экономики.- пер. с англ. Москва, Мир.

10. Э.Мулен. 1991. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели.- пер. с англ. Москва, Мир.

11. Э.Экланд. 1985. Математическая экономика.- пер. с англ. Москва, Мир.

12. В.Маракулин. 2001. Равновесный анализ математических моделей экономики с не-стандартными ценами (Теория игр - часть 3).- Новосибирск НГУ.

13. Р.Льюс, Э.Райфа. 1971.// Игры и решения.- пер. с англ. Москва, Мир. //

14. Р. Оуен. 1971// Теория игр.- пер. с англ. Москва, Наука. //

15. Дж.фон Нейман, О.Моргенштерн. 1970. Теория игр и экономическое поведение.- пер. с англ. Москва, Наука.

3) Источники задач и упражнений, используемые в курсе:

Книги: J.Tirole 1988, D.M. Kreps 1990, Э.Мулен. 1985, 1991, P.C.Ordeshook 1992. Под-борки задач университетов (из Интернета и личных контактов): Harward, Central Euro-pean University (Budapest), New Economic School (Moscow).

Содержание

[42]Эмпирический обзор заимствован из [Andrew Heywood. 1997. Politics]